УТВЕРЖДАЮ:
Директор Института теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
д.ф.м. н. Колоколов И . В.

06 декабря 2024 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации
Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
на диссертационную работу
Скрипченко Александры Сергеевны
«Ренормализация в одномерной динамике»,
представленную к защите на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.3 – Геометрия и топология

Диссертация посвящена исследованию топологических, геометрических и эргодических свойств некоторых важных классов измеримых слоений на поверхностях и двумерных комплексах. Эта тематика находится на пересечении целого ряда разделов математики - маломерной топологии, геометрии пространств модулей, теории динамических систем, геометрической теории групп и др. При этом многие рассмотренные в диссертации математические задачи имеют физическое происхождение и возникают при изучении математических моделей в теории металлов, статистической физике и математической физике, поэтому многие из полученных автором результатов допускают явную физическую интерпретацию и имеют ряд интересных приложений.

Исследования измеримых слоений на ориентируемых поверхностях были начаты в 60е годы XX века рядом выдающихся математиков (В. И. Арнольдом, Я. Г. Синаем и др.) и за прошедшие 60 лет было достигнуто достаточно глубокое понимание всех ключевых свойств типичных объектов такого типа. Вместе с тем выяснилось, что для целого ряда важных физических и математических задач необходимо получить ответы на аналогичные вопросы для слоений не общего положения, а также для некоторых обобщений уже изученных классов. При этом известные технические инструменты либо неприменимы вовсе, либо требуют тщательной адаптации для новых задач.

В диссертации предложены новые методы и подходы, позволяющие найти такие ответы в ряде наиболее интересных случаев, и показаны результаты применения этих методов. В частности, центральными в работе являются продвижения в задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3-периодических поверхностей, которая тесно связана с исследованиями полуклассического движения электрона в кристаллической решетке: автором построены первые примеры хаотических режимов с 1 и с бесконечным числом связных компонент, доказаны оценки на скорость диффузии типичного хаотического режима, для ряда случаев доказана гипотеза Новикова о хаусдорфовой размерности множества параметров, задающих хаотические режимы.

Кроме того, к наиболее важным результатам стоит отнести оценку на хаусдорфову размерность пространства параметров, задающих минимальные перекладывания с флипами, и утверждение о плотности локуса для слоений абсолютных периодов для вещественно-нормированных дифференциалов с полюсом второго порядка.

Предложенные автором методы используют идеи ренормализации и позволяют свести изучение свойств сложных объектов из топологии и динамики к исследованию эргодических характеристик специального класса динамических систем - многомерных цепных дробей. При этом ряд полученных результатов, касающихся этого класса, представляют самостоятельный интерес для теории чисел и символической динамики, где многомерные цепные дроби являются объектом многолетнего изучения. Автор демонстрирует заметную математическую эрудицию и умело пользуется инструментами из самых разных разделов математики. Таким образом, новизна результатов и актуальность выбранной тематики не вызывают сомнений.

Диссертация состоит из введения, 8 глав и заключения.
Первая глава знакомит читателя с измеримыми слоениями на ориентируемых поверхностях и отображениями первого возвращения на трансверсаль для таких слоений; эти отображения называются перекладываниями отрезков. Глава содержит детальное описание ключевых свойств перекладываний отрезков и методов, с помощью которых эти свойства были доказаны, в том числе описание алгоритма ренормализации для перекладываний отрезков - индукции Рози. Содержание главы является преимущественно реферативным. Вклад автора касается изучения семейств перекладываний отрезков, между длинами интервалов непрерывности которых есть рациональные соотношения. Такие семейства не могут быть изучены стандартными методами, так как для них индукция Рози останавливается. Автор впервые в литературе строит примеры перекладываний отрезков с рациональными соотношениями между длинами, обладающих свойством слабого перемешивания.

В **Главе 2**, где речь идет о многомерных марковских цепных дробях, происходит знакомство с основными техническими средствами, которые будут использоваться впоследствии для изучения свойств алгоритмов ренормализации для различных обобщений перекладываний отрезков. В этой главе также много реферативного материала, но есть и вспомогательные утверждения, доказанные автором самостоятельно.

Во всех последующих главах излагаются преимущественно результаты автора с очень короткими справками, касающимися истории вопроса.

В **Главе 3**, в которой изучаются перекладывания отрезков с флипами, доказывается верхняя оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами. Весьма сложное с технической точки зрения доказательство частично использует идеи, разработанные ранее А. Авилой. Ж. - К. Йоккозом и С. Гезелем для изучения эргодических свойств потока Тейхмюллера. При этом автору приходится преодолевать заметные сложности, обусловленные тем, что наиболее интересное с динамической точки зрения поведение демонстрируют отображения, которые встречаются редко, то есть задаются множеством параметров, имеющих лебегову меру нуль (в случае работы Авилы, Гезеля и Йоккоза это было не так).

Глава 4 посвящена линейным инволюциям и их свойствам, а именно, доказательству обобщения теоремы Марми, Муссы и Йоккоза о когомологических уравнениях над перекладываниями отрезков на случай неприводимых линейных инволюций. Другими

словами, автор обобщает важнейший результат, известный для заданных абелевыми дифференциалами слоений на поверхностях, на слоения, которые задаются квадратичным дифференциалом.

Отображения сдвигов отрезков, рассмотренные в **Главе 5**, являются естественным обобщением перекладываний отрезков с другой точки зрения: по определению образы отрезков непрерывности уже не обязаны задавать разбиение отрезка - носителя, как это было для перекладываний отрезков, а могут пересекаться между собой. В результате получается два принципиально разных варианта динамики для минимальных отображений: они либо могут сводиться к перекладыванию отрезков (такие отображения называются отображениями конечного типа), либо имеют своим аттрактором канторовское множество (отображение бесконечного типа). Известна не доказанная в настоящий момент гипотеза Бошерницана - Корнфельда, утверждающая, что почти все отображения сдвигов отрезков имеют конечный тип. В настоящий момент она доказана только для двух классов отображений сдвигов отрезков, которые называются классов Бруина-Трубецкого и двойными вращениями. Автор усиливает известные ранее утверждения, доказывая оценки на хаудорфову размерность множества параметров, задающих отображения бесконечного типа в этих классах, а также получает ряд важных наблюдений об эргодических свойствах изучаемых отображений бесконечного типа. Отдельный интерес представляет интерпретация полученных результатов на языке бильярдов со шпионскими зеркалами.

Две следующих главы содержат результаты, которые самим автором отмечены как центральные в диссертации.

В **Главе 6** изучаются системы изометрий -- еще одно обобщение перекладываний отрезков и отображений сдвигов отрезков, и их эргодические и геометрические свойства, в том числе свойства слоений на ассоциированных с ними ленточных комплексов. Детально изучаются спектральные свойства ассоциированного с ренормализацией коцикла.

Глава 7 посвящена обсуждению приложений полученных ранее результатов к задаче С. П. Новикова о плоских сечениях 3-периодических поверхностей. Основная часть изложенных в этой главе результатов относится к конкретной поверхности рода 3, обладающей дополнительной симметрией, и индуцированное 1-формой слоение в этом случае имеет два двойных седла. Как уже было отмечено выше, автор получает целый ряд ответов на вопросы, долгое время остававшиеся открытыми: о возможном числе связных компонент хаотических сечений, о возможном и типичном числе инвариантных мер для хаотических слоений и др.

Глава 8 посвящена вещественно-нормированным дифференциалам - объекту, введенному И. Кричевером в связи со спектральной теорией периодических операторов и активно используемому в теории Уизема. Автору удается, используя оргинальную ренормализацию, подробно изучить геометрию слоения абсолютных периодов для главного страта вещественно-нормированных дифференциалов с полюсом порядка 2, получив ряд результатов о числе связных компонент и плотности локуса, отвечающего вектору периодов общего положения.

В **Заключении** приведен список открытых задач.

Работа написана хорошим русским языком, содержит подробные доказательства и тщательно проработанные обзоры литературы по каждому направлению.

К недостаткам работы можно, наверное, отнести недостаточно подробное описание некоторых из важных инструментов (например, критерия Фужерона), было бы полезно привести явные примеры симплициальных систем. Кроме того, можно отметить различный стиль иллюстраций (весьма полезных для понимания текста) в разных частях работы, что требует дополнительных усилий при сопоставлении написанного в разных частях между собой. Возможно, стоило бы также более явно пояснить различия между сильно расширяющими отображениями из Главы 2 и равномерно расширяющими отображениями из Главы 3.
Тем не менее, выявленные недостатки не влияют на общую оценку работы и прежде всего на результаты проверки изложенных доказательств.

Диссертация А. С. Скрипченко является глубоким и самостоятельным исследованием в области геометрии и топологии, опирающимся также на методы нескольких смежных разделов математики; диссертация содержит целый ряд новых содержательных результатов, которые позволяют закрыть многие вопросы, привлекавшие внимание многих математиков, но остававшиеся открытыми на протяжении длительного времени.
Все утверждения снабжены подробными и четкими доказательствами. При этом полученные в диссертации результаты открывают также новые перспективы для затронутых в работе областей и позволяют сформулировать новые вопросы и задачи для будущих исследований. Ряд результатов диссертации связан с наиболее сложными и интересными примерами электронной динамики в металлах со сложными поверхностями Ферми и непосредственно связан с экспериментальными данными при изучении магнитотранспортных явлений в соответствующих материалах. Представленные результаты, таким образом, являются весьма важными для изучения особенностей электронных спектров в проводниках с поверхностями Ферми наиболее сложной формы.

Таким образом, диссертация А. С. Скрипченко удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, и ее автор, Александра Сергеевна Скрипченко, заслуживает присуждения докторской степени по специальности 1.1.3 - геометрия и топология.

Отзыв обсужден на заседании сектора математической физики 5 декабря 2024 г.

Доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник
Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау
05.12.2024



Подпись с.н.с. ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН
д.ф.-м.н. Мальцева А.Я. заверяю
Ученый секретарь ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН
Крашаков С.А.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук
ИНН/КПП 5031002141/503101001
Юридический адрес:
142432, Московская обл., г. Черноголовка, проспект академика Семёнова, д.1А
Тел.: (+7 495) 702-93-17 Факс: (+7 495) 702-93-17 Электронная почта: office@itp.ac.ru