université PARIS-SACLAY

LPTMS Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques

cnrs

Отзыв официального оппонента С.К. Нечаева
о диссертационной работе Александры Сергеевны Скрипченко «Ренормализация в одномерной динамике», представленной к защите на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3-Геометрия и топология

Диссертационная работа Александры Сергеевны Скрипченко "Ренормализация в одномерной динамике» посвящена исследованию свойств семейства конкретных объектов, известных как «перекладывание отрезков» и их обобщения, но, по сути, является фундаментальным трудом, связывающим между собой ряд различных областей математики, таких как эргодическая теория, теория динамических систем, геометрия пространств модулей и топология. В этом смысле работа является синтезом методов, почерпнутых из разных областей, а автор демонстрирует универсализм в комбинировании используемых подходов. Например, вопрос о числе эргодических мер, о слабом и сильном перемешивании, а также задачи разрешимости когомологических уравнений связаны в работе с топологическими и геометрическими свойствами пространств модулей и слоений.

Прежде чем перейти к обсуждению сути представленного к защите материала, я хотел бы обратить внимание на несколько формальных показателей, демонстрирующих незаурядность диссертационной работы Александры Сергеевны. Работа состоит из 8 глав, содержащих оригинальные результаты, касающиеся различных аспектов проблемы перекладывания отрезков, а так же их физические приложения; в работе доказано более 100 теорем (включая леммы и предложения), большинство доказательств проиллюстрированы наглядными примерами что облегчает их понимание; по теме диссертации опубликовано 13 высоко цитируемых работ в ведущих международных математических изданиях. Хочется отметить кажущуюся «легкость» изложения сложных математических вопросов, что означает что автор прекрасно ориентируется в трендах современной математики. Отдельным бонусом для физиков является то, что большинство сформулированных теорем не являются просто «теоремами существования», а предлагают вполне конкретный конструктивный метод получения решений, ряд из которых (как например, оценки на типичную хаусдорфову размерность пространства в задаче о полуклассическом движении электрона) могут служить путеводной нитью как для конкретных численных расчетов, так и для выработки физической интуиции.

Ниже я остановлюсь на тех разделах работы, которые мне показались наиболее интересными и наиболее близкими по духу.

Глава 1 содержит основные определения из теории динамических систем, топологии и геометрии пространств модулей, описывает связь между перекладываниями отрезков и бильярдным потоком в рациональных многоугольниках, и обсуждает такие динамические свойства бильярдного потока как минимальность, эргодичность, строгая эргодичность и

энтропия, а также формулирует ключевой метод, используемый автором в дальнейшем и который является стержнем всей диссертационной работы – ренормализационный алгоритм (индукцию) Рози. В данной главе также обсуждается перекладывания отрезков, между длинами которых имеются рациональные соотношения. Соответствующие линейные пространства могут быть разделены на богатые и бедные в зависимости от того, содержат ли они асимптотический цикл и формулируется гипотеза что именно наличие асимптотического цикла является ключевой характеристикой для наличия/отсутствия эргодического поведения типичного представителя семейства таких отрезков. В этой же главе обсуждается комбинаторная интерпретация принадлежности к бедным/богатым пространствам с точки зрения поведения свойств характеристики («инварианта Са-Арну-Фати»), инвариантной относительно ренормализации Рози.

Глава 2 посвящена исследованию эргодических и спектральных свойств многомерных цепных дробей и их специального класса – «марковских цепных дробей» с точки зрения итерационных свойств кусочно-линейных отображений, интерпретируемых как перекладывание отрезков. Как и в Главе 1, основным методом является индукция Рози, которая обобщается для произвольной многомерной марковской цепной дроби. Самостоятельный интерес представляет исследование простоты ляпуновского спектра, определяющего скорость сходимости ренормализационной процедуры.

В **Главе 5** исследуются отображения сдвигов отрезков. Данный класс отображений отличается от перекладываний тем, что в случае отображения сдвигов отрезки могут пересекаться, в результате чего суммарная длина носителя не является инвариантом. Вводятся понятия отображений конечного и бесконечного типа в зависимости от структуры аттрактора отображения и его стабилизации. Для отображения бесконечного типа замыкание отображения является канторовским множеством, динамика которого принципиально отличается от «обычного» перекладывания. В данной главе доказана теорема, углубляющая результаты Бруина и Трубецкого и связывающая отображения бесконечного типа со свойствами эргодичности отображения, а также дана оценка сверху на хаусдорфову размерность аттрактора. Конкретными примерами таких отображений являются т.наз. «двойные вращения» и их интерпретация в терминах бильярдов с односторонне-проницаемыми («шпионскими») зеркалами. Показано, что энтропия потока в бильярде со шпионскими зеркалами равен нулю.

Наибольший интерес у меня вызвали **Главы 6 и 7**. В **Главе 6** рассматривается еще одно обобщение перекладывания отрезков и отображений их сдвигов – система изометрий, представляющей собой перестановки на n-компонентном носителе, который является двумерным ленточным комплексом. Двумерные комплексы с вертикальными слоениями активно используются в геометрической теории групп для изучения действий свободной группы на деревьях. В работе высказана гипотеза, что минимальные системы изометрий, орбиты которых бесконечные деревья, являются подмножествами меры 0 в пространстве параметров и хаусдрфова размерность которых строго меньше n-1. Отдельное внимание в

данной главе уделено исследованию специальным изометриям порядка 3, геометрическим образом которых является фрактал, известный как «салфетка Рози». Этот объект ранее возникал в символической динамике, геометрической теории групп и т.д. Оценка сверху на фрактальную размерность салфетки Рози и исследование вопроса о мере максимальной энтропии для потока на итерационной процедуре являются одними из основных результатов диссертационной работы.

Еще один красивый результат получен в **Главе 8** в которой конструкции предыдущих глав (в частности, Главы 7) применены к исследованию полуклассического движения электрона в магнитном поле в трехмерной кристаллической решетке. Данный вопрос сводится к исследованию топологических и метрических свойств сечений поверхности Ферми, которая представляет собой трехмерный тор (задача С.П. Новикова). Данная задача может быть сформулирована на языке теории измеримых слоений где слои – образы сечений поверхности Ферми. Наибольший интерес представляет хаотический случай, когда слоение имеет число компонент ≥ 3. Логическая связь с задачей о перекладываниях отрезков такова: по системе изометрий строится ленточный комплекс, связанный с решеткой сдвигов трехмерного тора и определяется фундаментальная область, абелево накрытие которой является 3-периодической поверхностью. Сечения этой поверхности плоскостями в некотором базисе, определяемым компонентами магнитного поля, являются ленточным комплексом. Далее используются идеи предыдущей главы и определяется хаусдорфова размерность пространства параметров специального семейства пространства изометрий (т.наз. «изометрий тонкого типа»), определяющих пару поверхность + вектор которые являются хаотическими. Оценка хаусдорфовой размерности получена с помощью исследований перекладываний отрезков типа Арну-Рози и изучения спектральных свойств соответствующего алгоритма ренормализации. В результате удалось получить очень сильный, с моей точки зрения, результат, что почти все хаотические траектории имеют скорость диффузии строго между ½ и 1.

У меня нет принципиальных замечаний по тексту. Работа написана ясным языком, цитирования приведены корректно, собственные результаты автора четко сформулированы, а их оригинальность и новизна не вызывает сомнения. С моей точки зрения, данная работа является заметным шагом на пути установления взаимосвязи между разными областями математики.

В качестве вопросов, возникших по ходу чтения работы и бесед с автором, я могу отметить следующие:

1) Множество перекладываний отрезков образует некоторый граф. На этом графе можно изучать разные вещи: например, блуждания, управляемые оператором Лапласа, или потоки Риччи. Например, эргодичность может быть связана со спектром оператора Лапласа такого графа. Было бы интересно обсудить данный вопрос;

2) Возможно, было бы интересно рассмотреть редуцированную задачу С.П. Новикова о движении электрона в двумерном кристалле с точки зрения задачи о перекладывании отрезков. Я не исключаю, что такой взгляд мог бы быть полезен для лучшего понимания спектральных свойств в задаче Хофштадтера:

3) При обсуждении системы слоений использовался подход, связанный с представлением ленточного комплекса «машиной Рипса», напоминающей представление крашеных кос. Существует ли такая связь перекладывания отрезков с низкоразмерной топологией?

Возникшие при чтении диссертации вопросы не умаляют значимости и высокой оценки работы и никак не влияют на приведенные автором доказательства полученных утверждений.

Диссертация А.С. Скрипченко удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ № 842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Александра Сергеевна Скрипченко, заслуживает присуждения докторской степени по специальности 1.3.3-Геометрия и топология.

LPTMS
Bâtiment Pascal n° 530
Rue André Rivière
Université Paris-Saclay
F-91405 Orsay cedex

Доктор физико-математических наук,
директор по научным исследованиям лаборатории
Теоретической физики и статистических моделей (LPTMS),
Университет Paris Saclay, CNRS, Франция

21 января, 2025

Me Evgenia ZAKHAROV, notaire salarié au sein de la SAS CHEUVREUX à Paris 8e

Vu pour certification matérielle de la signature figurant ci-contre, de Monsieur Sergueï NETCHAEV
Fait à Paris, le 29.01.2025
CHEUVREUX ET ASSOCIÉS
NOTAIRES
55, bd Haussmann - 75380 PARIS

université PARIS-SACLAY

LPTMS Laboratoire de Physique Théorique et Modèles Statistiques

cnrs

Report of the Referee, S.K. Nechaev,
on the Dissertation of Alexandra Sergeevna Skripchenko "Renormalization in One-Dimensional Dynamics," submitted for the Degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the Discipline 1.1.3 - Geometry and Topology

The dissertation by Alexandra Sergeevna Skripchenko, *"Renormalization in One-Dimensional Dynamics,"* is devoted to studying the properties of a specific family of objects known as "interval exchanges" and their generalizations. Fundamentally, the work represents a substantial contribution that interconnects various branches of mathematics, including ergodic theory, dynamical systems, geometry of moduli spaces, and topology. In this sense, the dissertation synthesizes methodologies from different domains, and the author demonstrates remarkable versatility in combining these approaches. For example, the questions of the number of ergodic measures, weak and strong mixing, as well as solvability of cohomological equations, are tied in the dissertation to the topological and geometric properties of moduli spaces and foliations.

Before delving into the core content of the work, I would like to highlight some formal indicators demonstrating the exceptional nature of Skripchenko's dissertation. The work consists of eight chapters containing original results on various aspects of interval exchange problems and their physical applications. Over 100 theorems (including lemmas and propositions) are proven in the dissertation, most of which are illustrated with clear examples that facilitate understanding. The research has resulted in 13 highly cited publications in leading international mathematical journals. I also note the apparent "ease" of presenting complex mathematical topics, indicating the author's excellent knowledge of contemporary mathematical trends. Of additional interest to physicists is the fact that many of the formulated theorems not only assert "existence" but also provide concrete, constructive methods for obtaining solutions. Some of these, such as estimates for the typical Hausdorff dimension of the phase space in the semiclassical electron dynamics problem, can serve as a guide for both numerical calculations and the development of physical intuition.

Below, I will discuss sections of the work that seemed most intriguing and aligned with my research interests.

Chapter 1 introduces fundamental definitions from the theory of dynamical systems, topology, and geometry of moduli spaces. It describes the connection between interval exchanges and billiard flows in rational polygons and discusses properties of billiard flows such as minimality, ergodicity, strict ergodicity, and entropy. The chapter formulates the key method underpinning the dissertation—Rauzy's renormalization (induction) algorithm. Interval exchanges with rational relations between lengths are analyzed, and linear spaces are classified into "rich" or "poor" categories based on the presence of an asymptotic cycle. The hypothesis is proposed that the presence of an asymptotic cycle is a key characteristic for determining the typical ergodic behavior

of such intervals. The combinatorial interpretation of the rich/poor space classification using the invariant (the "Sa-Arnoux-Fathi invariant") under Rauzy renormalization is also discussed.

Chapter 2 examines ergodic and spectral properties of multidimensional continued fractions, specifically the "Markov continued fractions" class, through the lens of iterative properties of piecewise-linear maps interpreted as interval exchanges. As in Chapter 1, the main method is the Rauzy induction generalized for arbitrary multidimensional Markov continued fractions. A notable result is the investigation of the simplicity of the Lyapunov spectrum, which determines the convergence rate of the renormalization procedure.

Chapter 5 explores shift maps on intervals. Unlike interval exchanges, shift maps allow overlapping intervals, meaning the total length of the support is not invariant. Concepts of finite and infinite-type maps are introduced based on the attractor's structure and stabilization. For infinite-type maps, the closure is a Cantor set, whose dynamics differ fundamentally from "regular" interval exchanges. A key theorem extends results by Bruin and Troubetzkoy, linking infinite-type maps with ergodic properties and providing an upper bound on the Hausdorff dimension of the attractor. Examples include "double rotations" interpreted in terms of billiards with one-sided permeable ("spy") mirrors, showing that the entropy of such billiard flows is zero.

Chapters 6 and 7 particularly caught my attention. Chapter 6 discusses another generalization of interval exchanges: isometry systems, representing permutations on an n-component support, which is a two-dimensional ribbon complex. Two-dimensional complexes with vertical foliations are actively used in geometric group theory to study free group actions on trees. The dissertation hypothesizes that minimal isometry systems with infinite-tree orbits form zero-measure subsets in parameter space, with their Hausdorff dimension strictly less than n-1. A special focus is on order-3 isometries, geometrically represented by the "Rauzy fractal." This fractal arises in symbolic dynamics and geometric group theory. Upper bounds on the fractal dimension of the Rauzy fractal and investigations into maximum entropy measures for the flow in iterative processes are key results here.

Chapter 8 applies the constructions of earlier chapters (especially Chapter 7) to semiclassical electron dynamics in a magnetic field within a three-dimensional crystalline lattice. This problem, related to topological and metric properties of Fermi surface sections (a three-dimensional torus), stems from the classical problem posed by S.P. Novikov. Using ideas from Chapter 7, the dissertation determines the Hausdorff dimension of the parameter space for chaotic cases where foliations have three or more components. This yields the strong result that almost all chaotic trajectories have diffusion speeds strictly between ½ and 1.

I have no substantial remarks on the text. The dissertation is clearly written, with proper citations. The author's results are original and innovative. This work represents a significant step in establishing connections between various areas of mathematics.

Some questions that arose during my reading and discussions with the author are as follows:

1. The set of interval exchanges forms a certain graph. On this graph, one could study properties like random walks governed by the Laplace operator or Ricci flows. For instance, ergodicity could be linked to the spectrum of the Laplace operator on this graph. Could this perspective be explored further?

2. It might be interesting to consider a reduced version of Novikov's problem for electron motion in a two-dimensional crystal from the interval exchange viewpoint. This approach might shed light on spectral properties in the Hofstadter problem.

3. In the discussion of foliations, the representation of ribbon complexes as "Rips machines" reminiscent of painted braids was used. Is there a connection between interval exchanges and low-dimensional topology?

These questions do not diminish the significance or high quality of the work and do not affect the validity of the author's results.

The dissertation by Alexandra Sergeevna Skripchenko fully meets the requirements outlined in the Regulations on the Award of Academic Degrees (Government Decree of the Russian Federation No. 842 of September 24, 2013) for dissertations submitted for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences. I confidently recommend the award of this degree to the author in the discipline 1.1.3 - Geometry and Topology.

UNIVERSITE PARIS-SACLAY
Bât Bréguet
3, rue Joliot Curie
91190 Gif-sur-Yvette
FRANCE

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Director of Research, Laboratory of Theoretical Physics and Statistical Models (LPTMS),
University Paris-Saclay, CNRS, France

January 21, 2025

I confirm the signature of Dr. Serguei Nechaev.

UNIVERSITE PARIS-SACLAY
Bât Bréguet
3, rue Joliot Curie
91190 Gif-sur-Yvette
FRANCE

LPTMS
Bâtiment Pascal n° 530
Rue André Rivière
Université Paris-Saclay
F-91405 Orsay cedex

Dr. Aberto Rosso
Director of LPTMS