ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Скрипченко Александры Сергеевны
«Ренормализация в одномерной динамике»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.3 — геометрия и топология

Диссертация посвящена кругу вопросов, так или иначе связанных с отображениями перекладывания отрезков, их обобщениями и приложения. Эта тематика исследуется с 1960х годов и продолжает активно развиваться в настоящее время, так как имеет разнообразные связи и приложения в других областях. Так, давно известны её связи с бильярдами в рациональных многоугольниках и измеримыми слоениями на поверхностях, в более недавнее время были найдены приложения к пространствам модулей абелевых и квадратичных дифференциалов, КАМ-теории и другим областям.

Обзор результатов диссертации.

Классические перекладывания отрезков — биективные и сохраняющие ориентацию — достаточно хорошо изучены. Усилиями ряда математиков было доказано, что для «типичного» набора длин отрезков отображение перекладывания является минимальным (т.е. все орбиты всюду плотны), строго эргодичным и слабо перемешивающим, но описание множества «исключительных» перекладываний не закончено. В диссертации получены продвижения в этом вопросе: построен пример перекладывания отрезков с «богатым» множеством рациональных линейных соотношений между длинами (в смысле равенства нулю инварианта Са-Арну-Фати), которое обладает свойством слабого перемешивания.

Первым обобщением перекладываний являются перекладывания с флипами (переворачиваниями). Они возникают, например, при исследовании слоений на неориентируемых поверхностях. Благодаря работам А. Ногейры 1980х годов известно, что при наличии флипов минимальность, в отличие от классического случая, является нетипичным свойством. Одна из глав диссертации посвящена исследованию множества тех параметров, для которых перекладывание с флипами является минимальным, и получены оценки на хаусдорфову размерность этого множества: для n отрезков она строго меньше $n-1$ и не меньше $n-2$.

Исследование пространств модулей квадратичных дифференциалов мотивирует изучение более специального обобщения перекладываний отрезков, называемого линейными инволюциями. Для этого класса отображений в диссертации доказана теорема о разрешимости когомологического уравнения, которая ранее была известна только для классических перекладываний.

Дальнейшее обобщение перекладываний — отображения сдвигов отрезков, определение которых аналогично перекладыванию, но без требования биективности. Такие отображения исследуются с середины 1990х годов. Они делятся на отображения конечного типа, которые по существу сводятся к перекладываниям на подинтервале, и отображения бесконечного типа, у которых аттрактор является обобщенным канторовским множеством. Остаётся открытым вопрос о том, образуют ли отображения конечного типа множество полной меры в пространстве параметров, в настоящее время он решён для двух классов отображений сдвигов отрезков: отображений типа

Бруина-Трубецкого и двойных вращений. В диссертации исследованы отображения бесконечного типа из этих двух классов. Для них получены верхние оценки на хаусдорфову размерность соответствующих подмножеств пространства параметров и доказано, что почти все такие отображения являются строго эргодичными.

Центральное место в диссертации занимают системы изометрий — дальнейшее обобщение перекладываний, которые уже не являются отображениями, но могут рассматриваться как многозначные отображения. Аналогично тому, как перекладывания отрезков реализуются слоениями на поверхностях, системы изометрий соответствуют ленточным комплексам. Орбиты систем изометрий представляют собой локально конечные графы; особый интерес представляют системы тонкого типа, в которых орбиты являются бесконечными деревьями. В число результатов диссертации входит построение систем тонкого типа, почти все орбиты которых имеют заданное число топологических концов: один или два.

Фундаментальную роль в работе играют алгоритмы ренормализации — специальные преобразования пространства параметров системы, которые сохраняют исследуемые свойства и характеристики. В случае классического перекладывания отрезков наиболее удобен алгоритм ренормализации, называемый индукцией Рози. Его можно рассматривать как многомерное обобщение алгоритма Евклида или разложения числа в бесконечную цепную дробь. В диссертации строятся и исследуются аналоги индукции Рози для различных обобщений перекладывания отрезков, адаптированные к рассматриваемым задачам. Как правило, алгоритмы ренормализации не останавливаются и таким образом задают динамическую систему на пространстве параметров или его подмножестве, соответствующем рассматриваемой задаче. Исследование эргодических и спектральных свойств ренормализации помогает решению исходных задач об исходной системе. Разработка и применение таких методов составляет основное содержание доказательств результатов диссертации. Часть этих вспомогательных результатов достаточно общие, чтобы быть применимыми и за пределами рассматриваемого круга задач.

В случае специальных систем изометрий, рассматриваемых в диссертации, исследование свойств ренормализации приводит к изучению замечательного фрактала, называемого салфеткой Рози. Это множество возникает в связи с разными задачами в разных разделах математики. Отметим, что верхняя оценка хаусдорфовой размерности салфетки Рози, которая фактически и доказывает её фрактальность, была впервые получена автором диссертации совместно с А. Авилой и П. Юбером. (позже оценка неоднократно улучшалась другими авторами). В диссертацию вошли результаты дальнейшего изучения салфетки Рози, в частности, теорема о существовании и единственности меры максимальной энтропии на ней.

Среди приложений в других областях в первую очередь отметим применение разработанных методов к задаче С. П. Новикова о плоских сечениях 3-периодической поверхности. Ранее И. Дынниковым было выяснено, что кроме «тривиального» и «интегрируемого» случая, когда компоненты сечений компактны или находятся на ограниченном расстоянии от прямых линий, в этой задаче существует и «хаотический» случай, в котором сечения имеют диффузию. Задача о 3-периодической поверхности можно переформулировать в терминах слоения компактной поверхности в трёхмерном торе, что позволяет связать её с системами изометрий. Используя разработанные методы для исследования систем изометрий, автор строит примеры

хаотических сечений из одной и бесконечно многих компонент, а также получает оценки на скорость диффузии.

Также в числе приложений разработанных методов в диссертации доказаны теоремы о нулевой энтропии бильярдов со шпионскими зеркалами и о структуре периодов вещественно-нормированного дифференциала на римановой поверхности.

Общая оценка работы. Рассматриваемая диссертация является целостным исследованием, в котором получены новые результаты и разработаны методы, вносящих значительный вклад в актуальную область математики. Полученные результаты отвечают на ряд открытых вопросов, они основаны на глубоком анализе возникающих структур, потребовавшем разработки новых методов исследования. Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих российских и зарубежных изданиях, что подтверждает их достоверность. Они активно используются в работах других математиков, что подтверждает значимость и актуальность работы. Текст написан тщательно и хорошо структурирован; несмотря на техническую сложность содержания, он достаточно легко читается. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Замечания. В тексте есть следующие неточности и погрешности:

1. В определении числа Рота на стр. 28 степень q должна стоять в знаменателе.

2. Во втором абзаце раздела 1.3 на стр. 31, в формуле $0 = u_i^t = u_i^n$ нижние индексы должны быть нулями.

3. На стр. 39 в первом из равносильных условий перед определением богатого подпространства не введено обозначение ϕ.

4. На стр. 51, в 8-й строке снизу, в определении Δ потерялись фигурные скобки для обозначения множества.

5. В определении обобщенной перестановки на стр. 92 стоило бы пояснить, что такое l и m, и в целом как комбинаторные структуры π и σ соотносятся с линейной инволюцией.

6. Условия на линейные инволюции типа Рота на стр. 97–98 пронумерованы числами 1, 2, 3, но в дальнейшем они упоминаются как (a), (b), (c).

7. В первом абзаце на стр. 179 — опечатка в области значений проекции π: вместо решетки это должен быть тор.

8. В предложении 113 на стр. 187 стоило бы напомнить читателю, что такое f_i, так как их определение было в другой главе.

9. Теоремы из введения повторяются в основном тексте с другими номерами, это затрудняет сопоставление теорем с их доказательствами.

10. Стоило бы пронумеровать определения и ссылаться на них в случаях, когда термины и понятия используются далеко от определений.

Эти замечания незначительны и не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Заключение. Диссертация «Ренормализация в одномерной динамике» удовлетворяет требованиям п. 9 Положения о присуждении учёных степеней, утверждённого постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. №842, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора наук, а ее автор Скрипченко Александра Сергеевна заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.04 «Геометрия и топология»),
член-корреспондент РАН,
главный научный сотрудник
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
Тел.: +7 (812) 312-40-58, e-mail: svivanov@pdmi.ras.ru

Иванов Сергей Владимирович

10.02.2025

Подпись руки Иванова Сергея Владимировича
Удостоверяю
Помощник директора по кадрам [illegible] Л. А. Зотова
10.02.2025

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук