ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Александры Сергеевны Скрипченко
«Ренормализация в одномерной динамике»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.3 – геометрия и топология

Диссертация А. С. Скрипченко «Ренормализация в одномерной динамике» – это исследование в области геометрии и топологии измеримых слоений на поверхностях и ленточных комплексах, а также связанных с ними одномерных динамических систем – перекладываний отрезков, отображений сдвигов отрезков, перекладываний отрезков с флипами и др. Эта область, находящаяся на пересечении нескольких разделов математики, включая маломерную топологию, геометрию пространств модулей, теорию динамических систем, геометрическую теорию групп и математическую физику, появилась в 60-е годы XX века и с тех пор остается привлекательным направлением для исследователей. Вопросы, изучаемые в диссертации, тесно связаны с результатами и открытыми задачами, сформулированными в работах В. И. Арнольда. Я. Г. Синая, С. П. Новикова, Ж. - К. Йоккоза, К. МакМаллена, А. Зорича и М. Концевича, А. Авилы и других. В результате было получено весьма детальное описание эргодических и геометрических свойств измеримых слоений, заданных на ориентируемых римановых поверхностях, и отображений первого возвращения на трансверсаль - перекладываний отрезков. Известно, что такие отображения типично минимальны, строго эргодичны, обладают свойством слабого перемешивания и не обладают свойством сильного перемешивания. Следствием из этих наблюдений является, в том числе ряд результатов об эргодических и геометрических свойствах геодезического потока в пространствах модулей, называемого потоком Тейхмюллера.

Вместе с тем в ряде физически и/или топологически мотивированных задач возникает необходимость изучения либо отображений, не являющихся типичными с точки зрения общей теории: например, перекладываний отрезков с рациональными соотношениями между длинами отрезков непрерывности, перекладываний отрезков с флипами (обращением ориентации на некоторых отрезках непрерывности), слоений, заданных не абелевыми, а квадратичными дифференциалами и т. п. При этом инструменты, разработанные для исследований перекладываний отрезков общего положения и отвечающих им слоений на поверхностях, заданных абелевыми дифференциалами, либо не могут применяться в принципе, либо требуют содержательной адаптации с учетом геометрической и топологической природы изучаемых объектов.

В диссертации предложены новые методы решения этих задач, объединенные общей идеей: для изучения таких слоений и их отображений первого возвращения рассматривается алгоритм, позволяющий по исходному отображению построить бесконечную цепочку эквивалентных ему с точки зрения поведения орбит отображений; в каждом из рассмотренных случаев алгоритмы являются представителями класса марковских многомерных цепных дробей, изучение которых представляет и самостоятельный интерес с точки зрения символической динамики и теории чисел. Автор демонстрирует эффективность предложенных методов для широкого спектра задач и среди прочего, например, закрывает долгое время оставшиеся открытыми вопросы о поведении хаотических режимов в задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3-периодических поверхностей.

Таким образом, актуальность темы исследований не вызывает сомнений.

Полученные в диссертации результаты являются новыми. В работе автор использует современные математические методы, а полученные результаты имеют интересные приложения не только

в геометрии, топологии и динамических системах, но и в некоторых смежных областях, включая теорию чисел и теоретическую физику. Они снабжены детальными доказательствами, опубликованными в журналах высокого уровня. Достоверность полученных результатов не вызывает сомнений.

Содержание диссертации. Диссертация состоит из введения, 8 глав и заключения.

Первая глава посвящена свойствам перекладываний отрезков и тесно связанных с ними измеримых слоений на ориентируемых поверхностях. Автор подробно знакомит читателя с известными результатами, касающимися свойств этих отображений (теоремой Кина о минимальности, теоремой Мазура-Вича о строгой эргодичности, теоремой Авилы-Форни о слабом перемешивании, теоремой Катка о числе инвариантных эргодических мер и др.). В некотором смысле эта глава не только является введением в тему, но и планом будущих исследований: для других классов слоений и связанных с ними отображений будут проверятся свойства перекладываний отрезков, описанные в этой главе. Здесь же описан подробно алгоритм ренормализации, применимый для изучения перекладываний отрезков общего вида, – индукция Рози. Глава носит преимущественно реферативный характер, но завершается описанием самостоятельного результата автора, касающегося эргодических свойств специального класса перекладываний отрезков, для которого не выполняется условие общего вида – отображений с нулевым инвариантом Са - Арну - Фати.

В Главе 2 речь идет о многомерных марковских цепных дробях; в этой же главе вводится терминология из теории динамических систем (понятие коцикла, марковского разбиения, расширяющего отображения и др.). Здесь также формулируется понятие симплициальной системы и критерий Фужерона, который в последующих главах (например, в главе 5) является основным инструментом доказательства ключевых результатов главы 5. В этой же главе доказан небольшой технический результат автора о расширяющих отображениях, использованный в последующих главах.

В Главе 3, в которой изучаются перекладывания отрезков с флипами, доказывается верхняя оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, задающих минимальные отображения. Перекладывания отрезков с флипами - это кусочно-линейные отображения отрезков с конечным числом точек разрыва, которые на отрезках непрерывности являются либо сдвигом, либо сдвигом с дополнительным отражением. Такие отображения были введены А. Ногейрой в 1989 году в связи с изучением измеримых слоений на неориентируемых повернхностях; в той же работе Ногейра установил, что почти все перекладывания отрезков с флипами не являются минимальными. В работе автора это утверждение уточняется и показывается, что множество параметров, о котором было известно, что оно обладает нулевой мерой, в действительности является фракталом. Доказательство опирается на детальное изучение свойств алгоритма ренормализации для перекладываний отрезков с флипами, для которого устанавливается свойство ограниченного искажения, введенное в связи с изучением перемешивающих свойств потока Тейхмюллера А. Авилой, Ж. - К. Йоккозом и С. Гезелем в работе 2006 года.

Глава 4 посвящена слоениям на поверхности, определенным квадратичными дифференциалами, и их отображениям первого возвращения на трансверсаль – линейным инволюциям. Используя результаты Э. Ланно и К. Бауссэ, автор доказывает обобщение теоремы Марми, Муссы и Йоккоза о когомологических уравнениях над перекладываниями отрезков на случай неприводимых линейных инволюций. Этот результат является первым шагом в развитии КАМ теории для линейных инволюций. Доказательство получается за счет комбинации классических инструментов теории динамических систем (конструкции Донжуа), детального анализа свойств алгоритма ренормализации, инструментов эргодической теории (анализ асимптотического поведения сумм Бирхгофа) и глубокого понимания геометрических свойств изучаемых слоений (в частности, свойств ляпуновского спектра).

В Главе 5 изучаются отображения сдвигов отрезков. Эти отображения определены в работе Бошерницана и Корнфельда и являются естественным обобщением перекладываний отрезков: по определению образы отрезков непрерывности уже не обязаны задавать разбиение отрезка - носителя, как это было для перекладываний отрезков и перекладываний отрезков с флипами, а могут пересекаться между собой. В результате получается два принципиально разных варианта динамики для минимальных отображений: они либо могут сводиться к перекладыванию отрезков (такие отображения называются отображениями конечного типа), либо имеют своим аттрактором канторовское множество (отображение бесконечного типа). Бошерницан и Корнфельд построили первый пример отображения сдвигов отрезков бесконечного типа и сформулировали гипотезу о том, что множество параметров, задающих отображения бесконечного типа, имеют нулевую меру. Впоследствии эта гипотеза, в полной общности не доказанная до сих пор, была доказана для некоторых классов отображений сдвигов отрезков - класс Бруина - Трубецкого и класс двойных вращений. В работах, где были доказаны эти утверждения, сформулирован также ряд открытых вопросов об эргодических свойствах отображений бесконечного типа. В диссертации автор усиливает известные результаты, получая оценки на хаусдорфову размерность множеств параметров, задающих отображения бесконечного типа, а также строит меры, носителем которых являются множества параметров, задающих отображения бесконечного типа, и показывает, что типичные (по отношению к этой мере) отображения бесконечного типа строго эргодичны. Для доказательств автор строит новые алгоритмы ренормализации и применяет к ним критерий Фужерона из второй главы.

В Главе 6 изучаются системы изометрий – еще одно обобщение перекладываний отрезков и отображений сдвигов отрезков, и их эргодические и геометрические свойства, в том числе свойства слоений на ассоциированных с ними ленточных комплексов. Системы изометрий и ленточные комплексы, с одной стороны, могут рассматриваться как логичное обобщение перекладываний отрезков и отображений сдвигов отрезков. С другой стороны, впервые они были определены в работе Габрорье, Левитта и Полана в связи с теоремой Рипса о действии свободной группы на $\mathbb{R}$-деревьях. Ленточные комплексы получаются как обобщение конструкции зашнурованных прямоугольников для перекладываний отрезков на случай системы изометрий: это двумерные комплексы, полученные приклеиванием к отрезку - носителю прямоугольников с вертикальным слоением на них. В геометрической теории групп такие комплексы классифицируются на несколько групп (симплициальные комплексы, поверхностные комплексы, торические комплексы, комплексы тонкого типа).

В диссертации получен ряд результатов о топологических свойствах слоев слоения на комплексах тонкого типа, а также для ряда специальных семейств систем изометрий получены оценки на хаусдорфову множества параметров, задающих комплексы тонкого типа, и построена мера на множестве параметров, определяющих такие комплексы.

Автор использует два вида ренормализации (машину Рипса и индукцию Дынникова для систем изометрий), описывает марковский сдвиг, ассоциированный со второй ренормализацией, и использует термодинамический формализм для марковских сдвигов. Детально изучаются спектральные свойства ассоциированного с ренормализацией коцикла, показывается, что коцикл имеет простой спектр и обладает свойством Пизо.

В Глава 7 обсуждаются приложения полученных в главе 6 результатов к задаче С. П. Новикова о плоских сечениях 3-периодических поверхностей. Основная часть изложенных в этой главе результатов относится к конкретной поверхности рода 3, обладающей дополнительной симметрией, и индуцированное 1-формой слоение в этом случае имеет два двойных седла. Как уже было отмечено выше, автор получает целый ряд ответов на вопросы, долгое время остававшиеся открытыми: строит примеры хаотических режимов с 1 или с бесконечным числом связных компонент, оценивает скорость диффузии хаотической траектории и др.

При этом оказывается, что эти же результаты играют ключевую роль при изучении перекладываний отрезков из семейства Арну - Рози. Эти перекладывания отрезков относятся к классу отображений с нулевым инвариантом Са - Арну - Фати, обсуждавшихся в первой главе, и активно изучались в символической динамике. Наиболее известным представителем этого класса является перекладываний отрезков типа Арну - Йоккоза. Используя результаты 6 главы, автор показывает, что типичное перекладывание отрезков Арну-Рози является строго эргодичным, а общее число эргодических инвариантных мер не превосходит 2.

Глава 8 посвящена пространствам мероморфных дифференциалов на комплексных кривых, имеющих вещественные периоды.Они называются вещественно нормированными дифференциалами и были введены в работах И. М. Кричевера. Пространства вещественно-нормированных дифференциалов с данным количеством полюсов и их порядками и фиксированными вычетами в них стратифицируются в соответствии с порядками нулей дифференциала. Множества таких ифференциалов с фиксированной группой периодов образуют изопериодические подпространства, уважающие эту стратификацию. Автору удается, используя оригинальную ренормализацию, подробно изучить геометрию слоения абсолютных периодов для главного страта вещественно-нормированных дифференциалов с полюсом порядка 2, получив ряд результатов о числе связных компонент и плотности локуса, отвечающего вектору периодов общего положения.

В заключении приведены выводы и формулировки открытых задач.

Замечания. В целом диссертация написана на очень высоком уровне. Тем не менее, есть несколько моментов, которые помогли бы улучшить качество изложения.

Во-первых, диссертация достаточно объемная, поэтому было бы полезно включить список обозначений и сделать обозначения сквозными (в диссертации это не так и одни и те же буквы в разных главах имеют разный смысл).

Во-вторых, в главе 1, где подробно описываются результаты, касающиеся перекладываний отрезков, автор только упоминает, но не приводит описания конструкции зашнурованных прямоугольников. При этом впоследствии, например, в главе 6 при работе с ленточными комплексами автор активно ссылается на аналогии с этой конструкцией. Эти же аналогии используются при построении специального потока над системой изометрий, который чрезвычайно важен для построения меры на Салфетке Рози. Поэтому, вероятно, описанию конструкции зашнурованных прямоугольников стоило уделить больше внимания.

Во-третьих, в главе 4 доказывается результат, обобщающий известную теорему Марми-Муссы-Йоккоза о когомологических уравнениях над перекладываниями отрезков на случай неприводимых линейных инволюций, и ряд этапов доказательства повторяет в точности аналогичные шаги в исходной работе, а некоторые требуют существенных изменений, при этом автор подробно описывает только этапы второго типа, отсылая читателя к работе Марми-Муссы - Йоккоза и не воспроизводя написанного там. В результате читателю требуется больше усилий для того, чтобы разобраться в доказательстве утверждения целиком. Представляется полезным написать более самодостаточный текст доказательства.

Однако выявленные недостатки не снижают научной ценности диссертационной работы и не могут служить препятствием к присуждению ее автору докторской степени.

Выводы. Полученные в диссертации результаты представляют большой интерес сразу для нескольких разделов математики, и в ряде случаев позволяют закрыть вопросы, долгое время остававшиеся открытыми. Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Кроме того, в автореферате приведен список публикаций и выступлений автора по теме диссертации, подтверждающий высокую оценку вклада автора и заметный интерес мирового математического сообщества к полученным результатам. Таким образом, диссертация А. С. Скрипченко удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-

математических наук в соответствии с Положением о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ № 842, и ее автор, Александра Сергеевна Скрипченко, заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 Геометрия и топология.

Доктор физико–математических наук (01.01.04 – геометрия и топология),
член–корреспондент РАН,
и.о. директора ФГБУН Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
630090, г. Новосибирск, пр. академика Коптюга, 4,
тел. +7(383)–333–28–92, e-mail: mironov@math.nsc.ru

Миронов Андрей Евгеньевич
28 февраля 2025 г.

Подпись работника
Миронова А. Е.
Заверяю
Специалист отдела ДОУ
ИМ СО РАН Е.Г.Кирда
«28» февраля 2025 г.

Для документов