Национальный Исследовательский Университет
Высшая школа экономики

На правах рукописи
УДК 515.1, 517.938

Скрипченко
Александра Сергеевна

Ренормализация в одномерной динамике

Специальность 1.1.3 —– геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени доктора физико–математических наук

Научный консультант:
д.ф.–м.н., профессор РАН И. А. Дынников

МОСКВА —– 2024

Оглавление

Введение **6**

1 Перекладывания отрезков: определения и ключевые результаты **25**

1.1 Перекладывания отрезков 25

1.2 Измеримые слоения на поверхностях и бильярды в рациональных многоугольниках 29

1.3 Индукция Рози 31

1.4 Пространства модулей абелевых дифференциалов и слоения абсолютных периодов 35

1.5 Перекладывания отрезков с целочисленными соотношениями между длинами отрезков 38

1.5.1 Постановка задачи 38

1.5.2 Богатые и бедные пространства ограничений 39

1.5.3 Другие подходы 41

1.5.4 Эргодические свойства перекладываний отрезков с рациональными соотношениями между длинами отрезков 43

2 Марковские многомерные цепные дроби **49**

2.1 Многомерные цепные дроби 49

2.2 Топологический марковский сдвиг и диаграмма Рози 52

2.3 Проективно-расширяющие и сильно расширяющие отображения . . 53

2.4 Критерий Фужерона 56

2.5 Показатели Ляпунова марковских многомерных цепных дробей . . 59

3 Перекладывания отрезков с флипами **62**

3.1 Определения и результаты 62

3.2 Индукция Рози для перекладываний отрезков с флипами 66
3.3 Диаграмма Рози 69
3.4 Ускорение индукции 70
3.5 Марковский сдвиг 75
3.6 Свойство ограниченного искажения 76
3.6.1 Вспомогательные меры 76
3.6.2 Лемма Керхгофа 78
3.6.3 Дальнейшие оценки искажения 82
3.7 Функция крыши и ее экспоненциальный хвост 86
3.8 Доказательство теоремы 34 89

4 Линейные инволюции и квадратичные дифференциалы 91
4.1 Определение линейных инволюций и их свойства 91
4.2 Когомологические уравнения и линейные инволюции 94
4.3 Индукция Рози для линейных инволюций 95
4.4 Линейные инволюции типа Рота 97
4.5 Доказательство теоремы 50 99
4.6 Доказательство Теоремы 3 101
4.6.1 Условия (b) и (c) выполнены почти всегда 102
4.6.2 Условие (a) выполнено почти всегда 103
4.6.3 Доказательство леммы 57 104

5 Отображения сдвигов отрезков 108
5.1 Определения и гипотезы 108
5.2 Отображения сдвигов отрезков типа Бруина - Трубецкого 109
5.3 Двойные вращения 116
5.3.1 Определения и результаты 116
5.4 Ренормализация для двойных вращений 119
5.4.1 Отображения сдвигов 3 отрезков и двойные вращения 119
5.4.2 Ренормализация. Первый подход 121
5.4.3 Новое комбинаторное описание 124
5.4.4 Индукция Артиджани-Фужерона-Юбера 125
5.4.5 Эквивалентность двух алгоритмов ренормализации 126
5.4.6 Применение критерия Фужерона 131

5.5 Доказательство утверждения о нулевой энтропии бильярдов со шпионскими зеркалами . . . 132
5.5.1 Предварительные наблюдения . . . 132
5.5.2 Энтропия эргодических мер . . . 137
5.5.3 Доказательство основных утверждений . . . 138

6 Системы изометрий 140
6.1 Определения и гипотезы . . . 140
6.2 Специальные системы изометрий порядка три . . . 143
6.2.1 Определение специальных систем изометрий порядка 3 . . . 143
6.2.2 Ренормализация для систем изометрий . . . 143
6.2.3 Ускорение индукции . . . 145
6.2.4 Коцикл . . . 147
6.2.5 Салфетка Рози . . . 148
6.2.6 Схема доказательства теоремы 83 . . . 150
6.3 Комбинаторика алгоритма ренормализации . . . 151
6.3.1 Марковское разбиение . . . 151
6.3.2 Диаграмма Рози . . . 152
6.3.3 Комбинаторные свойства марковского сдвига . . . 154
6.4 Функция крыши и специальный поток . . . 154
6.5 Инвариантная мера, носителем которой является Салфетка Рози . 155
6.5.1 Формулировка результатов и план доказательства . . . 155
6.5.2 Свойства функции крыши . . . 156
6.5.3 Термодинамический формализм . . . 157
6.5.4 Доказательство теоремы 88 . . . 160
6.6 Альтернативная ренормализация: машина Рипса . . . 162
6.7 Число топологических концов орбит систем изометрий тонкого типа 165
6.8 Доказательство теоремы 10 . . . 166
6.9 Доказательство теоремы 11 . . . 172

7 Приложения к задаче С. П. Новикова о плоских сечениях 3-периодических поверхностей 179
7.1 Формулировка задачи и известные результаты . . . 179
7.2 От системы изометрий к 3-периодической поверхности . . . 181

7.3 Новые результаты в задаче С. П. Новикова 185
7.3.1 Показатели Ляпунова и диффузия 185
7.3.2 Число связных компонент хаотических режимов 185
7.3.3 Перекладывания отрезков типа Арну -Рози 186
7.4 Показатели Ляпунова коцикла 188
7.5 Скорость диффузии хаотических траекторий 194
7.6 Эргодические свойства перекладываний отрезков типа Арну–Рози . 198
7.6.1 Символическое описание перекладываний отрезков типа Арну–Рози 198
7.6.2 Минимальность 200
7.6.3 Строгая эргодичность перекладываний отрезков типа Арну–Рози 204
7.6.4 Оценка сверху на число инвариантных мер 206
7.6.5 Связь перекладываний отрезков типа Арну–Рози и хаотических слоений 207

8 Слоение абсолютных периодов для вещественно-нормированных дифференциалов с полюсом порядка 2 **208**
8.1 Вещественно-нормированные дифференциалы с полюсом порядка 2 208
8.2 Комбинаторная модель для пространства вещественно-нормированных дифференциалов общего положения 210
8.3 Основные результаты 212
8.4 Доказательство теоремы 141 213
8.5 Доказательство теоремы 142 213

9 Заключение **220**
9.1 Основные результаты диссертации 220
9.2 Открытые задачи 222

Литература **224**

Введение

Настоящая диссертация посвящена изучению динамических и геометрических свойств ряда одномерных отображений – перекладываний отрезков и их естественных обобщений – с помощью алгоритмов ренормализации, а также топологическим приложениям полученных результатов.

Перекладывание отрезков —- это взаимно–однозначное полунепрерывное отображение полуинтервала в себя с конечным числом точек разрыва, которое на каждом из отрезков непрерывности является сдвигом. Такие отображения возникают в теории динамических систем и маломерной топологии в разных контекстах. Так, например, отображение первого возвращения на трансверсаль для бильярдного потока в многоугольниках с рациональными углами является перекладыванием отрезков. Кроме того, перекладывания отрезков тесно связаны с измеримыми слоениями с особенностями, которые определяются замкнутой 1–формой на ориентируемой поверхности: по любому перекладыванию отрезков можно построить ориентируемую поверхность, для которой это перекладывание отрезков будет отображением первого возвращения для заданного направления слоения на некоторый трансверсальный этому направлению интервал, и наоборот – для любого измеримого слоения на ориентируемой поверхности, которое определяется 1–формой, отображение первого возвращения на любую трансверсаль является перекладыванием отрезков. Перекладывания отрезков представляют самостоятельный интерес с точки зрения других разделов теории динамических систем: некоторые их классы возникают в символической динамике (например, как модель штурмовых и эпиштурмовых символических последовательностей) или как естественное обобщение поворота окружности в КАМ – теории.

Поэтому эргодические свойства перекладываний отрезков, такие как минимальность, эргодичность, вопрос о числе эргодических мер, слабое и сильное пе-

ремешивание, задачи разрешимости когомологических уравнений и т. д., а также топологическая и геометрическая интерпретация этих результатов в терминах свойств слоений и пространств модулей играют заметную роль сразу в нескольких разделах математики. Впервые перекладывания отрезков были определены в работах В. И. Арнольда и В. И. Оселедца в 60е годы XX века; чуть позже А. Каток и А. Степин описали связь перекладываний отрезков и бильярдов в рациональных многоугольниках; параллельно развивалось исследование свойств измеримых слоений на поверхностях, введенных У. Тёрстоном. В 70е годы была доказана минимальность типичных перекладываний отрезков (М. Кин) и отсутствие сильного перемешивания (А. Каток). В 80е усилиями Х. Мазура и У. Вича был достигнут заметный прогресс в понимании эргодических свойств перекладываний отрезков – доказано, что типичное перекладывание отрезков является строго эргодичным. При этом вопрос о том, является ли перекладывание отрезков общего вида слабо перемешивающим, оставался открытым до 2007 года, когда ключевые результаты были доказаны в работе А. Авилы и Дж. Форни. К этому же периоду относятся наблюдения о когомологических уравнениях над перекладываниями отрезков, которые были получены Дж. Форни, с одной стороны, и Ж.–К. Йоккозом, С. Марми и П. Мусса – с другой. Впоследствии их работы стали основой для развития теории малых знаменателей для обобщенных перекладываний отрезков и ее связей с КАМ теорией.

Параллельно развивалось исследование связей эргодических и спектральных свойств перекладываний отрезков с геометрией пространств модулей абелевых и квадратичных дифференциалов. Очень заметные продвижения были получены благодаря результатам А. Зорича и М. Концевича о показателях Ляпунова коцикла Концевича–Зорича и их связи с числом связных компонент пространств модулей. Еще один прорыв в этом направлении связан с теоремой А. Авилы и М. Вианы: было доказано, что ляпуновский спектр является простым. Наконец, в работе А. Эскина и М. Мирзахани была получена полная классификация действий группы $SL(2,\mathbb{R})$ на пространстве модулей.

Ключевым инструментом, который во всех перечисленных работах использовался для изучения эргодических, топологических и даже символических свойств перекладываний отрезков, является применение алгоритма ренормализации, который в этом случае называется *индукцией Рози*. Один шаг индукции Рози –

это преобразование, строящее по исходному отображению другое, которое будет ему эквивалентно с точки зрения поведения орбит, но определено на меньшем носителе; алгоритм ренормализации определяет бесконечную последовательность таких преобразований. Каждый шаг индукции Рози описывается матрицей, с помощью которой длины полученного перекладывания отрезков выражаются через длины исходного; добавление условия сохранения суммы длин отрезков позволяет определить последовательность проективных преобразований. Таким образом, в случае перекладывания отрезков ренормализация может рассматриваться как многомерная цепная дробь. В случае перекладывания двух отрезков это отображение непосредственно совпадает с отображением Гаусса. Эргодические и комбинаторные свойства алгоритма ренормализации как самостоятельной динамической системы определяют многие важные эргодические свойства исходного перекладывания отрезков.

При этом для ряда топологически осмысленных задач возникает необходимость изучения эргодических свойств и характеристик орбит, а также геометрических характеристик пространств модулей не для самих перекладываний отрезков, а для их естественных обобщений – перекладываний отрезков с флипами, линейных инволюций, отображений сдвигов отрезков, систем изометрий и т. д. Эти обобщения значительно меньше, чем классические перекладывания отрезков, изучались в литературе.

Перекладывания отрезков с флипами были введены А. Ногейрой, который получил первые результаты об их эргодических свойствах (дальнейшие продвижения в этом направлении содержится в настоящей диссертации). Важные результаты о свойствах линейных инволюций, определенных в работе А. Ногейры и К. Дантони, были получены впоследствии Э. Ланно и К. Буассе, которые сформулировали и доказали критерии минимальности неприводимых линейных инволюций. В настоящей диссертации исследуется вопрос о когомологических уравнениях для таких линейных инволюций. Заметный вклад в исследования отображений сдвигов отрезков внесли Х. Бруин и С. Трубецкой, а также Х. Бруин и Г. Клак. В настоящей диссертации получены ответы на некоторые из сформулированных ими открытых вопросов.

Системы изометрий впервые появились в геометрической теории групп, где были описаны в работе Ж. Левитта, Д. Габорье и Ф. Полана; их связь с задачей

С. П. Новикова о плоских сечениях 3–периодических поверхностей была обнаружена И. Дынниковым, который впоследствии (в том числе в совместных работах с А. Скрипченко и П. Юбером) значительно продвинулся в понимании эргодических свойств ассоциированных с системами изометрий измеримых слоений; при этом некоторые из полученных результатов существенно используют результаты совместной работы А. Авилы, А. Скрипченко и П. Юбера.

Вещественно–нормированные дифференциалы были введены И.М. Кричевером в связи с изучением спектральной теории периодических линейных операторов и впоследствии широко применялись для исследования геометрии пространств модулей римановых поверхностей с отмеченными точками. Ряд вопросов в этом контексте сводится к изучению слоений абсолютных периодов таких дифференциалов.

Во всех этих случаях центральным становится вопрос построения эффективной ренормализации и использования ренормализующего алгоритма для изучения свойств исходных динамических систем.

Основные результаты диссертации

Основные результаты диссертации касаются динамических и геометрических свойств различных классов перекладываний отрезков и их обобщений, а также связанных с этими отображениями слоений на поверхностях, ленточных комплексах и потоков в пространствах модулей.

Центральным результатом работы является разработка ренормализационных методов, позволяющих исследовать эргодические, геометрические и топологические свойства широкого класса динамических систем, включающего в себя различные обобщения перекладываний отрезков и важные семейства перекладываний отрезков, не удовлятворяющих условию рациональной несоизмеримости длин.

Например, получено подробное описание динамических свойств перекладываний отрезков типа Арну–Рози с использованием нескольких различных алгоритмов ренормализации (индукции Рози и ее ускорений, машины Рипса и др.). В частности, построена естественная мера, носителем которой является множество параметров, задающее минимальные перекладывания отрезков типа Арну – Рози, и доказано, что почти все перекладывания отрезков по отношению к построенной

мере являются строго эргодичными, но допускают не более 2 инвариантных мер. Кроме этого, благодаря взаимосвязям между перекладываниями отрезков типа Арну–Рози и хаотическими режимами в задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3–периодических поверхностей, для наиболее простого случая поверхности рода 3 с двумя двойными седлами доказаны оценки на скорость диффузии хаотической траектории.

Наряду с перечисленными, к ключевыми результатам диссертации относятся следующие:

- построены примеры самоподобных перекладываний отрезков с нулевым инвариантом Са–Арну–Фати, обладающих и не обладающих свойством слабого перемешивания;
- доказана верхняя оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами;
- теорема Марми – Мусса – Йоккоза о когомологических уравнениях для перекладываний отрезков распространена на неприводимые линейные инволюции;
- построена новая ренормализация для отображений сдвигов отрезков Бруина – Трубецкого; построена мера, инвариантная относительно этой ренормализации, носителем которой является множество параметров, задающих отображения Бруина – Трубецкого бесконечного типа; доказано, что типичные (по отношению к этой мере) отображения сдвигов отрезков Бруина – Трубецкого бесконечного типа являются строго эргодичными;
- аналогичный результат получен для двойных вращений – с использованием описанной совместно с соавторами ренормализации автором построена мера, инвариантная относительно этой ренормализации, носителем которой является множество параметров, задающих двойные вращения бесконечного типа; доказано, что типичные (по отношению к этой мере) двойные вращения бесконечного типа являются строго эргодичными и получена оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, определяющих двойные вращения бесконечного типа.
- для ленточных комплексов тонкого типа построены примеры, для которых почти все слои вертикального слоения имеют ровно 1 топологический конец, и примеры, для которых почти все слои вертикального слоения имеют ровно 2 топологических конца. С использованием этих примеров в задаче С. П.

Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3–периодических поверхностей построены хаотические режимы, имеющие 1 или бесконечное число компонент связности.

- для слоения абсолютных периодов главного страта пространства модулей вещественно–нормированных дифференциалов с единственным полюсом второго порядка доказана плотность локуса, отвечающего заданному вектору периодов в общем положении, и подсчитано число связных компонент такого локуса.

Кроме того, в диссертации содержатся некоторые технические результаты, в том числе касающиеся многомерных цепных дробей и символической динамики.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах автора в рецензируемых научных изданиях, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science: [16], [17], [28], [33], [65], [67], [73], [95], [97], [122], [123], [124], [126].

Для всех работ, написанных в соавторстве, в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 8 глав, заключения и списка литературы. Каждая глава разделена на параграфы, начинается со списка обозначений и содержит как краткий обзор известных ранее результатов, так и изложение результатов автора. Последние снабжены подробными доказательствами.

В **Главе 1** вводятся ключевые понятия из теории динамических систем, топологии и геометрии пространств модулей.

Первый параграф содержит определение перекладываний отрезков и формулировки их наиболее важных динамических свойств: минимальности, эргодичности и строгой эргодичности, наличия слабого перемешивания и отсутствия сильного перемешивания, оценки на число инвариантных эргодических мер и т. д. Некоторые из аналогичных свойств для перекладываний отрезков с флипами доказываются в Главе 3 и для отображений сдвигов отрезков – в Главе 5. В этом же

параграфе вводятся когомологические уравнения для перекладываний отрезков и формулируется теорема Марми–Муссы – Йоккоза, которая будет распространена на неприводимые линейные инволюции в Главе 4.

Во втором параграфе описанные результаты интерпретируются с точки зрения топологии – определяются измеримые слоения на ориентированной поверхности и формулируются ключевые эргодические свойства таких слоений (теорема Мазура), а также описывается связь между перекладываниями отрезков и бильярдным потоком в рациональных многоугольниках. Сформулированные в этом параграфе динамические свойства бильярдного потока (минимальность, эргодичность, строгая эргодичность, энтропия) частично обобщаются для некоторых классов бильярдов с шпионскими зеркалами в Главе 5.

В третьем параграфе описывается ключевой алгоритм ренормализации для перекладываний отрезков – индукция Рози. В последующих главах 3–8 этот алгоритм адаптируется под различные классы обобщений перекладываний отрезков и используется для доказательства всех основных результатов автора.

Четвертый параграф посвящен геометрии пространств модулей абелевых дифференциалов и слоению абсолютных периодов: приведены необходимые определения и краткий обзор известных результатов об эргодических свойствах и геометрических свойствах слоев таких слоений, включая теорему МакМуллена об эргодичности слоения абсолютных периодов для рода 3, независимо доказанный Деруаном – Касамильей – Франкавильей и Хаменштадт результат об эргодичности слоения абсолютных периодов в главном страте и его обобщения, доказанные Винзором и Вайссом–Чайкой. Близкие по содержание результаты для слоений абсолютных периодов специального класса мероморфных дифференциалов – вещественно-нормированных дифференциалов – изложены в Главе 8.

В пятом параграфе обсуждаются перекладывания отрезков, между длинами которых имеются рациональные соотношения: вводятся понятия богатых и бедных семейств ограничений, определяется инвариант Са-Арну-Фати (SAF) и формулируются некоторые утверждения и гипотезы о связи SAF и устойчивости минимальных перекладываний отрезков с рациональными соотношениями между длинами. Наиболее известное семейство перекладываний отрезков, удовлетворяющее свойству обнуления SAF – перекладывания отрезков типа Арну - Рози – подробно описаны в Главе 6 и Главе 7. Там же доказаны их ключевые эргодиче-

ские свойства.

Первые четыре параграфа носят реферативный характер; пятый параграф содержит, среди прочих, и результаты автора.

В **Главе 2** определяются марковские многомерные цепные дроби и их эргодические и спектральные свойства; в этот класс многомерных цепных дробей попадают все использованные в работе алгоритмы ренормализации.

Первый параграф является вводным и содержит определения и классические примеры марковских многомерных цепных дробей. Здесь же приводятся некоторые важные определения из теории динамических систем (в том числе определение динамического коцикла).

Во втором параграфе дается определение топологического марковского сдвига и разъясняется его связь с марковскими многомерными цепными дробями. Приводится классификация счетных марковских сдвигов и обсуждаются некоторые их важные топологические свойства, а понятие диаграммы Рози, введенное в предыдущей главе в связи с индукцией Рози, обобщается для произвольной марковской многомерной цепной дроби.

В третьем параграфе с использованием диаграммы Рози определяются ключевые понятия теории ренормализации одномерных динамических систем – *ускорение* и *специальное ускорение* марковских многомерных цепных дробей. Доказывается ряд технических утверждений об эргодических свойствах специального ускорения марковских цепных дробей. Результаты этого параграфа используются впоследствии в Главах 3, 5 и 6.

Четвертый параграф посвящен критерию Фужерона – утверждению, позволяющему по комбинаторному описанию марковской многомерной цепной дроби сформулировать ее ключевые эргодические свойства (доказать эргодичность, строгую эргодичность, построить инвариантную меру и т. д.).

В пятом параграфе речь идет о свойствах ляпуновского спектра коциклов, задающих марковские алгоритмы.

Глава 3 посвящена изучению перекладываний отрезков с флипами и особенностям процесса ренормализации для этих отображений, который является адаптированной версией индукции Рози для перекладываний отрезков. Известно, что в отличие от классических перекладываний отрезков, перекладывания отрезков с флипами почти всегда не являются минимальными, поэтому множество пара-

метров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами, является множеством нулевой меры. В диссертации доказаны оценки на хаусдорфову размерность этого пространства параметров.

Первый параграф является вводным: он начинается с определения перекладываний отрезков с флипами, краткой формулировки известных результатов и содержит формулировку главного результата автора для изучаемого объекта – теоремы о верхней оценке хаусдорфовой размерности множества параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами;

Теорема 1. *Выполнена следующая оценка на хаусдорфову размерность множества* $MF(n)$*:*

$$Hdim(MF(n)) < n - 1.$$

Кроме того, используя некоторые наблюдения Главы 2, выводится утверждение о том, что при наличии произвольной меры, носителем которой является множество параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами и которая инвариантна относительно индукции Рози, почти все (по отношению к этой мере) отображения являются строго эргодичными.

Подготовке к доказательству теоремы 1 и непосредственно самому доказательству посвящены все оставшиеся параграфы этой главы. Во втором параграфе определяется алгоритм ренормализации – индукция Рози для перекладываний отрезков с флипами.

В третьем параграфе строится связанная с описанной индукцией диаграмма Рози; в четвертом эта диаграмма используется для определения специального ускорения индукции Рози; в пятом параграфе описывается соответствующий марковский сдвиг. В четвертом параграфе доказывается, что специальное ускорение индукции Рози является равномерно расширяющим отображением.

Шестой параграф является ключевым – там формулируется и доказывается свойство ограниченного искажения. Для этого для каждого значения $q \in \mathbb{R}^d$, где d – число отрезков непрерывности перекладывания отрезков с флипами,– рассматривается симплекс $\Lambda_q = \{\lambda \in \mathbb{R}^d : \langle q, \lambda \rangle < 1\}$ и вводится специальный класс мер ν_q, таких, что для любого измеримого $A \subset P\mathbb{R}^d$ выполняется $\nu_q(A) = Leb(\mathbb{R}_+ A \cap \Lambda_q)$. Введенные меры используются для определения условных вероятностей P_q; затем оценивается вероятность того, что один из столбцов

матрицы ренормализации при умножении на вектор q существенно увеличивает норму этого вектора (этот результат называется *леммой Керхгофа*, по аналогии с оценкой, которая использовалась в известном доказательстве Керхгофа теоремы Мазура – Вича о строгой эргодичности перекладываний отрезков). Важно, что эта, как и последующие, оценки являются равномерными по q. Следующие леммы позволяют уточнить полученные оценки и становятся базой для доказательства следующего ключего утверждения – экспоненциального хвоста функции крыши, которое приведено в параграфе 7.

Функция крыши – это отображение первого возвращения в подсимплекс. Функция f, определенная на симплексе Δ, имеет *экспоненциальный хвост*, если для некоторого $\sigma > 0$ выполнено $\int_\Delta e^{\sigma f} dLeb < \infty$.

В следующем параграфе вводится понятие *быстро распадающегося отображения:* марковское отображение $T : \Delta \to \Delta$ с инвариатной мерой μ, которому отвечает марковское разбиение $\Delta^{(l)}$, называется *быстро распадающимся*, если существуют такие $C_1 > 0, \alpha_1 > 0$ такие, что $\sum_{\mu(\Delta^{l)}) \leq \epsilon} \mu(\Delta^{l)}) \leq C_1 \epsilon^{\alpha_1}$ для произвольного $1 > \epsilon > 0$. Далее показывается, что утверждение о том, что соответствующий марковский сдвиг является быстро распадающимся, оказывается прямым следствием экспоненциального хвоста у функции крыши.

Наконец, доказывается, что верхняя оценка хаусдорфовой размерности исключительного множества, которая опирается на свойство быстрого распада (доказательство этой части дословно повторяет результат Авилы – Делакруа.

В **Главе 4** обсуждаются слоения на поверхностях, определенные квадратичными дифференциалами, и некоторые свойства динамики ассоциированных с этими слоениями отображений первого возвращения на трансверсаль – линейных инволюций, в частности, доказывается обобщение теоремы Марми – Муссы – Йоккоза о наличии решений когомологических уравнений. Основные отличия в доказательстве ключевого результата от случая абелевых дифференциалов и перекладываний отрезков связаны с комбинаторными особенностями алгоритма ренормализации для случая неприводимых линейных инволюций.

В первом параграфе приводится определение линейных инволюций и описывается их связь с измеримыми слоениями на поверхностях (как ориентируемыми, так и неориентируемыми). Формулируются ключевые известные результаты: теорема Дантони – Ногейры о наличии периодической орбиты у типичной линейной

инволюции общего вида, и теоремы Буасси – Ланно, позволяющие, во–первых, определить в комбинаторных терминых наиболее интересный с геометрической точки зрения класс линейных инволюций – неприводимые линейные инволюции – отвечающий отображениям первого возвращения на трансверсаль для слоений на поверхностях, заданных квадратичными дифференциалами, а во–вторых, доказать, что типичные линейные инволюции внутри этого класса минимальны.

Во втором параграфе вводятся когомологические уравнения над линейными инволюциями (по аналогии с когомологическими уравнениями над перекладываниями отрезков) и формулируются два результата настоящей диссертации: теорема о разрешимости когомологических уравнений для линейных инволюций типа Рота и теорема о том, что неприводимая линейная инволюция почти всегда является отображением типа Рота.

В третьем параграфе вводится алгоритм ренормализации, который по аналогии с описанными выше алгоритмами также называется индукцией Рози (впервые он был описан Дантони и Ногейрой). Также определяются два ускорения этого алгоритма – индукция Зорича и специальное ускорение.

В четвертом параграфе определяются линейные инволюции типа Рота. Структура определения совпадает с аналогичным определением для перекладываний отрезков типа Рота. Определение состоит из трех условий, сформулированных в терминах индукции Рози: условие на скорость роста (это некоторый аналог условия ограниченного искажения для алгоритма индукции Рози), наличие спектральной дыры (оно гарантирует строгую эргодичность рассматриваемых линейных инволюций) и когерентность (это свойство вытекает из мультипликативной эргодической теоремы).

В пятом параграфе доказывается один из сформулированных во втором параграфе результатов:

Теорема 2. *Пусть T – минимальная линейная инволюция типа Рота. Тогда для любого $\widehat{\Phi} \in \widehat{BV}^1_*(\sqcup A_\alpha)$ существует функция χ, постоянная на каждом A_α, и ограниченная функция Ψ на $\widehat{X}$ такие, что*

$$\Psi - \Psi \circ T = \widehat{\Phi} - \chi.$$

Доказательство опирается на применение теоремы Готтшалка–Хедлунда, но для этого требуется подготовительная работа в связи с тем, что линейная инво-

люция является минимальным, но не непрерывным отображением. Далее задача сводится к оценке сумм Бирхгофа. Оценка сумм Бирхгофа сводится к оценке так называемых *специальных сумм Бирхгофа*, а для их оценки используются свойства линейных инволюций типа Рота.

В шестом параграфе доказывается второй результат, связанный с линейными инволюциями:

Теорема 3. *Линейные инволюции типа Рота составляют подмножество полной меры в множестве всех неприводимых линейных инволюций.*

Для доказательства последовательно проверяется, что каждое из свойств, определяющих линейную инволюцию типа Рота, выполняется почти всегда для неприводимых линейных инволюций. Параграф разбит на несколько подпараграфов: в первом доказывается, что свойства когерентности и спектральной дыры выполнены почти всегда, во втором показано, что свойство ограниченного роста выполняется почти всегда, используя техническую лемму, которую в совместной работе доказал Э. Ланно, а в третьем параграфе приводится доказательство этой леммы.

Так как общая логика доказательства обеих ключевых теорем во многом повторяет стратегию доказательств теорем Марми–Муссы–Йоккоза, основное внимание в изложении доказательств уделено описанию отличающих линейные инволюции от перекладываний отрезков моментов.

Глава 5 посвящена еще одному обобщению перекладываний отрезков – отображению сдвигов отрезков, введенному в 1994 году М. Бошерницаном и И. Корнфельдом. Такое кусочно–линейное отображение отрезка в себя, как и в случае перекладываний отрезков, на каждом из конечного числа отрезков непрерывности является сохраняющей ориентацию изометрией. Отличие от перекладываний отрезков состоит в том, что отрезки–образы не обязаны задавать разбиение отрезка–носителя, а могут пересекаться. Бошерницан и Корнфельд показали, что отображения сдвигов отрезков делятся на две группы: отображения конечного типа, которые сводятся к перекладываниям отрезков, и отображения бесконечного типа, аттрактором которых является множество канторовского типа и динамика может кардинально отличаться от перекладываний отрезков. Они также сформулировали гипотезу о том, что почти все отображения сдвигов отрезков для

заданного количества отрезков являются отображениями конечного типа. В настоящее время эта гипотеза доказана только для отдельных классов отображений сдвигов отрезков.

Первый параграф – это краткое введение в тему с формулировками ранее известных результатов и гипотез.

Второй параграф содержит доказательство ряда утверждений об эргодических характеристиках отображений сдвигов отрезков типа Бруина – Трубецкого – специального класса отображений сдвигов отрезков, для которого гипотеза Бошерницана – Корнфельда была доказана ранее Бруином и Трубецким. Центральной является следующая

Теорема 4. *Существует такая вероятностная мера μ, носителем которой является множество параметров A, задающее отображения Бруина – Трубецкого бесконечного типа, что для почти всех (по отношению к μ) $(\alpha, \beta) \in A$ отображения сдвигов отрезков $R_{\alpha,\beta}$ строго эргодичны.*

Для ее доказательства вводится новый алгоритм ренормализации, отличный от описанного Бруином и Трубецким, и изучаются эргодические свойства специального ускорения этой ренормализации. В частности, строится ассоциированная с этим алгоритмом симплициальная система и, с использованием упомянутого в Главе 2 критерия Фужерона, доказывается, что верна следующая

Теорема 5. *Верна следующая оценка на хаусдорфову размерность множества A из предыдущей теоремы:*

$$Hdim(A) < 2.$$

В третьем параграфе вводится следующий класс отображений сдвигов отрезков – двойные вращения. Как и в случае отображений Бруина – Трубецкого, ранее (из работы Бруина–Клака) было известно, что гипотеза Бошерницана – Корнфельда верна для этого класса отображений сдвигов отрезков. В работе Бруина – Клака, где она доказана, сформулирован ряд открытых вопросов, ответ на которые содержится в следующем утверждении:

Теорема 6. *Множество параметров, задающих отображение двойного вращения бесконечного типа, имеет хаусдорфову размерность строго меньше 3.*

Кроме того, аналогично предыдущему параграфу, строится естественная мера μ', носителем которой является множество параметров, задающих двойные вращения бесконечного типа, и показывается, что

Теорема 7. *Почти все (по отношению к μ') двойные вращения бесконечного типа являются строго эргодичными.*

Доказательства этих теорем вынесены в четвертый параграф.

Третий параграф завершается обсуждением приложений полученных результатов к изучению эргодических свойств бильярдного потока для так называемых бильярдов в многоугольниках со шпионскими зеркалами. Стол такого бильярдного потока представляет собой многоугольник, к границе которого добавлены прямолинейные отрезки, которые при ударе бильярдного шара с одной стороны (например, слева) являются прозрачными, а при ударе с другой стороны становятся классическими элементами границы, для которых выполнен закон геометрической оптики – угол падения равен углу отражения. Такие бильярды впервые были описаны в работе Бошерницана и Корнфельда. Двойные вращения являются отображениями первого возвращения бильярдного потока на трансверсаль для шпионского бильярда в квадрате с прямолинейным зеркалом, параллельным стороне граничного квадрата. Кроме того, для произвольного бильярда в многоугольнике доказано, что

Теорема 8. *Бильярдный поток в многоугольнике со шпионскими зеркалами имеет нулевую энтропию.*

В четвертом параграфе доказываются основные результаты третьего параграфа. Для этого вводится два алгоритма ренормализации – один из них предложен автором, а второй – М. Артиджани, Ш. Фужероном и П. Юбером. Доказывается, что одна из этих индукций является ускорением второй. С помощью этого утверждения доказывается существование специального ускорения (обоих алгоритмов ренормализации). Затем строится симплициальная система, ассоциированную с этим специальным ускорением, и показывается, что она удовлетворяет критерию Фужерона. Из этого следуют оба утверждения.

В пятом параграфе приводится доказательство теоремы 8.

Глава 6 посвящена еще одному обобщению перекладываний отрезков и отображений сдвигов отрезов – *системам изометрий*. Системы изометрий определяются на мульти–интервале (дизъюнктном объединении нескольких интервалов) и состоят из нескольких пар равных подотрезков мульти–интервала – носителя; между любыми двумя отрезками из одной пары задана сохраняющая ориентацию изометрия. С каждой системой изометрий можно связать ленточный комплекс – аналог конструкции зашнурованных прямоугольников для перекладываний отрезков. В случае систем изометрий эти двумерные комплексы с вертикальным слоением на нем активно используются в геометрической теории групп для изучения действий свободной группы на $\mathbb{R}$–деревьях. Система изометрий не является отображением, но, как и в случае перекладываний отрезков, можно определить орбиты систем изометрий и изучить топологические и эргодические свойства таких орбит. Полученные результаты можно сформулировать в терминах свойств слоев вертикального слоения на ленточном комплексе.

Первый параграф является вводным – здесь приводится определение систем изометрий и их классификация, известная из работ по геометрической теории групп, и формулируются наиболее важные гипотезы, которые в настоящее время остаются открытыми задачами, среди которых центральной является

Гипотеза 1. *Множество параметров, задающих минимальные системы изометрий, орбиты которых – бесконечные деревья, является подмножеством нулевой меры в множестве параметров, задающих сбалансированные системы изометрий, и его хаусдорфова размерность строго меньше $n-1$, где n – число отрезков в системе изометрий.*

Во втором параграфе фокус смещается к обсуждению наиболее интересного для нас класса систем изометрий – *специальных систем изометрий порядка 3* – и доказательству гипотезы 1 для этого класса. Показано, что множество параметров, задающих специальные системы изометрий порядка 3 тонкого типа – это известный фрактал под названием *Салфетка Рози*. Этот фрактал ранее возникал в нескольких разделах математики, включая символическую динамику, геометрическую теорию групп и др. Во всех этих контекстах доказывалось утверждение о нулевой лебеговой меры Салфетки Рози и возникал вопрос о хаусдорфовой размерности этого фрактала. Верхняя оценка на хаусдорфову размерность Салфетки

Рози была получена в работе А. Авилы, П. Юбера и А. Скрипченко. Мы приводим набросок доказательства этого утверждения и, в частности, подробно описываем алгоритм ренормализации для специальных систем изометрий порядка 3. Нам потребуется убедиться, что отвечающий этой ренормализации коцикл обладает свойствами равномерного расширения и ограниченного искажения (аналогичные вычисления описаны в главе 3 в связи с ренормализацией для перекладываний отрезков с флипами). Предложенный нами подход впоследствии был доработан Ш. Фужероном, который получил уточненную оценку. Наиболее точную оценку получили недавно М. Поликотт и Б. Сьюэлл, их результат практически совпадает с численной оценкой, полученной И. Дынниковым и Р. Де Лео.

В третьем параграфе обсуждается вопрос о существовании естественной меры, носителем которой является Салфетка Рози. Построение такой меры является одним из центральных результатов этой главы и всей диссертации.

Теорема 9. *Существует и единственна мера максимальной энтропии для специального потока над алгоритмом ренормализации, определающем Салфетку Рози.*

Доказательство ключевой теоремы состоит из нескольких этапов: сначала определяется специальный поток, ассоциированный с системой изометрий, а затем с использованием теории термодинамического формализма для марковских сдвигов с счетным числом состояний, разработанной О. Саригом, доказывается существование и единственность меры максимальной энтропии для построенного специального потока, после чего эта мера по формуле Абрамова – Рохлина проецируется на меру, носителем которой является Салфетка Рози. Применение формализма Сарига требует проверки выполнения ряда комбинаторных свойств ассоциированного с изучаемым алгоритмом ренормализации марковского сдвига. В качестве потенциала для построения меры максимальной энтропии используется ренормализационный коцикл (с точностью до константы). Впоследствии этот подход, реализованный для конкретного алгоритма ренормализации, являющегося многомерной цепной дробью, был обобщен Ш. Фужероном на некоторый класс многомерных цепных дробей. Полученный критерий сформулирован в Главе 2 и использован для доказательства основных результатов Главы 5.

В четвертом параграфе вновь рассматриваются системы изометрий общего

вида и описывается альтернативная ренормализация для систем изометрий – машина Рипса, которая была определена в геометрической теории групп как геометрическая презентация движений Маканина – Разборова.

В пятом параграфе речь идет о топологической структуре орбит систем изометрий тонкого типа. Известно, что орбиты являются бесконечными деревьями и почти все из них имеют один или два топологических конца. Мы формулируем два утверждения, показывающих, что оба варианта возможны.

Теорема 10. *Существует система изометрий тонкого типа, почти все орбиты которой имеют ровно 1 топологический конец.*

Теорема 11. *Существуют тонкие системы изометрий, почти все орбиты которых имеют два топологических конца.*

Доказательству каждого из этих утверждений посвящен отдельный параграф.

В шестом параграфе доказывается теорема 10: строится система изометрий, после применения некоторого конечного число шагов алгоритма ренормализации (машины Рипса) к которой получается та же система, сжатая в λ раз ($\lambda > 1$). Такие системы называются самоподобными.

В седьмом параграфе доказана теорема 11.

В **Главе 7** приведены приложения доказанных в предыдущих разделах результатов к топологии: сформулирована задача С. П. Новикова об асимптотическом сечении 3–периодических поверхностей и доказана оценка на скорость диффузии в случае хаотического режима для центрально–симметричной поверхности рода 3 с двумя двойными седлами, а также изучена связь перекладываний отрезков типа Арну–Рози с хаотическими слоениями на уже упомянутой центрально–симметричной поверхности с 2 седлами и доказаны новые эргодические перекладываний Арну–Рози (а значит, и соответствующих хаотических слоений).

В первом параграфе приводится постановка задачи С. П. Новикова и краткий обзор известных ранее результатов. Приводится определение хаотических режимов и интерпретация этого понятия на двух возможных языках: плоских сечений 3–периодических поверхностей и слоев измеримого слоения на поверхности в трехмерном торе.

Второй параграф содержит формулировку новых результатов, в основном полученных как приложения описанных ранее свойств систем изометрий и других

перекладываний отрезков.

В третьем параграфе описана связь между системами изометрий тонкого типа из предыдущей главы и хаотических режимов в задаче Новикова.

Четвертый параграф содержит доказательство сформулированных выше свойств перекладываний отрезков типа Арну–Рози.

Доказательство оценки диффузии, которому посвящены параграфы 5 и 6, опирается на ряд результатов о спектральных свойствах многомерных цепных дробей, которые задают алгоритмы ренормализации. Аргументы, обобщающие использованные в этой главе, обсуждаются в Главе 2. В 5 параграфе определяются показатели Ляпунова и доказывается простота ляпуновского спектра и свойство Пизо. В 6 параграфе изучается связь между скоростью диффузии и показателями Ляпунова.

В той же главе примеры ленточных комплексов, слои которых имеют 1 или 2 топологических конца, построенные в главе 6, используются для построения хаотических режимов в задаче Новикова, сечения в которых имеют ровно одну или бесконечно много компонент связности.

Глава 8 посвящена изучению слоения абсолютных периодов для вещественно–нормированных дифференциалов с единственным полюсом второго порядка. Результаты этой главы позволяют сопоставить геометрические свойства пространства модулей вещественно–нормированных дифференциалов с описанными в Главе 1 характеристиками пространства модулей абелевых дифференциалов. Основным инструментом, использованным для доказательства центральных результатов этой главы, является алгоритм ренормализации, комбинаторное описание которого сводится к применению второго движения Васильева для хордовых диаграмм.

В первом параграфе определяются вещественно–нормированные дифференциалы. Во втором параграфе описывается комбинаторная модель, отвечающая пространству вещественно–нормированных дифференциалов с полюсом порядка 2. В третьем параграфе определяется слоение абсолютных периодов и с помощью введенной ранее комбинаторной модели доказываются центральные утверждения о числе связных компонент локуса слоения абсолютных периодов с заданной группой периодов.

Заключение содержит краткое резюме полученных результатов, а также об-

зор открытых вопросов для продолжений исследований.

Благодарности

Автор благодарит всех своих соавторов за увлекательные обсуждения и удовольствие от совместной работы. Отдельно автор благодарит И. А. Дынникова за интерес к работе и поддержку на всех этапах подготовки текста. Автор благодарен всему коллективу отдела геометрии и топологии МИАН им. Стеклова, а также коллективу факультета математики НИУ ВШЭ и коллективу Центра перспективных исследований Сколтеха за теплую и творческую атмосферу.

Глава 1

Перекладывания отрезков: определения и ключевые результаты

1.1 Перекладывания отрезков

В этом разделе мы будем рассматривать перестановки из элементов $1, \ldots, n$, которые являются *неприводимыми* в следующем смысле:

$$\pi\{1, \ldots, k\} \neq \{1, \ldots, k\}$$

для любого $1 \leq k < n$. Для вектора $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ и перестановки π перекладывание отрезков $T(x) = T_{\lambda,\pi}(x)$ – это отображение полуинтервала $I = [0, \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ в себя, определенное следующим образом:

$$T(x) = x + \sum_{\pi(j)<\pi(i)} \lambda_j - \sum_{j<i} \lambda_j, \tag{1.1}$$

если $x \in I_i = [\sum_{j<i} \lambda_j, \sum_{j\leq i} \lambda_j)$.

Пример перекладывания отрезков изображен на рисунке 1.1.

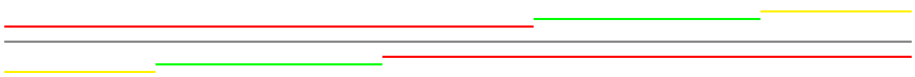


Рис. 1.1: Перекладывание отрезков

Орбитой точки x под действием отображения T называется множество точек, полученных итерацией отображения T из x: $x, T(x), T^2(x), T^3(x), \ldots$. Нас будут интересовать топологические и эргодические свойства орбит отображения $T(x)$.

Определение. Отображение называется *минимальным*, если все его орбиты всюду плотны.

Для перекладываний отрезков, заданных неприводимой перестановкой, М. Кин ([87]) сформулировал достаточное условие минимальности.

Определение. Пусть T – перекладывание отрезков, заданное неприводимой перестановкой. Будем говорить, что перекладывание отрезков удовлетворяет *условию Кина*, если любая точка разрыва T имеет бесконечную орбиту и для любых двух точек разрыва T их орбиты не пересекаются.

В частности, если длины отрезков непрерывности отображения T рационально несоизмеримы, то условие Кина выполнено. При этом

Теорема 12 (Кин)**.** *Все перекладывания отрезков, удовлетворяющие условию Кина, минимальны.*

Следствие 13. *При фиксированной неприводимой перестановке почти все (по отношению к мере Лебега) наборы длин* $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ *задают минимальные перекладывания отрезков.*

Теорему Кина можно рассматривать как обобщение результата о том, что орбиты поворота окружности на иррациональный угол всюду плотны.

Определение. Отображение $F : X \to X$ называется *строго эргодичным*, если оно допускает единственную вероятностную инвариантную борелевскую меру.

Замечание 1. Строго эргодичное отображение всегда эргодично и минимально.

В [87] была сформулирована гипотеза, которую позже доказали независимо в [104] и [128]:

Теорема 14 (Мазур, Вич)**.** *Почти все (по отношению к мере Лебега) перекладывания отрезков строго эргодичны.*

Как и следствии 13, «почти все перекладывания отрезков» здесь означает для фиксированной неприводимой перестановки и почти все векторов длин.

При этом заменить «почти все» на «все» нельзя: известны примеры минимальных перекладываний отрезков, допускающих две и более эргодических меры (например, [88] или [89]). Более точно, верхняя оценка на число эргодических мер, которые допускает перекладывание n отрезков, приведено в следующем утверждении, которое следует из работ Катка ([9]) и Вича ([128]):

Теорема 15. *Число эргодических мер для перекладывания n отрезков не может превышать $[\frac{n}{2}]$.*

Замечание 2. Верхняя оценка $[\frac{n}{2}]$ здесь – это оценка на род g поверхности, построенной по перекладыванию отрезков и обладающей следующим свойством: отображением первого возвращения на горизонтальную трансверсаль для вертикального слоения на этой является данное перекладывание отрезков. Конструкции такой поверхности коротко описаны в следующем параграфе.

Эффективность этой оценки была доказана Е. Сатаевым ([15]) в терминах потоков на поверхностях и Дж. Фикеншером в терминах перекладываний отрезков ([75]). В обоих случаях были построены явные примеры перекладываний отрезков или ориентированной поверхности с линейным потоком на ней, допускающие ровно g эргодических мер.

Перемешивающие свойства перекладываний отрезков также хорошо изучены.

Определение. Отображение $F : X \to X$, определенное на вероятностном пространстве X с мерой μ и σ –алгеброй $\mathcal{X}$ и сохраняющее μ, называется *сильно перемешивающим*, если

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap F^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$$

для любых измеримых $A, B \in \mathcal{X}$.

Отображение F *слабо перемешивающее*, если для любых измеримых $A, B \in \mathcal{X}$

$$\frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap F^{-k}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

А. Каток доказал, что перекладывания отрезков не могут быть сильно перемешивающим отображением ([85]). При этом, как было показано в [32], наличие слабого перемешивания является типичной ситуацией:

Теорема 16 (Авила – Форни). *Почти все перекладывания отрезков, заданные неприводимой перестановкой, которая не является вращением, – слабо перемешивающие отображения.*

Еще один аспект изучения перекладываний отрезков – вопрос о разрешимости *когомологических уравнений*. В теории динамических систем когомологическим уравнением называется уравнение вида

$$g = f \circ T - f, \tag{1.2}$$

где отображения $T : X \to X$ и $g : X \to \mathbb{R}$ заданы (T чаще всего является биекцией для некоторого множества X) и требуется найти, когда уравнение 1.2 разрешимо для какого–то отображения $f : X \to \mathbb{R}$.

Когомологические уравнения для перекладываний отрезков были впервые рассмотрены Форни в контексте изучения линейных потоков на поверхностях высокого рода и преобразований времени для таких потоков ([70]). С помощью сложных аналитических инструментов Форни доказал существование решения когомологического уравнения для почти всех направлений линейного потока на заданной поверхности с абелевым дифференциалом.

Его результат был несколько уточнен для когомологических уравнений над перекладываниями отрезков Марми, Мусса и Йоккозом ([102]). Их работа заложила основу для изучения жестких свойств аффинных перекладываний отрезков и, в целом, для развития методов КАМ теории в одномерной динамике (последующие результаты опубликованы в [103]).

Речь, в частности, идет об обобщении понятия *чисел Рота* на перекладывания отрезков. Иррациональное число α называется *числом Рота*, если для любого $\epsilon > 0$ существует такая положительная константа C_ϵ, что $|q\alpha - p| \geq C_\epsilon q^{1+\epsilon}$ для всех рациональных $\frac{p}{q}$. Числа Рота допускают несколько эквивалентных определений, в том числе такое: α является числом Рота тогда и только тогда, когда для всех $r, s \in \mathbb{R}$ с условием $r > s + 1 \geq 1$ и для всех функций $\Phi \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T})$ на $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с нулевым средним $\int_{\mathbb{T}} \Phi dx = 0$ существует единственная функция $\Psi \in \mathcal{C}^s(\mathbb{T})$ с нулевым средним, для которой выполняется $\Psi - \Psi \circ R_\alpha = \Phi$, где R_α – вращение на окружности $\mathbb{T}$: $R_\alpha(x) = x + \alpha$. Из теоремы Рота известно, что все алгебраические иррациональные числа являются числами Рота; более того, множество чисел Рота имеет полную меру и инвариантно относительно действия модулярной группы

$SL(2,\mathbb{Z})$. В работе [102] эта теорема обобщена на случай перекладывания отрезков – определены перекладывания отрезков типа Рота (см раздел 1.3 в [102] и определение в разделе 4.4) и доказаны следующие утверждения:

Теорема 17 (Марми – Мусса – Йоккоз)**.** *Пусть T – перекладывание отрезков типа Рота, удовлетворяющих условию Кина. Обозначим набор интервалов непререрывности этого отображения (I_α) и рассмотрим такие классы функций: $BV(\sqcup I_\alpha)$ – это функции с нулевым средним, ограничение которых на каждый отрезок непрерывности является функцией ограниченной вариации, а $BV^1(\sqcup I_\alpha)$ – это функции, которые абсолютно непрерывны на каждом из I_α, первые производные которых принадлежат $BV(\sqcup I_\alpha)$. Пусть $\Phi \in BV^1(\sqcup I_\alpha)$. Тогда существуют такие функция χ, постоянная на каждом интервале I_α, и ограниченная функция Ψ, что*

$$\Psi - \Psi \circ T = \Phi - \chi$$

.

Теорема 18 (Марми – Мусса – Йоккоз)**.** *Множество параметров, задающих перекладывания отрезков типа Рота, является множеством полной меры (по отношению к мере Лебега).*

1.2 Измеримые слоения на поверхностях и бильярды в рациональных многоугольниках

Эргодические свойства перекладываний отрезков имеют явную топологическую интерпретацию в терминах свойств измеримых слоений на гладких поверхностях и голоморфных дифференциальных форм на замкнутых римановых поверхностях. Понятие *измеримого слоения* на поверхности было введено У. Тёрстоном в связи с изучением классов диффеоморфизмов поверхностей и означает наличие слоения, гладкого (класса C^∞) везде, за исключением конечного числа изолированных точек, которые являются седлами с $k \geq 3$ сепаратрисами, при этом слоение снабжено также конечной трансверсальной мерой, которая C^∞ – эквивалентна мере Лебега. Чтобы описать эргодические свойства измеримых слоений на римановых поверхностях, введем несколько обозначений.

Пусть $M_{g,b}$ – ориентированная поверхность рода g с b граничными компонентами, а $\mathrm{MCG}(M_{g,b}) = \mathrm{Diff}^+(M_{g,b})/\mathrm{Diff}_0(M_{g,b})$–ее модулярная группа. Пусть $\mathcal{MF}(M_{g,b})$ – пространство классов эквивалентности измеримых слоений на $M_{g,b}$ (отношение эквивалентности порождается гомотопными тождественному диффеоморфизмами и движениями Уайтхеда). Пусть $\mathcal{PMF}(M_{g,b})$ – соответствующее проективное пространство. Известно, что $\mathcal{MF}(M_{g,b})$ имеет структуру топологического кусочно–линейного (PL) многообразия (и, более того, множество классов эквивалентности гомеоморфно $\mathbb{R}^{6g-6} - \{0\}$, если $g \geq 2$). Тогда мера Лебега задается естественным образом в каждой из карт (подробности написаны в [69]).

В той же работе, где была доказана теорема 14, Мазур доказал следующее утверждение:

Теорема 19 (Мазур)**.** *Действие $MCG(M_{g,b})$ на $\mathcal{PMF}(M_{g,b})$ эргодично (по отношению к мере Лебега), а почти все (по отношению к мере Лебега) измеримые слоения из $\mathcal{MF}(M_{g,b})$ строго эргодичны.*

Перечисленные выше результаты тесно связаны также с эргодическими свойствами бильярдов в рациональных многоугольниках. Рассмотрим плоский компактный многоугольник Q (не обязательно выпуклый). Маленький шар движется с единичной скоростью внутри Q и при соприкосновении с границей многоугольника выполняется закон геометрической оптики: угол падения равен углу отражения. Бильярдный поток задан в единичном касательном расслоение к Q, а бильярдное отображение – это сечение бильярдного потока: это отображение действует на пары $(x, v) \in TQ$, где x – внутренняя точка стороны Q, а v – вектор направления шара (направлен внутрь мноугольника). Если t – это параметр длины на периметре Q, а θ – угол между v и соответствующей стороной многоугольника, то μ – инвариантная мера для бильярдного отображения – задается следующим образом: $\mu = \sin\theta d\theta dt$.

Из теоремы Кина следует, что для типичного направления θ бильярдный поток минимален (это доказано, например, в [45]). Верно и более сильное утверждение ([91]):

Теорема 20 (Керхгоф – Мазур – Смайли)**.** *Для почти всех θ бильярдный поток f_t строго эргодичен.*

Следствие 21. *Существует G_δ множество многоугольников, для которых бильярдный поток эргодичен.*

Кроме того, известно ([82], [86]), что

Теорема 22. *Топологическая энтропия бильярдного потока в многоугольнике равна нулю.*

Замечание 3. Для случая рациональных многоугольников это утверждение прямо следует из того, что отображение первого возвращения на трансверсаль – это перекладывания отрезков, имеющих линейную комбинаторную сложность. Утверждение теоремы 22 верно для произвольных, а не только рациональных многоугольников.

По каждому перекладыванию отрезков можно построить ориентируемую поверхность с измеримым слоением на ней такую, что отображение первого возвращения для слоения на некоторую трансверсаль на этой поверхности совпадает с этим перекладыванием отрезков. Среди наиболее используемых конструкций для таких пар «поверхность + слоение» можно выделить две: склейка трансляционной поверхности из многоугольника с четным числом сторон, стороны которого разбиваются на равные пары (такая конструкция описана в разделе 2.2 [130]) и «зашнурованные прямоугольники», предложенные Вичем в [128], – в этом случае поверхность склеивается из двумерного комплекса, составленного из прямоугольников с вертикальным слоением на них (подробное описание можно найти в разделе 2.5 [130]).

1.3 Индукция Рози

Основной инструмент, который используется в доказательстве всех перечисленных выше результатов, – это алгоритм ренормализации, который в случае перекладываний отрезков носит название *индукция Рози.*

Пусть T - перекладывание отрезков, заданное перестановкой π и вектором длин $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Точки разрыва этого отображения мы обозначаем u_i^t, а точки разрыва отображения T^{-1} обозначим u_i^b; концы отрезка-носителя $0 = u_i^t = u_i^b$ и $1 = u_{n+1}^t = u_{n+1}^b$. Рассмотрим крайнюю справа особую точку, отличную от правого конца отрезка - носителя; пусть это точка $u_n^\alpha = \max_i(u_n^t, u_n^b)$. Рассмотрим

отображение первого возвращения отображения T на интервал $J = [u_0, u_n^\alpha) = [u_0, \sum_{i=1}^n \lambda_i - min_i(\lambda_i))$. Легко видеть, что это отображение тоже является перекладыванием отрезков, причем число отрезков остается неизменным и сохраняется свойство неприводимости. Назовем это отображение T'. Один шаг индукции Рози превращает перекладывание отрезков T в перекладывание отрезков T'.

Таким образом, индукция Рози - это динамическая система, определенная на пространстве перекладываний отрезков. В случае перекладываний двух отрезков этот алгоритм ренормализации совпадает с алгоритмом Евклида в следующем смысле: если длины отрезков непрерывности исходного перекладывания отрезков T были равны (λ_A, λ_B), то после применения одного шага индукции Рози получается перекладывание отрезков с длинами $(\lambda'_A, \lambda'_B) = (\lambda_A - \lambda_B, \lambda_B)$ (если $\lambda_A > \lambda_B$) или $(\lambda'_A, \lambda'_B) = (\lambda_A, \lambda_B - \lambda_A)$ (если $\lambda_B > \lambda_A$). Матрицы линейного отображения, задающего преобразования длин, будут такими:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Добавим ренормализующее условие: $\lambda_A + \lambda_B = 1$. Обозначим $x = \frac{\lambda_B}{\lambda_A}$, если $\lambda_B < \lambda_A$, и $x = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$, если $\lambda_A < \lambda_B$. Тогда проективизация описанного выше линейного отображения – отображение ренормализации определяется как

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{если } 0 < x < \frac{1}{2} \\ g(1-x) = \frac{1-x}{x}, & \text{если } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Чтобы увидеть это, достаточно вычислить новые (после применения проективного отображения) длины $\frac{\lambda'_A}{\lambda'_A+\lambda'_B}$ и $\frac{\lambda'_B}{\lambda'_A+\lambda'_B}$ и найти их отношение. Отображение Гаусса $G(x) = \{\frac{1}{x}\}$ является ускорением этой ренормализации в следующем смысле: $G(x) = g^n(x)$, где n - наименьшее натуральное число, для которого $g^{n-1}(x) \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Рассмотрим один шаг индукции Рози для перекладывания произвольного числа отрезков:

$$\mathcal{R}(T) = T'.$$

Так как каждое перекладывание отрезов задается перестановкой и вектором длин отрезков, можно считать, что индукция Рози действует на пространстве пар (π, λ):

$$\mathcal{R}(\pi, \lambda) = (\pi', \lambda').$$

Таким образом, у действия $\mathcal{R}$ есть две составляющие : комбинаторная (действие на перестановке) и метрическая (действие на векторе длин).

Комбинаторная часть зависит от того, являлась ли u^α точкой из множества u^t или u^b (то есть какой из крайних справа отрезков оказался длиннее - отрезок исходного разбиения или его образ). Более длинный отрезок, который сохранит свое положение, будет называться *победителем*, а более короткий, сохраняющий длину, но изменяющий положение в перестановке, - *проигравшим*. Если $\lambda_n > \lambda_{\pi^{-1}(n)}$, то

$$\pi' = a(\pi) = \begin{cases} \pi(i) & \text{если } \pi(i) < \pi(n), \\ \pi(n) + 1 & \text{если } \pi(i) = n, \\ \pi(i) + 1 & \text{если } \pi(i) > \pi(n), \end{cases}$$

а длины выражаются так:

$$\lambda'_i = \begin{cases} \lambda_n - \lambda_{\pi^{-1}(n)}, & \text{если } i = n, \\ \lambda_i, & \text{если } i < n. \end{cases}$$

Если же $\lambda_n < \lambda_{\pi^{-1}(n)}$, то

$$\pi' = b(\pi) = \begin{cases} \pi(i), & \text{если } i \le \lambda_{\pi^{-1}(n)}, \\ \pi(n), & \text{если } \pi(i) = \lambda_{\pi^{-1}(n)} + 1, \\ \pi(i-1), & \text{если } i > \lambda_{\pi^{-1}(n)} + 1. \end{cases}$$

и

$$\lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i, & \text{если } i < \lambda_{\pi^{-1}(n)}, \\ \lambda_{\pi^{-1}(n)} - \lambda_n & \text{если } i = \lambda_{\pi^{-1}(n)}, \\ \lambda_n, & \text{если } i = \lambda_{\pi^{-1}(n)} + 1, \\ \lambda_{i-1}, & \text{если } i > \lambda_{\pi^{-1}(n)} + 1. \end{cases}.$$

Примеры одного шага индукции Рози изображены на рисунке 1.2: индукция применяется справа; в первом случае победителем являлся красный [верхний] отрезок, а проигравшим – желтый отрезок; во втором случае победителем был желтый [нижний] отрезок, а проигравшим – красный отрезок.

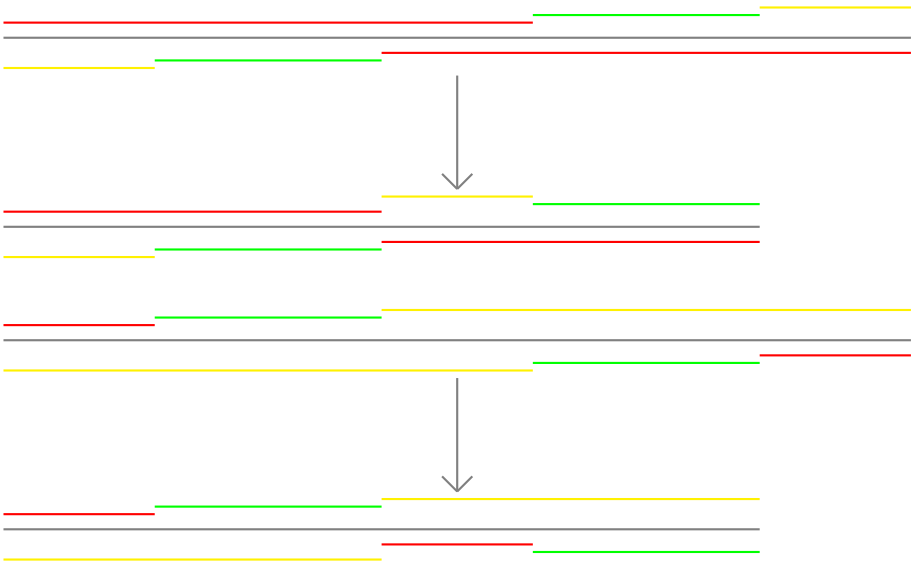


Рис. 1.2: Применение индукции Рози.

Подробно индукция Рози (которая часто называется индукцией Рози-Вича) и ее роль в доказательстве эргодических свойств перекладываний отрезков описана, например, в [130]. Индукция Рози является представителем класса *марковских многомерных цепных дробей* (см раздел 2). Из написанного выше понятно, что комбинаторная составляющая описывается *диаграммой Рози* - конечным ориентированным графом, вершинами которого являются все неприводимые перестановки из n элементов, а две вершины π и π' соединены направленным ребром, если одна из перестановок получается из другой при применении описанного выше алгоритма: $\pi' = a(\pi)$ или $\pi' = b(\pi)$ (см. рис. 1.3, разные виды стрелок отвечают разному выбору победителей).

Метрическая часть (изменение длин отрезков) описывается линейными преобразованиями, причем длины отрезков отображения T выражаются через длины отрезков отображения T' как линейная комбинация, где все коэффициенты равны 0 или 1. В случае добавления условия ренормализации ($\sum_i \lambda_i = 1$) конус длин $\mathbb{R}^n_+$ заменяется на конечномерный симплекс, а линейные преобразования заменяются на их проективизацию.

Таким образом, динамика алгоритма ренормализации описывается топологическим марковским сдвигом (определение приведено в следующей главе) на пространстве бесконечных путей на диаграмме Рози.

Еще одно важное понятие, которая активно используется в настоящей диссертации, – это *ускорение индукции Рози*, которое было предложено А. Зоричем

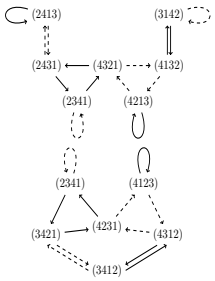


Рис. 1.3: Примеры диаграмм Рози.

в [137]. Один шаг индукции Зорича включает в себя все последовательные итерации индукции Рози с одним и там же победителем и одну итерацию с новым победителем (см. подробное описание в [130]). Для этого преобразования существует единственная инвариантная вероятностная мера, абсолютно непрерывная по отношению к мере Лебега. В последующих главах мы определим аналог ускорения по Зоричуиндукций Рози для различных обобщений перекладываний отрезков.

1.4 Пространства модулей абелевых дифференциалов и слоения абсолютных периодов

Помимо перечисленных выше задач, индукция Рози - это очень эффективный инструмент для изучения геометрии пространств модулей абелевых дифференциалов. Так, в работе [92] с помощью комбинаторного анализа компонент связности диаграммы Рози получена классификация связных компонент пространств модулей абелевых дифференциалов, в [74] получена полная классификация замыканий орбит действия $SL(2,\mathbb{R})$ в пространстве модулей.

Еще один важный объект, активно изучаемый в динамике и геометрии пространств модулей абелевых дифференциалов, - это *слоения абсолютных периодов*.

Обозначим через $H(d_1,\dots,d_m)$, $d_1+\dots+d_m=2g-2$ подмногообразие пространства голоморфных дифференциалов, состоящее из дифференциалов с нулями, порядки которых задаются вектором $d_1,\dots,d_m$. Нам будет удобно использовать также мультипликативные обозначения: $1^{k_1}2^{k_2}\dots$ – это разбиение на k_1 частей равных 1, k_2 частей равных 2, и так далее. В частности, *главный страт*

$H(1,\dots,1) = H(1^{2g-2})$ состоит из дифференциалов общего положения, то есть таких, у которых все нули простые.

На каждом страте $H(d_1,\dots,d_m)$ определено естественное действие группы $SL(2,\mathbb{R})$; это действие можно описать в терминах *отображений периодов* или задать с помощью *периодических координат* следующим образом. Пусть (C,ϕ) - точка страта $H(d_1,\dots,d_m)$, $\Sigma \subset C$ множество нулей ϕ, $|\Sigma| = m$ и пусть $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ - базис относительной группы гомологий $H_1(C,\Sigma)$. Тогда периоды

$$\left(\int_{\gamma_1}\phi,\dots,\int_{\gamma_k}\phi\right) \tag{1.6}$$

задают отображение периодов $\Phi : H(d_1,\dots,d_m) \to \mathbb{C}^k$, которое определяет локальную систему координат в окрестности (C,ϕ). Выбор базиса $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ определяет накрытие страта $H(d_1,\dots,d_m)$ соответствующим пространством Тейхмюллера $\widehat{H}(d_1,\dots,d_m)$.

Локальная система координат, заданная отображением периодов, описывается матрицей с действительными коэффициентами размером $2\times k$; поэтому, $SL(2,\mathbb{R})$-действие в таких координатах является линейным. Ограничение этого действия на какую-то фундаментальную область группы классов отображений лежит в основе определения *коцикла Концевича-Зорича.*

На каждом страте пространства Тейхмюллера $\widehat{H}(d_1,\dots,d_m)$ определена естественная мера $\hat{\lambda}$, полученная обратной проекцией лебеговой меры на $H^1(C,\Sigma,\mathbb{C})$ с помощью отображения периодов. Эта мера индуцирует меру λ на страте $H(d_1,\dots,d_m)$ пространства модулей. Однако объем страта по отношению к этой мере является бесконечным. Для того, чтобы обойти эту сложность, мы рассмотрим ограничение на поверхности площади 1. А именно, определим *отображение площади* α следующим образом:

$$\alpha(C,\phi) = \frac{i}{2}\int_C \phi\wedge\bar{\phi}. \tag{1.7}$$

С помощью меры $\lambda = \int_{\mathbb{R}_+}\lambda_a$ мы получим систему мер λ_a. Мера λ_1, определенная на $\alpha^{-1}(1)$, называется *мерой Мазура-Вича.* Известно, что эта мера конечна и эргодична. Теперь мы готовы определить голоморфное слоение на страте $H(d_1,\dots,d_m)$: слой этого слоения, проходящий через абелев дифференциал ϕ – это содержащая ϕ связная компонента локуса дифференциалов, подгруппа абсо-

лютных периодов которых совпадает с $Per(\phi) \subset C$. Это слоение можно продолжить на замыкание страта $\overline{H(d_1, \ldots, d_m)}$. Его можно рассматривать как фактор слоения, определенного на пространства Тейхмюллера $\widehat{H}(d_1, \ldots, d_m)$, слои которого инвариантны относительно действия группы классов отображений.

Это слоение возникло независимо в разных исследованиях (см, например, [37], [106], [107], [136]) и называется в литературе по-разному: слоение абсолютных периодов, изопериодическое слоение и др. Слоение абсолютных периодов играет важную роль в изучении динамики действия группы $GL(2, \mathbb{R})$ на пространстве модулей. Известно, что оно инвариантно относительно действия потока Тейхмюллера и отображения голономии. Слои слоения абсолютных периодов трансверсальны орбитам описанного выше действия группы $SL_2(\mathbb{R})$. Размерность слоев для поверхности рода g составляет $2g - 3$ (для $g \geq 2$).

Наиболее интересные вопросы, касающиеся слоений абсолютных периодов, связаны с их эргодическими свойствами (транзитивностью и эргодичностью), а также с геометрическими свойствами слоев. Под *транзитивностью* мы понимаем существование всюду плотного слоя. Гладкое слоение называется *эргодичным* по отношению к заданной мере, если любое борелевское множество, которое является объединением слоев этого слоения, имеет нулевую или полную меру.

Первые результаты об эргодичности слоений абсолютных периодов для главных стратов были получены МасМулленом ([107]): слой слоения был описан в терминах локуса Шоттки, и в случае малого рода ($g \leq 3$) из этого описания следовало, что слоение является эргодичным и все его замкнутые слои получаются из эллиптических классов когомологий (Утверждение 2.6). Напомним, что класс когомологий $[\phi] \in H^1(C)$ называется *эллиптическим степени* $d > 0$, если $Per(\phi)$ - это решетка в $\mathbb{C}$ и степень отображения из C в эллиптическую кривую $\mathbb{C}/Per(\phi)$ равна d. Доказательство утверждения об эргодичности опирается на стандартные инструменты однородной динамики (теорему Мура и теоремы Ратнер) и использует то, что в случае рода $2, 3$ локус Шоттки совпадает со всем пространством Зигеля. Утверждение о замкнутых слоях также следует из теоремы Ратнер.

Однако для более старших родов ($g \geq 5$) обобщить этот подход невозможно, потому что геометрия локуса Шоттки оказывается намного более сложной и менее изученной. Поэтому следующий результат был доказан независимо в двух работах ([83] and [56]) другими методами:

Теорема 23. *(Хаменштадт; Калсамилья - Деруан - Франкавилья) Слоение абсолютных периодов в главном страте эргодично для всех* $g \geq 2$.

Калсамилья, Деруан и Франкавилья в [56] приводят полную классификацию замыканий слоев слоения абсолютных периодов в главному страте и выводят утверждение об эргодичности как следствие этой классификации с использованием теорем Ратнер. Доказательство, предложенное У. Хаменштадт в [83], основано на индукции по базе результата МакМуллена для рода 2.

В недавних работах К. Винзора ([133], [134])) этот результат усилен: доказана эргодичность слоения абсолютных периодов для большого числа других стратов. В наибольшей общности (для всех стратов) результат следует из работы Чайки и Вайсса ([57]), которые доказывают его, опираясь на недавний результат [51] о классификации мер и замыканий орбит действий неабелевых групп.

1.5 Перекладывания отрезков с целочисленными соотношениями между длинами отрезков

1.5.1 Постановка задачи

Очевидно, что индукция Рози может быть не определена для тех перекладываний отрезков, для которых есть рациональные соотношения между длинами: применение индукции требует сравнения двух длин разноименных отрезков (и выбор между двумя типами преобразований $a(\pi)$ и $b(\pi)$ возможен, только когда длины сравниваемых отрезков различны).

Но в ряде важных топологических и динамических задач возникают семейства перекладываний отрезков, которые условию рациональной независимости длин не удовлетворяют. Например, одним из наиболее известных классов, для которого возникает такая ситуация, является семейство перекладываний отрезков Арну–Рози (подробнее они описаны в разделе 7.3.3). Вопрос о том, является ли типичный представитель подобного класса «исключительных» перекладываний отрезков минимальным и каковы его эргодические свойства, в настоящее время остается открытым.

Один из возможных подходов к решению этой задачи опирается на тополо-

гические аргументы и приведен в работе [68]. Понятно, что нетривиальное целочисленное линейное соотношение между длинами может быть интерпретировано как элемент группы относительных целочисленных гомологий построенной по рассматриваемому перекладыванию отрезков поверхности, на которой отмечены особые точки слоения. Линейные пространства ограничений, определяемые существующими рациональными соотношениями между длинами отрезков рассматриваемого перекладывания, могут быть разделены на две группы - *богатые* и *бедные* пространства - в зависимости от того, содержат ли они так называемый *асимптотический цикл*. Определение асимптотического цикла было введено в [118]; его роль для перекладываний отрезков описана в [138] и [139]. Подробнее об этом разделении и имеющихся гипотезах написано в разделе 1.5.2.

Другие подходы описаны в разделе 1.5.3.

1.5.2 Богатые и бедные пространства ограничений

Пусть $\mathcal{V}$ - конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$, снабженное кососимметрической формой $\langle\,,\rangle$. Напомним, что пространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ называется *изотропным*, если ограничение $\langle\,,\rangle$ равно нулю на $\mathcal{W}$. Пространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ называется *коизотропным*, если из условия $\langle u, v\rangle = 0\ \forall v \in \mathcal{W}$ следует, что $u \in \mathcal{W}$.

Если $\mathcal{V}$ является симплектическим, т.е. форма $\langle\,,\rangle$ – невырожденная, то любое максимальное изотропное подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ называется *лагранжевым подпространством* пространства $\mathcal{V}$. Подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ симплектического пространства коизотропно, если и только если $\mathcal{W}$ содержит лагранжево подпространство.

Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}^*$ – векторное подпространство. Следующие три условия равносильны:

1. пересечение $\mathcal{R} \cap \mathrm{Im}\phi$ коизотропно;
2. продпространство $Ann(\mathcal{R}) = \{v \in \mathcal{V}\ ;\ r(v) = 0\ \forall r \in \mathcal{R}\}$ изотропно;
3. образ $\langle\,,\rangle \in \mathcal{V}^* \wedge \mathcal{V}^*$ in $(\mathcal{V}^*/\mathcal{R}) \wedge (\mathcal{V}^*/\mathcal{R})$ под действием проекции $\mathcal{V}^* \wedge \mathcal{V}^* \to (\mathcal{V}^*/\mathcal{R}) \wedge (\mathcal{V}^*/\mathcal{R})$ равен нулю.

Определение. Подпространство $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}^*$ называется *богатым* по отношению к $\langle\,,\rangle$, если удовлетворено любое из трех равносильных условий, сформулированных выше.

Определение. Пространство ограничений перекладываний отрезков $T_{\pi,\lambda}$ называется *богатым*, если оно является богатым по отношению к билинейной форме $\langle , \rangle_\pi$ на $\mathbb{R}^n$, которая определяется так:

$$\langle e_i, e_j \rangle_\pi = \begin{cases} 1 & \text{если } i < j \text{ и } \pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(j), \\ -1 & \text{если } i > j \text{ и } \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{1.8}$$

где $e_1, \ldots, e_n$ - стандартный базис $\mathbb{R}^n$.

Это понятие можно определить и в других терминах.

Определение. *Инвариант Са - Арну - Фати (SAF) перекладывания отрезков* $T_{\pi,\lambda}$ - это такой элемент рационального векторного пространства $\mathbb{R} \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$:

$$SAF(T_{\pi,\lambda}) = \sum_{i<j} (\lambda_i \wedge_{\mathbb{Q}} \lambda_j - \lambda_{\pi(i)} \wedge_{\mathbb{Q}} \lambda_{\pi(j)}).$$

Инвариант Са-Арну-Фати был определен П. Арну в [22]. В той же работе было показано, что SAF является инвариантом измеримого слоения на поверхности, отвечающего рассматриваемому перекладыванию отрезку (и, в частности, инвариантен относительно индукции Рози). Известно, что SAF равен нулю для периодических перекладываний отрезков (то есть таких, у которых все орбиты конечны). Арну и Йоккоз в [27] построили первый пример минимального и строго эргодичного перекладывания отрезков, для которого SAF равен нулю. Это отображение – представитель семейства перекладываний типа Арну–Рози, которые являются одним из центральных объектов изучения в настоящей диссертации.

Следующее утверждение, записанное в [22] и доказанное Ж. Левиттом, описывает взаимосвязь между богатыми пространствами ограничений и обнулением SAF:

Предложение 24. *Полное пространство ограничений является богатым, если и только если* $SAF(T_{\pi,\lambda}) = 0$.

В [68] доказано, что в случае бедного семейства ограничений и наличия в этом семействе минимального строго эргодичного перекладывания отрезков минимальность и строгая эргодичность являются локально устойчивыми свойствами. Чтобы точно сформулировать это утверждение, нам нужно еще одно определение:

Определение. Пусть $\mathcal{R}$ - пространство ограничений минимального перекладывания отрезков $T_{\pi,\lambda}$. Будем говорить, что $T_{\pi,\lambda}$ является $\mathcal{R}$-*стабильно минимальным,* если существует открытая окрестность U вектора λ в пространстве параметров Δ^{n-1} такое, что $T_{\pi,\lambda'}$ минимально всегда, когда выполнено $\lambda' \in U$ and $\mathcal{R}(T_{\pi,\lambda'}) = \mathcal{R}$.

Кроме того, для формулировки результатов нужно понятие *реализуемости*, которое здесь означает, что ограничение можно представить как дугу или петлю на слое измеримого слоения на ориентируемой поверхности, соответствующего рассматриваемому перекладыванию отрезков $T(\pi, \lambda)$ (см. определение 7 в [68]).

Теорема 25. *[Дынников - Скрипченко] Пусть $T_{\pi,\lambda}$ – минимальное и строго эргодичное перекладывание отрезков, у которого пространство ограничений $\mathcal{R}(T_{\pi,\lambda})$ является бедным. Пусть $\mathcal{R}_0$ – подпространство $\mathcal{R}(T_{\pi,\lambda})$, порожденное всеми ограничениями, которые реализуются $T_{\pi,\lambda}$. Тогда отображение $T_{\pi,\lambda}$ является $\mathcal{R}$-стабильно минимальным для любого пространства ограничений $\mathcal{R}$, для которого $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}(T_{\pi,\lambda})$.*

Кроме того, существует открытая окрестность V вектора λ в пространстве параметров $\{\kappa \in \Delta^{n-1}\ ;\ \mathcal{R}(T_{\pi,\kappa}) \supset \mathcal{R}\}$ такая, что $T_{\pi,\lambda'}$ строго эргодично для почти всех $\lambda' \in V$ по отношению к мере Лебега.

Гипотеза 2 (Дынников - Скрипченко)**.** *Утверждения теоремы 25 остаются верными в отсутствие предположения о строгой эргодичности.*

В случае богатого семейства ограничений доказанных результатов для ситуации общего положения нет; сформулирована гипотеза о том, что в случае богатого семейства ограничений минимальность не является устойчивым свойством:

Гипотеза 3 (Дынников - Скрипченко)**.** *Если $\mathcal{R}$ - богатое пространство ограничений по отношению к билинейной форме $\langle\,,\rangle$ и $T(\pi, \lambda)$ удовлетворяет всем ограничениям из $\mathcal{R}$, то $T(\pi, \lambda)$ не является $\mathcal{R}$-стабильно минимальным.*

1.5.3 Другие подходы

Альтернативный подход к изучению перекладываний отрезков с линейными ограничениями изложен в работах Бошерницана (например, в [48]).

Пусть E - векторное подпространство $\mathbb{R}^n$ и пусть задано рациональное $\phi \in (\mathbb{R}^n)^*$; определим

$$R(E,\phi) = \{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{Q}^n : \forall \lambda \in E \quad a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n = \phi(\lambda)\}.$$

Пусть задано перекладывание отрезков $T(\pi,\lambda)$; определим по нему билинейную кососимметрическую форму Ω_π по формуле (1.8) и зададим $\phi_{i,j}(\lambda) = u_i^b - u_j^t$ для всех $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ (это целочисленная линейная комбинация компонент вектора длин отрезков λ). Тогда пара (π,E) удовлетворяет *условию Бошерницана*, если для всех $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ выполняется

$$R(\Omega_\pi E, \phi_{i,j}) \cap \mathbb{R}^n_{\geq 0} = \emptyset.$$

Недавно В. Делакруа и Р. Рют ([61]) анонсировали доказательство следующего утверждения:

Теорема 26. *Пусть E - рациональное подпространство $\mathbb{R}^k$. Пусть (π,E) удовлетворяют условию Бошерницана. Тогда*

- *для любого максимально иррационального $\lambda \in E_{>0}$ перекладывание отрезков $T(\pi,\lambda)$ является минимальным;*
- *для почти всякого $E_{>0}$ перекладывание отрезков $T(\pi,\lambda)$ является строго эргодичным;*
- *для каждой перестановки π и каждого $2 \leq d \leq k$ множество пар (π,E) с E рациональной размерности d, которые удовлетворяют условию Бошерницана, бесконечно.*

Используя эту теорему, Делакруа и Рют строят так называемый полу-алгоритм, который позволяет для любого перекладывания отрезков $T(\lambda,\pi)$ получить разложение на минимальные и периодические компоненты и седловые связки. Они называют его полу-алгоритмом, потому что получается, что этот алгоритм не всегда останавливается. В исходной работе Бошерницана о перекладываниях ранга 2 ([47]) было показано, что такой алгоритм для этого семейства всегда останавливается. Делакруа и Рют доказывают, что их полу-алгоритм останавливается для любого бедного пространства ограничений и не останавливается для любого богатого пространства.

1.5.4 Эргодические свойства перекладываний отрезков с рациональными соотношениями между длинами отрезков

Эргодические свойства перекладываний отрезков типа Арну–Рози подробно описаны в следующих разделах. Других аналогичных по уровню общности результатов о строгой эргодичности и наличии или отсутствия свойства слабого перемешивания для перекладываний отрезков с рациональными соотношениями между длинами отрезков в настоящий момент нет.

Отдельные результаты о минимальности и строгой эргодичности перекладываний отрезков не общего положения получены в работе Минского и Вайсса ([110]). Одно из их наблюдений было впоследствие уточнено Рютом([114]).

В работе [16] построены примеры перекладываний отрезков с нулевым SAF, обладающие и не обладающие свойством слабого перемешивания. Все построенные отображения являются строго эргодичными, так как перекладывания отрезков самоподобны (то есть при применении индукции Рози мы имеем периодическое или предпериодическое отображение). Важно отметить, что известные ранее инструменты для проверки наличия свойства слабого перемешивания неприменимы к рассматриваемым примерам: с одной стороны, для перекладываний отрезков с нулевым SAF матрица Рози всегда имеет приводимый характеристический многочлен, а потому эти перекладывания отрезков не удовлетворяют условиям теоремы 1 в [120], которая часто используется для изучения эргодических свойств самоподобных перекладываний отрезков. С другой стороны, нельзя воспользоваться критерием Вича, который является основным элементом доказательства ключевой теоремы в [32], так как, например, для гиперэллиптического страта $H^{hyp}(3,3)$ мы имеем $(1,1,\ldots,1) \in H(\pi)$ (поэтому доказательство, аналогичное предложенному в [135], реализовать нельзя). Поэтому в [16] используются результаты из символической динамики: по самоподобному перекладыванию отрезков можно найти задающую его подстановку и исследовать вопрос об устройстве спектра соответствующего сдвига.

Определение. Пусть A - алфавит, а $A*$ - множество конечных слов, составленных из букв алфавита A. Будем рассматривать $A*$ как свободный моноид с операцией конкатенации и рассмотрим его морфизм $\sigma : A* \to A* : \sigma(ww') = \sigma(w)\sigma(w')$.

Морфизм $\sigma : A* \to A*$ называется *нестирающим*, если для каждого $a \in A$ $|\sigma(a)| \geq 1$ (то есть образом каждой буквы является непустое слово). Нестирающий морфизм над A^* называется подстановкой над A.

Приведем пример самоподобного перекладывания отрезков с нулевым SAF, обладающего свойством слабого перемешивания.

Пример 1 Пусть $\alpha \in (0,1)$ - корень многочлена $x^3 - x^2 - 3x + 1$ (корень на этом отрезке единственный).

Зададим перекладывание T_0 отрезков перестановкой $\pi_0 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

и вектором длин

$$\lambda_0 = (\alpha^2, 1 - 2\alpha - 2\alpha^2, \alpha^2 - 3\alpha^3, 3\alpha + 3\alpha^3 - 1, 1 + \alpha^2 - 2\alpha, \alpha - \alpha^2).$$

Теорема 27. *Перекладывание отрезков T_0 является слабо перемешивающим отображением. При этом T_0 самоподобно и его SAF равен нулю.*

Доказательство. Утверждение о том, что SAF перекладывания отрезков T_0 равен нулю, проверяется непосредственным вычислением. Для того, чтобы увидеть, что отображение T_0 самоподобно, достаточно рассмотреть индуцированное отображение на подотрезок $[0, \alpha^2)$ и убедиться, что полученное отображение представляет из себя сжатое в α^2 раз исходное перекладывание отрезков (цикл состоит из 27 итераций индукции Рози).

Для доказательства утверждения о слабом перемешивании мы воспользуемся символическим представлением перекладываний отрезков, а именно:

1. каждому отрезку непрерывности рассматриваемого перекладывания поставим в соответствие символ из алфавита $\mathcal{A}^*$;
2. определим семейство подстановок, поставив в соответствие каждому преобразованию индукции Рози определенную подстановку по следующему принципу: буквы алфавита, отличные от проигравшего на текущем шаге индукции Рози, переходят в себя, а проигравшая буква заменяется на композицию проигравшего и победителя; более подробно эта процедура описана, например, в [24];

3. тогда любому пути на диаграмме Рози будет соответствовать композиция подстановок;
4. запишем композицию, отвечающую петле на диаграмме Рози - пути, задающему рассматриваемое нами самоподобное перекладывание отрезков;
5. по полученным подстановкам определим морфический сдвиг;
6. вычислим собственные значения этого сдвига; напомним, что для сдвига (Ω, S) (здесь Ω - пространство слов, а S - отображение) число $\nu \in \mathbb{S}^1$ называется *собственным числом*, если существует непрерывная функция $f : \Omega \to \mathbb{S}^1$, для которой $f \circ S = \nu f$.
7. докажем утверждение о слабом перемешивании для этого сдвига, и, как следствие, для рассматриваемого самоподобного перекладывания отрезков. Сдвиг является *слабо перемешивающим*, если его единственное собственное значения равно 1, и это собственное значение просто.

Последние три шага опираются на результаты работ [108] и [109] , в которой предложен эффективный алгоритм для вычисления собственных значений морфизма. Алгоритм описан в разделах 6 и 7 в [109] и разделе 5.2 [108]. Ключевой является Теорема 1.5 в [108], содержащая явный критерий того, что число $e^{2i\pi\alpha}$ является собственным значением для морфического сдвига (Σ_σ, S) в случае, если подстановка σ удовлетворяет ряду условий (примитивность, собственность, псевдо-унимодулярность), и ее обобщение - Теорема 5.1 и Предложение 5.2 в работе [108]. Мы пользуемся имплементацией этого алгоритма в Sage[1].

Соответствующая подстановка σ_0 будет выглядеть следующим образом:

$$1 \to 16655 \tag{1.9}$$

$$2 \to 1665525254525255 \tag{1.10}$$

$$3 \to 16655252545253525352535254525255 \tag{1.11}$$

$$4 \to 1665525254525352535254525255 \tag{1.12}$$

$$5 \to 1665525255 \tag{1.13}$$

$$6 \to 166655 \tag{1.14}$$

[1] http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/paul.mercat/Eigenvalues.html

Теперь вычисляем собственные числа сдвига, отвечающего подстановке σ_0, используя алгоритмы из раздела 5.2 в [108] и раздела 6 в [109] и их имплементацию в Sage[2] , и проверяем гипотезу о наличии слабого перемешивания.

1. По подстановке σ_0 найдем ее матрицу инцидентности M_{σ_0};
2. Находим наименьшую степень k такую, что σ_0^k является примитивной (то есть степень M_{σ_0}, которая имеет только строго положительные элементы; мы обозначим эту матрицу N_0). В нашем случае $k = 4$. Поэтому σ_0 является примитивной подстановкой. Заметим также, что подстановка является лево-собственной (все непустые слова начинаются с 1). Поэтому мы можем использовать стратегию из [108] и использовать Теорему 1.5.
3. Рассмотрим определенную в предыдущем пункте матрицу N_0 и обозначим через $\mathbb{K}$ поле разложения ее характеристического многочлена над $\mathbb{Q}$; у матрицы инцидентности есть 3 собственных числа, по модулю превосходящих 1; мы возьмем базис собственных подпространств, отвечающих этим числам, и запишем соответствующие векторы как элементы $\mathbb{K}^6$ (начнем с вектора v_0, отвечающего собственному вектору Перрона-Фробениуса с суммой компонент 1, и занумеруем остальные векторы $v_1, \ldots, v_k$).

   Теперь определим множество $\mathcal{S}$ следующим образом. Положим сначала, что $\mathbb{S} = \emptyset$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$, если сумма компонент вектора v_i равна 0, v_i включается в $\mathbb{S}$; если же сумма компонент не равна 0, то нормируем вектор так, чтобы сумма компонент была равна 1, и добавляем $v_i - v_0$;тогда векторы - строки $w\mathbb{Z}^6$, о которых идет речь в теореме 1.5 [108], – это в точности векторы, ортогональные каждому вектору из множества $\mathcal{S}$.
4. Выберем базис в поле $\mathbb{K}$ как в $\mathbb{Q}$-векторном пространстве и найдем компоненты каждого вектора из множества $\mathbb{S}$ в этом базисе. Рассмотрим матрицу $M_{\mathbb{S}}$, в которой по столбцам записаны компоненты векторов из $\mathbb{S}$. Домножим матрицу $M_{\mathbb{S}}$ на минимальный подходящий целый коэффициент так, чтобы получить целочисленную матрицу. По теореме 1.5 множество собственных значений построенного по σ_0 морфического сдвига описывается так: $e^{2i\pi w v_0}$, где $w \in \mathbb{Z}^6$ и $wM_{\mathbb{S}} = 0$.
5. сдвиг является слабо перемешивающим, если его единственное собственное значение - это 1, и это значение является простым. Простота в нашем случае

[2] http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/paul.mercat/Eigenvalues.html

автоматически следует из строгой эргодичности сдвига, при этом найденное в предыдущем пункте множество аддитивных собственных значений совпадает с $\mathbb{Z}$, то есть нетривиальных собственных значений нет. Поэтому сдвиг слабо перемешивающий.

□

Одним из примеров самоподобных перекладываний отрезков с нулевым SAF, которые не являются слабо перемешивающими, служит *перекладывание отрезков типа Арну–Йоккоза*. Определим перекладывание отрезков T_{AY} следующим образом. Обозначим через γ корень многочлена $1 = \gamma + \gamma^2 + \gamma^3$.

$$T_{AY}(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in [0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\gamma}{2}), \\ x + \dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in [\dfrac{1}{2} - \dfrac{\gamma}{2}, \dfrac{\gamma}{2}), \\ x - \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in [\dfrac{\gamma}{2}, \gamma), \\ x + \dfrac{\gamma^2}{2} - \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in [\gamma, \gamma + \dfrac{\gamma^2}{2}), \\ x - \dfrac{\gamma^2}{2} - \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in [\gamma + \dfrac{\gamma^2}{2}, \gamma + \gamma^2), \\ x + \dfrac{\gamma^3}{2} - \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in [\gamma + \gamma^2), \gamma + \gamma^2 + \dfrac{\gamma^3}{2}, \\ x - \dfrac{\gamma^3}{2} - \dfrac{1}{2}, & \text{если } x \in [\gamma + \gamma^2 + \dfrac{\gamma^3}{2}, 1]. \end{cases}$$

Это предпериодическое перекладывание отрезков: при применении индукции Рози к этому перекладыванию после некоторого количества шагов мы получаем сжатую версию одного из полученных на предыдущих шагах перекладываний отрезков. Период и предпериод этого отображения задаются в терминах подстановок согласно описанному выше алгоритму следующим образом:

Предпериод

$$1 \to 15 \tag{1.15}$$

$$2 \to 2 \tag{1.16}$$

$$3 \to 1734335 \tag{1.17}$$

$$4 \to 163434 \tag{1.18}$$

$$5 \to 1635 \tag{1.19}$$

$$6 \to 1634335 \tag{1.20}$$

$$7 \to 1734 \tag{1.21}$$

период

$$1 \to 15172 \tag{1.22}$$

$$2 \to 172 \tag{1.23}$$

$$3 \to 1734365172 \tag{1.24}$$

$$4 \to 15643472 \tag{1.25}$$

$$5 \to 1565172 \tag{1.26}$$

$$6 \to 1564365172 \tag{1.27}$$

$$7 \to 173472. \tag{1.28}$$

Задающая период подстановка определяет слабо перемешивающий сдвиг, но с учетом подстановки предпериода исходное перекладывание отрезков не имеет чисто дискретного спектра.

С учетом проведенного анализа мы формулируем гипотезу.

Гипотеза 4. *Типичные периодические перекладывания отрезков с нулевым SAF, являющиеся отображениями первого возвращения для линейного потока на ориентируемой поверхности рода 3 и выше, являются слабо перемешивающими. Аналогичное свойство для предпериодических перекладываний отрезков не выполняется.*

Глава 2

Марковские многомерные цепные дроби

Эта глава является введением в эргодическую теорию марковских отображений и, в частности, в теорию марковских многомерных цепных дробей.

2.1 Многомерные цепные дроби

Многомерные цепные дроби - это алгоритмы, позволяющие строить одновременные диофантовы приближения рациональными числами компонент заданного иррационального вектора. Рассматриваемые в диссертации алгоритмы ренормализации с точки зрения теории чисел являются по большей части представителями класса *марковских многомерных цепных дробей*. Такие алгоритмы, описанные Ж. - К. Лагариасом [96], определяются двумя кусочно-непрерывными отображениями:

$$f : [0,1]^d \to [0,1]^d;$$

и

$$A : [0,1]^d \to GL(d+1, \mathbb{Z}).$$

Чтобы определить класс марковских многомерных цепных дробей, напомним определение коцикла в динамических системах: для автономной динамической системы с фазовым пространством X и действующей на X группой T, которая

совпадает с $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$, *коциклом* называется отображение $C : X \times T \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющее двум условиям:

- $C(x, 0) = I_n$ для всех $x \in X$ (I_n - это единичная матрица размера $n \times n$);
- $C(x, t + s) = C(tx, s)C(x, t)$ для всех $x \in X$ и $t, s \in T$.

Алгоритмы, которые рассматриваются в диссертации, для заданного вектора с действительными компонентами $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ строят последовательность $(d + 1) \times (d + 1)$ матриц, строки которых задают диофантовы приближения к θ. Для произвольного $\theta \in [0, 1]^d$ мы обозначим $A^{(n)}(\theta) = A(f^{n-1})(\theta)$ и определим коцикл $C^n(\theta) = A^{(n)}(\theta) \dots A^{(1)}(\theta)$, так что $C^n(\theta) = A^{(n)}(\theta)C^{n-1}(\theta)$ (группа T в данном случае совпадает с $\mathbb{Z}$, а фазовое пространство – с $[0, 1]^d$). Будем рассматривать такие коциклы, что строки $C_i^{(n)} = (c_{i,1}^n, \dots, c_{i,d+1}^n)$ матриц C дают одновременное приближение компонент вектора θ, то есть выполнено такое условие: для произвольного $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ при $n \to \infty$ мы имеем $w_i^{(n)} \to \theta$, где $w_i^{(n)} = (\frac{c_{i,1}^{(n)}}{c_{i,d+1}^{(n)}}, \dots, \frac{c_{i,d}^{(n)}}{c_{i,d+1}^{(n)}})$. Если это условие (его называют *слабой сходимостью алгоритма*) выполняется, пару (f, A) называют *марковской* многомерной цепной дробью или *марковским алгоритмом*. Использование такого термина обусловлено тем, что действие алгоритма на $(n + 1)$-ом шаге полностью определяется значением $\theta^{(n)} = f^n(\theta)$ и не зависит от предыдущих шагов.

Для матрицы

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{d+1} \end{pmatrix} \in GL(d + 1, \mathbb{Z}),$$

знаменатель определяется так

$$q(W) := \max_{1\le i\le d+1} q(w_i).$$

Равномерный коэффициент приближения W – это

$$\eta^*(W, \theta) := \min_{1\le i\le d+1} \left(-\frac{\log \|\theta - \widetilde{w}_i\|}{\log q(W)} \right).$$

Самое лучшее приближение со знаменателем Q имеет показатель

$$\eta^*(\theta, Q) := \inf_{q(W)\le Q} \left(\eta^*(W, \theta) \frac{\log q(W)}{\log Q} \right)$$

Определим *равномерный коэффициент приближения* для θ –это

$$\eta^*(\theta) := \liminf_{Q\to\infty} \eta^*(\theta, Q).$$

В диссертации рассматривается специальный подкласс таких алгоритмов - алгоритмы линейного разбиения симплекса. Рассмотрим однородный конус в $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$\mathbb{R}^{d+1}_{++} = \{y \in \mathbb{R}^{d+1} : y_i \geq 0, y_{d+1} = \max_{i=1\ldots d+1} y_i.\}$$

Этот конус разбивается на конечное или счетное число однородных подконусов, и для каждого подконуса можно построить однородное линейное отображение $\widehat{f}$, заданное формулой $\widehat{f}(x) = \widehat{A}(x)$ для некоторой $\widehat{A} \in GL(d+1, \mathbb{Z})$. Определим

$$A(x) = (\widehat{A}(x)^T)^{-1}.$$

Заметим также, что на каждом луче $[y] = \{\lambda(y_1, \ldots, y_{d+1}) : \lambda > 0\}$ функция $\widehat{f}$ определяет точку однородного пространства, которая не зависит от λ. Поэтому для каждого такого луча достаточно выбрать одного представителя (например, такого, для которого $y_{d+1} = 1$), а множество лучей можно отождествить с пространством $[0,1]^d$. Тогда по отображению $\widehat{f}$ строится $f(x)$:

$$f(x) = \frac{A^{-1}x}{||A^{-1}x||}$$

и пара (f, A) задает марковский алгоритм (в смысле определения выше).

Таким образом, алгоритм линейного разбиения симплекса можно задать следующим образом: зафиксируем d-мерный симплекс - пространство параметров - $\Delta \in \mathbb{R}^{d+1} | ||x|| = 1$ - и его разбиение на конечное или счетное число подсимплексов Δ_α. Для каждого α зафиксируем матрицу A_α и определим $f : \Delta_\alpha \in \Delta$:

$$f(x) = \frac{A^{-1}x}{||A^{-1}x||}.$$

Для того, чтобы алгоритм был марковским, разбиение тоже должно быть марковским, то есть образом каждого Δ_α при таком отображении должно быть конечное или счетное объединение подсимплексов разбиения.

Помимо индукции Рози и классического алгоритма Евклида, алгоритмами линейного разбиения симплексов являются, например, известные алгоритмы Бруна,

Селмера, Якоби и другие (см. [119]). Их эргодические и спектральные свойства активно изучаются в теории диофантовых аппроксимаций и символической динамике, потому что, с одной стороны, как мы видели выше, являются источником сведений о динамике и геометрии той системы, ренормализацией для которой служит рассматриваемый алгоритм, а с другой стороны, оказывается, что именно спектральные свойства соответствующих коциклов отвечают за качество аппроксимации изучаемого алгоритма в следующем смысле: Лагариас показал, что при выполнении ряда сформулированных ниже условий равномерный коэффициент приближения может быть оценен, а при добавлении дополнительных условий - прямо вычислен в терминах показателей Ляпунова соответствующего коцикла.

2.2 Топологический марковский сдвиг и диаграмма Рози

Неоднородный (то есть ренормализованный) алгоритм линейного разбиения симплекса $f(x)$ определяет *марковский сдвиг* над конечным или счетным алфавитом. Напомним определение.

Определение. *Топологический марковский сдвиг* с множеством состояний $\mathcal{S}$ и матрицей переходов $\mathbb{A} = (t_{a,b})_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}}$ - это множество $W := \{w \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0} : t_{w_i w_{i+1}} = 1 \forall i\}$, снабженное стандартной топологией, порожденной множеством *цилиндров*, и отображением сдвига $\sigma : (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots)$. Под цилиндром мы понимаем множество вида

$$[a_0, \ldots, a_{n-1}] = \{w \in W : w_i = a_i\},$$

где $\{n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathcal{S} | i = 0, \ldots, n-1\}$.

Этому сдвигу можно поставить в соответствие граф, который по аналогии с описанной выше тейхмюллеровой динамикой мы будем называть *диаграммой Рози*. Вершины этого графа - это буквы алфавита $\mathcal{S}$, заданного множеством состояний сдвига, и две вершины a и b соединены направленным ребром, если существуют $x \in [a]$ и $y \in [b]$, для которых $\sigma(x) = y$.

Топологический марковский сдвиг является частным случаем *марковского отображения*. Напомним некоторые определения.

Пусть $\mathbf{T}$ - локально обратимое отображение пространства с мерой и сигма-алгеброй $(X, \mathcal{B}, m)$. Счетное разбиение $\alpha \subset \mathcal{B}$ называется *базисным разбиением* для отображения $\mathbf{T}$, если $\mathbf{T} : \mathbf{a} \to \mathbf{Ta}$ обратимо для всех $a \in \alpha$ и $\sigma(\{T^{-n}a : a \in \alpha, n \geq 0\} = \mathcal{B}\ (mod\ m)$. Базисное разбиение называется *марковским,* если $Ta \in \sigma(\alpha)\ (mod\ m)$. Отображение $\mathbf{T}$, для которого задано марковское разбиение α, называется *марковским отображением* $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mathbf{m}, \alpha)$.

В случае алгоритма линейного разбиения симплекса пространство состояний - это множество номеров конусов Δ_α, на которые разбивается исходный симплекс Δ. Орбита каждой точки x под действием отображения f является бесконечной последовательностью букв алфавита, составленного из элементов пространства состояний, и применение отображения f соответствует сдвигу σ на множестве таких последовательностей. Для такого сдвига σ можно построить диаграмму Рози.

Таким образом, каждому ребру γ_1 этой диаграммы Рози отвечает матрица A_{γ_1} из определения марковского алгоритма цепных дробей (f, A); произвольному пути γ на диаграмме ставится в соответствие матрица A_γ, полученная как произведение матриц, отвечающих входящим в путь γ ребрам: если $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_n$, где γ_i-ребро, которому отвечает матрица A_{γ_i}, то $A_\gamma = A_{\gamma_1} \dots A_{\gamma_n}$.

2.3 Проективно-расширяющие и сильно расширяющие отображения

В этом параграфе мы докажем техническое, но очень важное утверждение, которым будем пользоваться впоследствии для различных алгоритмов ренормализации (примеры его использования для многомерных цепных дробей можно также посмотреть в [42]).

Определение. Путь на диаграмме Рози называется *положительным*, если соответствующая ему матрица A_γ содержит только положительные элементы.

Определение. Путь на диаграмме Рози называется *петлей*, если начинается и заканчивается в одной и той же вершине диаграммы Рози.

Зафиксируем матрицу A_γ, отвечающую пути γ. Рассмотрим такое подмноже-

ство $\Delta_\gamma \subset \Delta$, что $f(\Delta_\gamma) = \Delta$, где

$$f(x) = \frac{A_\gamma^{-1} x}{||A_\gamma^{-1} x||}.$$

Тогда это множество Δ_γ в точности совпадает с множеством точек, символическое описание которых начинается с γ. Более того, если матрица A_γ содержит только строго положительные элементы , то отвечающий ей подсимплекс $\Delta\gamma$ компактно содержится в пространстве параметров Δ. Это позволяет нам определить *специальное ускорение* алгоритма. Идея состоит в том, что для эргодичного алгоритма можно рассмотреть отображение первого возвращения в подсимплекс положительной меры, который компактно вложен в исходное пространство параметров. При этом, по теореме Пуанкаре о возвращении, возвращаться будут, возможно, не все, но почти все орбиты. Такое отображение первого возвращения мы называем специальным ускорением алгоритма.

Для произвольного $\mathcal{C}^1$ отображения $T : X \to Y$, будем обозначать $d_x T$ его дифференциал в точке $x \in X$.

Следующее определение взято из [36]:

Определение. Пусть задано пространство параметров - симплекс Δ и в нем определен компактно вложенный подсиплекс Δ_*, отвечающий пути γ_* на диаграмме Рози. Пусть также определено $\{\Delta^{(l)}\}$ - его конечное или счетное разбиение на симплексы, которые не пересекаются между собой и покрывают почти весь Δ_*. Тогда *проективно-расширяющим* называется отображение $T : \cup\Delta^{(l)} = \Delta_* \to \Delta_*$, что $T^l = T : \Delta^{(l)} \to \Delta_*$ - биекция, для которой обратное отображение является проективным сжатием.

Замечание 4. Очевидно, что специальное ускорение любого эргодичного алгоритма линейного разбиения симплекса является проективно-расширяющим отображением.

Проективно-расширяющее отображение T называется *сильно расширяющим* (термин взят из [32]), если выполнено следующее условие: существует $k > 1$ такое, что якобиан отображения T удовлетворяет для всех $x \in \Delta_*$ условию $\|d_x T\|_\infty \geq k$. Сильно расширяющие марковские отображения активно изучались в эргодической теории (например, [19]).

Следующее утверждение, доказанное автором в [73], оказывается очень полезным в ряде конкретных примеров.

Предложение 28. *Любое специальное ускорение марковского алгоритма линейного разбиения симплекса является сильно расширяющим.*

При этом из теории марковских отображений (см. Главу 4 в [19]) известно, что для любого сильно расширяющего отображения существует единственная абсолютно непрерывная мера, которая является эргодической и, более того, перемешивающей.

Утверждение 28 эквивалентно следующему (которое мы будем доказывать):

Предложение 29. *Если T - специальное ускорение алгоритма линейного разбиения симплекса, то существует такое $k > 0$, что якобиан T для всех $x \in \Delta_*$ удовлетворяет условию $||d_x T||_\infty \geq k$.*

Для доказательства Предложения 29 нам понадобится понятие *гильбертовой псевдо-метрики* на $\mathbb{R}^n_+$:

$$dist(x, y) = \max_{1 \leq i,j \leq n} \log \frac{x_i y_j}{x_j y_i}.$$

Эта псевдометрика индуцирует полную финслерову метрику на лучах вида tx : $x \in \mathbb{R}_+$.

Кроме этого, нам нужны две операторных нормы:

- $|A| = \sup_{||v||=1} Av$;
- определенная на множестве непрерывных операторов на компакте норма $||A||_{C^0(\Delta)} = \sup_{\lambda \in \Delta} |A\lambda|$.

Доказательство. Рассмотрим разбиение симплекса Δ_*, заданное путями вида $\gamma\gamma_*$, где γ_* не является фактором γ (то есть его внутренней собственной частью). Это разбиение на счетное число подсимплексов. Обратным к $T^{(l)}$ отображением является

$$(T^{(l)})^{-1} : \lambda \mapsto \frac{A_{\gamma\gamma_*}\lambda}{||A_{\gamma\gamma_*}\lambda||}. \tag{2.1}$$

Это проективизация линейного отображения; поэтому в гильбертовой метрике мы можем рассматривать отображение 2.1 как линейное отображение с матрицей $A_{\gamma\gamma_*}$.

Известно ([131]), что в гильбертовой псевдо-метрике определенное строго положительной (то есть содержащей только положительные коэффициенты) матрицей проективное отображение является θ - липшецевым для некоторого $0 < \theta < 1$ (а в случае неотрицательной матрицы отображение является 1 - липшецевым). Поэтому обратное к T отображение является θ-липшецевым с некоторым параметром $\theta < 1$, зависящим только от γ_*.Отсюда следует, что якобиан T равномерно ограничен снизу. □

Следствие 30. *Для специального ускорения алгоритма линейного разбиения симплекса существует единственная абсолютно непрерывная инвариантная мера, плотность которой отделена от 0 и от бесконечности.*

Доказательство. Так как по доказанному в утверждении 29 якобиан отображения равномерно ограничен, можно применить теорему 1.3 из [101] (см. также Главу 2.2 в [115] и Главу 4 в [19]). □

Более того, инвариантная мера в этом случае обладает свойством ограниченного искажения в смысле Авилы - Вианы ([36]):

Определение. Мера μ, инвариантная относительно топологического марковского сдвига Σ_M, обладает свойством ограниченного искажения, если существует положительная константа C_μ, такая, что для любого непустого цилиндра $[a_{i_1} \dots a_{i_n}]$ и любых $1 \leq j \leq n$

$$\frac{1}{C(\mu)} \leq \frac{\mu([a_{i_1} \dots a_{i_n}])}{\mu([a_{i_1} \dots a_{i_j}])\mu([a_{i_{j+1}} \dots a_{i_n}])} \leq C(\mu).$$

Это обстоятельство будет использовано при изучении спектральных свойств ассоциированных с марковской цепной дробью коциклов.

2.4 Критерий Фужерона

Ш. Фужерон в [72] предложил эффективный критерий, позволяющий доказать строгую эргодичность широкого класса таких алгоритмов, опираясь на их комбинаторное описание. Центральным в этом критерии являются понятия *симплициальной системы* и *быстро сбегающей системы*. Первое означает наличие пары диаграммы Рози и ассоциированной с ней марковской многомерной цепной

дроби, второе является комбинаторным выражением *свойства ограниченного искажения.*

Свойство ограниченного искажения было введено С. Керхгофом в [90] в связи с альтернативным доказательством строгой эргодичности типичных перекладываний отрезков. Неформально говоря, речь идет о следующем свойстве. При применении индукции Рози нормы столбцов, отвечающих проигравшим, растут, а нормы остальных столбцов не меняются. Поэтому, если и победители и проигравшие меняются регулярно, то матрица индукции после достаточного числа итераций является *сбалансированной*, то есть отношение норм любых двух ее столбцов ограничено не зависящей от числа шагов индукции константой. А вот если победителем или проигравшим долгое время является один и тот же отрезок, свойство сбалансированности не выполняется. Но мера того подмножества пространства параметров, для точек которого матрицы индукции после значительного числа итераций остается несбалансированной, незначительная и может быть эффективно оценена.

В дальнейшем ограниченное искажение применительно к перекладываниям отрезков было подробно изучено в работе Авилы, Гезеля и Йоккоза [31]. Их оценки являются более точными, чем оценки Керхгофа, и используются для того, чтобы доказать существование экспоненциального хвоста у функции крыши, которая применяется при построении специального потока (в их случае - потока Вича) над перекладываниями отрезков (определение специального потока и функции крыши приведены в разделе 6). Впоследствии их подход был успешно применен в [33] к системам изометрий и их ренормализации.

В работе Фужерона эти идеи обобщены и показано, что аналогичные конструкции могут быть перенесены на широкий класс многомерных цепных дробей. А именно, в [72] сформулированы комбинаторные условия, гарантирующие выполнение свойства ограниченного искажения для марковских алгоритмов многомерных цепных дробей. Классические инструменты эргодической теории марковских отображений позволяют в этом случае доказать эргодичность, а использование методов термодинамического формализма – построить инвариантную эргодическую меру для рассматриваемых алгоритмов.

В последующих главах мы несколько раз воспользуемся критерием Фужерона, поэтому опишем его немного подробнее. Начнем с центрального для этой теории

определения симплициальной системы.

Пусть $G = (V, E)$ - это граф, ребра которого помечены буквами алфавита $\mathcal{A}$ с помощью функции $l\colon E \to \mathcal{A}$. Потребуем, чтобы для всех вершин $v \in V$, ограничение l на ребра, начинающиеся в v, было инъективным. Рассмотрим норму $\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$, заданну/юю следующим образом: $\|\lambda\| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha$. Рассмотрим симплекс размерности $|\mathcal{A}| - 1$, определенный так: $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}} : \|\lambda\| = 1\}$.

Для заданной вершины $v \in V$ пусть v_{out} будет множеством ребер графа G, выходящих из v. Определим разбиение Δ, атомы которого, для ребра $e \in E$, задаются так:

$$\Delta^e = \{\lambda \in \Delta : \lambda_{l(e)} < \lambda_\alpha, \text{для всех}\alpha \in l(v_{\text{out}}) \text{ and } \alpha \neq l(e)\}.$$

Каждому ребру e мы поставим в соответствие матрицу

$$M_e = Id + \sum_{\substack{\alpha\in l(v_{\text{out}})\\ \alpha\neq e}} E_{\alpha,l(e)},$$

где $E_{a,b}$ - элементарная матрица, для которой 1 равен элемент, находящийся в строке с номером a и столбце с номером b, а остальные коэффициенты равны 0.

Обозначим $\Delta^G = V \times \Delta$ и определим отображение $T\colon \Delta^G \to \Delta^G$ следующим образом. Для всех $\lambda \in \Delta^e$ с ребром e, начинающимся в v и заканчивающимся в v', мы полагаем

$$T(v, \lambda) = (v', T_e(\lambda)),$$

с

$$T_e\colon \Delta^e \to \Delta$$
$$\lambda \mapsto \frac{M_e^{-1}\lambda}{\|M_e^{-1}\lambda\|}.$$

Тогда G называется *симплициальной системой* и отображение T - ассоциированная с ним *индукция победитель-проигравший*. Очевидно, что проективизация правой индукции Рози является индукцией победителя-проигравшего, ассоциированной с симплициальной системой, определенной по графу G.

Пусть F - это подграф G, полученный удалением вершин, отвечающих вращениям, и входящих в такие вершины ребер.

Определение. Симплициальная система является *сильно невырожденной,* если

1. для всех вершин каждая буква выигрывает и проигрывает почти в каждом пути (по отношению к мере Лебега);
2. для всех $\emptyset \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{A}$ и всех вершин v в сильно связных компонентах $\mathcal{C}$ графа $G_{\mathcal{L}}$ выполняется одно из условий:
   - либо $|l(v_{\text{out}}) \cap \mathcal{L}| \leq 1$;
   - либо есть путь из вершины v в G, отмеченный буквами из $\mathcal{L}$, который покидает компоненту $\mathcal{C}$.

В теореме 1.2 Фужерон показал, что сильная невырожденность симплициальной системы гарантирует выполнение другого свойства, которое он назвал *быстро сбеганием*, а в теореме 1.1 доказал следующее утверждение:

Теорема 31 (Фужерон)**.** *Любая быстро сбегающая симплициальная система допускает единственную эргодическую меру, эквивалентную мере Лебега, и эта мера индуцирует единственную меру максимальной энтропии, инвариантную относительно ее канонического специального потока.*

Специальный поток для симплициальной системы строится так же, как и специальный поток для марковского сдвига. Подробнее эта каноническая конструкция описана в Главе 3.

2.5 Показатели Ляпунова марковских многомерных цепных дробей

Спектральные свойства коциклов, ассоциированных с марковскими многомерными цепными дробями, менее изучены по сравнению с эргодическими.

Используя мультипликативную эргодическую теорему [13], для каждого такого коцикла при выполнении ряда условий можно определить *показатели Ляпунова* и показать, что эти показатели определяют равномерный показатель приближения. Эти условия, сформулированные Лагариасом [96], состоят в следующем:

- (H1) эргодичность: наличие у многомерной цепной дроби эргодичной абсолютно непрерывной меры;

- (H2) накрывающее свойство: многомерная цепная дробь должна иметь кусочно-непрерывный якобиан, который нигде на области определения не обращается в ноль;
- (H3) лог-интегрируемость ассоциированного коцикла:

$$\int_{\Delta_*} \log \|A(x)\|^+ d\mu(x) < \infty$$

- (H4) полуслабая сходимость: существует множество Z полной лебеговой меры и константа $c_0 > 1$ такая, что для всех $\theta \in Z$ и всех $n \geq n_0(\theta)$,

$$\max_{1 \leq j \leq d+1} \|\theta - w_j^{(n)}\| \leq c_0^{-n(1+o(1))}.$$

- (H5) перемешивание для матриц неполных частных: все определенные выше матрицы, являющиеся аналогом последовательности неполных частных для алгоритма Евклида, имеют неотрицательные коэффициенты. Для любого $\theta \in \Delta_*$, мы полагаем

$$\nu(\theta) = \min\{k : C^k(\theta) \text{ строго положительна}\}$$

тогда

$$\int_{\Delta_*} \nu(\theta) d\theta < \infty.$$

Верна следующая простая

Лемма 32. *Для специального ускорения условия H1-H2 и H4-H5 выполняются автоматически.*

Таким образом, для конкретных алгоритмов непосредственная проверка требуется только для условия H3.

Доказательство. H1 вытекает из Следствия 30. H2 следует из Утверждения 29. Докажем H4. Цилиндрами марковского разбиения в нашем случае являются симплексы, вершины которых заданы строками матрицы сходимости. Диаметры этих цилиндров убывают по закону геометрической прогрессии, поэтому что якобиан ограничен снизу по доказанному ранее Предложению 28 (или, что равносильно, мы можем вывести это утверждение из свойства ограниченного искажения для инвариантной меры).

H5 проверяется непосредственно: для специального ускорения $\nu(\theta) = 1$ для всех $\theta \in \Delta_*$. Поэтому $\int_{\Delta_*} \nu(\theta) d\lambda = \lambda(\Delta_*) < \infty$.

□

Таким образом, для конкретных алгоритмов необходимо проверять только выполнение свойства H3. Спектр марковских алгоритмов определяется как множество показателей Ляпунова соответствующего коцикла.

Определение. Спектр называется *простым*, если все показатели Ляпунова попарно различны.

Определение. Спектр удовлетворяет *свойству Пизо*, если один из показателей Ляпунова строго положителен, а остальные меньше нуля.

В работе [73] был предложен алгоритм, позволяющий проверить простоту спектра для многих марковских цепных дробей. Его обоснование опирается на идеи, которые использовали А. Авила и М. Виана ([36]) для доказательства простоты спектра коцикла Концевича - Зорича, и Галуа - версию критерия Авилы - Вианы, доказанную для перекладываний отрезков Йоккозом, Матеусом и Моллером ([105]).

Аналогичный подход для одного из алгоритмов ренормализации ранее использовался в работе [33] и подробнее описан в разделе 7.

При этом результаты о простоте спектра имеют непосредственные приложения также для описания свойств рассматриваемых многомерных цепных дробей с точки зрения диофантовых приближений. Лагариас в [96] (Теорема 4.1) показал, что если условия H1-H5 выполняются, то равномерный показатель приближения для рассматриваемого алгоритма выражается через показатели Ляпунова следующим образом:

$$\eta^*(\theta) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Отсюда следует, что алгоритмы, для которых доказана простота ляпуновского спектра, не являются оптимальными.

Единый подход для проверки выполнения свойства Пизо пока найти не удалось, но есть отдельные продвижения в этом вопросе для конкретных алгоритмов (например, [30] или [42]. При этом наличие свойства Пизо означает отсутствие слабого перемешивания для соответствующего алгоритма (см., например, [42]).

Глава 3

Перекладывания отрезков с флипами

3.1 Определения и результаты

Перекладывания отрезков с флипами являются естественным обобщением перекладываний отрезков. Неформально, перекладывание отрезков с флипами f задается конечным разбиением полуинтервала действительной оси I на подинтервалы I_α, и полунепрерывным отображением из $\cup_{\alpha\in\mathcal{A}}\text{int}(I_\alpha)$ в I, которое устроено следующим образом: f является изометрией на каждом из I_α, так что образы подинтервалов разбиения I_α не пересекаются по внутренним точкам, при этом f обращает ориентацию хотя бы одного из отрезков разбиения I_α. Заметим, что из-за требования обращения ориентации даже доопределение f в левых концах не позволит автоматически получить биекцию $I \to I$.

Определение. Перекладывание отрезков с флипами называется *минимальным*, если любая бесконечная орбита всюду плотна.

Замечание 5. Перекладывания отрезков минимальны в более сильном смысле - у них плотны орбиты, взятые в обоих направлениях (прошлого и будущего). Для перекладываний отрезков с флипами не все орбиты продолжаются в обоих направлениях, поэтому мы рассматриваем только орбиты, которые продолжаются в будущее.

Топологическая мотивация для изучения перекладываний отрезков с флипа-

ми связана с тем, что отображение первого возвращения на трансверсаль для измеримых слоений на неориентируемой поверхности является перекладыванием отрезков с флипами; при этом слои соответствующего слоения могут быть ориентируемы, но не ко-ориентируемы.

Более строгое определение выглядит следующим образом. Рассмотрим интервал $I = [0, 1)$ и его разбиение на подотрезки I_α, которые мы будем помечать буквами конечного алфавита $\mathcal{A}$. Обозначим длину каждого отрезка разбиения I_α через λ_α и обозначим вектор $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (каждая компонента λ_α строго положительна). Введем пару отображений, которую мы назовем *обобщенной перестановкой* $\hat{\pi} = (\pi_0, \pi_1)$, где $\pi_0 : \mathcal{A} \mapsto \{1, \dots, n\}$ - это биекция и $\pi_1 : \mathcal{A} \mapsto \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$ - это такое отображение, что его модуль $|\pi_1|$ является биекцией. Эта пара отображений $\pi_0, |\pi_1|$ описывает порядок появления интервалов I_α до и после применения отображения. Отображение π_1 можно рассматривать как перестановку, дополнительно снабжающую все элементы знаками $\theta|\pi_1|$, где $\theta \in \{-1, 1\}^n$. Эта перестановка хранит информацию о тех интервалах, ориентация которых была обращена (они определяются условиями $\theta_\alpha = -1$). Множество $F = \{\alpha \in \mathcal{A} : \theta_\alpha = -1\}$ мы будем называть *множеством флипов*.

Определение. Перекладывание отрезков с флипами, заданное $(\hat{\pi}, \lambda)$, - это следующее отображение:

$$f(x) = \begin{cases} x + w_\alpha & \text{если } x \in \text{int}(I_\alpha), \alpha \notin F, \\ w_\alpha - x, & \text{если } x \in \text{int}(I_\alpha), \alpha \in F, \end{cases}$$

где

$$w_\alpha = \sum_{|\pi_1|(\beta)<|\pi_1|(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)} \lambda_\beta,$$

если $\alpha \notin F$ и

$$w_\alpha = \sum_{|\pi_1|(\beta)\le|\pi_1|(\alpha)} \lambda_\beta - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)} \lambda_\beta$$

иначе.

Поведение орбит перекладываний отрезков с флипами полностью противоположно устройству орбит классических перекладываний отрезков ([112]):

Теорема 33 (Ногейра)**.** *Почти все перекладывания отрезков с флипами имеют периодическую орбиту.*

Таким образом, множество параметров, задающих минимальное перекладывание отрезков с флипами (мы обозначим это множество через $MF(n)$), имеет нулевую меру Лебега.

В работе [124] мы уточнили этот результат:

Теорема 34 (Скрипченко - Трубецкой)**.** *Выполнены следующие оценки на хаусдорфову размерность множества* $MF(n)$*:*

$$n-2 \leq Hdim(MF(n)) < n-1.$$

Замечание 6. Верхняя оценка доказана А. Скрипченко, а нижняя - С. Трубецким.

Следствием этого наблюдения является нижняя оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, задающих нестрого эргодичные минимальные перекладывания n отрезков с флипами, это множество обозначается $NUE(n)$:

Теорема 35 (Скрипченко - Трубецкой)**.** *Выполнены следующие оценки на хаусдорфову размерность множества* $NUE(n)$*:*

$$[\frac{n-1}{2}]-1 \leq Hdim(NUE(n)).$$

Главный инструмент доказательства этих утверждений (как и в случае теоремы 33) - это алгоритм ренормализации, который по аналогии с перекладываниями отрезков носит название *индукции Рози*. Подробно индукция Рози для случая перекладываний отрезков с флипами описана в параграфе 3.2. Как и в случае перекладываний отрезков, отображение ренормализации является отображением первого возвращения на подотрезок отрезка - носителя; метрическая составляющая устроена полностью аналогично классической индукции Рози, а вот комбинаторная часть отличается, так как в случае наличия флипов индукция, примененная к заданному неприводимой перестановкой отображению, может дать отображение, перестановка которого приводима. В таком случае индукция Рози останавливается, а для доказательства 34 необходимо оценить хаусдорфову размерность множества параметров, для которого индукция никогда не останавливается.

Стратегия доказательства верхней оценки в теореме 34, которое подробно описана в следующих разделах, во многом совпадает с описанной в разделе 2 в связи с критерием Фужерона и в разделе 6 в связи с теоремой 83.

А именно, мы сделаем следующие шаги:

1. после определения индукции Рози для перекладываний отрезков с флипами в Параграфе 3.2 и его специальным ускорением (в смысле предыдущей главы), которое описано в Параграфе 3.4, с помощью диаграммы Рози (см. Параграф 3.3) определим марковский сдвиг, отвечающий отображению ренормализации в Параграфе 3.5;
2. проверим, что выполняется свойство ограниченного искажения (его формальное определение и соответствующие результаты приведены в Параграфе 3.6);
3. определим функцию крыши как время первого возвращения в подсимплекс, используем ее для определения специального потока и проверим утверждения о наличии *экспоненциального хвоста* у функции крыши (все необходимые утверждения приведены в Параграфе 3.7);
4. утверждение о том, что соответствующий марковский сдвиг является быстро распадающимся оказывается прямым следствием экспоненциального хвоста у функции крыши: марковское отображение $T : \Delta \to \Delta$, которому отвечает марковское разбиение $\Delta^{(l)}$, называется *быстро распадающимся*, если существуют такие $C_1 > 0, \alpha_1 > 0$ такие, что $\sum_{\mu(\Delta^{l)})\leq\epsilon} \mu(\Delta^{l)}) \leq C_1\epsilon^{\alpha_1}$ для произвольного $1 > \epsilon > 0$.
5. верхняя оценка хаусдорфовой размерности исключительного множества, которая опирается на свойство быстрого распада (доказательство этой части дословно повторяет результат Авилы - Делакруа [30]); последние два этапа описаны в Параграфе 3.8.

Задача построения меры, инвариантной относительно описанной выше ренормализации - индукции Рози с носителем $MF(n)$ в настоящее время решена только для 4 отрезков. Основным препятствием для использования предложенного в [33] подхода, обобщенного позже в [72], использующего термодинамический формализм для счетных марковских сдвигов является сложная комбинаторная структура соответствующей диаграммы Рози: для перекладываний отрезков с флипами не выполняется условие о том, что в каждой вершине диаграммы Рози есть одинаковое число входящих и исходящих ребер и, соответственно, затруднена проверка

гипотезы о том, что соответствующий марковский сдвиг является топологически транзитивным (более того, это свойство может выполняться только асимптотически для пяти и более отрезков).

Тем не менее, верна следующая условная теорема:

Теорема 36. *Пусть μ - эргодическая мера, носителем которой является $MF(n)$, такая, что μ инвариатна относительно индукции Рози. Тогда почти все (по отношению к μ) минимальные перекладывания отрезков с флипами строго эргодичны.*

С учетом наличия алгоритма ренормализации, который является марковской многомерной цепной дробью, эта теорема оказывается следствием утверждения 30.

Альтернативный способ ее доказательства опирается на инструменты символической динамики - легко проверить, что перекладывания отрезков с флипами, как и классические перекладывания отрезков, имеют линейную комбинаторную сложность и удовлетворяют критерию Бошерницана [47].

Примеры минимальных перекладываний отрезков с флипами, допускающих 2 и более инвариантных мер, известны ([39], [124]). Также известно, что число инвариантных мер не превышает числа отрезков (этот результат следует из [54]). Символический подход к изучению перекладываний отрезков с флипами позволяет существенно улучшить эту оценку: используя критерий из [58], опирающийся на оценку сложности и числа биспециальных слов в комбинаторном представлении рассматриваемой динамической системы, можно показать, что число инвариантных мер не превышает $[n/2]$, где n - число отрезков непрерывности отображения. При этом вопрос об эффективности этой оценки остается открытым.

3.2 Индукция Рози для перекладываний отрезков с флипами

Индукция Рози для перекладываний отрезков с флипами подробно описана в работах [112], [80] и [84]. В настоящем тексте мы приведем краткое описание этого алгоритма.

Один шаг индукции Рози - это оператор R на пространстве перекладываний отрезков с флипами, который каждому перекладыванию отрезков с флипами $f = (\lambda, \hat{\pi})$ с неприводимой перестановкой $\hat{\pi}$ ставит в соответствие другое перекладывание отрезков с флипами $f' = R(f) = R(\lambda, \hat{\pi})$, являющееся отображением первого возвращения, индуцированным f, на подотрезок $[0, \nu]$, где ν определяется следующим образом:

$$\nu = \begin{cases} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha - \lambda_{\alpha_0} & \text{если } \lambda_{\alpha_0} < \lambda_{\alpha_1} \\ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha - \lambda_{\alpha_1}, & \text{если } \lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1} \end{cases}$$

где $\alpha_0 := \pi^{-1}(n)$ и $\alpha_1 := \pi_1^{-1}(\pm n)$.

Индукция Рози не определена в случае, если $\lambda_{\alpha_0} = \lambda_{\alpha_1}$. С помощью индукции легко проверить, что хаусдорфова размерность множества длин перекладываний отрезков с флипами, удовлетворяющих этому равенству, не превосходит $n - 1$. Действительно: очевидно, что это выполнено для $n = 2$, потому что у перекладывания отрезков на 2 отрезках все орбиты периодические; пусть известно, что оценка верна для всех перекладываний с флипами на $n - 1$ отрезке. Применяем один шаг индукции Рози для перекладываний n отрезков с флипами, для которых выполнено $\lambda_{\alpha_0} = \lambda_{\alpha_1}$, и получаем подмножество перекладываний $n - 1$ отрезков с флипами, к которому можно применить предположение индукции. Так как индукция Рози - это липшецево отображение, верхняя оценка хаусдорфовой размерности не поменяется, поэтому при оценке хаусдорфовой размерности множества параметров, которые являются длинами минимального перекладывания отрезков с флипами, множество тех отображений, для которых не определена индукция Рози, можно не учитывать.

Легко видеть, что

$$f' = (\lambda', \hat{\pi}') = \begin{cases} ((I_a(\hat{\pi}))^{-1}\lambda, a(\hat{\pi})) & \text{если } \lambda_{\alpha_0} < \lambda_{\alpha_1} \\ ((I_b(\hat{\pi}))^{-1}\lambda, b(\hat{\pi})) & \text{если } \lambda_{\alpha_0} > \lambda_{\alpha_1} \end{cases} \tag{3.1}$$

где матрицы перехода $I_a(\hat{\pi}), I_b(\hat{\pi}) \in SL(n, \mathbb{Z})$ и отображения $a(\hat{\pi}), b(\hat{\pi})$ определены следующим образом. Во-первых,

$$I_a(\hat{\pi}) = E + E_{\alpha_0, \alpha_1} \text{ и } I_b(\hat{\pi}) = E + E_{\alpha_1, \alpha_0}$$

где E – единичная матрица и $E_{\alpha,\beta}$ –элементарная матрица, у которой 1 стоит на месте (α, β).

Следующие четыре отображения описывают, что происходит с перестановками:

$$\text{если } \theta_{\alpha_0} := 1, \text{ тогда } a(\hat{\pi}) = \begin{cases} (\pi_0(\alpha), \pi_1(\alpha)) & \text{если } |\pi_1|(\alpha) \leq \pi_1(\alpha_0) \\ (\pi_0(\alpha), \alpha_1) & \text{если } |\pi_1|(\alpha) = \pi_1(\alpha_0) + 1 \\ (\pi_0(\alpha), \pi_1(\alpha) + 1) & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\text{если } \theta_{\alpha_1} = 1, \text{тогда } b(\hat{\pi}) := \begin{cases} (\pi_0(\alpha), \pi_1(\alpha)) & \text{если } \pi_0(\alpha) \leq \pi_0(\alpha_1) \\ (\alpha_0, \pi_1(\alpha)) & \text{если } \pi_0(\alpha) = \pi_0(\alpha_1) + 1 \\ (\pi_0(\alpha) + 1, \pi_1(\alpha)) & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\text{если } \theta_{\alpha_0} = -1, \text{ тогда } a(\hat{\pi}) := \begin{cases} (\pi_0(\alpha), \pi_1(\alpha)) & \text{если } |\pi_1|(\alpha) < \pi_1(\alpha_0) \\ (\pi_0(\alpha), \alpha_1) & \text{если } |\pi_1|(\alpha) = \alpha_0 \\ (\pi_0(\alpha), \pi_1(\alpha) + 1) & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\text{если } \theta_{\alpha_1} = -1, \text{тогда } b(\hat{\pi}) := \begin{cases} (\pi_0(\alpha), \pi_1(\alpha)) & \text{если } |\pi_1|(\alpha) < \pi_1(\alpha_0) \\ (\alpha_0, \pi_1(\alpha)) & \text{если } |\pi_1|(\alpha) = \alpha_0 \\ (\pi_0(\alpha) + 1, \pi_1(\alpha)) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если использовалось преобразование a, мы говорим, что элемент α_0 стал *победителем*, а элемент $|\alpha_1|$ стал *проигравшим*; а в случае, если использовалось преобразования b, все наоборот: α_0 стал *проигравшим*, а элемент $|\alpha_1|$ стал *победителем*.

В целом, если задан алфавит $\mathcal{A}$ на n буквах и если α и β являются последними элементами перестановки π, тогда, в соответствии с написанными выше неравенствами, мы называем α победителем и β проигравшим (или наоборот). Иногда нам бывает удобнее рассматривать перестановку со знаками $\hat{\pi}$, (которая учитывает обращение ориентации при наличии флипа); в этом случае мы должны уточнить, что α или $-\alpha$ является победителем или проигравшим.

Замечание 7. Применение индукции Рози к перекладыванию отрезков с флипом схематично показано на рис. 3.1: красный отрезок является победителем, желтый

- проигравшим, индукция применяется справа и перестановка из неприводимой превращается в приводимую.

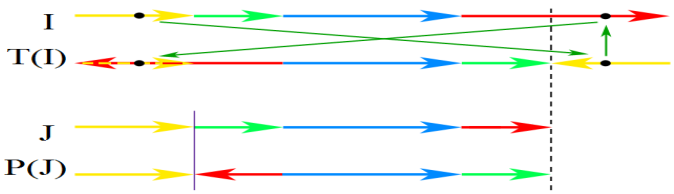


Рис. 3.1: Индукция Рози для перекладываний отрезков с флипами.

3.3 Диаграмма Рози

Как и в случае классических перекладываний отрезков, комбинаторную составляющую индукции Рози удобно представлять в виде графов, которые мы будем называть *диаграммами Рози*.

Рассмотрим множество неприводимых перестановок (в случае перекладываний отрезков с флипами речь идет о перестановках со знаками). Будем говорить, что неприводимые перестановки со знаками $\hat{\pi}$ и $\hat{\pi}'$ соединены направленным ребром, если существует пара векторов длин λ, λ' такая, что $R(\hat{\pi}, \lambda) = (\hat{\pi}', \lambda')$. Как и в случае перекладываний отрезков, из каждой перестановки выходит не более двух направленных ребер. Однако, как уже отмечалось выше, в случае перестановок с флипами утверждение о том, что из неприводимой перестановки с помощью преобразований a и b можно получить только неприводимые перестановки, неверно. Поэтому существуют вершины, из которых не выходит ни одного направленного ребра. Множество таких вершин мы будем называть *дырой*.

Рассмотрим направленный граф, вершинами которого являются неприводимые перестановки со знаками плюс дыра (мы будем рассматривать все входящие в дыру перестановки как одну вершину). Две вершины-перестановки соединены ребром, если между ними есть направленное ребро в указанном выше смысле; вершина-перестановка соединена направленным ребром с вершиной-дырой, если хотя бы одна из операций a, b превращает ее в приводимую перестановку; из вершины-дыры нет исходящих ребер. Такой граф мы будем называть *диаграммой Рози*. Компоненты связности диаграммы Рози называются *классами Рози*.

Будем называть *путем* длины $m \geq 0$ на диаграмме Рози конечную или бесконечную последовательность $v_0, \ldots, v_m$ вершин (перестановок со знаками) и направленных ребер $a_1, \ldots a_m$, такую, что каждая a_i начинается в вершине v_{i-1} и заканчивается в вершине v_i.

Следующее утверждение доказано в теореме А в [84], потому что условие бесконечности пути на диаграмме Рози эквивалентно тому, что перестановки после применения индукции остаются неприводимыми и путь никогда не попадает в вершину-дыру:

Лемма 37. *Если индукция Рози для перекладывания с флипами* $(\hat{\pi}, \lambda)$ *содержит бесконечное число итераций и не останавливается, то это перекладывание отрезков с флипами* $(\hat{\pi}, \lambda)$ *минимально.*

Для каждого класса Рози $\mathcal{R}$ обозначим множество путей на нем через $\Pi(\mathcal{R})$; для каждого пути $\gamma \in \Pi(\mathcal{R})$ существует отвечающий ему оператор Рози R_γ, матрица которого является произведением соответствующих матриц I_a и I_b и для удобства обозначается R_γ. Транспонированную матрицу $B_\gamma = R_\gamma^T$ мы будем иногда называть *матрицей коцикла* (по аналогии с конструкциями в [128] и [130], которые используются для построения римановой поверхности с измеримым слоением на ней по перекладыванию отрезков).

3.4 Ускорение индукции

Один шаг индукции Рози имеет неподвижные точки, поэтому абсолютно непрерывная инвариантная мера обязательно бесконечна. В случае классических перекладываний отрезков А. Зорич предложил рассматривать ускоренную версию индукции Рози ([137]). Это аналог отображения Гаусса для алгоритма Евклида. Его идея переносится без изменений на случай перекладываний отрезков с флипами (та же концепция описана в предыдущей главе применительно к многомерным цепным дробям).

Нам понадобятся два определения.

Определение. Пусть $\mathcal{R}$–класс Рози. Путь $\gamma \in \Pi(\mathcal{R})$ называется *полным*, если любая буква α алфавита $\mathcal{A}$ является победителем для какого-то из направленных ребер, входящих в γ.

Определение. Будем называть путь $\gamma \in \Pi(\mathcal{R})$ *положительным*, если все элементы отвечающей этому пути матрицы индукции Рози R_γ строго положительны.

Как уже говорилось, при итерации индукции матрица преобразования длин получается как произведение последовательности I_a и I_b с разными a и b. Для каждого шага j индукции Рози определим индикатор $\epsilon \in \{-1, 1\}$: пусть $\epsilon = 1$, если использовалась матрица I_a, и $\epsilon = -1$ если использовалась матрица I_b. Тогда *индукция Зорича* определяется следующим образом:

$$(\lambda', \pi') = Z(\pi, \lambda) = R^n(\pi, \lambda),$$

где n –наименьшее значение $j \geq 1$, для которого $\epsilon^{(j)} = -\epsilon^{(0)}$.

Мы можем рассмотреть диаграмму Рози, соответствующую ускоренной индукции, по аналогии с тем, как определялась диаграмма Рози для стандартной индукции.

Так как нас интересуют только минимальные перекладывания отрезков с флипами, мы исключим из диаграммы Рози вершину, отвечающую дыре. Такую диаграмму будем называть *поправленной диаграммой Рози.*

Как и в случае перекладываний отрезков (см [31] Лемма 3.2), верна следующая:

Лемма 38. *Каждый достаточно длинный путь на поправленной диаграмме Рози является полным и, более того, положительным.*

Значит, мы можем рассмотреть индукцию Рози как многомерную цепную дробь и определить его специальное ускорение в смысле предыдущей главы, матрица которого будет произведением матриц индукции Зорича. Для него будем использовать обозначение $Q(k)$ как в [105] (аналогичные обозначения будут в главе про линейные инволюции): $Q(k) = Z(1) \dots Z(k)$. Обозначение Q будет относиться и к матрице соответствующей индукции Рози, которая получается как произведение матриц I_a и I_b. Единственное важное изменение связано с тем, что мы пока ничего не знаем об эргодических свойствах индукции Рози, а специальное ускорение мы определяли для эргодичных алгоритмов.

Технически нам будет удобно рассматривать пути, возвращающиеся в начальную точку:

Определение. Положительный путь γ на диаграмме Рози называется *петлей*, если он начинается и заканчивается в одной и той вершине и выполнено следующее условие: если $\gamma = \gamma_s\gamma_0 = \gamma_0\gamma_e$ для некоторого γ_s и γ_e,то либо $\gamma = \gamma_0$, либо γ_0 тривиален (то есть это путь нулевой длины).

Каждой положительной петле на диаграмме Рози γ можно поставить в соответствие подмножество Δ_γ симплекса параметров $\Delta \subset \mathbb{R}^{n-1} : \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ и рассмотреть отображение

$$T_\gamma(\hat{\pi}, \lambda) = \big(\hat{\pi}', \frac{\lambda'}{|\lambda|'}\big) = \Big(\hat{\pi}', \frac{Q_\gamma^{-1}\lambda}{||Q_\gamma^{-1}\lambda||}\Big),$$

где $||\lambda|| := \beta_n(\lambda) = \sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha$ и $\lambda', \hat{\pi}'$ определяются ускоренной индукцией Рози. которое является проективизацией линейного отображения, заданного индукцией Рози.

У нас уже были определения проективно-сжимающего и сильно сжимающего отображений; введем еще одно связанное с ними определение из [31]. Для этого сначала уточним некоторые свойства пространства параметров.

Определение. Конечномерное связное финслерово многообразие Δ с мерой $\updownarrow$ на нем называется *областью Джона*, если:

- Для $x, x' \in Delta$ обозначим через $d(x, x')$ точную нижнюю грань длины гладкого пути, соединяющего x и x'. По отношению к этой метрике Δ должно быть ограничено и существует такие константы C_0 и ϵ_0, что для всех $\epsilon < \epsilon_0$ для всех $x \in \Delta$ найдется $x' \in \Delta$, такое, что $d(x, x') \leq C_0\epsilon$ и шар $B(x', epsilon)$ компактно содержится в Δ;
- мера $\updownarrow$ - это конечная мера с компактным носителем на Δ, для которой выполнено, что для всех $C > 0$ существует $A > 0$, для которого для любого компактно вложенного в Δ $l(B(x, Cr)) < Al(B(x, r)$.

Замечание 8. Вообще говоря, мера l не обязана быть абсолютно непрерывной относительно меры Лебега, но в настоящем разделе мера l будет индуцированной мерой Лебега.

Определение. Пусть L –конечное или счетное множество, Δ – множество Джона, и $\{\Delta^{(l)}\}_{l\in L}$ – разбиение на открытые подмножества множества Δ (или какого-то его подмножества полной меры). Отображение $T : \cup_l\Delta^{(l)} \to \Delta$ называется *равномерно расширяющим* отображением, если:

- существует $k > 1$ такое, что для каждого $l \in L$, Q является диффеоморфизмом класса гладкости C^1 между $\Delta^{(l)}$ и Δ, и существует константа $C_{(l)}$ такая, что

$$k \leq \det J(\lambda) \leq C_{(l)}$$

для всех $\lambda \in \Delta^{(l)}$ где $J(\lambda)$ обозначает якобиан отображения L;

- Пусть $\bar{J}(\lambda)$ обратный к якобиану T по отношению к мере l. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество ветвей обратных к T функций. Функция $\log\det\bar{J}$ является C^1 гладкими на каждом множестве $\Delta^{(l)}$ (по отношению к гильбертовой метрике) и существует $C > 0$ такое, что для всех $h \in \mathcal{H}$

$$||D((\log\det\bar{J}) \circ h)||_{C^0(\Delta)} \leq C.$$

Лемма 39. *Отображение T_γ является равномерно расширяющим по отношению к марковскому разбиению $(\Delta^{(l)})$.*

Доказательство. Аналогичное утверждение верно для перекладываний отрезков ([31] Лемма 4.3) и для линейных инволюций ([35] Лемма 6.1). Наше доказательство идейно очень близко к изложенным в этих работах. Кроме того, та же техника использована в доказательстве Леммы 2.1 в [32] .

Первая часть определения равномерно расширяющего отображения для случая T_γ следует из положительности петли γ. А именно, рассмотрим достаточно длинный путь γ, содержащий положительную петлю. Тогда соответствующая матрица индукции Q_γ^{-1} является произведением двух матриц, одна из которых является слабо сжимающей (то есть не расширяющей), а другая сильно сжимающей с коэффициентом сжатия строго больше 1 по отношению к гильбертовой метрике. Наличие сильного сжатия, которое следует из положительности петли, мы сейчас проверим непосредственно.

Так как рассматриваемый нами путь на диаграмме Рози является положительным, мы можем рассмотреть обратное к отображению T_γ отображение:

$$L' : \Delta \to \Delta^{(l)}$$

и доказать, что это обратное отображение L' является равномерно сжимающим. Легко видеть, что $Q'\lambda' = \frac{C\lambda'}{||C\lambda'||}$, где C – это матрица со строго положительными коэффициентами, связывающая старые и новые длины отрезков :

$$\begin{cases} c_{11}\lambda'_1 + \ldots + c_{1n}\lambda'_n = \lambda_1, \\ \ldots \\ c_{n1}\lambda'_1 + \ldots + c_{nn}\lambda'_n = \lambda_n. \end{cases}$$

Поэтому для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ мы имеем

$$\sum_{\beta\in\mathcal{A}} c_{\alpha,\beta}\lambda'_\beta = \lambda_\alpha.$$

Теперь, используя результат Вича (Предложение 5.2 [128], доказательство которого дословно переносится на случай перекладываний отрезков с флипами (Лемма 3.1 в [112]), мы имеем $\det \bar{J}(\lambda') = \frac{1}{||C\lambda'||^n} = \frac{1}{(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} C_\alpha\lambda'_\alpha)^n}$ где $C_\alpha := \sum_{\beta\in\mathcal{A}} c_{\alpha,\beta}$ и n число отрезков непрерывности перекладывания отрезков с флипами. Так как у матрицы C все коэффициенты целые строго положительные, у нас получается $C_\alpha \geq n$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Из ренормализующего условия $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda'_\alpha = 1$ следует, что Утверждение для Q выполнено с константой $C_{(\ell)} := (\max_\alpha(C_\alpha))^n$ и $k := n^n$.

Переходим к проверке условия второй части определения. Для краткости введем обозначение $f(\lambda) := \log\det \bar{J}(\lambda)$. Как уже отмечалось ранее, $\det \bar{J}(\lambda) = 1/(\sum_\alpha C_\alpha\lambda_\alpha)^n$, поэтому

$$f(\lambda) = \log(1/(\sum_\alpha C_\alpha\lambda_\alpha)^n) = -n\log(\sum_\alpha C_\alpha\lambda_\alpha).$$

Посчитаем частные производные f (по отношению к гильбертовой метрике) и получим:

$$\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\lambda_\gamma} = -n\frac{C_\gamma\lambda_\gamma}{\sum_\alpha C_\alpha\lambda_\alpha}$$

Так как знаменатель отделен от нуля, заключаем, что f является C^1 гладкой.

Заметим теперь, что обратная ветвь отображения T_γ может быть записана как $h(\hat{\pi},\lambda) = (\hat{\pi}, \frac{R_\gamma\lambda}{||R_\gamma\lambda||})$. Упомянутый выше результат Вича ([128], Proposition 5.3) означает, что $\det(\bar{J}\circ h)(\hat{\pi},\lambda) = \frac{1}{||R_\gamma\lambda||^n}$. Поэтому мы имеем

$$\frac{\det(\bar{J}\circ h)(\hat{\pi},\lambda)}{\det(\bar{J}\circ h)(\hat{\pi},\lambda')} = \left(\frac{||Q_\gamma\lambda||}{||Q_\gamma\lambda'||}\right)^n \leq \sup_{\alpha\in 1,\ldots,n}\left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda'_\alpha}\right)^n \leq e^{n\cdot dist(\lambda,\lambda')}$$

(см также [32] Уравнение (2.6)). Таким образом, функция $\log(\det(\bar{J}\circ h))$ является липшецевой по отношению к гильбертовой метрике (расстояние в этой метрике мы обозначили через $dist$). □

3.5 Марковский сдвиг

Введенная выше проективизация описанного выше отображения индукции T_γ является марковским отображением в смысле определения из раздела 2.2: отображение T_γ задает счетное марковское разбиение $\Delta^{(l)}$ пространства параметров, как и в случае перекладываний отрезков (см. [130]); вершины симплексов разбиения под действием отображения T_γ переходят в вершины, границы – в границы; а если ввести счетный алфавит, буквы которого кодируют клетки разбиения, то отображение T_γ на символическом языке может быть описано как марковский сдвиг.

Определение. Счетный марковский сдвиг σ с матрицей переходов U и множеством состояний $\mathcal{S}$ удовлетворяет *условию больших образов и прообразов*(BIP), если существует конечное множество $\{i_1, \ldots, i_m\} \in \mathcal{S}$ такое, что для всех $j \in \mathcal{S}$ найдутся $1 \leq k, l \leq m$, для которых $u_{i_k,j} u_{j,i_l} = 1$.

Лемма 40. *Ассоциированный с T_γ марковский сдвиг σ обладает свойством больших образов и прообразов (BIP).*

Доказательство. Покажем, каким будет требуемое конечное множество вершин. Для каждого класса Рози мы рассмотрим две диаграммы: отвечающую классической и ускоренной индукции Рози. У графа, отвечающего ускоренной индукции, конечное число вершин-перестановок, а при переходе к графу индукции без ускорения каждая вершина распадается на счетное число вершин (они пронумерованы числом шагов индукции, входящих в один шаг ускорения). Если две вершины π_1 и π_2 графа, отвечающего ускоренной индукции, соединены направленным ребром, то любая полученная из распадения π_1 (при переходе к индукции без ускорения) вершина соединяется ребром со всеми, полученными из распадения π_2. При этом из каждой вершины графа, отвечающего ускоренной индукции, выходит хотя бы одно ребро. Поэтому искомое конечное множество из определения 3.5 можно сформировать, взяв по одной вершине графа индукции без ускорения, полученной из распадения каждой вершины графа индукции с ускорением. □

3.6 Свойство ограниченного искажения

Оценки искажения, которые мы получим в этом разделе, будут опираться на изучение образов меры Лебега при применении отображения ренормализации. Мы будем использовать стратегию из работ [31] и [35] и начнем с описания класса инвариантных мер.

3.6.1 Вспомогательные меры

Рассмотрим диаграмму Рози, отвечающую ускоренной индукции, и некоторый путь γ на этой диаграмме. Зафиксируем вершину $\hat{\pi}$ и рассмотрим содержащий эту вершину класс Рози $\mathcal{R}$. Обозначим через B_γ матрицу коцикла, отвечающую γ, а транспонированную матрицу будем обозначать B_γ^T (напомним, что $B_\gamma^T = Q_\gamma^{-1}$).

Пусть $\mathbb{R}_+^n$ – это положительный конус. Тогда, обозначив через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ внутреннее произведение, определим

$$\Lambda_q := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^n : \langle \lambda, q \rangle < 1\} \tag{3.2}$$

и

$$\Delta'_\gamma := B_\gamma^T \mathbb{R}_+^n.$$

Для произвольного $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}_+^n$ введем меру ν_q на σ-алгебре $A \subset \mathbb{R}_+^n$ борелевских множеств, которые положительно инвариантны (т.е. $\mathbb{R}_+ A = A$):

$$\nu_q(A) := Leb(A \cap \Lambda_q).$$

Другими словами, ν_q может рассматриваться как мера на проективном пространстве $\mathbb{R}P_+^{n-1}$.

Наш план состоит в том, что мы будем получать оценки для всех значений q сразу и, соответственно, оценки будут равномерными относительно q.

Используя предложение 5.4 в [128], легко видеть, что

$$\nu_q(\mathbb{R}_+^n) = \frac{1}{n! q_1 \ldots q_n},$$

$$\nu_q(\Delta'_\gamma) = \frac{1}{n! (B_\gamma q)_1 \ldots (B_\gamma q)_n},$$

и

$$\nu_q(B_\gamma^T A) = Leb(B_\gamma^T A \cap \Lambda_q) = Leb(A \cap \Lambda_{B_\gamma q}) = \nu_{B_\gamma q}(A).$$

Рассмотрим теперь некоторый класс Рози $\mathcal{R}$ и пусть $\gamma \in \Pi(\mathcal{R})$ – его представитель. Обозначим $\Lambda_{q,\gamma} := B_\gamma^T \Lambda_{B_\gamma q}$. Обозначим через $\Gamma \in \Pi(\mathcal{R})$ множество путей, начинающихся в одной и той же вершине $\hat{\pi} \in \mathcal{R}$, тогда объединение множеств Λ_q, определенных по входящим в Γ путям, описывается следующим образом:

$$\Lambda_{q,\Gamma} = \cup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_{q,\gamma}.$$

Определим

$$P_q(\Gamma|\gamma) := \frac{Leb(\Lambda_{q,\Gamma_\gamma})}{Leb(\Lambda_{q,\gamma})} = \frac{\nu_q(\cup_{\gamma' \in \Gamma_\gamma} \Delta'_{\gamma'})}{\nu_q(\Delta'_\gamma)},$$

где $\Gamma_\gamma \subset \Gamma$ - это множество путей, стартовый фрагмент которых совпадает с γ.

Посчитаем эти условные вероятности. Сначала предположим, что γ – это путь длины 1 (одно направленное ребро). Обозначим через $\hat{\pi} \in \mathcal{R}$ перестановку, с которой начинается γ, и будем считать, что $\alpha \in \mathcal{A}$ - победитель, а $\beta \in \mathcal{A}$ - проигравший одного шага индукции Рози, который отвечает пути γ. Тогда мы имеем следующие условные вероятности:

$$P_q(\gamma|\hat{\pi}) := \frac{q_\beta}{(q_\alpha + q_\beta)}.$$

Аналогично, для более длинного пути имеем: для $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ и $q \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}} = \mathbb{R}_+^n$, обозначим $N_{\mathcal{A}'}(q) := \prod_{\alpha \in \mathcal{A}'} q_\alpha$ и $N(q) := N_{\mathcal{A}}(q)$, тогда

$$P_q(\gamma|\hat{\pi}) := \frac{N(q)}{N(B_\gamma q)}.$$

Введем частичный порядок на множестве путей: для двух данных путей γ, γ' мы считаем, что $\gamma \leq \gamma'$, если $\gamma' = \gamma\gamma_e$ для некоторого γ_e. Мы говорим, что множество путей Γ является *непересекающимся*, если никаких два элемента не являются сравнимыми по отношению к введенному частичному порядку. Теперь для каждого семейства путей $\Gamma \subset \Pi(\mathcal{R})$ такого, что для любого пути $\gamma \in \Gamma$ из этого семейства, который начинается с некоторого $\gamma_s \in \Gamma_s$, для каждой перестановки $\hat{\pi} \in \mathcal{R}$ мы определяем

$$P_q(\Gamma|\hat{\pi}) := \sum_{\gamma_s \in \Gamma_s} P_q(\Gamma|\gamma_s) P_q(\gamma_s|\hat{\pi}). \tag{3.3}$$

Заметим также, что

$$P_q(\Gamma|\hat{\pi}) \leq P_q(\Gamma_s|\hat{\pi}) \sup_{\gamma_s \in \Gamma_s} P_q(\Gamma|\gamma_s). \tag{3.4}$$

3.6.2 Лемма Керхгофа

Теперь мы готовы сформулировать первое ключевое утверждение:

Лемма 41. *[Керхгофа] Пусть $\hat{\pi} \in \mathcal{R}$–неприводимая перестановка из n элементов. Для любого $T > 1, q \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}, \alpha \in \mathcal{A}$ верно*

$$P_q\Big(\big\{\gamma \in \Gamma_\alpha(\hat{\pi}) : (B_\gamma q)_\alpha > T q_\alpha\big\}\big|\hat{\pi}\Big) < \frac{n}{T},$$

где $\Gamma_\alpha(\hat{\pi})$ обозначает множество путей, начинающихся в $\hat{\pi}$, которые не содержат шагов с победителем α.

Доказательство. Доказательство очень похоже на доказательство аналогичного утверждения для перекладываний отрезков, которое приведено в [31]. Рассмотрим подмножество $\Gamma_\alpha^{(k)}(\hat{\pi})$ путей длины не больше k в множестве $\Gamma_\alpha(\hat{\pi})$. Будем доказывать неравенство

$$P_q\Big(\big\{\gamma \in \Gamma_\alpha^{(k)}(\hat{\pi}) : (B_\gamma q)_\alpha > T q_\alpha\big\}\big|\hat{\pi}\Big) < \frac{n}{T}, \tag{3.5}$$

индукцией по k. Утверждение леммы легко следует из этого неравенства.

Начнем с базы $k = 1$. Рассмотрим путь γ длины 1, это одно направленное ребро. Априори есть две возможности в зависимости от свойств перестановки $\hat{\pi}$. В первом случае ни α, ни $-\alpha$ не являются последними элементами в верхней или нижней строке перестановки $\hat{\pi}$, тогда применение индукции, если мы идем по пути из $\Gamma_\alpha(\hat{\pi})$, никак не меняет q_α, т. е., $(B_\gamma q)_\alpha = q_\alpha$. Тогда рассмотренное в неравенстве (3.5) множество пусто и неравенство выполняется автоматически.

Во втором случае α (или $-\alpha$) является крайним правым элементом одной из строк перестановки, но тогда это обязательно проигравший по определению $\Gamma_\alpha(\hat{\pi})$. Обозначим соответствующего победителя через β. Тогда $P_q(\gamma|\hat{\pi}) = \frac{q_\alpha}{q_\alpha + q_\beta}$. Поэтому, учитывая, что $(B_\gamma q)_\alpha = q_\alpha + q_\beta$, неравенство $(B_\gamma q)_\alpha > T q_\alpha$ эквивалентно тому, что $q_\alpha/(q_\alpha + q_\beta) < 1/T$. Пусть β_i – множество всех таких победителей, а γ_i обозначает набор соответствующих путей, то есть $\Gamma_\alpha^{(1)}(\hat{\pi}) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell\}$. Так как

эти пути не пересекаются, мы имеем

$$P_q\Big(\big\{\gamma \in \Gamma_\alpha^{(1)}(\hat\pi) : (B_\gamma q)_\alpha > T q_\alpha\big\}\big|\hat\pi\Big) = \sum_{(i: q_\alpha + q_{\beta_i} > T q_\alpha)} \frac{q_\alpha}{q_\alpha + q_{\beta_i}}$$
$$< card\big(i : q_\alpha + q_{\beta_i} > T q_\alpha\big) \cdot \frac{1}{T}$$
$$\le \frac{n}{T}.$$

Это завершает доказательство для $k = 1$.

В то же время, индуктивный переход к k от $k-1$ происходит автоматически, если ни одна из строк перестановки $\hat\pi$ не заканчивается на α (или $-\alpha$). Если это условие не выполнено, можно считать, что верхняя строка $\hat\pi$ оканчивается на α, а нижняя - на какое-то β (и победителем будет β). Обозначим путь длины 1, отвечающий этому шагу индукции, через γ_s, и пусть $q' = B_{\gamma_s} q$. Имеем $q'_\alpha = q_\alpha + q_\beta$ и $P_q(\gamma_s|\hat\pi) = \frac{q_\alpha}{q'_\alpha}$. Неравенство следует из предположения индукции и уравнения (3.4).

□

Будем теперь применять лемму Керхгофа для того, чтобы получить более точные оценки искажения. Основная идея состоит в том, что для каждого маленького компактно вложенного подсимплекса исходного пространства параметров можно определить время возвращения в него; при этом некоторые минимальные орбиты не вернутся, потому что окажутся вблизи границы пространства параметров; мы хотим убедится, что мера (в смысле определенных выше условных вероятностей) таких точек в каждом подсимплексе мала.

Мы будем использовать стратегию, предложенную в Аппендиксе A работы [31]. Прежде чем формулировать следующую теорему, введем некоторые дополнительные обозначения:

$$\mathcal{A}' \subset \mathcal{A};$$
$$m_{\mathcal{A}'}(q) = \min_{\alpha \in \mathcal{A}'} q_\alpha;$$
$$m(q) = m_{\mathcal{A}}(q)$$
$$m_k(q) = \max_{\{\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} : |\mathcal{A}'| = k\}} m_{\mathcal{A}'}(q);$$
$$M_{\mathcal{A}'}(q) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}'} q_\alpha;$$

$$M(q) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} q_\alpha.$$

Нашей целью является

Теорема 42. *Пусть перестановка $\hat{\pi} \in \mathcal{R}$ неприводима. Тогда существует $C > 1$ такое, что для всех $q \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ выполняется*

$$P_q\Big(\{\gamma : M(B_\gamma q) < C \min\{m(B_\gamma q), M(q)\}\}|\hat{\pi}\Big) > C^{-1}.$$

Доказательство. Идея доказательства взята из [31]: мы рассмотрим все подмножества $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ фиксированной мощности k и докажем, что для каждого $1 \le k \le n$ существует $C > 1$ (зависящая от k) такая, что

$$P_q\Big(\{\gamma : M(B_\gamma q) < C \min\{m_k(B_\gamma q), M(q)\}\}|\hat{\pi}\Big) > C^{-1}. \tag{3.6}$$

Если мы докажем это утверждение для $k = n$, то получим утверждение доказываемой теоремы. Доказывать будем индукцией по k.

Для $k = 1$ мы имеем $M(B_\gamma q) = m_1(B_\gamma q) \ge M(q)$; будем оценивать вероятность события $E_1 = \{\gamma : M(B_\gamma q) < CM(q)\}$. Пусть E^c обозначает дополнение к множеству (событию) E; тогда

$$E_1^c = \{\gamma : M(B_\gamma q) \ge CM(q)\} = \bigcap_i \{\gamma : M(B_\gamma q) \ge Cq_i\}, i = 1, \dots, n.$$

Но $M(B_\gamma q) = (B_\gamma q)_j$ для некоторого j, поэтому $E_1^c \subset \cup_{j=1}^n E_j$ где $E_j = \{\gamma : (B_\gamma q)_j \ge Cq_j\}$. Тогда, применяя лемму 41, получаем, что для любого $C > 0$ мы имеем $P_q(E_1^c) < \sum_j P_q(E_j) < n^2 C^{-1}$, и поэтому $P_q(E_1) \ge 1 - \frac{n}{C} > \frac{1}{C}$ для любого $C > n^2 + 1$.

Теперь опишем шаг индукции. Предположим, что неравенство (3.6) выполнено для некоторого $1 \le k < n$ с какой-то константой C_0. Обозначим через Γ множество кратчайших возможных путей γ, начинающихся с перестановки $\hat{\pi}$, для которых $M(B_\gamma q) < C_0 \min\{m_k(B_\gamma q), M(q)\}$ (длина пути определяется числом шагов индукции без ускорения). Мы построим семейство путей, для которых утверждение выполняется для всех путей этого семейства для некоторого подмножества $\mathcal{A}''$ мощности $k+1$ (этого достаточно, потому что m_k - это максимум, взятый по всем множествам фиксированной мощности k).

Напомним, что

$$m_k(B_\gamma q) = \max_{\{\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} : |\mathcal{A}'| = k\}} m_{\mathcal{A}'}(B_\gamma q) = m_{\mathcal{A}'}(B_\gamma q)$$

для некоторого $\mathcal{A}'$ мощности k; поэтому существует непустое множество путей $\Gamma_1 \subset \Gamma$ таких, что для $\gamma \in \Gamma_1$ выполняется $m_k(B_\gamma q) = m_{\mathcal{A}'}(B_\gamma q)$. Так как непустые пространства путей определяют множества ненулевой меры (то есть положительной вероятности), существует $C_1 > 1$ такое, что $P_q(\Gamma_1|\hat{\pi}) > C_1^{-1}$.

Для любого $\gamma_s \in \Gamma_1$ рассмотрим все такие пути $\gamma := \gamma_s\gamma_e$ минимальной длины, что γ заканчивается перестановкой $\hat{\pi}_e$, у которой самый правый элемент верхней или нижней строчки (возможно обеих) не принадлежит множеству $\mathcal{A}' \cup -\mathcal{A}'$. Пусть Γ_2 является набором путей γ, определенных таким образом. Значит, существует $\tilde{C}_2 > 0$ такое, что $P_q(\Gamma_2|\hat{\pi}) > \tilde{C}_2^{-1}$. По предположению индукции и определению множества Γ имеем

$$M(B_{\gamma_s} q) \leq C_0 \min(m_k(B_{\gamma_s} q), M(q)), \tag{3.7}$$

Так как при применении индукции не увеличивается норма вектора, получается, что все компоненты вектора $B_{\gamma_s} q$ принадлежат интервалу $[m(q), C_0 M(q)]$. Мы рассматриваем только кратчайшие пути, поэтому на каждом шаге индукции у нас должен быть новый победитель. Это означает, что длина всего пути γ_e не превосходит $2|\mathcal{A}'| \leq 2k$, и проигравший на каждом шаге тоже меняется. На каждом шаге индукции одна компонента вектора $B_{\gamma_s} q$ прибавляется к другой. Так как проигравший все время меняется, то всякий раз добавляется разная компонента соответствующего вектора. После каждого шага индукции нужно сложить нормы победителя и проигравшего, а значит, мы каждый раз добавляем не более чем $C_0 M(q)$ (в соответствии с оценкой (3.7)). Общее число шагов не превосходит $2n$. Значит, существует такая константа $C_2' = (n+1) C_0 M(q) > 0$, что

$$M(B_\gamma q) < C_2' M(B_{\gamma_s} q).$$

Следовательно, для $C_2 = \max(\tilde{C}_2, C_2')$ мы имеем $P_q(\Gamma_2|\pi) > C_2^{-1}$ и для $\gamma \in \Gamma_2$ выполнено

$$M(B_\gamma q) < C_2 M(B_{\gamma_s} q).$$

Пусть Γ_3 - множество путей $\gamma := \gamma_s\gamma_e$, где $\gamma_s \in \Gamma_2, (B_\gamma q)_\alpha \leq 2n^2 \cdot (B_{\gamma_s} q)_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}'$ и выполняется несколько комбинаторных условий:

- победитель последнего шага пути γ_e принадлежит либо $\mathcal{A}'$, либо $-\mathcal{A}'$;
- победители остальных шагов не принадлежат этим множествам.

По сути это множество путей описано в лемме 41 (победители каждого шага не должны принадлежать $\mathcal{A}'$) с одним существенным отличием: необходимо рассматривать условную вероятность $P_q(\Gamma_3|\gamma_s)$ по отношению к γ_s, а не к какой-то фиксированной перестановке $\hat{\pi}$. А именно, для фиксированного γ_s обозначим $\Gamma_3^{\gamma_s} := \{\gamma_e : \gamma_s\gamma_e \in \Gamma_3\}$. Предположим, что γ_s оканчивается перестановкой $\hat{\pi}$, тогда $P_q(\Gamma_3|\gamma_s) = P_{B_{\gamma_s}q}(\Gamma^{\gamma_s}|\hat{\pi})$. Теперь мы можем применить лемму 41 с $T = \frac{1}{2n}$ и убедиться, что $P_q((\Gamma_3|\gamma_s)^c) \leq \frac{1}{2n}$, поэтому $P_q(\Gamma_3|\gamma_s) \geq 1 - \frac{1}{2n} = \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2}$.

Отсюда получается, что $P_q(\Gamma_3|\hat{\pi}) = P_q(\Gamma_3|\gamma_s)P_q(\gamma_s|\hat{\pi}) > (2C_2)^{-1}$.

Пусть $\gamma := \gamma_s\gamma_e \in \Gamma_3$. Если $M(B_\gamma q) > 2n \cdot M(B_{\gamma_s}q)$, мы рассмотрим $\gamma' = \gamma_s\gamma_e$ - префикс γ минимальной длины, для которого выполнено такое же неравенство : $M(B_{\gamma'}q) > 2n \cdot M(B_{\gamma_s}q)$. Тогда существует $\alpha \notin \pm\mathcal{A}'$ такое, что $M(B_{\gamma'}q) = (B_{\gamma'}q)_\alpha \leq 4n \cdot M(B_{\gamma_s}q)$ (это следует из того, что γ_1 является кратчайшим путем и того, что M_q может максимум удвоится после одного шага индукции без ускорения). Вместе с предположением индукции для k эти наблюдения позволяют нам заметить, что

$$m_{\mathcal{A}'}(B_{\gamma_1}q) > (C_0C_24n)^{-1}M(B_{\gamma_1}q).$$

Если $M(B_\gamma q) \leq 2nM(B_{\gamma_s}q)$, проигравший α последнего шага γ удовлетворяет такому неравенству:

$$(B_{\gamma_1}q)_\alpha \geq (C_0C_24n)^{-1}M(B_{\gamma_1}q)$$

(можно проверить это с помощью вычислений, аналогичных приведенным выше). Этот α не принадлежит $\mathcal{A}'$.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях, мы построили семейство Γ_4 (содержащее определенный выше γ') и $\mathcal{A}'$ мощности $k+1$, для которых неравенство (3.6) выполнено. □

3.6.3 Дальнейшие оценки искажения

Следующая теорема является уточнением Леммы 41.

Теорема 43. *Для каждого $\hat{\gamma} \in \Pi(\mathcal{R})$ существуют константы $\delta > 0, C > 0$ такие, что для всех $\hat{\pi} \in \mathcal{R}$, $q \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ и любого $T > 1$*

$P_q\big(\gamma$ *не может быть представлена как* $\gamma_s\hat{\gamma}\gamma_e$ *и* $M(B_\gamma q) > TM(q)|\hat{\pi}\big) \leq CT^{-\delta}$.

Доказательство опирается на следующие две леммы:

Лемма 44. *Существует $C' > 1$ такое, что для любой перестановки $\hat{\pi}$*

$$P_q\Big(\{\gamma : M(B_\gamma q) > C'M(q), m(B_\gamma q) < M(q)\}|\hat{\pi}\Big) < 1 - \frac{1}{C'}.$$

Следующая лемма является следствием предыдущей:

Лемма 45. *Для любой перестановки $\hat{\gamma} \in \Pi(\mathcal{R})$ существует $M \geq 0, \rho < 1$ такое, что для всех $\hat{\pi} \in \mathcal{R}, q \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$*

$P_q(\gamma : \hat{\gamma} \not\sqsubset \gamma$ *и* $M(B_\gamma q) > 2^M M(q)|\hat{\pi}) \leq \rho.$

Докажем Лемму 44. Из теоремы 42 мы знаем нижнюю оценку для вероятности следующего события:

$$P_q(X \cup Y|\hat{\pi}) > \frac{1}{C},$$

где $X := X_1 \cap X_2$, при этом

$$X_1 := \{\gamma : M(B_\gamma q) < Cm(B_\gamma q)\}$$
$$X_2 := \{\gamma : m(B_\gamma q) < M(q)\}$$

и $Y := Y_1 \cap Y_2$ определяется так:

$$Y_1 := \{\gamma : M(B_\gamma q) < CM(q)\}$$
$$Y_2 := \{\gamma : M(q) \leq m(B_\gamma q)\}.$$

Предположим, что $x \in X_1^c \cap X_2$, тогда $x \notin X_1$ и поэтому $x \notin X$. Более того, $x \notin Y_2$ since $X_2 \cap Y_2 = \emptyset$, а значит, $x \notin Y$. Следовательно,

$$P_q(X_1^c \cap X_2|\hat{\pi}) < 1 - \frac{1}{C}.$$

Поэтому утверждение леммы верно для всех $C' > C$, так как

$$\{\gamma : M(B_\gamma q) > C'M(q), m(B_\gamma q) < M(q)\} \subset X_1^c \cap X_2.$$

Теперь докажем лемму 45. Зададим достаточно большое M_0 (мы определим его немного позже) и пусть $M := 2M_0$. Рассмотрим множество

$$\Gamma := \{\gamma : \gamma \text{ минимальной длины, такой что } \hat{\gamma} \not\sqsubset \gamma \text{ и } M(B_\gamma q) > 2^M M(q)\}. \quad (3.8)$$

Как уже отмечалось ранее, $M(B_\gamma q)$ для пути длины 1 не может вырасти больше, чем вдвое. Поэтому любой путь из множества Γ можно представить как $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, где γ_1 - кратчайший путь, для которого

$$M(B_{\gamma_1} q) > 2^{M_0} M(q),$$

и при этом ни один из путей γ_1 или γ_2 не совпадает с γ.

Обозначим множество таких γ_1 через Γ_1. Из минимальности следует, что семейство Γ_1 является *непересекающимся* в смысле предыдущего параграфа: никакой путь из этого множества не является частью другого пути из того же множества.

Рассмотрим подмножество $\tilde{\Gamma}_1$ множества Γ_1, состоящее из всех γ_1 таких, что $m(B_{\gamma_1} q) \geq M(q)$ (или, эквивалетно, $M_{\mathcal{A}'}(B_{\gamma_1} q) \geq M(q)$, для всех непустых $\mathcal{A}'$).

По лемме 44 за счет выбора достаточно большого M_0 мы получим, что

$$P_q(\Gamma_1 \setminus \tilde{\Gamma}_1 | \hat{\pi}) < 1 - \frac{1}{C}$$

с некоторой константой $C > 1$.

Используем теперь подход, впервые описанный в [35]. Мы зафиксируем некоторую перестановку $\hat{\pi}_e$ и рассмотрим самый короткий путь $\gamma_{\hat{\pi}_e}$, который начинается в $\hat{\pi}_e$ и содержит $\hat{\gamma}$ (если таких путей несколько, выберем любой из них). Определим γ_s как $\gamma_{\hat{\pi}_e} = \gamma_s \hat{\gamma}$. Тогда, если значение M_0 достаточно большое, мы можем предположить, что

$$|B_{\gamma_{\hat{\pi}_e}}| < 2^{M_0 - 1}. \tag{3.9}$$

Если $\hat{\pi}_e$ - это конец какого-то $\gamma_1 \in \Gamma_1$, то $P_q(\Gamma|\gamma_1) = P_{B_{\gamma_1} q}(\Gamma^{\gamma_1}|\hat{\pi}_e)$, где $\Gamma^{\gamma_1} := \{\gamma_e : \gamma = \gamma_1\gamma_e \in \Gamma\}$. Поэтому, так как γ не содержит $\hat{\gamma}$ как собственную внутреннюю часть, получаем, что

$$P_q(\Gamma|\gamma_1) \leq 1 - P_{B_{\gamma_1} q}(\gamma_{\hat{\pi}_e}|\hat{\pi}_e) \tag{3.10}$$

потому что множество Γ^{γ_1} и множество путей $\gamma_{\hat{\pi}_e}$ не пересекаются и вместе они заполняют не более чем множество возможных продолжений пути γ_1.

Если $\gamma_1 \in \tilde{\Gamma}_1$, то $P_q(\Gamma|\gamma_1)$ можно оценить в терминах мер подсимплексов исходного симплекса: если $N(q) = q_1 \dots q_n,$, то

$$P_{B_{\gamma_1} q}(\gamma_{\hat{\pi}_e}|\hat{\pi}_e) = \frac{N(B_{\gamma_1} q)}{N(B_{\gamma_{\hat{\pi}_e}} B_{\gamma_1} q)}.$$

Нам нужно сделать еще несколько оценок: по определению $\tilde{\Gamma}_1$ мы имеем $m(B_{\gamma_1}q) \geq M(q)$ и, следовательно, $N(B_{\gamma_1}q) \geq (M(q))^n$. Известное нам неравенство (3.9) означает, что

$$N(B_{\gamma_{\hat{\pi}_e}}B_{\gamma_1}q) < (2^{M_0-1}2^M M(q))^n,$$

потому что, как следует из определения Γ_1, выполняется $M(B_{\gamma_1}q) < 2^M M_q$. Поэтому легко видеть, что

$$P_{B_{\gamma_1}q}(\gamma_{\hat{\pi}_e}|\hat{\pi}_e) \geq 2^{-3nM_0}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим сначала случай $P_q(\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi}) \geq \frac{1}{2C}$. По определению P_q (см (3.3)) мы имеем

$$\begin{aligned}
P_q(\Gamma|\hat{\pi}) &= \sum_{\gamma_1\in\Gamma_1} P_q(\Gamma|\gamma_1)P_q(\gamma_1|\hat{\pi}) \\
&= \sum_{\gamma_1\in\tilde{\Gamma}_1} P_q(\Gamma|\gamma_1)P_q(\gamma_1|\hat{\pi}) + \sum_{\gamma_1\in\Gamma_1\setminus\tilde{\Gamma}_1} P_q(\Gamma|\gamma_1)P_q(\gamma_1|\hat{\pi}) \\
&\leq \big(\sup_{\gamma_1\in\tilde{\Gamma}_1} P_q(\Gamma|\gamma_1)\big)\cdot\sum_{\gamma_1\in\tilde{\Gamma}_1} P_q(\gamma_1|\hat{\pi}) + \big(\sup_{\gamma_1\in\Gamma_1\setminus\tilde{\Gamma}_1} P_q(\Gamma|\gamma_1)\big)\cdot\sum_{\gamma_1\in\tilde{\Gamma}_1\setminus\tilde{\Gamma}_1} P_q(\gamma_1|\hat{\pi}) \\
&= \big(\sup_{\gamma_1\in\tilde{\Gamma}_1} P_q(\Gamma|\gamma_1)\big)\cdot P_q(\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi}) + \big(\sup_{\gamma_1\in\Gamma_1\setminus\tilde{\Gamma}_1} P_q(\Gamma|\gamma_1)\big)\cdot P_q(\Gamma_1\setminus\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi}).
\end{aligned}$$

В последнем мы переходе мы пользовались тем, что множество Γ_1 является непересекающимся.

Неравенства (3.10), (3.11) означают, что $\sup_{\gamma_1\in\tilde{\Gamma}_1} P_q(\Gamma|\gamma_1) < 1 - 2^{-3nM_0}$. Используя эту оценку, а также то, что $\sup_{\gamma_1\in\Gamma_1\setminus\tilde{\Gamma}_1} P_q(\Gamma|\gamma_1) \leq 1$ и $P_q(\Gamma_1\setminus\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi}) \leq 1 - P_q(\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi})$ вместе с предположением $P_q(\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi}) \geq \frac{1}{2C}$, получаем

$$\begin{aligned}
P_q(\Gamma|\hat{\pi}) &\leq P_q(\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi})\cdot(1-2^{-3nM_0}) + 1 - P_q(\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi}) \\
&= 1 - P_q(\tilde{\Gamma}_1)\cdot 2^{-3nM_0} \\
&\leq 1 - \frac{2^{-3nM_0}}{2C}.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим оставшийся случай $P_q(\tilde{\Gamma}_1|\hat{\pi}) < \frac{1}{2C}$, здесь по неравенству (3.4) $P_q(\Gamma_1|\hat{\pi}) < 1 - \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = 1 - \frac{1}{2C}$. Поэтому утверждение леммы 45 выполнено с константой $\rho = 1 - \frac{2^{-3nM_0}}{2C}$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 43. Пусть M и ρ будут как в лемме 45. Для заданного $T > 1$ пусть k будет наибольшим целым числом, для которого

$T \geq 2^{k(M+1)}$. Обозначим через γ самые короткий путь, для которого $\hat{\gamma}$ не является собственной внутренней частью, такой, что $M(B_\gamma q) > 2^{k(M+1)} M(q)$. Тогда γ можно представить так: $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_i \dots \gamma_k$, где для каждого i $\gamma_{(i)} = \gamma_1 \dots \gamma_i$ – кратчайший путь, такой, что

$$M(B_{\gamma_i} q) > 2^{i(M+1)} M(q). \tag{3.12}$$

Тогда все такие $\gamma_{(i)}$ образуют множество $\Gamma_{(i)}$ для каждого i, и все эти множества являются непересекающимися, потому что каждый из путей является самым коротким из удовлетворяющих условию (3.12). Теперь применяем лемму 45 и неравенство (3.12) и получаем, что для всех $\gamma_{(i)} \in \Gamma_{(i)}$

$$P_q(\Gamma_{(i+1)} | \gamma_{(i)}) \leq \rho.$$

Поэтому $P_q(\Gamma | \hat{\pi}) < \rho^k$. Результат следует из определения числа k.

3.7 Функция крыши и ее экспоненциальный хвост

Конструкция функции крыши, которую мы используем, опирается на придуманную Вичем ([128]) идею ренормализации. Для некоторого полного положительного пути γ_*, являющегося петлей, то есть начинающегося и заканчивающегося в одной и той же перестановке $\hat{\pi}$, рассмотрим отвечающий ему подсимплекс пространства параметров Δ_{γ_*}. Нас будет интересовать отображение первого возвращения в этот подсимплекс Δ_{γ_*}. Связные компоненты области определения этого отображения совпадат с $\Delta_{\gamma\gamma_*}$ где γ - это путь, содержащий γ_* как свою часть, но не начинающийся с $\gamma_*\gamma_*$. Поэтому отображение первого возвращения T, ограниченное на соответствующие компоненты, удовлетворяет условию

$$T(\lambda, \hat{\pi}) = \Big(\frac{Q_\gamma^{-1} \lambda}{||Q_\gamma^{-1} \lambda||}, \hat{\pi} \Big), \tag{3.13}$$

где Q - матрица индукции Рози.

Определение. Назовем *функцией крыши* описанное выше отображение первого возвращения в связную компоненту:

$$r(\lambda, \hat{\pi}) := -\log ||Q_\gamma^{-1} \lambda||.$$

Замечание 9. Как было отмечено [31] и [35], из-за положительности γ_* мы рассматриваем отображения в предкомпактные множества.

Замечание 10. Если рассматриваемая точка находилась в дыре, функцию крыши естественно определить как логарифм наибольшего возможного числа итераций индукции Рози (до ее остановки).

Обсудим коротко, почему наличие орбит, которые не возвращаются, а остаются навсегда в дыре, не влияют на наши оценки хаусдорфовой размерности. Заметим, что диаграмма Рози распадается (как и в случае перекладываний отрезков) на несколько связных компонент. Зафиксируем одну такую компоненту. Из свойств марковского отображения, которое мы рассматриваем, следует, что:

1. по свойству больших образов и проообразов марковского сдвига мы имеем, что каждый подсиплекс марковского разбиения (например, Δ_γ, где γ – соответствующий полный путь на диаграмме Рози) отображается на все пространство параметров X, и это отображение сюръективно;
2. марковское отображение T_γ является равномерно расширяющим (см. Лемму 39) и якобиан отображения из Δ_γ на все пространство параметров ограничен.

Напомним, что для каждого класса Рози подмножество MF_n множества параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами, имеет фрактальную структуру, потому что точка принадлежит MF_n тогда и только тогда, когда индукцию Рози к соответствующему перекладыванию отрезков можно применять бесконечно долго без остановки. Обозначим $MF_n(\Delta_\gamma) = \Delta_\gamma \cap MF_n$.

Отображение T_γ сюръективно, потому что это проективизация линейного отображения. Из свойства больших образов и прообразов марковского сдвига и оценки на якобиан отображения T_γ имеем, что $Hdim(MF_n(\Delta_{\gamma_*})) = Hdim(MF_n)$. Аналогичный аргумент действует для Δ_γ и $\Delta_{\gamma'}$, где $\gamma' = \gamma\hat{\gamma}\gamma$ для любого $\hat{\gamma}$. Поэтому орбиты, которые избегают контроля, не вносят вклада в хаусдорфову размерность фрактала, который мы изучаем.

Вернемся к обсуждения свойств функции крыши. Следуя [31] и [35], введем два важных определения.

Определение. Пусть $T : \cup_l \Delta^{(l)} \to \Delta$ - равномерно расширяющее отображение. Тогда функция $r : \cup_l \Delta^{(l)} \to \mathbb{R}_+$ называется *хорошей функцией крыши*, если

1. выполняется неравенство $r > \epsilon$ для некоторого $\epsilon > 0$;
2. существует $C > 0$, такое, что для всех $h \in \mathcal{H}$ выполнено $|D(r \circ h)|_{C^0} \leq C$.
3. нельзя представить r в виде $\psi + \phi \circ T - \phi$, где $\psi : \Delta \to \mathbb{R}$ постоянна на каждом $\Delta^{(l)}$, а $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$ – гладкая функция.

Определение. Хорошая функция крыши f имеет *экспоненциальный хвост*, если существует $\sigma > 0$ такое, что $\int_\Delta e^{\sigma f} d\updownarrow < \infty$.

Теорема 46. *Функция крыши r, определенная выше, имеет экспоненциальный хвост.*

Доказательство. Доказательство утверждения о том, что функция r, определенная выше, является хорошей функцией крыши, полностью повторяет доказательство аналогичных утверждений для функций крыши в случае перекладываний отрезков (Лемма 4.6 в [31]) и в случае линейных инволюций (Лемма 6.6 в [35]).

Второе утверждение теоремы следует из теоремы 43. Будем действовать так же, как в случае перекладываний отрезков (см. Теорему 4.7 в [31]): $-\log ||(B^T_{\gamma_*})^{-1}\lambda||$ - это так называемое тейхмюллерово время, которое является временем ренормализации отрезка-носителя, который мы получили после применения индукции, до отрезка единичной (нормированной) длины. Мы делим это время на фрагменты экспоненциальной длины и применяем к каждому их них Теорему 43.

В самом деле, мы уже построили множество лебеговых мер ν_q на Λ_q, зависящем от q. Рассмотрим $q_0 = (1, \ldots, 1)$ и отвечающую ему меру ν_{q_0}. Напомним, что пространство параметров для заданного класса Рози $\mathcal{R}$ является $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}_+ \times \mathcal{R}$ с условием ренормализации $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. В частности, для заданной перестановки мы можем определить $\Delta_{\hat{\pi}} = \mathbb{R}^{\mathcal{A}}_+ \times \hat{\pi}$ с таким же условием ренормализации. Зафиксируем $\hat{\pi}$ и рассмотрим естественную проекцию Λ_q на множество $\Delta_{\hat{\pi}}$. Образ ν меры ν_{q_0} при этой проекции - это гладкая функция на пространстве параметров марковского отображения $T(\lambda, \hat{\pi})$. Поэтому, чтобы доказать теорему, нам достаточно показать, что

$$\nu\{x \in \Delta_{\gamma_*} : r(x) \geq \log T\} \leq CT^{-\delta} \tag{3.14}$$

для некоторого C и некоторого δ.

Связная компонента области определения $T(\lambda, \hat{\pi})$, пересекающая множество $W = \{x : \{x \in \Delta_{\gamma_*} : r(x) \geq \log T\} \leq CT^{-\delta}\}$, имеет форму Δ_γ для некоторого

γ. такого, что γ не может быть конкатенацией (последовательным соединением) более чем трех γ_* и

$$M(B_\gamma q_0) > C^{-1}T,$$

для некоторой константы C, которая зависит от γ_*. Первое условие на γ следует из того, что мы рассматриваем отображение первого возвращения, поэтому если γ получается последовательным соединением четырех копий путей γ_*, достаточно рассмотреть $\gamma_*\gamma_*$ как путь, отвечающий первому возвращению, и все остальные свойства сохранятся. Остальные условия следуют из определения функции крыши и множества W.

Теперь оценим меру интересующего нас множества в терминах условных вероятностей: $\nu\{x \in \delta_{\gamma_*} : r(x) \geq \log T\} \leq P_{q_0}(\gamma$ не содержит некоторый $\hat{\gamma}$ как собственную часть и $M(B_\gamma q_0) > C^{-1}T|\hat{\pi}) < CT^{-\delta}$. Утверждение теоремы следует из теоремы 43. □

3.8 Доказательство теоремы 34

Пусть Δ -это измеримое пространство и $T : \Delta \to \Delta$ – это марковское отображение. Обозначим марковское разбиение через by $\Delta_{(l)}, l \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим вектор из натуральных чисел $\mathbf{l} = (l_1, \cdots, l_n)$. Через $\Delta_\mathbf{l}$ мы обозначим множество таких $x \in \Delta$, что $T^{j-1}(x) \in \Delta_{l_j}$ для всех $1 \leq j \leq n$. Будем называть n *глубиной* разбиения, соответствующего $\Delta_\mathbf{l}$.

Определение. Будем говорить, что отображение T *быстро распадающееся,* если существует $C_1 > 0, \alpha_1 > 0$ такие, что

$$\sum_{Leb(\Delta_\mathbf{l}) \leq \varepsilon} Leb(\Delta_\mathbf{l}) \leq C_1 \varepsilon^{\alpha_1} \tag{3.15}$$

для всех $0 < \varepsilon < 1$.

Лемма 47. *Из наличия экспоненциального хвоста у функции крыши следует, что соответствующее марковское отображение является быстро распадающимся.*

Доказательство. Заметим, что $JT(\lambda, \hat{\pi}) = e^{n \cdot r(\lambda, \hat{\pi})}$ ([129] Предложение 5.2 или [112] Лемма 3.1). Утверждение леммы следует из этой формулы и того факта,

что мера подсимплексов (цилиндров марковского разбиения) пропорциональна $|DT|$. Проверить это можно следующим образом: используя связь между мерами цилиндров и якобианами, можно переписать сумму (3.15) в терминах якобианов; их, в свою очередь, удобно выразить как экспоненты от функций крыши; нам остается только оценить сумму:

$$\sum_{a\,:\,r(a)\geq N} e^{-nr(a)},$$

где через a мы обозначили точку элемента разбиения $\Delta^{(l)}$, используя локальное постояноство функции крыши. Последнюю сумму можно оценить, используя экспоненциальный хвост у функции крыши (а именно, сходимость соответствующего интеграла): из наличия экспоненциального хвоста следует, что $Card(Y(N)) \leq Ce^{(n-\sigma)N}$, где $Y(N)$ – множество элементов разбиения, на которых $r(a)$ принимает значения между N и $N+1$ (см. [33], Лемма 17); тогда интересующая нас сумма оценивается геометрической прогрессией с коэффициентом $e^{-\sigma}$. □

Теперь остается воспользоваться следующим результатом Авилы - Делакруа ([29], Теорема 26). Пусть Δ – симплекс в $\mathbb{PR}^n$, и отображение $T : \Delta \to \Delta$ устроено следующим образом: $T|_{\Delta^{(\ell)}}$ – проективное отображение для каждого ℓ.

Теорема 48 (Авила-Делакруа)**.** *Пусть T – быстро распадающееся отображение с константой α_1. Для $m \geq 1$, пусть $X_m \subset \Delta$ –объединение подсимплексов (Δ^l) глубины разбиения m и пусть $X = \liminf X_m$. Обозначим*

$$\delta = -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln \mu(X_m),$$

тогда $HD(X) \leq n - 1 - \min(\delta, \alpha_1)$.

Ранее мы проверили, что отображение T_γ, отвечающее ренормализации индукции Рози, является марковским быстро распадающимся отображением. В качестве X_n мы возьмем объединение марковских клеток разбиения глубины n, для точек которых индукция не останавливается. Тогда легко видеть, что $X = \liminf X_n$ – это в точности множество MF_n. При этом, так как T является равномерно расширяющим отображением, то $\delta > 0$.

Глава 4

Линейные инволюции и квадратичные дифференциалы

4.1 Определение линейных инволюций и их свойства

Как уже отмечалось в предыдущих главах, перекладывания отрезков тесно связаны с абелевыми дифференциалами на римановой поверхности, и понимание их эргодических и спектральных свойств позволило глубоко продвинуться в изучении пространств модулей абелевых дифференциалов. Но описанные выше результаты не дают никаких сведений об устройстве пространства модулей квадратичных дифференциалов (многие из которых не являются квадратами абелевых); а между тем именно пространство модулей квадратичных дифференциалов естественным образом ассоциируется с кокасательным расслоением пространства модулей кривых. Этим обстоятельством обусловлен интерес к изучению обобщения перекладываний отрезков, называемых *линейными инволюциями*.

Определение. Пусть $\widehat{X} = X \times \{0, 1\}$ - это две непересекающиеся копии открытого интервала X, а Σ - это конечное подмножество $\widehat{X}$. Линейная инволюция T на $\widehat{X}$ - это отображение $T = f \circ T' : \widehat{X} \to \widehat{X}$, где:

- T' - это гладкая инволюция без неподвижных точек, определенная на $\widehat{X} \backslash \Sigma$;

- если (x, ε) и $T(x, \varepsilon)$ принадлежат одной и той же связной компоненте $\widehat{X}$, то производная T' в (x, ε) равно -1, а иначе она равна 1;
- f - инволюция $(x, \varepsilon) \mapsto (x, 1 - \varepsilon)$.

Заметим, что если G - это перекладывание отрезков на X, то его можно рассматривать как линейную инволюцию T на $\widehat{X}$: для $x \in X$

$$\begin{cases} T(x, 0) = (G(x), 0), \\ T(x, 1) = (G^{-1}(x), 1) \end{cases} \tag{4.1}$$

Впервые линейные инволюции были определены в работе Дантони - Ногейра [59]; там же был описан алгоритм ренормализации для линейных инволюций, который, как и в случае перекладываний отрезков, называется *индукцией Рози - Вича*. При этом показано, что при наличии флипа почти все линейные инволюции имеют периодическую орбиту, в то время как почти все линейные инволюции без флипа строго эргодичны.

Линейные инволюции определяются набором комбинаторных данных (которые записываются в виде *обобщенной перестановки*) и непрерывных данных - длин отрезков.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ - алфавит из d букв. Обобщенная перестановка типа (l, m), где $l, m \in \mathbb{N}$ и $l+m = n$ - это отображение 2-в-1 $\pi : \{1, \cdots, 2d\} \to \mathcal{A}$ (то есть каждая буква алфавита встречается дважды среди образов точек $\pi(1), \ldots, \pi(2d)$).

Обобщенная перестановка следующим образом определяет инволюцию без неподвижных точек σ: $\pi^{-1}(\{\pi(i)\}) = (i, \sigma(i))$. Нам будет удобно записывать обобщенные перестановки так:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi(1) & \cdots & \pi(l) \\ \pi(l+1) & \cdots & \pi(l+m) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Пример линейной инволюции, которая возникает как отображение первого возвращения для вертикального слоения на трансляционной поверхности, изображен на рисунке 4.1. Соответствующая обобщенная перестановка задается следующим образом: $l = m = 5$, алфавит $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E\}$, $\pi(1) = \pi(8) = A$, $\pi(2) = \pi(4) = B$, $\pi(3) = \pi(9) = C$, $\pi(5) = \pi(6) = D$, $\pi(7) = \pi(10) = E$. Инволюция без неподвижных точек определяется так: $\sigma(1) = 8; \sigma(2) = 4; \sigma(3) = 9; \sigma(5) = 6; \sigma(7) = 10$.

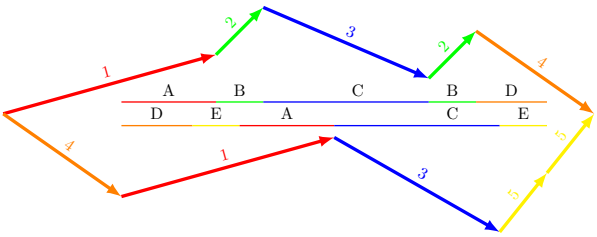


Рис. 4.1: Линейная инволюция, ассоциированная с измеримым слоением на поверхности.

В отличие от ситуации со слоениями, определяемыми абелевым дифференциалом, так определенный класс линейных инволюций шире, чем множество отображений, возникающих как отображение первого возвращения для некоторого определенного квадратичным дифференциалом слоения; обобщенные перестановки, для которых такая двойственность наблюдается (и для которых тем самым есть явная геометрическая интерпретация) были описаны в работе Буасси - Ланно [44] под названием *неприводимых*. Обобщенная перестановка называется *динамически неприводимой*, если существует минимальная линейная инволюция, ассоциированная с этой перестановкой. Легко проверить, что любая неприводимая перестановка является динамически неприводимой, но обратное утверждение неверно. В той же работе [44] (Теорема А) приведена комбинаторная интерпретация понятий неприводимости и динамической неприводимости, а также изучена связь компонент связности диаграмм Рози, ассоциированных с неприводимыми обобщенными перестановками, и числа компонент связности пространств модулей квадратичных дифференциалов.

С каждой динамически неприводимой перестановкой ассоциировано открытое подмножество множества параметров, которое называется множеством допустимых значений; в случае неприводимой обобщенной перестановки это множество совпадает со всем множеством параметров длин.

Теорема 49 (Буасси - Ланно)**.** *Типичные линейные инволюции с динамически неприводимыми перестановками минимальны в следующем смысле:*

1. *если обобщенная перестановка не является динамически неприводимой, либо она является динамически неприводимой, но значения параметров длин*

не являются допустимыми, соответствующая линейная инволюция не является минимальной.

2. *если обобщенная перестановка является динамически неприводимой, для почти всех допустимых значений параметров соответствующая линейная инволюция удовлетворяет условию Кина и, следовательно, является минимальной.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только минимальные неприводимые линейные инволюции.

4.2 Когомологические уравнения и линейные инволюции

Мы обобщаем описанные выше результаты Марми - Муссы - Йоккоза о решении когомологических уравнений над перекладываниями отрезков на случай неприводимых линейных инволюций. Для этого сначала мы определяем линейные инволюции типа Рота и доказываем утверждение о разрешимости когомологического уравнения над ними, а потом проверяем, что условие Рота выполнено почти всегда. Определение линейных инволюций типа Рота приведено ниже (см раздел 4.4).

Будем рассматривать функции, определенные на $\widehat{X}$. Пусть $\widehat{BV}_*^1(\sqcup A_\alpha)$ - это множество функций $\widehat{\Phi}$ из класса C^1, определенных на каждом отрезке непрерывности, у которых производная имеет ограниченную вариацию, а интеграл по области определения равен нулю.

Теорема 50. *Пусть T - минимальная линейная инволюция типа Рота. Тогда для любого $\widehat{\Phi} \in \widehat{BV}_*^1(\sqcup A_\alpha)$ существует функция χ, постоянная на каждом A_α, и ограниченная функция Ψ на $\widehat{X}$ такие, что*

$$\Psi - \Psi \circ T = \widehat{\Phi} - \chi.$$

Теорема 51. *Линейные инволюции типа Рота составляют подмножество полной меры в множестве всех неприводимых линейных инволюций.*

Замечание 11. Обе теоремы опубликованы в [97] и доказаны А. Скрипченко. Идея изучения когомологических уравнений для линейных инволюций принадлежит С. Марми. Доказательство теоремы 3 использует Лемму, доказанную Э. Ланно.

4.3 Индукция Рози для линейных инволюций

Индукцию Рози для линейных инволюций была впервые описана в [59] (стр 473); подробное описание можно найти также в [44], раздел 2.2.

Пусть T - линейная инволюция на $X = (0, L)$ с обобщенной перестановкой π типа (l, m). Если $\lambda_{\pi(l)} \neq \lambda_{\pi(l+m)}$, то результат применения к T индукции Рози(-Вича) $\mathcal{R}(T)$ - это линейная инволюция, которая получается как отображение первого возвращения T на $(0, \max(L - \lambda_{\pi(l)}, L - \lambda_{\pi(l+m)}) \times \{0, 1\}$. Как и в случае перекладываний отрезков, комбинаторное описание полученной линейной инволюции зависит только от исходной обобщенной перестановки и от того, какая из длин $\lambda_{\pi(l+m)}$ и $\lambda_{\pi(l)}$ больше.

Как и для классической индукции Рози (и для индукции Рози для перекладываний отрезков с флипами), мы называем более длинный отрезок *победителем* и выделяем два случая в зависимости от того, какой из отрезков стал победителем.

Для аккуратного определения отображения $\mathcal{R}$ определим сначала оператор $\mathcal{R}_\epsilon$, определяющий действие на перестановках (ϵ может принимать значения 0 и 1 в зависимости от того, верхний или нижний отрезок победит). Мы будем *run* отображения T в зависимости от значения ϵ (0 или 1). Пусть σ - ассоциированная с π инволюция.

- если $\sigma(l) > l$ и $\pi(l) \neq \pi(l + m)$, то $\mathcal{R}_0(\pi)$ - это обобщенная перестановка типа (l, m), такая, что

$$\mathcal{R}_0(\pi) = \begin{cases} \pi(i) & \text{если } i \leq \sigma(l) \\ \pi(l+m) & \text{если } i = \sigma(l) + 1 \\ \pi(i-1) & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.3}$$

.

- если $\sigma(l) \leq l$ и существует $\{x, \sigma(x)\} \subset \{l + 1, \cdots, l + m - 1\}$, то $\mathcal{R}_0(\pi)$ - это

обобщенная перестановка типа $(l+1, m-1)$, такая, что

$$\mathcal{R}_0(\pi) = \begin{cases} \pi(i) & \text{если } i \leq \sigma(l) \\ \pi(l+m) & \text{если } i = \sigma(l) \\ \pi(i-1) & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.4}$$

.

Иначе $\mathcal{R}_0(\pi)$ не определена.

Теперь определяем $\mathcal{R}_1(\pi)$.

- если $\sigma(l+m) \leq l$ и $\pi(l) \neq \pi(l+m)$, то $\mathcal{R}_1(\pi)$ - это обобщенная перестановка типа (l, m), такая, что

$$\mathcal{R}_1(\pi) = \begin{cases} \pi(i) & \text{если } i \leq \sigma(l+m) \\ \pi(i-1) & \text{если } \sigma(l+m)+1 < i \leq l \\ \pi(i) & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.5}$$

.

- если $\sigma(l+m) > l$ и существует $\{x, \sigma(x)\} \subset \{1, \cdots, l\}$, то $\mathcal{R}_1(\pi)$ - это обобщенная перестановка типа $(l-1, m+1)$, такая, что

$$\mathcal{R}_1(\pi) = \begin{cases} \pi(i+1) & \text{если } l \leq i < \sigma(l+m) \\ \pi(l) & \text{если } i = \sigma(l+m)-1 \\ \pi(i) & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.6}$$

.

Иначе $\mathcal{R}_1(\pi)$ не определена.

Тогда, если $T(\pi, \lambda)$ имеет тип 0, то $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}_0(\pi), \lambda'$, где $\lambda'_\alpha = \lambda_\alpha$, если $\alpha \neq \pi(l)$ и $\lambda'_{\pi(l)} = \lambda_{\pi(l)} - \lambda_{\pi(l+m)}$. Если $T(\pi, \lambda)$ имеет тип 1, то $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}_1(\pi), \lambda'$, где $\lambda'_\alpha = \lambda_\alpha$, если $\alpha \neq \pi(l+1)$ и $\lambda'_{\pi(l+1)} = \lambda_{\pi(l+1)} - \lambda_{\pi(l)}$.

По аналогии с индукцией Рози для перекладываний отрезков мы можем для каждой неприводимой линейной инволюции построить диаграмму Рози и определить ускорение индукции по Зоричу и специальное ускорение индукции. Будем помечать стрелки на диаграмме Рози именами отрезков-победителей. Пусть T - исходная линейная инволюция, удовлетворяющая условию Кина, а $\mathcal{D}$ - ее диаграмма Рози. Тогда при n-ой итерации индукции Рози мы получим последовательность $T^{(n)}$ и путь на диаграмме Рози $\gamma^{(n)}$, которому будет отвечать матрица

$V^{(n)}$ - произведение матриц, описывающих каждый шаг индукции Рози:

$$\lambda^{(n-1)} = V^{(n)}\lambda^{(n)}.$$

Зададим $D \in \{1, \cdots, d\}$. Определим по индукции последовательность $n_D(k)$: $n_D(0) = 0$ и $n_D(k+1)$ - это наибольшее целое число, для которого выполнено, что у стрелок из пути γ^n для $n \in [n_D(k), n_D(k+1)]$ не больше D имен. Тогда пусть

$$Z_{(D)}(k) = V^{(n_D(k-1)+1)} \cdots V^{(n_D(k))}.$$

Это матрица ускорения Зорича при $D = 1$. Для того, чтобы получить специальное ускорение, упростим обозначение: $Z(k) = Z_{d-1}(k)$ и рассмотрим $Q(k,l) = Z(k+1)\cdots Z(l)$. Будем писать $Q(l) = Q(0,l)$.

4.4 Линейные инволюции типа Рота

Определение отображений типа Рота для случая неприводимых инволюций почти совпадает с аналогичным понятием для перекладываний отрезков. В обоих случаях речь идет о выполнении трех ключевых свойств, описывать которые удобно в терминах матриц индукции Рози-Вича - условие на скорость роста, наличие спектральной дыры и когерентность.

1. *Условие на скорость роста :* для каждого $\epsilon > 0$ существует $C_\epsilon > 0$ такое, что для всех $k \geq 0$ мы имеем

$$||Z(k+1)|| \leq C_\epsilon ||Q(k)||^\epsilon \tag{4.7}$$

   Это условие по сути является условием ограниченного искажения для специального ускорения индукции Рози.
2. *Спектральная дыра*: Второе условие - это спектральное условие, которое вводится для того, чтобы гарантировать строгую эргодичность для линейных инволюций. Формально оно выглядит так: для каждого $k \geq 0$, обозначим через $\Gamma^{(k)}$ пространство функций, постоянных на каждом интервале непрерывности рассматриваемой линейной инволюции. Для $0 \leq k \leq l$ назовем $S(k,l)$ линейное отображение из $\Gamma^{(k)}$ в $\Gamma^{(l)}$, матрица которого в каноническом базисе совпадает с ${}^tQ(k,l)$; при этом $S(k)$ будет обозначать $S(0,k)$.

Для $\phi = (\phi_\alpha)_{\alpha\in\hat{\mathcal{A}}} \in \Gamma^{(k)}$, определим

$$I_k(\phi) = \sum_{\alpha\in\hat{\mathcal{A}}} \lambda_\alpha^{(k)}\phi_\alpha \ ;$$

Тогда

$$I_l(S(k,l)\phi) = I_k(\phi) \ .$$

Через $\Gamma_*^{(k)}$ обозначим ядро линейной формы I_k. Условие спектральной дыры состоит в следующем:
Существует $\theta > 0, C > 0$ *такое, что для всех* $k \geq 0$, *мы имеем*

$$\|S(k) \mid_{\Gamma_*^{(0)}} \| \leq C\|S(k)\|^{1-\theta} = C\|Q(k)\|^{1-\theta} \ .$$

3. *Когерентность*: третье условие тоже определяется с помощью операторов $S(k,l) \ : \ \Gamma^{(k)} \to \Gamma^{(l)}$. Пусть $\Gamma_s^{(k)}$ - линейное подпространство $\Gamma^{(k)}$, элементы которого v удовлетворяют следующему условию: существует $\sigma = \sigma(v) > 0$, $C = C(v) > 0$ такая, что для всех $l \geq k$, мы имеем

$$\|S(k,l)v\| \leq C\|S(k,l)\|^{-\sigma}\|v\| \ .$$

Будем называть продпространство $\Gamma_s^{(k)}$ *стабильным* подпространством $\Gamma^{(k)}$. Тогда оператор $S(k,l)$ отображает $\Gamma_s^{(k)}$ на $\Gamma_s^{(l)}$. Поэтому можно определить такое отображение:

$$S_{(k,l)} : \Gamma^{(k)}/\Gamma_s^{(k)} \to \Gamma^{(l)}/\Gamma_s^{(l)} \ .$$

Наше условие (c) означает, что норма обратного к $S_{(k,l)}$ отображения не слишком велика: *для любого*$\varepsilon > 0$ *существует* $C_\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* $l \geq k$, *мы имеем*

$$\|[S_{(k,l)}]^{-1}\| \leq C_\varepsilon\|Q(l)\|^\varepsilon$$

$$\|S(k,l) \mid_{\Gamma_s^{(k)}} \| \leq C_\varepsilon\|Q(l)\|^\varepsilon$$

Определение. Неприводимая линейная инволюция T является инволюцией типа Рота, если T и T^{-1} удовлетворяют условиям (a), (b), (c).

Утверждения теоремы 3 следует из анализа спектральных свойств линейных инволюций (применения мультипликативной эргодической теоремы, простоты ляпуновского спектра и выполнения свойств ограниченного искажения), доказательство приведено в параграфе 4.6.

4.5 Доказательство теоремы 50

Доказательство теоремы 50 почти дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения в [102] и состоит из следующих этапов:

1. по теореме Готтшалка-Хедлунда в случае минимального гомеоморфизма T компактного пространства X непрерывная функция на X является T - кограницей некоторой непрерывной функции, если суммы Бирхгоффа в некоторой точке X ограничены. Как и в случае [102], отображение T, задающее линейную инволюцию, является минимальным, но не непрерывным, поэтому для применения теоремы требуется построить минимальный и непрерывный гомеоморфизм T', сопряженный отображению T, и свести задачу к оценке сумм Бирхгоффа;
2. следующий этап состоит в редукции оценки общих сумм Бирхгоффа отображения к *специальным суммам Бирхгоффа*, которые получаются при рассмотрении времени возвращения точки при итерации отображения;
3. на заключительном этапе мы оцениваем специальные суммы Бирхгоффа, используя свойства (a), (b) и (c) линейных инволюций типа Рота.

Опишем подробнее каждый этап.

Напомним формулировку теоремы Готтшалка-Хедлунда:

Теорема 52. *Пусть X - компактное топологическое пространство, f - минимальный гомеоморфизм X, а ψ - непрерывная вещественнозначная функция на X. Для заданной точки $x_0 \in X$ и $n \geq 1$ обозначим сумму Бирхгоффа $S_n\psi(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x_0)$. Предположим, что для некоторой точки $x_0 \in X$ существует константа $C_0 > 0$, которая ограничивает суммы Бирхгоффа в точке x_0 для всех $n \in \mathbb{N} : |S_n\psi(x_0)| \leq C$. Тогда когомологическое уравнение*

$$\phi \circ f - \phi = \psi$$

имеет непрерывное решение ϕ.

Для того, чтобы эту теорему можно было применить к линейным инволюциям, воспользуемся конструкцией, построенной по мотивам классического примера Донжуа. Рассмотрим удовлетворяющую условию Кина линейную инволюцию $T = f \circ T'$, где T' действует на $\widehat{X}\backslash\Sigma$, при этом Σ - это конечное подмножество

особых точек $\widehat{X}$, а f - это инволюция: $f(x,\epsilon) = f(x,1-\epsilon)$. Введем множества $D_0 = T'^{-n}(\Sigma)$ и $D_1 = T'^{n}(f(\Sigma))$.

Благодаря выполнению условия Кина эти множества не пересекаются и не содержат 0. Определим атомарную меру μ следующим образом:

$$\mu = \sum_{n\geq 0} \sum_{y\in D_0(n)\sqcup D_1(n)} 2^{-n}\delta(y).$$

Введем также для $\epsilon = 0, 1$ отображения

$$i_\epsilon^-(y) = y + \mu([0,y))$$

и

$$i_\epsilon^-(y) = y + \mu([0,y]).$$

Наконец, определим множество K как замыкание образов $\widehat{X}$ под действием i_ϵ^- (или i_ϵ^+, они совпадают). Это будет канторовское множество, у которого на каждом этапе исключается отрезок $(i^-(y), i^+)(y)$ для $y \in D_0(n)\sqcup D_1(n)$ для какого-то n. Тогда очевидна следующая

Лемма 53. *Существует и единственен гомеоморфизм $\hat{T} : K \to K$, для которого $i^+ \circ T = \hat{T} \circ i^+$ на $\widehat{X}$.*

Следующий этап - редукция к специальным сумма Бирхгоффа. Для произвольной линейной инволюции T рассмотрим результат применения к ней индукции Рози, ускоренной по Зоричу. Получим последовательность отображений T^n с отрезками непрерывности A_α^n. В сумме Бирхгоффа заменяем x на точку из орбиты $x, T(x), \cdots, T^{N-1}(x)$, наиболее близкую к нулю.

Тогда для произвольной функции Φ, определенной на $\sqcup A_i$, сумма Бирхгоффа в нуле выглядит как конечная сумма:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \Phi \circ T^i(0) = \sum_j S(0,n_j)(\Phi)(x_j),$$

при этом для каждого n

$$card(j, n_j = j) \leq ||Z(n+1)|| := \max_b \sum_\alpha Z_{\alpha\beta}(n+1),$$

поэтому для того, чтобы суммы Бирхгофа были ограничены в нуле, достаточно, чтобы

$$\sum_{n\geq 0} ||Z(n+1)||||S(0,n)(\Phi)||_{L_\infty} < \infty. \tag{4.8}$$

В этот момент мы воспользовались тем, что индукция Рози является отображением первого возвращения на меньший отрезок, поэтому элементы матрицы, задающей индукцию, содержат информацию о времени возвращения на подотрезок непрерывности, полученный в результате итерирования T^k. Эта часть дословно совпадает с разделом 2.2.3 в [102].

Рассмотрим функцию ограниченной вариации с нулевым средним ϕ, определенную на $\sqcup A_i$. Тогда $\phi = \phi_0 + \chi_0$, где $\chi_0 \in \Gamma^0_*$ и ϕ_0 имеет нулевое среднее значение на каждом A_i. Определим по индукции

$$S(n-1,n)(\phi_{n-1}) = \phi_n + \chi_n,$$

где $\chi_n \in \Gamma^n_*$ и ϕ_n имеет нулевое среднее значение на каждом A_i.

Для каждого $n \geq 0$ $||\phi_n||_{L_\infty} \leq \sum_\alpha Var_{A_\alpha}\phi$, поэтому

$$||\chi_0|| \leq ||\phi_n||_{L_\infty}$$

и для $n > 0$

$$||\chi_n||_{L_\infty} \leq ||Z(n)||Var(\phi).$$

Используя условия (a) и (b) из определения линейных инволюций типа Рота, заключаем, что для некоторого θ

$$||S(l)\phi||_{L_\infty} \leq C||Q(l)||^{1-\theta'}||\phi||_{BV}.$$

Эта часть доказательства так же, как и предыдущий этап, совпадает с [102] (раздел 2.3).

Заключительная часть состоит в оценке сумм Бирхгоффа для первообразных функций ограниченной вариации (раздел 2.4 в [102]).

4.6 Доказательство Теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 мы будем последовательно проверять, что каждое из условий (c),(b), (a) выполняется почти всегда.

4.6.1 Условия (b) и (c) выполнены почти всегда

В [102] условия (b) и (c) допускают естественную интерпретацию в терминах *показателей Ляпунова* коцикла Зорича. Существование и корректность определения ляпуновского спектра следует из лог-интегрируемости отвечающего ускорению Зорича коцикла и мультипликативной эргодической теоремы. Как указано в [97], аналогичные утверждения верны и в случае линейных инволюций с одним существенным отличием. В случае абелевых дифференциалов пространство Γ_s было ассоциировано с отрицательными показателями Ляпунова (при этом семейство показателей было единственно). В случае же квадратичных дифференциалов (то есть неориентируемых поверхностей) определены два коцикла Концевича - Зорича и, соответственно, семейства показателей Ляпунова вместо одного; эти семейства называются называются *плюс* и *минус* и отвечают за различные эргодические свойства. В нашем случае интересующие нас свойства определяются отрицательными показателями Ляпунова из плюс семейства, потому что минус группа Рози-Вича кодирует действие индукции в гомологиях двулистного накрытия поверхности, на которой определен квадратичный дифференциал, в то время как прямое действие индукции Рози - Вича на ассоциированной с линейной инволюцией поверхностью описывается плюс группой Рози-Вича.

Следующее утверждение является очевидным следствием мультипликативной эргодической теоремы:

Лемма 54. *Свойство когерентности верно для почти всех неприводимых линейных инволюций.*

Докажем теперь

Лемма 55. *Свойство спектральной дыры выполняется для почти всех неприводимых линейных инволюций.*

Доказательство. Для доказательства достаточно убедиться в том, что старший показатель Ляпунова почти всегда простой (то есть отделен от остальных показателей). В случае квадратичных дифференциалов оно является следствием более сильного утверждения о простоте плюс и минус ляпуновских спектров, доказанного в [41] (Теорема 10.1). В частности, из этой теоремы следует, что

$$\lambda_1^+ > \lambda_2^+ \tag{4.9}$$

Γ_0 - это в точности дополнение собственного подпространства, отвечающего λ_1^+ (это собственное пространство натянуто на константы). Поэтому верно, что для всех $k \geq 0$, мы имеем

$$\|S(k) \mid_{\Gamma_*^{(0)}} \| \leq C\|Q(k)\|^{\lambda_2^+/\lambda_1^+}.$$

Следовательно, наличие спектральной дыры (4.9) означает, что

$$\|S(k) \mid_{\Gamma_*^{(0)}} \| \leq C\|Q(k)\|^{1-\theta},$$

где константа $\theta = (\lambda_1^+ - \lambda_2^+)/\lambda_1^+$ удовлетворяет нужному нам условию $\theta > 0$.

□

4.6.2 Условие (a) выполнено почти всегда

Остается проверить, что верно следующее

Предложение 56. *Почти все удовлетворяющие условию Кина неприводимые линейные инволюции удовлетворяют также условию (a).*

Общая стратегия доказательства будет совпадать с приведенной в [102, Раздел 4.6], поэтому мы изложим подробно только те аргументы, которые для случая линейных инволюций отличаются от аналогичных для перекладываний отрезков. Пусть $\Delta(\gamma)$ - подпространство симплкеса параметров таких, что индукция Рози для всех точек в $\Delta(\gamma)$ комбинаторно задается путем γ на диаграмме Рози. Назовем *D-отрезком* такой фрагмент $\left\{\gamma^{(n)}(T)\right\}_{k\leq n<l}$ пути на диаграмме Рози, что ребрам, входящим в этот фрагмент, отвечает не более D различных имен победителей. Центральной является следующая лемма:

Лемма 57. *Существует целое число $l = l(d)$ и константа $\eta = \eta(d) > 0$, обладающие следующими свойствами. Пусть $\gamma = (\gamma(n))_{0<n\leq N}$ - это конечный путь на графе $\mathcal{D}$ такой, что множество $\mathcal{A}'$ победителей, отвечающих входящим в него ребрам, не совпадает со всем алфавитом $\mathcal{A}$. Предположим, что $D = \text{card } \mathcal{A}' > 1$. Тогда существует подмножество $\Delta'(\gamma) \subset \Delta(\gamma)$ с*

$$\text{vol}_{d-1}(\Delta'(\gamma)) \geq \eta \text{vol}_{d-1}(\Delta(\gamma))$$

такое, что для всех $T \in \Delta'(\gamma)$ найдется $M > N$, для которого

1. *победители, отвечающие входящим в* $\gamma^{(M)}(T)$ *ребрам, не лежат в множестве* $\mathcal{A}'$;
2. *не более* l *штук* $(D-1)$*-отрезков нужны, чтобы покрыть* $(\gamma(n))_{N\le n<M}$.

Ее доказательство приведено в следующем разделе 4.6.3.

Доказательство утверждения о том, что удовлетворяющие условию (a) линейные инволюции составляют множество полной меры, опирается на два аргумента, один из которых изложен в Разделе 4.7 [102], а второй аналогичен стандартной лемме Бореля-Кантелли.

Идейно самый сложный шаг - это, используя Лемму 57, получить равномерные ограничения для следующих величин:

1. $||Z_{(D)}(T)||$. Напомним, что для данной линейной инволюции T матрица $Z_{(D)}(T)$ - это матрица коцикла, отвечающего начальному максимальному D-отрезку соответствующего пути на диаграмме Рози;
2. $M_D(T)$ - это минимальное число $(D-1)$-отрезков, которыми можно покрыть этот начальный D-отрезок;
3. $M_D^1(T)$ - это минимальное число 1-отрезков, нужных, чтобы покрыть этот заданный D-отрезок.

Эти оценки получаются с помощью применения индукции по D и использования Леммы 57. Остальное следует из леммы Бореля-Кантелли и положительности наибольшего показателя Ляпунова, в точности как написано в [102].

4.6.3 Доказательство леммы 57

Приведем теперь доказательство Леммы 57.

Для облегчения сопоставления наших конструкций с использованными в работе [102], мы введем обозначения как в разделе 4.8 [102]. Обозначим через $Q_\beta(\gamma)$ сумму элементов столбца β матрицы ускоренной индукции, отвечающей пути γ. Если T - линейная инволюция, мы обозначаем $Q_\alpha(n,T)=Q_\beta(\gamma)$, где γ конечный путь длины не более n.

Пусть путь γ, подмножество $\mathcal{A}'$ и константа D такие, как описано в условиях леммы. Рассмотрим неприводимую линейную инволюцию $T\in\Delta(\gamma)$, удовлетво-

ряющую условию Кина. Для любого $n \geq 0$ мы вводим обозначение

$$\begin{aligned} Q'(n,T) &= \textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} Q_\alpha(n,t) \\ Q_{\text{ext}}(n,T) &= \textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}'} Q_\alpha(n,t) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение, которое доказал в [97] Э. Ланно:

Лемма 58. *(Э. Ланно) Пусть $d \geq 3$. Если победители, отвечающие ребрам пути $\gamma^{(m)}(T)$, принадлежат множеству $\mathcal{A}'$ для $m \leq n$, мы имеем*

$$Q_{\text{ext}}(n,T) \leq (2d-5)Q'(n,T).$$

Доказательство. Начнем с того, что разделим отрезок $[1,n]$ на 1-отрезки $I_i = [n_i, n_{i+1})$, для $i = 0,\ldots,k$, так что победителем каждого ребра (отвечающего 1-отрезку) является α_i. По предположению $\alpha_i \in \mathcal{A}'$. Для всех $i \geq 0$, если буква α_i простая, то имена проигравших, отвечающие входящим в отрезок I_i ребрам, появляются с некоторой периодичностью $d_i \leq 2d-4$. Более того, если $i > 0$ то имя проигравшего для ребра $\gamma^{(n_i)}$ - это в точности α_{i-1}.

На первом отрезке $[1,n_1)$, если буква α_0 простая, то имя проигравшего для ребра $\gamma^{(m)}$ – это α_1 для каждого $m = n_1 - kd_0$, $k > 0$. Обозначим также $n_1 = kd_0 + n_1'$, $0 < n_1' \leq d_0$.

Теперь для каждого $m \in I_i$, если имя проигравшего, которое отвечает ребру $\gamma^{(m)}$ – это $\beta_{m,i}$ то

$$\begin{aligned} Q_{\text{ext}}(m,T) &= Q_{\text{ext}}(m-1,T) \\ Q'(m,T) &= Q'(m-1,T) + Q_{\alpha_i}(n_i-1,T) \end{aligned} \qquad \text{if } \beta_{m,i} \in \mathcal{A}', \tag{4.11}$$

и

$$\begin{aligned} Q_{\text{ext}}(m,T) &= Q_{\text{ext}}(m-1,T) + Q_{\alpha_i}(n_i-1,T) \\ Q'(m,T) &= Q'(m-1,T) \end{aligned} \qquad \text{if } \beta_{m,i} \notin \mathcal{A}'. \tag{4.12}$$

Нам нужно проследить за ситуацией, когда имя проигравшего не принадлежит $\mathcal{A}'$. Очевидно в каждом отрезке $[n_1', n_1)$ и $[n_i, n_{i+1})$ для $i \geq 1$, если имя проигравшего простое, то

$$\frac{\#\{\text{имена проигравших} \notin \mathcal{A}'\}}{\#\{\text{имена проигравших} \in \mathcal{A}'\}} \leq \frac{d_i - 1}{1} \leq 2d-5$$

а если имя соответствующей стрелки двойно, то

$$\frac{\#\{\text{имена проигравших} \notin \mathcal{A}'\}}{\#\{\text{имена проигравших} \in \mathcal{A}'\}} \leq 2d-4$$

Наконец, нам надо оценить Q_{ext} и Q' для $m \in [1, n_1')$:

$$Q'(m,T) \geq D \geq 2, \text{и}$$

$$Q_{\text{ext}}(m,T) \leq Q_{\text{ext}}(0,T) + m \leq d - D + n_1' - 1 \leq d - 2 + d - 2 \leq (d-2)Q'(m,T).$$

Утверждение доказано. □

Введем еще одно важное техническое

Определение. Для любых $1 \leq D_1 \leq D$ и $n \geq 0$, $C_1 > 0$ будем говорить, что отображение $T \in \Delta(\gamma)$ является (D_1, n, C_1)-сбалансированным, если мы имеем $Q_\alpha(n,T) \geq C_1^{-1} Q'(n,T)$ для по крайней мере D_1 имен $\alpha \in \mathcal{A}'$.

Так как это свойство зависит только от свойств первых n звеньев γ, мы можем также сказать, что путь является (D_1, n, C_1)-сбалансированным. Например, любой путь является $(1, n, D)$-сбалансированным для всех $n \geq 0$.

Лемма 59. *Если γ является (D, N, C_0)-сбалансированным для некоторой постоянной $C_0 > 0$, то можно найти $\Delta'(\gamma) \subset \Delta(\gamma)$, удовлетворящее условию Леммы 57 с $l = l(d)$ и $\eta = \eta(d, C_0)$.*

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения [102, Лемма 2]. Единственное изменение, которое требуется внести, - это замена $d-2$ на $2d-5$. План доказательства следующий. Рассмотрим максимальное продолжение $\gamma' = (\gamma^{(n)})_{0<n\leq M}$ заданного пути γ такого, что имя победителя α, отвечающего последнему ребру γ', (мы обозначаем его $\gamma^{(M)}$) не лежит в $\mathcal{A}'$. Тогда величина $M - N$ ограничена (например, константой $2d$). Поэтому существует другая константа C_* (которая зависит от d) такая, что γ' будет $(D, M-1, C_* C_0)$ - сбалансированным. Тогда путь γ'', который получается из γ' удалением последнего ребра, удовлетворяет ровно тому же условию, что и γ'' в [102, Lemma 2]. В последующих оценках необходимо учесть результат Леммы 58, из-за которого выполнено: $Q_{ext}(M-1,T) \leq (2d-5)Q'(M-1,T)$ и поэтому $vol_{d-1}(\Delta(\gamma')) \geq \eta vol_{d-1}(\Delta(\gamma'')$ с $\eta = (1+(2d-5)C_* C_0)^{-1}$. Так что ограниченность $l(d)$ следует из ограниченности $M - N$. □

Теперь, если γ является только $(\widetilde{D}, N, \widetilde{C})$ - сбалансированным для какого-то $\widetilde{D} < D$, мы будем стараться продлить путь γ так, чтобы новый путь определял подсимплекс, чей объем не очень заметно отличается объема определенного γ подсимплекса и который при этом будет более сбалансированным. В конце этого процесса мы хотим применить Лемму 59 и получить утверждение Леммы 57. Объясним, как именно мы будем продолжать γ, чтобы держать под контролем объем соответствующего симплекса.

Начнем с $(\widetilde{D}, N, \widetilde{C})$-сбалансированного пути и обозначим через $\bar{\mathcal{A}}$ множество букв, для которых $Q_\alpha(N,T) \geq \widetilde{C}^{-1}Q'(N,T)$. На первом шаге, мы продлим путь γ до пути γ' длины N' такого, что победитель, отвечающий его заключительному ребру, не принадлежит множеству $\bar{\mathcal{A}}$. Если победитель этого последнего ребра не принадлежит множеству $\mathcal{A}'$, то результат следует из Леммы 59. Остается рассмотреть случай, когда это не так. Тогда нужно рассмотреть несколько случаев (как и в [102], Случай A, Случай B, Типы I,II,III). Случай A отвечает ситуации, когда в петле ребер с одинаковым победителем, которая начинается с ребра $(\gamma^{(N')})$ никто из отвечающих этим ребрам проигравших не принадлежит $\mathcal{A}' \setminus \bar{\mathcal{A}}$, а случай B - это дополнение к Случаю A; Случай B делится на три подслучая (Типы I, II or III).Во всех этих случаях, доказательство не требует модификаций по сравнению с [102].

Глава 5

Отображения сдвигов отрезков

5.1 Определения и гипотезы

Определение. Рассмотрим кусочно - линейное отображение R, определенное на полуоткрытом интервале $I \subset \mathbb{R}$ со значениями в I. R называется отображением сдвигов отрезка на n отрезках, если I имеет n максимальных полуоткрытых отрезков непрерывности, ограничение R на каждый из которых является сдвигом. Концы этих отрезков называются *особыми точками* отображения.

Отображения сдвигов отрезков задаются конечным набором параметров: для каждого отрезка достаточно знать его длину и сдвиг.

Отображения сдвигов отрезков были введены в [49] как обобщение перекладываний отрезков. Основное их отличие от перекладываний отрезков - отсутствие требования, что образы отрезков непрерывности задают разбиение отрезка - носителя; в случае отображения сдвигов отрезков они могут пересекаться.

В той же работе введена терминология для двух различных классов отображений сдвигов отрезков: отображения бывают *конечного* и *бесконечного* типа в зависимости от устройства аттрактора отображения.

Определение. Пусть задано отображение сдвигов отрезков R на отрезке I; определим последовательность $\Omega_n = I \cap RI \cap R^2I \cdots \cap R^nI$. Если существует $n \in \mathbb{N}$, для которого последовательность Ω_n стабилизируется: $\Omega_i = \Omega_{i+1}$ для всех $i \geq n$,

то отображение сдвигов отрезков R – конечного типа. Если же такого n не существует, то отображение R – бесконечного типа.

Замечание 12. В случае отображений бесконечного типа $\bar{\Omega}$ –замыкание множества $\Omega = \lim_{n\to\infty} \Omega_n$– является канторовским множеством.

Замечание 13. Первый пример отображения бесконечного типа приведен в работе [49].

Динамика отображений бесконечного типа отличается от перекладываний отрезков:

Гипотеза 5 (Бошерницан - Корнфельд)**.** *Множество параметров, задающих отображения сдвигов $n \geq 3$ отрезков бесконечного типа, имеет нулевую меру Лебега в n-мерном симплексе.*

Эта гипотеза в настоящий момент доказана только для очень ограниченного набора семейств отображений сдвигов отрезков: двойных вращений и отображений на 3 отрезках. Подробный разбор этих случаев приведен ниже.

5.2 Отображения сдвигов отрезков типа Бруина - Трубецкого

Первое семейство отображений сдвигов отрезков, для которого получилось доказать гипотезу 5, было описано Бруином и Трубецким в [53].

Семейство определяется следующим образом: пусть $U := \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1\}$, $L := \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \alpha \leq \beta + 1 \leq 1\}$ и $R := U \cup L$; тогда для любой внутренней точки $(\alpha, \beta) \in U$ мы определяем

$$R_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x + \alpha, \text{ если } x \in [0, 1 - \alpha] \\ x + \beta, \text{ если } x \in [1 - \alpha, 1 - \beta] \\ x + \beta - 1, \text{ если } x \in [1 - \beta, 1). \end{cases} \tag{5.1}$$

Легко видеть, что $R(x) = R_{\alpha,\beta}(x) : [0, 1) \to [0, 1)$ - это отображение сдвигов отрезков. Если мы склеим точки 0 и 1, то получим описанное в следующем разделе отображение – двойное вращение. Пример отображения сдвигов отрезков

Бошерницана - Корнфельда, упомянутый выше, как раз принадлежит к семейству Бруина - Трубецкого.

Будем говорить, что пара (α, β) задает отображение $R_{\alpha,\beta}$. В своей работе Бруин и Трубецкой доказывают гипотезу 5, а также показывают, что в данном семействе множество параметров B, задающих строго эргодичные отображения сдвигов отрезков, является плотным G_δ-подмножеством множества параметров A, задающих отображения бесконечного типа.

Мы доказываем следующее обобщение их результата:

Теорема 60. *Пусть, как и выше, A–множество пар (α, β) таких, что заданное парой отображение $R_{\alpha,\beta}$ является отображением сдвигов отрезков бесконечного типа, а $B \subset A$ - множества пар (α, β), для которых $R_{\alpha,\beta}$ является строго эргодичным отображением сдвигов отрезков бесконечного типа. Тогда существует определенная на множестве пар (α, β) вероятностная мера μ, носителем которой является множество A, и множество B по отношению к мере μ является подмножеством полной меры в A.*

Бруин и Трубецкой доказали свою теорему, построив ренормализацию (они назвали ее отображением Гаусса), позволившее им получить символическое представление заданной отображениями сдвигов отрезков динамической системы в терминах подстановок. Стратегия доказательства теоремы 60 также основана на применении метода ренормализации, но алгоритм, который мы используем, на самом деле является алгоритмом ренормализации для систем изометрий (см. раздел 6) и может рассматриваться как многомерная марковская многомерная цепная дробь. Как уже отмечалось выше, для таких алгоритмов Ш. Фужерон доказал комбинаторный критерий строгой эргодичности. Доказательство теоремы 60 опирается на применение этого критерия.

Доказательство. Опишем алгоритм ренормализации (будем обозначать для простоты отображение сдвигов отрезков $R_{\alpha,\beta}$ через R, а соответствующее ренормализации линейное преобразование через $\mathcal{R}$). Начнем с введения новых обозначений, чтобы сделать нашу систему более однородной. А именно: если $\alpha > \beta$, обозначим

$$a = 1 - \alpha;$$

$$b = \alpha - \beta;$$

$$c = \beta.$$

Тогда, $a + b + c = 1$ и

$$R([0, a)) = [1 - a, 1).$$

$$R([a, a + b)) = [1 - b, 1).$$

$$R([a + b, 1) = [0, c).$$

Будем называть a - отрезками ту пару, длина которой в начальный момент времени равна a; b - отрезки и c - отрезки определяются аналогично. На рисунке 5.1 a-пара изображена красным цветом, b-пара - зеленым цветом, а c-пара - желтым цветом.

Будем рассматривать только случай общего положения, когда a, b, c рационально независимы. Возможны три случая:

Случай 1: $a > b + c$**.** Рассмотрим отображение первого возвращения на отрезок $[b + c, 1)$. Индуцированное отображение будет отображением сдвигов отрезков типа Бруина - Трубецкого со следующими длинами отрезков:

$$a' = a - b - c;$$

$$b' = b;$$

$$c = c.$$

Легко видеть, что матрица этого отображения совпадает с матрицей алгоритма ренормализации для специальных систем изометрий, о которых речь идет в разделе 6.2.

При этом преобразование отображения сдвигов отрезков, которое мы применили, можно интерпретировать следующим образом: пара отрезков длины b не претерпевает никаких изменений (не сдвигается с места и не укорачивается), один из отрезков длины c перемещается, при этом длина этой пары тоже не меняется, а вот отрезки длины a не меняют своего положения, но укорачиваются.

Случай 2: $c < a < b + c$**.** В этом случае отображение сводится к сдвигу двух отрезков и, следовательно, всегда является отображением конечного типа. В этом случае индукция останавливается.

Случай 3: $a < c$**.** Рассмотрим отображение первого возвращения на отрезок $[a, 1)$. В результате получается отображение сдвигов отрезков со следующими

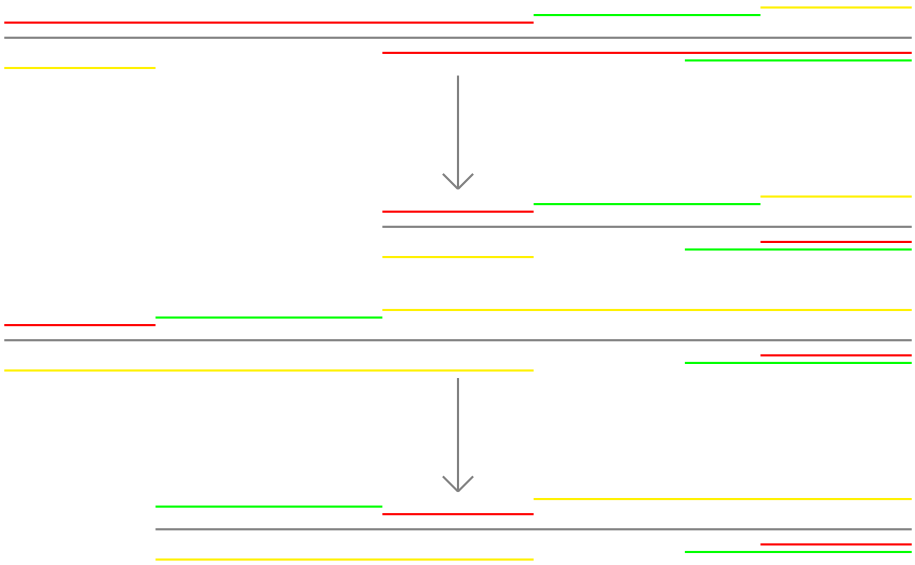


Рис. 5.1: Ренормализация для отображений сдвигов отрезков типа Бруина-Трубецкого.

параметрами:

$$R([0,b)) = [1-b,1).$$

$$R([b,a+b)) = [1-a,1).$$

$$R([a+b,1-a)) = [0,c-a).$$

Длины отрезков меняются следующим образом:

$$a' = a;$$

$$b' = b;$$

$$c = c - a.$$

При этом a-отрезок и b-отрезок в верхней строчке (в прообразе) меняются местами, а c-отрезок остается на месте.

Воспользуемся терминологией, используемой для классической индукции Рози: длинный отрезок, который укорачивается, будет называться *победителем*, а более короткий отрезок, который перемещается, будет называться *проигравшим*. Соответственно, в Случае 1 a - отрезок - это победитель, а c - отрезок - проигравший, в то время как в Случае 3 все наоборот. Для краткости будем говорить, что в случае 1 победила буква a, а буква c проиграла (и аналогично в остальных случаях).

Заметим, что комбинаторная картина в нижней части - в образе (c-отрезок содержит левый конец отрезка-носителя, a-отрезок и b-отрезок содержат правый конец отрезка-носителя) не меняется, а вот в прообразе в случае 1 порядок отрезков сохраняется, а в случае 2 - изменяется.

Поэтому отвечающая этому алгоритму ренормализации диаграмма Рози выглядит следующим образом: имеются две вершины, отвечающие порядку отрезков в прообразе (на рисунке 5.1 это порядок цветов красный - зеленый - желтый или зеленый - красный - желтый соответственно) и ребра между ними, помеченные именем отрезка - победителя (см. рисунок 5.2).

Таким образом, задано разбиение исходного симплекса длин Δ на три части, каждая из которых является симплексом; будем обозначать их $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Проективизация отображения R индуцирует на каждом из Δ_i отображение; это отображение отображает Δ_i на весь симплекс Δ, при этом вершины переходят в вершины, а ребра - в ребра. Таким образом, отображение $f_{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{R}}{||\mathcal{R}||}$ определяет марковскую многомерную цепную дробь. Диаграмма Рози соответствующего алгоритма состоит из трех вершин: две вершины отвечают, соответственно, Случаю 1 и Случаю 3, а третья отвечает Случаю 2, в котором индукция останавливается. Последовательное применение алгоритма определяет счетное марковское разбиение.

Выполнено следующее очевидное утверждение:

Лемма 61. *Множество параметров A, таких, что для $(\alpha, \beta) \in A$ отображение Бруина-Трубецкого $R_{\alpha,\beta}$ является отображением сдвигов отрезков бесконечного типа, совпадает с множеством параметров, для которого описанная выше индукция никогда не останавливается.*

Следующий этап - доказательство аналога теоремы Марми - Муссы - Йоккоза о том, что после достаточного количества итераций матрица индукции будет иметь матрицу, все элементы которой строго положительны. Из Леммы 61 следует, что:

Лемма 62. *Отображение сдвигов отрезков типа Бруина - Трубецкого является отображением бесконечного типа тогда и только тогда, когда каждая из букв (a, b, c) становилась победителем и проигравшим бесконечное число раз.*

С учетом этих соображений обозначим через $\lambda = (a, b, c)$ вектор исходных длин и через $\lambda' = (a', b', c')$ вектор длин после применения шага индукции; имеем

$\lambda = \mathcal{R}\lambda'$, с $\mathcal{R} = R_A^{k_1} R_{CA} R_B^{k_2} R_{CB} \cdots R_A^{k_n} R_{CA} R_B^{k_{n+1}} R_{CB}$, где $k_1, k_2, \cdots \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где

$$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

и

$$R_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

в том время как

$$R_{CA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

и

$$R_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы R_A и R_B описывают изменения длин при ренормализации в случае, когда самый левый отрезок в прообразе (это может быть a-отрезок или b-отрезок) длиннее c-отрезка, а R_{CA} и R_{CB} описывают изменения длин при ренормализации, когда c-отрезок длиннее соответствующего a- или b-отрезка.

Легко видеть, что

$$R_A^{k_i} = \begin{pmatrix} 1 & k_i & k_{i+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$R_B^{k_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_j & 1 & k_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так что $R_0 = R_A^{k_1} R_{CA} R_B^{k_2} R_{CB}$ - это матрица со строго положительными коэффициентами, если $k_1, k_2 > 0$.

Остается заметить, что из Леммы 62 следует, что момент, когда каждое из отображений R_A и R_B применяется хотя бы по одному разу обязательно настает

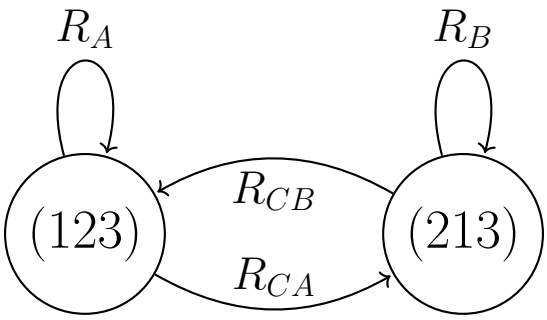


Рис. 5.2: Диаграмма Рози

для любого отображения бесконечного типа (иначе или $b-$, или $a-$ отрезки не будут выигрывать бесконечно часто). Поэтому матрица индукции после достаточного количества шагов принимает вид матрицы со строго положительными коэффициентами, умноженной слева и/или справа на матрицы с неотрицательными коэффициентам. Поэтому верна следующая

Лемма 63. *Существует ускорение индукции $\mathcal{R}$, задающее равномерно расширяющее отображение.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству утверждения 39.

Конструкция инвариантной меры опирается на метод термодинамического формализма для марковских сдвигов и описана в [72]: симплициальная система, как и диаграмма Рози на рисунке 5.2, состоит всего из двух вершин, поэтому очевидно, что она является быстро сбегающей (в смысле определения из раздела 3.1 в [72]) и, следовательно, удовлетворяет условиям Следствиям 4.4 и 4.13 из [72]). Из этого же следствия вытекает утверждение о строгой эргодичности почти всех по отношению к построенной мере отображений сдвига отрезков Бруина - Трубецкого бесконечного типа. □

Замечание 14. Ренормализация Бруина-Трубецкого является ускорением (но не специальным) предложенной нами ренормализации.

Замечание 15. Аналогичный подход позволяет доказать тот же результат для более широкого класса отображений, определенных в работе [52]. Это отображения сдвигов произвольного числа отрезков, такие, что образы всех отрезков непрерывности, за исключением самого правого, содержат правый конец отрезка - носителя, а образ самого правого отрезка непрерывности содержит левый конец отрезка - носителя.

Замечание 16. Известны примеры отображений Бруина-Трубецкого, допускающих две инвариантные эргодические меры. Примеры отображений бесконечного типа, не обладающие свойством слабого перемешивания, в настоящий момент не известны и вопрос об их существовании является открытым.

5.3 Двойные вращения

5.3.1 Определения и результаты

Двойные вращения были впервые определены в работе Сузуки - Ито - Айхара ([127]), где также впервые был описан алгоритм ренормализации, который называется индукцией SIA.

Определение. *Двойное вращение* - это отображение $P_{(\alpha,\beta,c)}\colon [0,1) \to [0,1)$ следующего вида:

$$P_{(\alpha,\beta,c)}(y) = \begin{cases} y+\alpha \pmod 1 & \text{, если } y \in [0,c) \\ y+\beta \pmod 1 & \text{, если } y \in [c,1), \end{cases} \tag{5.2}$$

где $\alpha, \beta, c \in [0,1)$.

Доказательство гипотезы 5 принадлежит Бруину и Клаку и использует индукцию SIA. Кроме того, в той же работе доказана теорема, в чем-то похожую на нашу Теорему 36: без явного построения примера меры, инвариантной относительно индукции SIA, и без проверки существования такой меры с помощью методов символической динамики показано, что почти все (по отношению к любой такой мере, если она есть) двойные вращения бесконечного типа строго эргодичны.

Их результат может быть уточнен следующим образом.

Теорема 64. *Множество параметров $A_D = (\alpha, \beta, c)$, для которых $P_{\alpha,\beta,c}$ является отображением двойного вращения бесконечного типа, имеет хаусдорфову размерность строго меньше 3.*

В рамках доказательства этой теоремы мы также строим вероятностную меру $\hat{\mu}$, носителем которой является множество параметров A_D. Эта мера инвариантна относительно введенной нами ренормализации и индуцирует меру максимальной

энтропии для специального потока, построенного по отображению сдвигов отрезков.

Теорема 65. *Почти все (по отношению к $\hat{\mu}$) двойные вращения бесконечного типа являются строго эргодичными.*

Замечание 17. Обе теоремы опубликованы в [28] и доказаны автором настоящей диссертации.

Доказательство использует два алгоритма ренормализации, один из которых предложен автором диссертации, а второй придуман совместно М. Артиджани, Ш. Фужероном и П. Юбером. Утверждения о сравнении двух алгоритмов доказаны автором диссертации.

Нашим основным инструментом является ренормализация, отличная от индукции SIA, и являющаяся, как и индукция Рози, примером марковской многомерной цепной дроби. Мы проверяем, что ассоциированная с нашей индукцией симплициальная система удовлетворяет кратко описанному в разделе о многомерных цепных дробях критерию Фужерона, то есть является быстро сбегающей удовлетворяет условиям Следствиям 4.4 и 4.13 из [72]).

При этом из теоремы Буззи - Юбера ([54]) следует, что двойные вращения могут допускать не более 2 эргодических мер. Примеры двойных вращений с 2 мерами были построены в [53], однако все эти примеры не являются двойными вращениями общего положения и относятся к классу отображений типа Бруина - Трубецкого.

Замечание 18. Д. Волк показал в [132], что отображения сдвигов трех отрезков сводятся к двойным вращениям, поэтому открытые вопросы об эргодичности отображений сдвигов отрезков бесконечного типа в настоящее время начинаются с отображений на 4 отрезках.

В [125]) было показано, что двойные вращения могут быть определены как отображения первого возвращения на трансверсаль при наличии прямолинейного зеркала с координатами $[x, x+y]$ в единичном квадрате. Теорема 65 означает, что для почти всех x, y, θ бильярдные траектории, выпущенные в направлении θ, являются строго эргодичными. В работе [125] также получены оценки на число

инвариантных мер для бильярдного потока в квадрате $[0,1] \times [0,1]$ с вертикальным шпионским зеркалом, соединяющим точки $[a,0]$ и $[a,b]$, в случае если $a \in \mathbb{Q}$. Кроме того, для квадратного стола в той же работе приведено условие на направление бильярдного потока θ, гарантирующее строгую эргодичность в случае, когда вертикальная перегородка находится в середине горизонтальной стороны квадрата границы (то есть $a = \frac{1}{2}$). Оба результата получены с использованием методов символической динамики.

Более общие классы бильярдов с шпионскими зеркалами изучаются в работе [126]. В частности, в этой работе автором настоящей диссертации доказано, что бильярды со шпионскими зеркалами имеют нулевую энтропию (точная формулировка приведена ниже). Для классических бильярдов в многоугольниках для аналогичного факта существует несколько доказательств ([78], [86]). Кроме того, Буззи доказал частичные изометрии в любой размерности имеют нулевую энтропию.

Нам будет удобно называть *стороной* любую компоненту границы: сторону многоугольника Q или отражающую сторону шпионского зеркала, а *вершиной* называть любой конец стороны. Пусть у многоугольника Q будет q сторон и r tшпионских зеркал, поэтому всего сторон в указанном выше смысле будет $q + 2r$. Стороны образуют *границу*, которую мы будем обозначать Γ. Рассмотрим *бильярдное отображение* P, отображение первого возвращения на Γ. Тогда *фазовое пространство* бильярдного потока $P\Gamma$ - это подмножество векторов единичного касательного расслоения, направленных внутрь. Пусть $\pi : P\Gamma \to \Gamma$ обозначает стандартную проекцию.

Пронумеруем компоненты границы (стороны многоугольника и шпионские зеркала) индексами $I_i : 1 \leq i \leq q + 2r$. Тогда орбита любой точки x кодируется последовательностью индексов компонент границы, которых она касается в каждый момент времени. Можно определить

$$\Sigma^+ =: \{\vec{a} = (a_i)_{i \in I} : \exists x : \pi(T^i(x) \in I_{a_i} \forall i \geq 0\}.$$

Мы предполагаем, что $T^i(x)$ определено для всех $i \geq 0$. Рассмотрим дискретную топологию на множестве сторон и топологию произведения на множестве $\bar{\Sigma}^+$. Верна следующая

Теорема 66. *Для любого многоугольника со шпионскими зеркалами*

$$h_{top}(\overline{\Sigma^+}, \sigma) = 0.$$

Сначала мы докажем одно промежуточное утверждение, для формулировки которого введем еще два обозначения:

$$\Sigma = \{\vec{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} : (a_{(i-j)})_{i\geq j} \in \Sigma^+ \forall j \in \mathbb{Z}\}$$

и

$$\Omega = \{\vec{x} := (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : T(x_i) = x_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Промежуточное утверждение – это следующая

Теорема 67. *Для любого многоугольника со шпионскими зеркалами*

$$h_{top}(A, P) = h_{top}(\overline{\Omega}, \sigma) = h_{top}(\overline{\Sigma}, \sigma) = 0.$$

Затем мы выведем теорему 66 из теоремы 67. Доказательство этих утверждений вынесем в отдельные параграфы.

5.4 Ренормализация для двойных вращений

Наша задача состоит в том, чтобы построить алгоритм ренормализации для двойных вращений, который позволит определить соответствующую симплициальную систему и доказать, что она обладает нужными для применения критерия Фужерона свойствами.

5.4.1 Отображения сдвигов 3 отрезков и двойные вращения

Заметим, что любое отображение сдвигов отрезков, отличное от перекладывания отрезков, устроено так: некоторые точки отрезка-носителя покрыты несколькими отрезками - образами, некоторые – только одним, а некоторые не покрыты никаким из образов отрезков разбиения. Множество таких непокрытых точек мы будем называть *пропуском*. Если такие пропуски расположены в крайней левой или крайней правой части отрезка - носителя (то есть содержат один или оба его конца), можно рассмотреть внутренний подотрезок, такой, что отображение первого возвращения на него будет отображением сдвигов отрезков без пропусков с

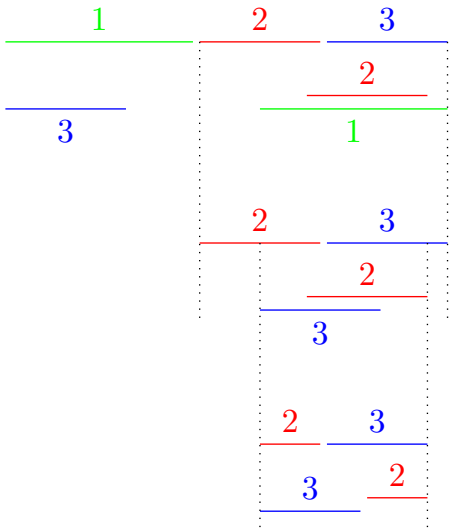


Рис. 5.3: Редукция отображения сдвигов 3 отрезков к вращению.

края. Поэтому в дальнейшем мы будем всегда предполагать, что у рассматриваемых отображений сдвигов отрезков нет пропусков с края. Для удобства будем также считать, что отрезком-носителем I является полуинтервал $[0, 1)$.

Следующее техническое утверждение очевидно (см. рис. 5.3):

Лемма 68. *Пусть R - это отображение сдвигов отрезков на трех отрезках, у которого хотя бы одна из особых точек (концов отрезков разбиения) отображается в пропуск. Тогда существует подотрезок отрезка-носителя I' такой, что отображение первого возвращения для R на I' является вращением.*

Теперь переформулируем определение отображений сдвигов отрезков на 3 отрезках по образцу определения перекладываний отрезков с флипами и без:

Определение. Отображение сдвигов трех отрезков задается с помощью алфавита $\mathcal{A}$ следующим образом:

- две биекции π_0, $\pi_1 \colon \mathcal{A} \mapsto \{1, 2, 3\}$;
- вектор длин $\lambda_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$;
- параметр сдвига $t \in \mathbb{R}_+$, отвечающий за сдвиг второго отрезка.

По заданному $\alpha \in \mathcal{A}$ и точке

$$x \in \left[\sum_{\pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta, \sum_{\pi_0(\beta) \leq \pi_0(\alpha)} \lambda_\beta \right]$$

отображение сдвигов отрезков определяется так:

$$R(x) = x - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)} \lambda_\beta + t,$$

если $\pi_1(\alpha) = 2$, и

$$R(x) = x - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)} \lambda_\beta + \sum_{\pi_1(\beta)<\pi_1(\alpha)} \lambda_\beta.$$

иначе. В последней формуле пустая сумма равна 0.

Мы будем рассматривать только *неприводимые* отображения сдвигов 3 отрезков. Неприводимость означает, что $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1\}) \neq \{1\}$ и $\pi_1 \circ \pi_0^{-1}(\{1,2\}) \neq \{1,2\}$. (остальные отображения сдвигов 3 отрезков являются приводимыми и сводятся к приводимым отображениям сдвигов 2 отрезков, то есть являются отображениями конечного типа в смысле Бошерницана - Корнфельда.

Заметим также, что перестановке $\pi_1 = (3,1,2)$ отвечает отображение сдвигов 3 отрезков с пропуском с края, поэтому (с учетом сказанного выше) эту перестановку мы исключим.

5.4.2 Ренормализация. Первый подход

Теперь мы определим наш первый алгоритм ренормализации по аналогии с индукцией Рози-Вича для перекладываний отрезков. Этот алгоритм очень прост для описания, но изучать его эргодические и динамические свойства достаточно сложно, поэтому дальше мы опишем альтернативный алгоритм и покажем, что первый алгоритм является ускорением альтернативного.

Так как мы договорились, что у нас нет пропусков с края, оба конца отрезка-носителя закрыты образами отрезков разбиения. Остается еще один образ отрезка разбиения, положение которого не фиксировано. Если он нетривиально перекрывается с содержащим левый конец отрезка-носителя образом отрезка, будем говорить, что отрезки нашей системы перекрываются слева. Иначе они перекрываются справа.

Определение ($\mathcal{Z}$-индукция)**.** Пусть R - отображение сдвигов 3 отрезков, у которого отрезки перекрываются слева. Рассмотрим отображение первого возвращения R' на подотрезок I' отрезка I, левый конец которого совпадает с левым концом I, а правый выбирается так:

- если $\lambda_3 > \lambda_1$, мы выбираем $\widetilde{I} = [0, \lambda_3 - \lambda_1)$. Если у $\widetilde{I}$ нет пропуска с правого края, мы определяем $I' = \widetilde{I}$. Если это не так, берем $I' = \widetilde{I} \cap R\widetilde{I}$. Будем говорить, что верхний отрезок в этом случае - *победитель*, а нижний - *проигравший*.
- Если $\lambda_3 < \lambda_1$ мы выбираем $I' = [0, \lambda_1 + \lambda_2)$. В этом случае нижний правый отрезок - *победитель*, а верхний - *проигравший*.

Отображение, которое R переводит в R', называется правой $\mathcal{Z}$ - *индукцией*. Если отрезки перекрывались справа, можно рассмотреть сопряжение с флипом: применим отражение относительно $1/2$, затем шаг правой индукции и отражение относительно середины нового отрезка-носителя.

Так как отрезок-носитель индуцированного отображения - это отрезок $[0, a)$, который получается из исходного отрезка-носителя его сокращением справа (этот термин еще появится ниже при изучении систем изометрий), мы будем называть описанное выше преобразование *правой индукцией*. Если в результате применения нескольких шагов правой индукции получается отображение вращения, индукция останавливается (это означает, что исходное отображение не могло быть отображением бесконечного типа).

Пример применения этой индукции приведен на рисунке 5.4.

Диаграмма Рози для этого алгоритма ренормализации устроена достаточно просто и не очень отличается от диаграммы Рози для случая отображений сдвигов отрезков типа Бруина - Трубецкого (рис. 5.5).

Как мы уже отмечали, $\mathcal{Z}$-индукция позволяет убедиться, что число отрезков остается неизменным, но изучать эргодические и динамические свойства этого алгоритма ренормализации сложнее. Дело в том, что для алгоритма $\mathcal{Z}$-индукции матрица Z, которая позволяет выразить новый вектор длин $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ и новый параметр свдига t через исходные координаты, не удовлетворяет одному из стандартных требований – неотрицательности коэффициентов. Для того, чтобы использовать классические инструменты эргодической теории (например, вариации теоремы Перрона-Фробениуса), нужно, чтобы у этой матрицы были неотрицательные коэффициенты (как написано в разделе про многомерные цепные дроби). К сожалению, в случае матрицы Z это не так: несмотря не то, что длины отрезков при применении индукции не возрастают, параметр сдвига может увеличиваться. Чтобы избавиться от этой проблемы М. Артиджани, П. Юбером и Ш. Фужероном

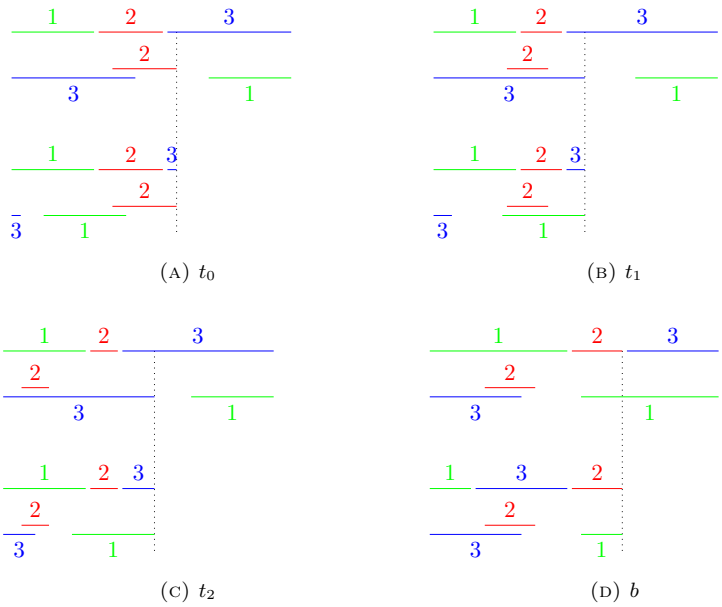


Рис. 5.4: Применение $\mathcal{Z}$-индукции.

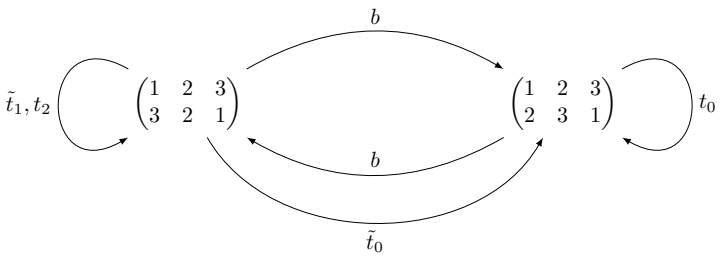


Рис. 5.5: Диаграмма Рози $\mathcal{Z}$-индукции.

был построен альтернативный алгоритм ренормализации. Мы сначала приведем альтернативное описание класса отображений сдвигов 3 отрезков. Комбинаторно оно будет сложнее классического определения, но зато позволит описать индукцию только в терминах длин отрезков, не используя параметр сдвига.

5.4.3 Новое комбинаторное описание

Для любого отображения сдвигов 3 отрезков без пропусков с края есть два перекрывающихся образа отрезков; разделим каждый из них на две части (перекрытие и оставшийся фрагмент). Таким образом у нас получится пять отрезков. Два из них по построению имеют одинаковые длины.

Пометим эти пять отрезков разбиения буквами алфавита $\mathcal{A}$, а слово, описывающее отрезок-носитель в этих терминах, назовем w_0 . Тогда в нашем алфавите $\mathcal{A}$ имеется 4 буквы, а w_0 содержит ровно одну букву, повторяющуюся дважды. Так как отображение сдвигов отрезков на каждом отрезке непрерывности сохраняет длины, пропуск в образе имеет ровно ту же длину, что и перекрытие. Если отрезок-перекрытие был обозначен буквой α, обозначим пропуск символом $\underline{\alpha}$. Тогда слово w_1, составленное из букв $\mathcal{A} \cup \underline{\mathcal{A}}$, описывает положение отрезков в образе отрезка-носителя. Эти слова вместе формируют матрицу из двух строк, которая является аналогом перестановки в кодировании перекладываний отрезков.

Приведем примеры:

$$\begin{pmatrix} A & D & B & C & D \\ C & D & B & \underline{D} & A \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & B & D \\ C & B & D & \underline{B} & A \end{pmatrix}.$$

Пусть σ - отображение, сопоставляющее k, где $1 \leq k \leq n$, число, указывающее положение $w_0(k)$ в слове w_1. Будем называть пару $\binom{w_0}{w_1}$ *перестановкой отображения сдвигов отрезков*. Рассмотрим такую перестановку и вектор длин $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$.

Для заданного слова w длины $|w| = n$ мы определяем

$$\lambda(w) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{w(i)}.$$

Пусть $w^{(k)}$ обозначает префикс длины $k-1$ слова w. Для точки

$$x \in \left[\lambda\left(w_0^{(k)}\right), \lambda\left(w_0^{(k+1)}\right)\right],$$

отображение сдвигов отрезков R можно определить так:

$$R(x) = x + \lambda\left(w_1^{(\sigma(k))}\right) - \lambda\left(w_0^{(k)}\right).$$

Как обычно, подразумевается, что пустая сумма равна 0.

Заметим, что теперь нам не нужно задавать специального параметра сдвига - все параметры отображения равноправны и являются длинами отрезков. Но комбинаторно ситуация заметно усложняется.

5.4.4 Индукция Артиджани-Фужерона-Юбера

Теперь мы готовы определить новый алгоритм ренормализации. Начнем с определения индукции Рози справа и слева - оно очень похоже на аналогичное определение для перекладываний отрезков:

Определение (Индукция Рози)**.** *Правая индукция Рози* каждому отображению сдвигов отрезков, определенному на отрезке $I = [0, 1)$, ставит в соответствие отображение первого возвращения на подотрезок $[0, x)$, где x - крайняя правая особая точка или образ особой точки, отличная от конца I.

Левая индукция Рози определяется симметрично.

С таким алгоритмом, однако, есть проблемы: мы можем получить отображение сдвигов отрезков с пропуском с края, а еще может вырасти число отрезков. Поэтому нам придется его немного модифицировать:

Определение ($\mathcal{R}$-индукция)**.** Определим $\mathcal{R}$-индукцию следующим образом:

- если пропуск - это один из двух последних отрезков w_1, применяем индукцию Рози справа;
- если пропуск - один из двух первых отрезков w_1, применяем индукцию Рози слева.

Примеры применения правой $\mathcal{R}$-индукции приведены на рисунке 5.6, где слева - ситуация, при которой буква-победитель встречается только один раз, а справа – два раза.

Замечание 19. Можно было определить индукцию немного иначе: всегда применять индукцию Рози справа, но отражать отрезок, если пропуск оказывается

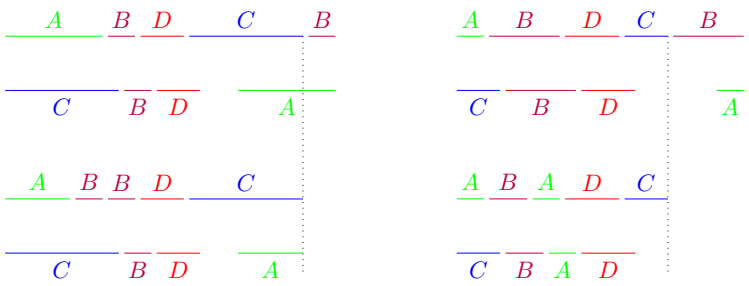


Рис. 5.6: Применение $\mathcal{R}$-индукции.

на одной из двух позиций w_1 с другого края. В обоих случаях диаграмма Рози получится одинаковой. Поэтому мы будем в конкретных случаях выбирать, какое описание нам удобнее.

Ключевая задача - показать эквивалетность двух алгоритмов ренормализации, а именно убедиться, что $\mathcal{Z}$-индукция является ускорением $\mathcal{R}$-индукции.

5.4.5 Эквивалентность двух алгоритмов ренормализации

Лемма 69. *Если никакая особая точка отображения сдвигов* 3 *отрезков не попадает в пропуск, то после некоторого конечного числа шагов $\mathcal{R}$-индукции получается такое же отображение сдвигов* 3 *отрезков, как и в результате применения правой $\mathcal{Z}$-индукции.*

Прежде чем доказывать это утверждение, опишем подробнее правую индукцию Рози для неприводимого отображения сдвигов отрезков, у которого пропуск находится в слове w_1 на последнем или предпоследнем месте. Аналогично (используя центральную симметрию) можно описать применение левой индукции для отображений, у которых пропуск оказывается на одном из двух первых мест в w_1. Затем мы покажем, что если выполнены условия леммы 69, применяя $\mathcal{R}$-индукцию , мы обязательно попадаем в одну из этих двух ситуаций. Заметим, что при применении индукции мы обязательно получаем перестановки 5 интервалов сверху (в прообразе) и снизу (в образе) (их мы кодируем словами из w_0 и w_1), но не обязательно эти перестановки отвечают какому-то отображению сдвигов отрезков.

Напомним, что *подстановка* τ - это отображение алфавита $\mathcal{A}$ в множество непустых конечных слов, составленных из букв $\mathcal{A}$, которое естественным образом обобщается до морфизма $\mathcal{A}^*$ с помощью конкатенации: $\tau(WW') = \tau(W)\tau(W')$.

Определение. Рассмотрим неприводимое отображение сдвигов отрезков, у которого каждое из слов w_0 и w_1 состоит из пяти букв. Пусть это отображение имеет единственный пропуск, который находится на одном из двух последних мест в слове w_1. Тогда правую индукцию Рози можно описать следующим образом. Сначала сравним самые крайние правые отрезки прообраза (исходного разбиения) и образа, то есть длины $\lambda_{w_0(5)}$ и $\lambda_{w_1(5)}$. Если длины совпадают: $\lambda_{w_0}(5) = \lambda_{w_1}(5)$, мы, очевидно, имеем дело с вращением. Пусть теперь они отличаются. Тогда более длинный отрезок мы будем называть *победителем*, а более короткий - *проигравшим*. Пусть ϵ равно 0, если победил верхний интервал, и 1, если победитель снизу, тогда $a := w_\epsilon(5)$ - буква, отвечающая победителю, и $b := w_{1-\epsilon}(5)$ - буква, отвечающая проигравшему. Определим подстановку s следующим образом: $a \mapsto a \cdot b$. Тогда *правая индукция Рози* следующим образом меняет комбинаторику отображения сдвигов отрезков, где $\hat{w}$ обозначает слово w после применения индукции:

• если a встречается ровно 1 раз в каждом слове:

$$\hat{w}_\epsilon = w_\epsilon$$
$$\hat{w}_{1-\epsilon} = s\left(w_{1-\epsilon}(1, \ldots, n-1)\right).$$

Заметим, что в этом случае проигравший интервал может быть не покрыт никаким отрезком - образом.

• если a встречается дважды в слове w_0 и выполняется условие

$$\begin{pmatrix} \ldots & & a \\ \ldots & \underline{a} & b \end{pmatrix},$$

то

$$\hat{w}_0 = s\left(w_0\left(1, \ldots, n-1\right)\right)$$
$$\hat{w}_1 = s\left(w_1\left(1, \ldots, n-2\right)\right) \cdot \underline{b}.$$

• если отрезок-победитель - это нижний отрезок, отвечающий пропуску, получается, что исходного отображения сдвигов 3 отрезков была особая точка, которая покрывалась пропуском в образе. Мы уже проверяли, что в этом случае индуцированное отображение - это вращение. Поэтому в этом случае индукция останавливается.

Кроме того, в каждом из первых двух случае индукция Рози следующим образом меняет длины отрезков:

$$\hat{\lambda}_a = \lambda_a - \lambda_b$$
$$\hat{\lambda}_b = \lambda_b.$$

Во всех этих случаях по алгоритму индукции Рози можно построить симплициальную систему, ассоциированную с графом, вершины которого - это перестановки 5 элементов, а ребра размечены буквами - именами проигравших на отвечающем рассматриваемому ребру шаге индукции (ранее в разделе про отображения Бруина-Трубецкого мы, наоборот, отмечали стрелки именами победителей).

Теперь будем доказывать лемму 69, используя введенную нами новую версию индукции 5.4.5.

Доказательство 69. Положим отрезок-носитель $I = [0, 1)$. И для $\mathcal{R}$-индукции, и для $\mathcal{Z}$-индукции можно найти подотрезок отрезка-носителя, такой, что соответствующая индукция - это отображение первого возвращения на этот подотрезок. Пусть $[0, s_r)$ - отрезок, возвращению на который соответствует $\mathcal{R}$-индукция, а $[0, s_z)$ - отрезок, отвечающий $\mathcal{Z}$-индукции. Обозначим через $[0, s_r^{(n)})$ отрезок, который получится после n итераций $\mathcal{R}$-индукции, когда применялась индукция Рози справа. Легко видеть, что $s_z \leq s_r$. Покажем, что для некоторого $n \geq 1$ выполняется $s_z = s_r^{(n)}$.

Пусть J^1, J^2, J^3 - отрезки непрерывности рассматриваемого отображения сдвигов 3 отрезков (то есть разбиение отрезка - носителя), а J_1, J_2, J_3 - их образы. Аналогично, обозначим $\{I^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ отрезки, концами которых являются особые точки (они определяют используемую нами перестановку 5 элементов), а через $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ мы обозначим их образы. Так как никакие особые точки не должны покрываться пропуском, имеем $J_3 = I_\alpha$, для некоторого $\alpha \in \mathcal{A}$, то есть J_3 не распадается на несколько отрезков, когда от отображения сдвигов 3 отрезков мы переходим к

модели с перестановкой 5 отрезков. Поэтому нижнее слово в перестановке 5 отрезков заканчивается на $\underline{\gamma} \cdot \alpha$ с $\alpha, \gamma \in \mathcal{A}$. Сначала рассмотрим случаи, когда нижний отрезок побеждает в $\mathcal{Z}$- индукции: $|J_1| > |J^3|$. В этом случае либо $J^3 = I^\alpha \cup I^\beta$, либо $J^3 = I^\alpha \cup I^\beta \cup I^\gamma$, для некоторого $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$. Поэтому шаг $\mathcal{Z}$-индукции соответствует 2 или 3 шагам $\mathcal{R}$-индукции.

Теперь рассмотрим случай, когда в $\mathcal{Z}$-индукции побеждает верхний отрезок: $|J^3| > |J_1|$. В этой ситуации, s_z - последний образ особой точки перед пропуском. Значит, достаточно проверить, что отрезок-пропуск проиграет после конечного числа шагов $\mathcal{R}$-индукции. Имеем

$$J^3 = I^\alpha \cup I^\gamma \cup I^\beta, \quad J^3 = I^\gamma \cup I^\alpha \quad \text{or} \quad J^3 = I^\alpha \cup I^\gamma$$

и крайний правый нижний отрезок J_1 вместе с пропуском имеет длину $I_{\underline{\gamma}} \cup I_\eta$ где γ - буква, отвечающая пропуску, и все буквы α, β, γ, и η различны. Более того, левый конец (особая точка) отрезка J^3 должна быть слева от точки s_z, поэтому левый конец отрезка I^α или I^γ левее s_z.

При применении $\mathcal{R}$-индукции любой из отрезков, отмеченных буквами α, β, γ и η, может выиграть. Однако, так как соответствующий отрезок в образе находится слева от s_z, число особых точек в $(s_z, 1)$ не вырастет. В этом случае, так как мы находимся в одном из первых двух случаев из определения 5.4.5, наша $\mathcal{R}$-индукция всегда определена и не останавливается, потому что отрезок - пропуск не побеждает. По сути, в первом случае отрезок-пропуск всегда будет отделен от края по крайней мере одним отрезком, а во втором случае индукция корректно определена. После конечного числа шагов, когда победитель встречается в каждом слове ровно один раз, и, возможно, одного шага, когда он встречается дважды, нижний интервал окажется интервалом-пропуском. Тогда, по предположению, верхний отрезок все равно будет длиннее нижнего. Значит, пропуск проиграет и мы получим в точности $s_z = s_r^{(n)}$, как и планировали.

□

Лемма 70. *Для любой бесконечной последовательности корректно определенной левой и правой индукции Рози для отображений сдвигов отрезков каждая буква выигрывает и проигрывает бесконечно много раз.*

Доказательство. Для начала заметим, что если буква не выигрывает бесконечно часто, длина соответствующего ей отрезка ограничена снизу. Поэтому проиграть

такая буква может тоже только конечное число раз. Применяя конечное число раз индукцию Рози справа и слева, мы можем предполагать, что существует множество букв $\mathcal{L}$, которые проигрывают бесконечное количество раз, такое, что никакие другие буквы не выигрывают и не проигрывают. Дополнение к этому множеству мы обозначим $\mathcal{L}^c$.

Мы утверждаем, что все буквы из w_0 и w_1, принадлежащие множеству $\mathcal{L}^c$, составляют одно подслово. Другими словами, для любого $\epsilon \in \{0,1\}$ существует разложение $w_\epsilon = r \cdot v \cdot t$ такое, что v - это слово в алфавите $\mathcal{L}^c$ и r, t принадлежат $\mathcal{L}$. Заметим, что слова r и t могут быть пустыми.

Чтобы доказать наше утверждение, предположим, что существует разложение $r \cdot v_1 \cdot s \cdot v_2 \cdot t$ такое, что v_1, v_2 - это слова, буквы которых принадлежат $\mathcal{L}^c$, а r, s, t - это слова, составленных из букв из множества $\mathcal{L}$, и $|s| > 0$. Так как отрезки вокруг s никогда не проигрывают, отрезки в s тоже никогда не проигрывают. Значит, число букв в s не убывает. По определению $\mathcal{L}$, буквы слова s должны время от времени выигрывать, начиная с некоторого момента. Каждый раз, когда происходит выигрыш буквы слова s, проигравшая буква добавляется к s, поэтому длина s растет. Но мы предполагали, что s содержит конечное число букв, при это его длина сколь угодно долго растет - противоречие.

Покажем теперь, что буквы, которые выигрывают бесконечное число раз, проигрывают также бесконечно часто. В самом деле, пусть буква α выигрывает бесконечно часто, но никогда не проигрывает. Тогда либо I^α, либо I_α находятся с края (с начала или с конца) отрезка I. Эти случаи симметричны, поэтому мы можем предположить, что α находится в начале w_0 или w_1. Тогда второе слово можно представить как $r \cdot \alpha \cdot s$, где r непусто. По предположению, буквы r всегда проигрывают в левой $\mathcal{R}$-индукции букве α. Поэтому длина слова r не растет. . Раз α побеждает, соответствующий отрезок укорачивается. В какой-то момент он станет короче отрезка, соответствующего первой букве слова r и поэтому проиграет ему при применении левой $\mathcal{R}$ - индукции, а мы предположили, что такого не происходит.

Таким образом, мы имеем два слова сверху и снизу с центральной частью, составленной из букв, которые никогда не выигрывают.

Центральная часть w_0 и w_1 инвариантна относительно индукции Рози слева и справа. Так как все остальные отрезки проигрывают бесконечно часто, длины

соответствующих им интервалов стремятся к нулю. Так как эта центральная часть расположена одинаково сверху и снизу, левая и правая индукции Рози остановятся после конечного числа шагов, что противоречит условию теоремы. □

5.4.6 Применение критерия Фужерона

Теперь мы готовы описать ассоциированную с алгоритмом ренормализации симплициальную систему и применить критерий Фужерона.

В качестве индукции победителя - проигравшего возьмем проективизацию правой $\mathcal{R}$-индукции. Ее диаграмма Рози задает граф G, вместе они определяют симплициальную систему. Пусть F - это подграф G, полученный удалением вершин, отвечающих вращениям, и входящих в такие вершины ребер.

Лемма 71. *Симплициальная система, ассоциированная с F, является быстро сбегающей.*

Доказательство. Из работы Фужерона известно, что достаточно проверить, что F является сильно невырожденной. Первая часть определения сильной невырожденной системы следует из 70. Поэтому нам достаточно проверить только вторую часть.

Заметим, что в индукции Рози отрезок-победитель всегда сохраняет свое положение на одном конце отрезка I, на котором действует наше отображение. Пусть $\mathcal{L}$ - множество букв из определения сильно невырожденной системы. Тогда по определению в $F_{\mathcal{L}}$ буква в $\mathcal{L}$ всегда проигрывает любой букве из дополнения $\mathcal{L}^c$. Поэтому, если крайний левый или крайний правый интервал I был помечен буквой из $\mathcal{L}^c$, он останется в том же положении. В частности, если есть хотя бы один отрезок, помеченной буквой из $\mathcal{L}$ на каждой стороне I, то каждая точка соответствующей сильно связной компоненты $F_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет условию первого случая из (2). Отсюда также следует, что число особых точек с хотя бы одним интервалом, имя которого попадает в множество $\mathcal{L}^c$, постоянно для связной компоненты $F_{\mathcal{L}}$.

Если ни один из крайних интервалов I не помечен буквой из $\mathcal{L}^c$, то существует конечный путь на диаграмме Рози, для которого только последнее ребро помечено буквой из $\mathcal{L}^c$. Поэтому существует путь, ребра которого помечены буквами

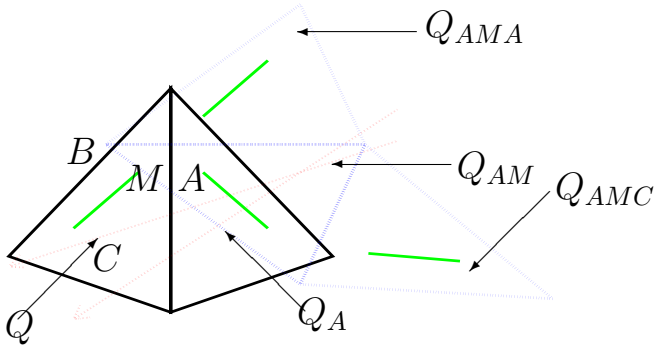


Рис. 5.7: Кодировки непараллельных орбит не совпадают

из $\mathcal{L}$, который выходит из связной компоненты, для которой ни один из крайних интервалов не помечен буквами из $\mathcal{L}^c$. Поэтому выполняется вторая часть утверждения (2). □

Следствие 72. *Множество векторов длин, для которых правая $\mathcal{R}$-индукция не останавливается за конечное время, имеет хаусдорфову размерность строго меньше* 3.

5.5 Доказательство утвеждения о нулевой энтропии бильярдов со шпионскими зеркалами

5.5.1 Предварительные наблюдения

Рассмотрим обратный бильярдный поток (то есть поток, для которого время направлено в прошлое). Построим *отображение развертки* (его также называют отображением *Катка-Землякова*), при котором при соприкосновении бильярдной траектории и граница стола отражается не траектория, а стол, при этом траектория остается прямолинейной. Такую процедуру отражения можно повторять до тех пор, пока траектория не попадет в вершину стола. Будем обозначать копию стола, полученную отражением относительно стороны a, через Q_a.

Напомним обозначение

$$\Omega = \{\vec{x} := (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : T(x_i) = x_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Лемма 73. *Пусть векторы $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ и пусть x_0, y_0 не параллельны. Тогда их обратные кодировки не совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим развертку для направленной в прошлое орбиты (см. рис. 5.7). Напомним, что при таком преобразовании траектория является прямой линией. Предположим, что кодировки орбит этих двух прямых совпадают до некоторого момента. Заметим, что при ударе направленной в прошлое орбиты о шпионское зеркало у точки есть два разных прообраза с разными кодировками, поэтому предположение о совпадении кодировок означает, что выбор этих прообразов [до некоторого момента] совпадает.

Легко видеть, что если x_0, y_0 не параллельны, то прямые асимптотически расходятся, то есть расстояние между ними через достаточное время превысит удвоенный диаметр Q, поэтому их обратные (направленные в прошлое) развертки должны различаться, то есть орбиты должны ударяться в разные компоненты границы, а значит, обратные кодировки не могут совпадать. □

Зададим для каждого $\vec{a} \in \Sigma$ множество $X(\vec{a})$ точек $\vec{x} \in \Omega$, таких, что $\pi(\vec{x_i}) = a_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Это множество непусто и для $\vec{a} \in \Sigma^-$ множество $X(\vec{a})$ состоит из параллельных векторов. Будем называть *полосой* такое множество $S \subset X(\vec{a})$, что множество $\{x_0 : \vec{x} \in S\}$ состоит из параллельных векторов, начальные точки которых образуют интервал. При этом важно, что обратные орбиты всех точек из этого множества несингулярны. При применении процедуры развертки полосы превращаются в настоящие полосы на плоскости. Тогда верно такое

Предложение 74. *Пусть Q - многоугольный стол с конечным числом шпионских зеркал.*

1. *Для любого $a \in \Sigma^-$, не являющегося периодическим, множество $X(\vec{a})$ состоит из единственной точки;*
2. *для любого периодического $a \in \Sigma^-$ множество $X(\vec{a})$ состоит из конечного объединения параллельных полос.*

Доказательство. Начнем с пункта (1), будем доказывать утверждение от противного. Рассмотрим две точки $x, y \in \Omega$ с одинаковой обратной кодировкой $\vec{a}$. Из леммы 73 мы знаем, что x_i и y_i параллельны для всех $i \leq 0$. В отличие от классического бильярда в многоугольнике, для бильярдов с шпионскими зеркалами

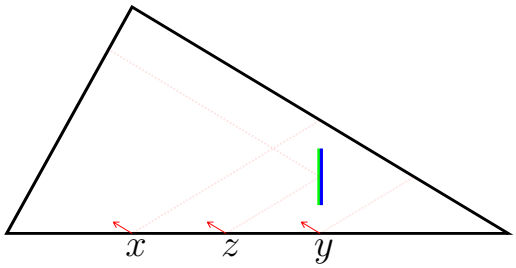


Рис. 5.8: Орбита точки в середине полосы может иметь нестандартную динамику.

возможна ситуация, при которой не все точки между ними имеют одинаковую кодировку (то есть внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми, находятся точки, траектории которых не параллельны этим прямым, потому что попадают в шпионское зеркало). Пример такой ситуации изображен на рисунке 5.8. Для того, чтобы преодолеть эту сложность и воспользоваться аргументом про полосы, аналогичным изложенному в [78] для классических бильярдов в многоугольниках, мы определим вспомогательную динамическую систему - отображение g, которое всегда отображает множество векторов из полосы, для которой стартовая точка принадлежат интервалу (x_{i-1}, y_{i-1}), на множество векторов из полосы со стартовой точкой из интервала (x_i, y_i) для всех $i \leq 0$ (то есть для этой вспомогательной системы все точки между двумя выделенными имеют одинаковую динамику).

Рассмотрим последовательность векторов $\vec{z} = (z_i)_{i\leq 0}$ в середине полосы S и α-предельное множество для $g(\vec{z})$ - его мы обозначим Z. Заметим, что это множество компактно и g^{-1} непрерывна на Z, так как полоса S не содержит вершин. Поэтому по теореме Бирхгофа о рекуррентности множество Z содержит $\vec{x^*}$ – равномерно рекуррентную точку отображения g^{-1}. Выберем последовательность чисел n_i такую, что $g^{-n_i}\vec{z} \to \vec{x^*}$. Обозначим образы полосы S при применении g^{-n_i} через S_i. Заметим, что ширина каждой из S_i не меньше ширины S и при этом последовательность полос S_i сходится к полосе $S(\vec{x^*})$, ширина которой также не меньше ширины S. В центре этой полосы находится точка x^*.

Можно считать (перенумеровав при необходимости стороны), что $\vec{x_0} \in I_1$. Понятно, что $\vec{x_0}$ не может касаться I_1, потому что, если бы такое касание имело место, орбита $\vec{z}$ подходила бы сколь угодно близко к одному из концов отрезка I_1, а значит, полоса S не имела бы положительной ограниченной снизу ширины.

Рассмотрим множество точек $S^\infty(\vec{x})$, у которых обратная динамика для вспомогательного отображения g такая же, как у $\vec{x^*}$. Легко видеть, что $S^\infty(\vec{x})$ – тоже полоса, и эта полоса содержит $S(\vec{x^*})$ (см. рис. 5.9). Левая и правая границы этой полосы - это две прямые; рассмотрим ϵ-окрестности этих прямых и обозначим их через N_ϵ^L и N_ϵ^R, соответственно. Так как точка $\vec{x^*}$ - равномерно рекуррентная, вершины попадают в каждую из этих окрестностей с ограниченными промежутками между попаданиями. Зафиксируем одну из окрестностей (для примера $N_\epsilon = N_\epsilon^L$). При этом выполняется $S_i \to S(\vec{x^*})$. Возможно два случая: либо для всех достаточно больших по модулю i S_i параллельна $S(\vec{x^*})$, либо нет.

Во втором случае множество $N_\epsilon \cap S_i \subset N_\epsilon \cap S$ содержит прямоугольник, у которого ширина равна ϵ, а длина L_i стремится к бесконечности с ростом i. Тогда там обязательно должна быть вершина S. Но мы предполагали, что обратная орбита любой точки $\vec{x} \in S$ несингулярна, то есть у нас может быть только одна точка $\vec{x} \in \Omega$ с апериодической обратной кодировкой $\vec{a}$.

В первом случае для достаточно больших i выполняется, что $S_i \subset S^\infty(\vec{x^*})$. Мы рассматриваем множество точек $S_i^\infty(\vec{z})$, у которых кодировка вспомогательного отображения совпадает с кодировкой $g_{-n_i}\vec{z}$; понятно, что это полоса максимальной ширины, для которой выполняется условие $S_i \subset S_i^\infty$. Так как это полоса максимальной ширины, имеем, что $S_i^\infty = S^\infty(\vec{x^*})$. Но из этого следует, что $\vec{x^*}$ – периодическая точка, а мы предполагали, что ее кодировка $\vec{a}$ не периодическая. Поэтому в этом случае мы тоже получаем, что множество $X(\vec{a})$ состоит из единственной точки.

Переходим ко второй части. Нам задана периодическая $\vec{a} \in \Sigma^-$. По лемме 73 имеем, что $X(\vec{a})$ состоит из параллельных орбит. По определению нашей вспомогательной динамической системы множество $X_{aux}(\vec{a})$ (по отношению к вспомогательной системе) является полосой. Предположим, что период a равен k и что $\vec{x} \in X_{aux}(\vec{a})$. Так как a периодическая, нам известно, что $x_{i-k} = x_i$, то есть $T^k(x_{i-k}) = x_i$ для всех $i \leq 0$. Но так как x_i для всех положительных i - это $T^i(x_0)$, у нас получается, что траектория $\vec{x}$ – k-периодическая. При этом отображение T^k является локальной изометрией, поэтому ширина полосы $X_{aux}(\vec{a})$ строго положительна. Рассмотрим теперь множество $X_{aux}(\vec{a}) \cup T^{-1}X_{aux}(\vec{a}) \cup \cdots \cup T^{-k+1}X_{aux}(\vec{a})$. Так как мы рассматриваем только конечный фрагмент орбиты, отражение относительно зеркал может привести к появлению только конечного числа «дыр» (то

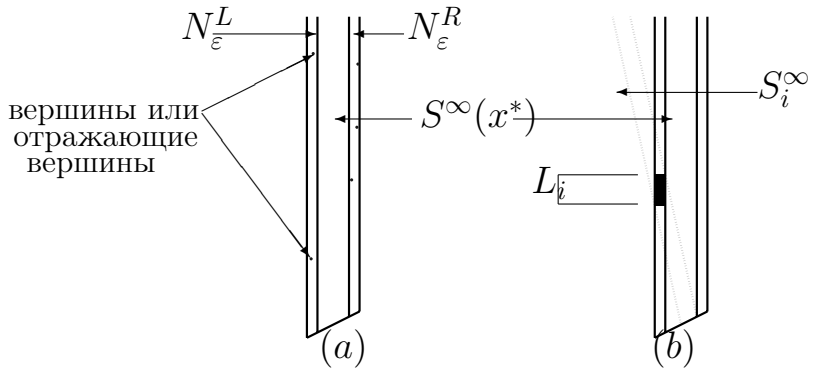


Рис. 5.9: Вершины и рекуррентные точки

есть точек, в которых вспомогательная и реальная динамика не совпадают, см. рис. 5.10). Поэтому множество $X(\vec{a}) \subset X_{aux}(\vec{a})$ является объединением конечного числа полос.

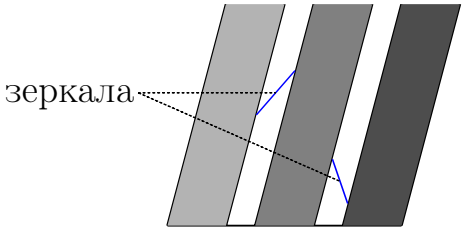


Рис. 5.10: Конечное объединение полос

□

Определим теперь множество $\bar{\Sigma}$ и его границу $\partial\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus \Sigma$ и (аналогично) $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$. Мы можем распространить определение X на $\bar{\Sigma}$ следующим образом: для точки $\vec{a} \in \partial\Sigma$ рассмотрим последовательность $\vec{a}^{(n)} \in \Sigma$, сходящуюся к $\vec{a}$. По этой последовательности построим последовательность $\vec{x}^{(n)} \in X(\vec{a}^{(n)})$. Построенная последовательность имеет предельную точку, потому что множество $\bar{\Sigma}$ замкнуто. Обозначим через $X(\vec{a})$ множество предельных точек этой последовательности. Так как $a \notin \Sigma$, мы знаем, что $\vec{x} \in \partial\Omega$.

Предложение 75. *Если $\vec{x} \in \partial\Omega$, то существует не более чем счетное множество $a \in \partial\Sigma$, для которых $\vec{x} \in X(\vec{a})$.*

Доказательство. Пусть $\vec{x} \in \partial\Omega$. Рассмотрим последовательность $\vec{x}^{(n)} \in \Sigma$, сходящуюся к $\vec{x}$. Пусть $\vec{a}^{(n)}$ – кодировка $\vec{x}^{(n)}$, а $\vec{a}$ - предельная точка последовательности $\vec{a}^{(n)}$. Тогда $\vec{a} \in \partial\Sigma$ и $\vec{x} \in X(\vec{a})$. По предположению в некоторый момент орбита

$\vec{x}$ проходит через вершину. При этом у нее (и, соответственно, у ее кодировки) может быть не более чем $q + 2r$ возможных продолжений, каждое из которых может также спустя какое-то время попасть в вершину. Это может произойти не более чем счетное число раз. □

Рассмотрим отображение Y, которое каждую точку $\vec{x} \in \Omega$ отображает в x_0. Покажем, используя его, что (A, T) является непрерывным фактором (Σ, σ).

Предложение 76. *1.* $\vec{x} \in \Sigma \iff Y(\vec{x}) \in A$;

2. выполнено

$$Y(\sigma\vec{x}) = TY(\vec{x}); \tag{5.3}$$

3. отображение Y непрерывно.

Доказательство. Докажем п. 1. Пусть $x \in \Omega$, тогда $T^n(x_n) = x_0$, потому что $T(x_i) = x_{i+1}$. В обратную сторону: пусть $x_0 \in A$, тогда множество $\{T^{-i}(x_0)\}$ непусто для всех $i \geq 0$. Введем на этом множестве структуру дерева: будем соединять $x_i \in \{T^{-i}(x_0)\}$ стрелкой с $x_{i+1} \in \{T^{-i-1}(x_0)\}$, тогда и только тогда, когда $T(x_i) = x_{i+1}$. Так как множество вершин этого дерева на каждом уровне n непусто, на дереве существует бесконечный путь, который определяет орбиту в прошлом, а орбита в будущем задается $T^i(x_0)$ при $i > 0$. Утверждение п. 2 и п. 3 следует из определения Ω. □

5.5.2 Энтропия эргодических мер

Пользуясь идеями из работы [86], сначала мы проверим, что ничего важного не происходит на границе:

Лемма 77. *Носителем любой эргодической неатомарной мера, инвариантной относительно сдвига, которая определена на $\bar{\Sigma}$, является Σ.*

Доказательство. Предположим, что существует эргодическая мера μ, инвариантная относительно сдвига, такая, что $\mu(\partial\Sigma) > 0$. Определим множества $\Omega_i = \{\vec{x} \in \bar{\Omega} : x_i - - \text{вершина}\}$ и $\Sigma_i = \{\vec{a} : X(\vec{a}) \subset \Omega_i\}$. Понятно, что $\partial\Sigma = \cup\Sigma_i$, поэтому из нашего предположения следует, что $\mu(\partial\Sigma_i) > 0$ для некоторого i. Из эргодичности меры следует, что для почти всякой (по отношению к μ) точки $\vec{a} \in \bar{\Sigma}$ ее орбита попадает в такой Σ_i бесконечное число раз, то есть для любого $x \in X(\vec{a})$

существуют $j < k$, что $\vec{x}_j$ и $\vec{x}_k$ являются вершинами, то есть орбита точки $\vec{x}$ является обобщенной диагональю. Но обобщенных диагоналей всего счетное число и по лемме 76 их поднятий счетное число, так что мера получилась атомарной. □

Теперь мы готовы доказать

Лемма 78. *Для любой эргодической меры μ, носителем которой является Σ, энтропия обнуляется: $h_\mu(\Sigma) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим нулевое разбиение ξ множества Σ и разбиение $\xi^- = \vee_{j=0}^{\infty} \sigma^i \xi$. Каждому элементу P разбиения ξ^- отвечает кодировка в Σ^-, которая может быть или не быть периодической.

Если кодировка периодическая, то мы знаем, что $X(P)$ состоит из объединения конечного числа полос периодических орбит с одинаковой кодировкой в прошлом. Так как кодировка периодическая, совпадение в прошлом гарантирует совпадение в будущем, поэтому P состоит из единственной точки.

Если кодировка непериодическая, то мы уже знаем, что $X(P)$ состоит из одной точки, значит, это верно и для P.

Так как мы проверили, что ξ^- является разбиением на точки, можно применить теорему Рохлина об энтропии ([14]):

$$h_\mu(\Sigma) = h_\mu(\Sigma, \xi) = H(\sigma\xi/\xi^-).$$

□

5.5.3 Доказательство основных утверждений

Сначала докажем теорему 67. Из леммы 78, леммы 77 и вариационного принципа следует, что $h_{top}(\bar{\Sigma}, \sigma) = 0$. Мы знаем, что $h_{top}(\bar{\Omega}, \sigma) \leq h_{top}(\bar{\Sigma}, \sigma)$, потому что (Ω, σ) является непрерывным фактором $(\bar{\Sigma}, \sigma)$. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично, потому что (A, T) - непрерывный фактор (Σ, σ) по предложению 76.

Для того, чтобы доказать теорему 66, нам понадобится еще одно утверждение.

Пусть $f : X \to X$ - некоторое непрерывное отображение компактного топологического пространства X. Пусть $(\bar{X}, f)$ - это обратный предел отображения f.

Неблуждающим множеством $NW(X)$ для такого отображения называется такое множество точек $\{x \in X\}$, что для любой окрестности U точки x существует такое $n \neq 0$, что $f^n U \cap U \neq \emptyset$.

Предложение 79. *Если* $h_{top}(\bar{X}, f) = 0$, *то* $h_{top}(X, f) = 0$.

Доказательство. По теореме Боуэна (Теорема 2.4, [50]) имеем:

$$h_{top}(X, f) = h_{top}(NW(X), f).$$

Пусть $p : \bar{X} \to X$ - проекция, тогда очевидно, что $p \circ f(\vec{x}) = f \circ p(\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in \bar{X}$, поэтому $h_{top}(NW(\bar{X}), f) \geq h_{top}(p(NW(\bar{X})), f)$, поэтому $h_{top}(NW(\Sigma), f) = 0$. Но известно ([20], Теорема 3.5.1), что $p(NW(\bar{X}) = NW(X)$. Поэтому результат следует из упомянутой выше теоремы Боуэна. □

Теорема 66 следует из этого утверждения и теоремы 67.

Глава 6

Системы изометрий

6.1 Определения и гипотезы

Системы изометрий - это еще одно обобщение перекладываний отрезков и отображений сдвигов отрезков. Они были введены в работе Габорье - Левитта - Полана ([77]) как инструмент для доказательства теоремы Рипса о действии конечно порожденной группы на $\mathbb{R}$ - деревьях и впоследствии заново открыты И. Дынниковым ([7]) под названием «системы наложений отрезков» в связи с решением задачи С. П. Новикова о плоских сечениях 3-периодических поверхностей (см. раздел 7).

Определение. Система изометрий S состоит из конечного объединения D компактных отрезков действительной оси (мы будем называть D *мультиотрезком - носителем*)и конечного набора n сохраняющих ориентацию изометрий между компактными подотрезками мультиотрезка-носителя D: $\phi_j : A_j \to B_j$. Эти подотрезки мы будем называть *базами*.

Мы будем преимущественно рассматривать случай, когда D - один отрезок и называть его *отрезком-носителем*. Пример такой системы изображен на рисунке 6.1.

Определим *орбиту* системы изометрий следующим образом. С каждой системой изометрий S мы ассоциируем граф $\Gamma(S)$, вершинами которого будут все точки мультиотрезка-носителя D, а ребром две вершины соединены тогда и только тогда, когда они переходят друг в друга под действием ϕ_i $(i = 1, \cdots, n)$ или обратных к ним (в [76] этот граф называется графом Кэли системы изометрий).

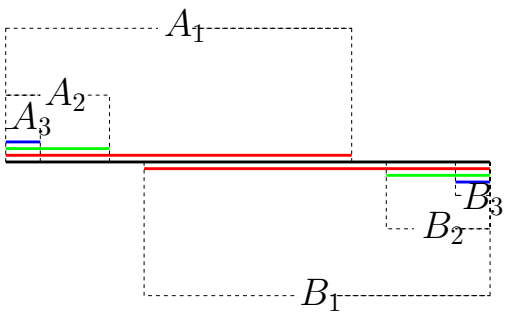


Рис. 6.1: Система изометрий

Связную компоненту такого графа, содержащую точку x, будем обозначать $\Gamma_x(S)$. Система S задает отношение эквивалетности на D – эквивалетными являются точки, лежащие в одной связной компоненте графа $\Gamma(S)$. Множество точек, эквивалентных в этом смысле точке x, будет называться орбитой точки x.

В [7] доказано следующее

Предложение 80. *Если сумма длин баз $|A_i|$ (или $|B_i|$) меньше длины мультиотрезка-носителя D, то для некоторого множества точек $U \subset D$ положительной меры для всех $x \in U$ граф $\Gamma_x(S)$ конечен. Если сумма длин баз $|A_i|$ больше длины мультиотрезка-носителя D, то для всех x из некоторого множества точек $U \subset D$ положительной меры граф $\Gamma_x(S)$ содержит циклы.*

Аналогичное утверждение доказано в [77] в терминах *независимых* порождающих изометрий. Мы будем говорить, что порождающие изометрии ϕ_j *независимы*, если выполнено следующее условие: если действие нетривиального несократимого слова, составленного из $\phi_i^{\pm 1}$ на мультиотрезке-носителе имеет неподвижную точку, то его область определения состоит только из этой точки. В [77] было доказано, что если порождающие изометрии ϕ_j независимы, система изометрий минимальна, только если она является сбалансированной. При этом любую систему изометрий можно заменить эквивалетной ей (с точки зрения поведения орбит), порождающие которой будут независимы (подробнее написано в [76]).

Определение. Сбалансированная система изометрий - система изометрий, для которой сумма отрезков в каждом из наборов баз A_i и B_i равна длине отрезка - носителя.

Перекладывания отрезков - частный случай системы изометрий, для которого каждая точка принадлежит ровно двум базам; такие системы изометрий называются *системами поверхностного типа*. В этом случае чаще всего орбита всюду

плотна и топологически представляет из себя прямую. Однако не всегда орбиты систем изометрий (даже минимальных) устроены именно так.

Наиболее интересный с точки зрения динамики случай - это минимальные системы изометрий, все орбиты которых являются бесконечными деревьями. Такие системы изометрий называются *тонкими* или *экзотическими* и были впервые описаны Ж. Левиттом в работе [98].

Самой важной открытой задачей при изучении систем изометрий является

Гипотеза 6. *Множество параметров, задающих минимальные системы изометрий, орбиты которых - бесконечные деревья, является подмножеством нулевой меры в множестве параметров, задающих сбалансированные системы изометрий, и его хаусдорфова размерность строго меньше* $n-1$*, где* n *- число пар отрезков в системе изометрий.*

В настоящее время эта гипотеза доказана только для одного класса систем изометрий, речь о котором идет в разделе 6.2.

Напомним также конструкцию *ленточного комплекса*, ассоциированного с системой изометрий. Впервые эта конструкция была описана в [77]. Ее можно рассматривать как обобщение конструкции зашнурованных прямоугольников Вича для перекладываний отрезков ([128]).

С каждой системой изометрий мы ассоциируем двумерный комплекс Σ с вертикальным слоением на нем. Сначала рассмотрим объединение отрезка - носителя (на котором слоение задано точками) и непересекающихся прямоугольных полос $A_j \times [0,1]$ (на каждой из них слоение задается как $* \times [0,1]$). Для построения Σ приклеим $A_j \times [0,1]$ к D, склеив точку $(t,0) \in A_j \times 0$ с $(t,0) \in A_j \subset D$ и каждый $(t,1) \in A_j$ с $\phi_j(t) \in B_j \subset D$. Отрезок D мы не будем отличать от его образа в Σ.

Таким образом, у нас получится двумерный комплекс с вертикальным слоением на нем. Такие семейства используются в геометрической теории групп для описания действий свободной группы на $\mathbb{R}$-деревьях (детали написаны в [43]). Пример ленточного комплекса изображен на рисунке 6.2, стрелками показано, какие ленты склеиваются между собой.

Замечание 20. Понятие ленточного комплекса в [43] немного отличается от введенного нами (обобщает его). В [43] для рассматриваемого нами объекта используется термин «объединение лент». Мы будем использовать оба термина.

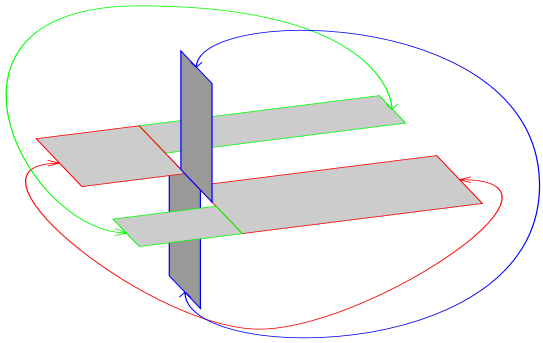


Рис. 6.2: Ленточный комплекс.

6.2 Специальные системы изометрий порядка три

6.2.1 Определение специальных систем изометрий порядка 3

Определение. Система изометрий S называется *специальной*, если выполнены следующие условия:

- носитель D состоит из одного интервала действительной оси, например, $[0, 1]$;
- $n = 3$;
- все A_i начинаются в 0;
- все B_i заканчиваются в 1;
- $\Sigma_{i=1}^{3}|A_i| = 1$, где $|A|$ - это длина A;
- $|A_1| > |A_2| > |A_3|$.

6.2.2 Ренормализация для систем изометрий

Алгоритм ренормализации состоит из двух движений, которые называются *переносом* (справа или слева) и *сокращением* (справа или слева), и впервые был описан в [7]. Оба эти движения переводят системы изометрий в эквивалентные им (с точки зрения поведения орбит), не изменяя числа отрезков. Важно отметить, что перенос влияет только на комбинаторную составляющую (порядок критических точек), в то время сокращение изменяет длины некоторых отрезков, при этом в случае специальной системы изометрий длины отрезков исходной системы выражаются через длины отрезков новой системы с помощью линейного преобразования с неотрицательными коэффициентами. Это преобразование сопряжено

известному в теории многомерных цепных дробей алгоритму, который называется *алгоритмом полного вычитания*. Ренормализация определена только в случае, когда самый длинный из трех отрезков оказывается длиннее отрезка - носителя; если это условие нарушается, у отрезка - носителя возникает часть, не покрытая ни одним из отрезков системы; точки этой части имеют, очевидно, конечные орбиты.

Определим перенос и сокращение для специальных систем изометрий более формально.

Определение. Пусть

$$S = ([0, a+b+c]; [0, a] \leftrightarrow [b+c, a+b+c];$$

$$[0, b] \leftrightarrow [a+c, a+b+c]; [0, c] \leftrightarrow [a+b, a+b+c])$$

– это специальная система изометрий. Значит, по определению два интервала (например, $[a+c, a+b+c]$ и $[a+b, a+b+c]$) содержатся в третьем (в нашем примере это $[b+c, a+b+c]$). Обозначим через $S^{'}$ систему изометрий, полученную из S заменой пары $[0, b] \leftrightarrow [a+c, a+b+c]$ на пару $[0, b] \leftrightarrow [a-b, a]$ и пары $[0, c] \leftrightarrow [a+b, a+b+c]$ на пару $[0, c] \leftrightarrow [a-c, a]$

Будем говорить, что $S^{'}$ получена из S с помощью *переноса справа.*

Перенос слева определяется аналогично.

Замечание 21. Для произвольной системы изометрий отображение переноса определяется аналогично: если заданы две пары отрезков (отрезки в каждой паре имеют равные длины), например, $[a_1, b_1] \leftrightarrow [c_1, d_1]$ и $[a_2, b_2] \leftrightarrow [c_2, d_2]$, и при этом отрезок $[c_1, d_1]$ находится внутри отрезка $[c_2, d_2]$, то после переноса отрезок $[c_1, d_1]$ заменяется на $[c_1', d_1'] = [c_1, d_1] - c_2 + a_2 \subset [a_2, b_2]$.

Определение. Пусть

$$S = ([A, B]\,; [a_1, b_1] \leftrightarrow [c_1, d_1]\,; [a_2, b_2] \leftrightarrow [c_2, d_2]\,; [a_3, b_3] \leftrightarrow [c_3, d_3])$$

– это система изометрий (необязательно специальная) и пусть $d_1 = B$. Будем, как и в случае перекладываний отрезков, называть концы отрезков, на которых определены сдвиги, *особыми точками*. Предположим, что точка B покрыта только одним интервалом из системы изометрий S, а внутренняя часть покрывающего

ее отрезка $[c_1, d_1]$ содержит особую точку. Пусть u - самая правая из таких точек. Тогда весь отрезок $[u, B]$ покрыт единственным отрезков системы изометрий. Замена пары $[a_1, b_1] \leftrightarrow [c_1, d_1]$ на $[a_1, b_1 - d_1 + u] \leftrightarrow [c_1, u]$ в S с одновременным выбрасыванием отрезква $[u, B]$ из отрезка-носителя будет называться а *сокращением справа* (пары $[a_1, b_1] \leftrightarrow [c_1, d_1]$).

Применение ренормализации к специальной системе изометрий порядка 3 показано на рис. 6.3. Один шаг индукции включает в себя перенос и сокращение. Пару отрезков, которые подверглись сокращению, мы будем называть *победителями*, а пару отрезков, которая была перенесена, - *проигравшими* (терминология аналогична введенной ранее для перекладываний отрезков и отображений сдвигов отрезков).

При применении индукции Рози к специальной системе изометрий вектор длин отрезков исходной системы получается умножением одной из следующих матриц на вектор длин новой системы (выбор матрицы определяется неравенствами между длинами отрезков исходной системы):

- Матрица
$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{6.1}$$
- Матрица
$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{6.2}$$
- Матрица
$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

6.2.3 Ускорение индукции

Определим *ускоренную* версию индукции Рози следующим образом. По аналогии с ускорением алгоритма Евклида, когда вместо последовательных вычитаний

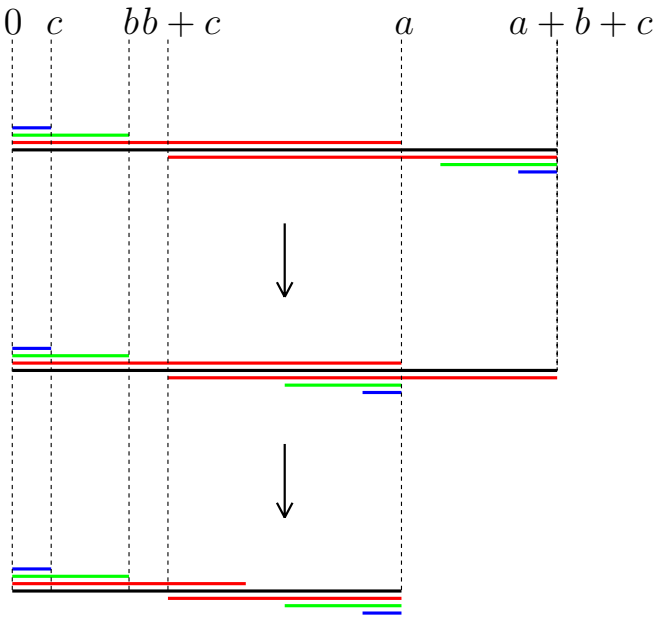


Рис. 6.3: Ренормализация для специальной системы изометрий: перенос отрезков b и c и сокращение отрезка a

можно сразу рассмотреть результат деления с остатком, мы введем понятие *обобщенной итерации* индукции Рози: если для нескольких последовательных шагов индукции победителем остается одна и та же пара отрезков, а отрезки из двух других пар остаются проигравшими и участвуют только в переносах, а не в сокращениях, мы объединяем все такие шаги в один шаг ускоренной индукции и добавляем еще один шаг уже с новым победителем. Такое ускорение для индукции Рози в случае перекладываний отрезков было предложено А. Зоричем в [137]. Матрица одного шага ускоренной индукции Рози $R(n)$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} n & 1 & n \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} n & n & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где n - это число последовательных шагов неускоренной индукции с фиксированным победителем, включенных в один шаг ускоренного алгоритма. Следующее утверждение очевидно:

Лемма 81. *Матрица одного шага ускоренной индукции Рози для специальной системы изометрий задается так:*

$$R(n) = R_1^n \cdot R_2$$

или

$$R(n) = R_1^n \cdot R_3,$$

где n - число итераций индукции Рози, для которых сохраняется один и тот же победитель.

6.2.4 Коцикл

Описанную выше ренормализацию можно применять не только к системе изометрий, но и к ассоциированному с ней ленточному комплексу. Ленточный комплекс для специальной системы изометрий состоит из отрезка-носителя и трех лент, у каждой из которых есть два параметра - горизонтальная длина (она совпадает с длиной соответствующей базы системы изометрий) и вертикальная длина. Пусть матрица R описывает измерения горизонтальных длин при применении ренормализации. Легко видеть, что горизонтальные длины не изменяются при сдвиге и уменьшаются или сохраняются (в зависимости от того, является ли соответствующий отрезок победителем) при сокращении. При этом вертикальные длины изменяются противоположным образом: при сокращении они остаются неизменными, а при сдвиге к длине проигравшего отрезка добавляется длина победителя, в то время как длины всех остальных отрезков (включая победителя) не меняются.

Геометрически, матрица *коцикла* отвечает за изменения вертикальных длин лент при ренормализации.

Формально мы рассмотрим семейство матриц $B(n)$ и определим их следующим образом: если n - число последовательных шагов неускоренного алгоритма ренормализации, таких, что победитель на протяжении всех этих шагов не изменялся, мы обозначим через $B(n)$ следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Если смена победителя произошла, $B(n)$ нужно домножить на матрицу отвечающей смене базиса перестановки. Тогда матрица B_γ, задающая коцикл, определяется как произведение матриц, отвечающих входящим в путь γ на диаграмме Рози ребрам (аналогично мы ранее определяли коцикл, отвечающий многомерной цепной дроби).

6.2.5 Салфетка Рози

Обозначим через Δ стандартный двумерный симплекс и введем в нем барицентрические координаты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\Delta = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3_{\geqslant 0} : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}.$$

Рассмотрим линейные отображения $\mathbb{R}^3_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$, определенные матрицами

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

соответственно, и рассмотрим f_1, f_2, f_3 - соответствующие проективные отображения из Δ в себя:

$$f_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Big(\frac{1}{1+\lambda_2+\lambda_3}, \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_3}, \frac{\lambda_3}{1+\lambda_2+\lambda_3}\Big),$$
$$f_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Big(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1+\lambda_3}, \frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_3}, \frac{\lambda_3}{1+\lambda_1+\lambda_3}\Big),$$
$$f_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Big(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1+\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2}, \frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_2}\Big).$$

Образами $f_1(\Delta)$, $f_2(\Delta)$, $f_3(\Delta)$ будут три треугольника, которые отсекаются от Δ средними линиями.

С каждым словом $i_1 i_2 \dots i_k$, составленном из букв алфавита $\{1, 2, 3\}$, мы ассоциируем $f_{i_1 i_2 \dots i_k}$ - композицию $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}$. В частности, $f_\varnothing = \mathrm{id}$.

Определение. *Салфетка Рози* -это максимальное подмножество $\mathcal{R}_g$ пространства параметров Δ, для которого верно следующее:

$$\mathcal{R}_g = f_1(\mathcal{R}_g) \cup f_2(\mathcal{R}_g) \cup f_3(\mathcal{R}_g). \tag{6.5}$$

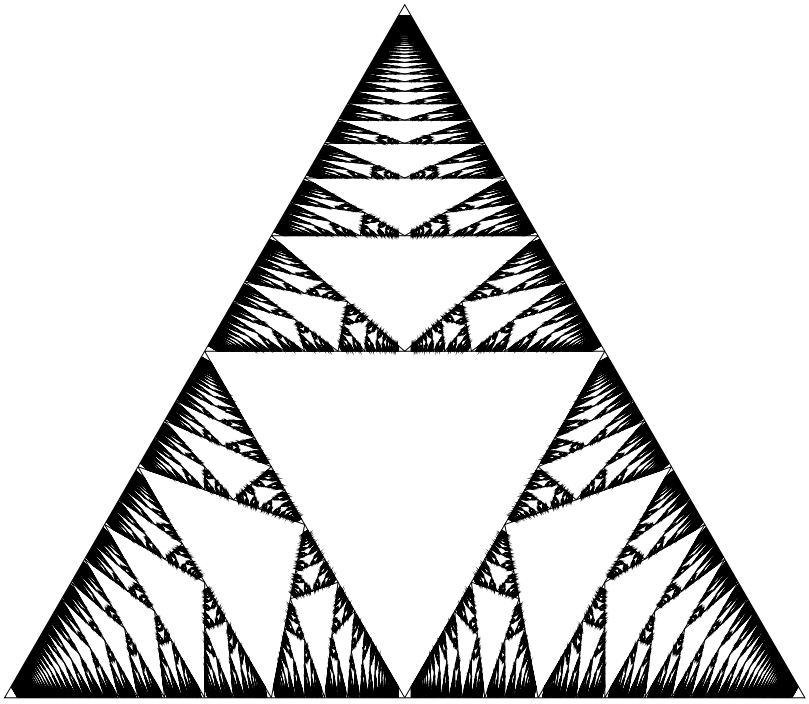


Рис. 6.4: Салфетка Рози.

Другими словами, $\lambda \in \mathcal{R}_g$, если и только если существует бесконечное слово $i_1, \cdots, i_n \in \{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$, такое, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ мы имеем $\lambda \in f_{i_1 \cdots i_k}(\Delta)$. Это слово называется *направляющим* для λ.

Салфетка Рози изображена на рисунке 6.4.

Салфетка Рози была определена в разные годы в символической динамике (как множество, задающее перекладывание отрезков типа Арну - Рози в [25]), в геометрической теории групп (в связи с псевдогруппой вращений в [98]) и в маломерной топологии (как множество, определяющее хаотические режимы в задаче С. П. Новикова в случае симметричной поверхности рода три и двух двойных седел в [63]). В каждом их этих контекстов была доказана ([26], [98], [63])

Теорема 82 (Арну - Староста, Левитт, Де Лео - Дынников)**.** *Мера Лебега Салфетки Рози равна нулю.*

В работе [34] этот результат был уточнен следующим образом:

Теорема 83 (Авила - Юбер - Скрипченко)**.** *Хаусдорфова размерность Салфетки Рози строго меньше 2.*

Замечание 22. Впоследствии этот результат был несколько раз уточнен: сначала Фужероном в [72], а затем М. Поликоттом и Б. Сьюэллом в [113], которые получили наилучшую из известных в настоящее время оценок: 1.74. Эта оценка хорошо согласуется с численными оценками из [63].

Замечание 23. Наилучшая из известных опубликованных оценок снизу принадлежит К. Матеусу и Р. Гутьересу - Ромо ([81]): 1.19. В недавнем препринте [99] оценка была улучшена до $\frac{3}{2}$. Доказательство опирается на равенство хаусдорфовой и аффинной размерности фрактала.

Ключевым ингредиентом доказательства теоремы 83 является следующая очевидная

Лемма 84. *Множество точек, для которых ренормализация никогда не останавливается, совпадает с Салфеткой Рози.*

6.2.6 Схема доказательства теоремы 83

Теорема 83, доказанная в соавторстве, не входит в число результатов, выносимых на защиту, но некоторые из технических утверждений, которые были доказаны в ходе работы над доказательством этой теоремы, были использованы в дальнейшем, в том числе для доказательства выносимых на защиту результатов.

Поэтому мы кратко опишем схему доказательства теоремы 83, в целом совпадающую с последовательностью действий, описанных выше в доказательстве верхней оценки для теоремы 34.

Перечислим коротко основные шаги:

- рассмотрим определенное выше ускорение ренормализации и ассоциированную с ним диаграмму Рози (она подробно описана в разделе 6.3.3 ниже);
- определим проективные меры и условные вероятности в точности как в параграфе 3.6;
- для ускоренной индукции докажем аналог леммы Керхгофа - Леммы 41;
- уточним оценки из Леммы 41 и докажем аналог Теоремы 43;
- в результате получим утверждение, аналогичное 46:

  Теорема 85 (Авила - Скрипченко - Юбер)**.** *Функция крыши имеет экспоненциальный хвост (в смысле определения 3.7).*

Определение функции крыши для случая ренормализации специальных систем изометрий приведено ниже в параграфе 6.5.1.

- заключительная часть доказательства дословно совпадает с изложенным в параграфе 3.8: сначала проверяется, что из наличия экспоненциального хвоста у функции крыши следует условие быстрого распада, а затем применяется оценка из [29].

6.3 Комбинаторика алгоритма ренормализации

6.3.1 Марковское разбиение

Начнем с того, что определим марковское разбиение, отвечающее имеющемуся процессу ренормализации. В случае специальных систем изометрий пространство параметров X - это проективный треугольник с вершинами $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$. Итерация индукции Рози задает следующее разбиение X:

- на нулевом шаге X делится на 4 подсимлпекса:
  - X_1^0 с вершинами $(1:1:0)$, $(1:0:0)$, $(1:0:1)$. Этот подсимлпекс задается неравенством $a > b+c$ и включает две части: $\lambda_1 > \lambda_2+\lambda_3, \lambda_2 > \lambda_3 > 0$ и $\lambda_1 > \lambda_2 + \lambda_3$, $\lambda_3 > \lambda_2 > 0$; будем кодировать первую область $(1,2,3)$ (упорядочивая координаты по длине), тогда вторая будет соответствовать кодировке $(1,3,2)$;
  - X_2^0 с вершинами $(0:1:1)$, $(0:1:0)$, $(1:1:0)$, это отвечает кодировке $(2,1,3)$ и $(2,3,1)$;
  - X_3^0 с вершинами $(1:0:1)$, $(0:0:1)$, $(0:1:1)$, это соответствует кодировкам $(3,1,2)$ и $(3,2,1)$;
  - X_0^0с вершинами $(1:0:1)$, $(0:1:1)$, $(1:1:0)$, эта область - это дыра, в которой останавливается индукция;
- ренормализация индукции задается формулой

$$T : X \to X, T(l) = \frac{R\lambda}{||R\lambda||},$$

где R–это матрица индукции и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ с $sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$.

- после одного шага индукции один из трех подсимплексов (выбор из трех зависит от расположения исходной точки) делится на 4 подсимплекса по той же схеме.

Мы нумеруем шаги (неускоренной) индукции нижним индексом n, а за номер одного из 4 подсимплексов, выбранного на соответствующем шаге, отвечает верхний индекс i : X_n^i – это клетка разбиения с адресом (i, n) (i принимает значения от 0 до 3, а n - любые натуральные). Для доказательства следующей леммы достаточно проверить, что при применении проективного отображения T вершины клеток разбиения X_n^i переходят в вершины клеток разбиения, полученных на предыдущих этапах итерации.

Лемма 86. *T – это марковское отображение, а (X_n^i) – марковское разбиение.*

Разбиение, отвечающее ускоренной индукции, получается из соответствующего неускоренной индукции объединением некоторых клеток. Легко видеть, что оно тоже является марковским.

6.3.2 Диаграмма Рози

Как было отмечено выше, для того, чтобы задать специальную систему изометрий, достаточно зафиксировать вектор $\vec{\lambda}$ из трех длин отрезков. Обозначим длины через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и присвоим соответствующим парам отрезков номера $1, 2, 3$. В зависимости от неравенств между компонентами вектора $\vec{\lambda}$ возможно 6 случаев. Их удобно будет кодировать тройками чисел $1, 2, 3$, расположенных в порядке убывания длин соответствующих отрезков (например, тройка $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ отвечает ситуации $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$). При применении одного шага индукции Рози, описанной выше, может получаться система изометрий, которая кодируется другой (отличной от исходной) тройкой чисел. Будем говорить, что в этом случае новая тройка (отвечающая полученной системе) получается из исходной применением шага индукции Рози. Таким образом, можно построить граф на 6 вершинах, отвечающих тройкам, две вершины которого соединены стрелкой, если вторая тройка может быть получена из первой при применении индукции Рози. Такой граф, по аналогии с перекладываниями отрезков, будем называть *диаграммой Рози*, а тройки иногда будем называть перестановками (тоже по аналогии с перекладываниями отрезков).

Рассмотрим теперь отвечающую ускоренной индукции диаграмму Рози. Добавление ускорения означает, что при каждом шаге ренормализации изменяется кодировка (то есть тройка, описывающая систему изометрий). Соответственно, у диаграммы Рози для ускорения индукции не может быть петель длины 1 (путей из одного ребра, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же вершине). Каждой вершине «ускоренной» диаграммы Рози отвечает клетка марковского разбиения. Эта клетка состоит из счетного числа марковских клеток, отвечающих неускоренной индукции Рози; их можно закодировать парой “тройка+число”, где число отвечает количеству итераций нескоренной индукции, которые входит в одну итерацию ускоренной индукции; при применении индукции каждая из этих клеток, которые соответствуют одной вершине, переходит в клетку с соседним номером, при этом соответствующее отображение, как уже было сказано, является марковским. Тем самым мы определили марковский сдвиг с счетным числом состояний. Отвечающий ему граф Г получается из диаграммы Рози разбиением каждой вершины на счетное число клеток и добавлением направленных ребер между такими клетками.

Диаграмма для ускоренной индукции изображена на рисунке. Стрелки подписаны номерами отрезков-победителей.

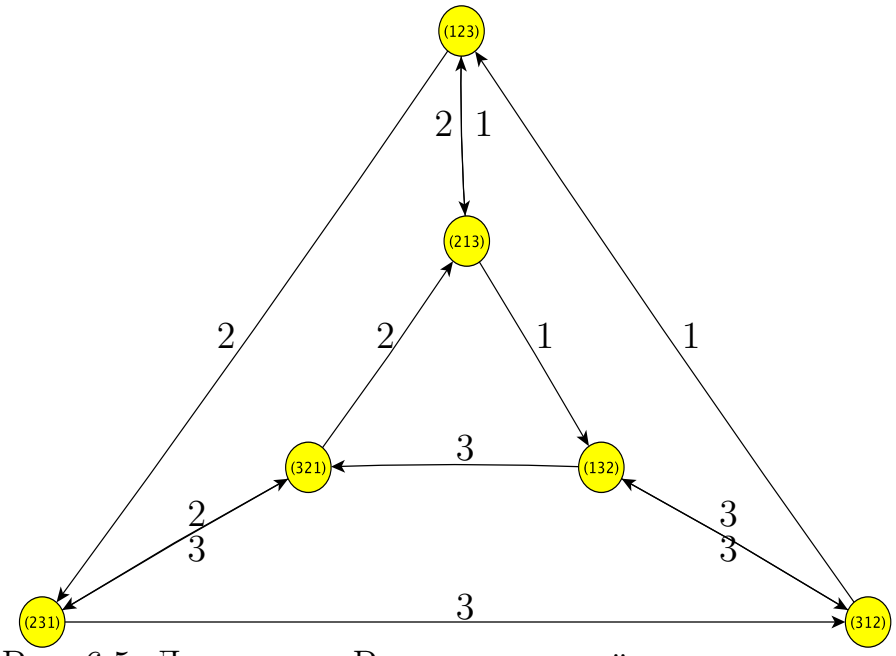


Рис. 6.5: Диаграмма Рози ускоренной индукции для специальных систем изометрий порядка 3.

6.3.3 Комбинаторные свойства марковского сдвига

Про определенный выше марковский сдвиг нам важно знать следующее:

Лемма 87. *Топологический марковский сдвиг, определенный индукцией Рози, является топологически перемешивающим и обладает свойством больших образов и прообразов.*

Доказательство. Утверждение о топологическом перемешивании следует из связности диаграммы Рози, отвечающей индукции без ускорения. Для доказательства свойства BIP нужно выбрать $m = 6$ и i_j так, чтобы все они принадлежали разным вершинам диаграммы Рози для ускоренной индукции. □

6.4 Функция крыши и специальный поток

Как и в случае других обобщений перекладываний отрезков, *функция крыши* - это отображение первого возвращения в подсимплекс Δ, определенный положительным путем γ на диаграмме Рози с началом в тройке π, а именно: зададим путь γ на диаграмме Рози; будем считать, что этот путь *положительный*, то есть матрица отвечающего этому пути коцикла имеет только строго положительные элементы; в множестве параметров (=длин отрезков) есть такое подмножество Δ_γ, для всех точек которого для систем изометрий с соответствующими длинами отрезков применение индукции Рози будет кодироваться в точности путем γ; это подмножество является симплексом и

$$r(\lambda, \pi) = -\log ||(B_\gamma^t)^{-1}\lambda||.$$

Затем определяем специальный поток, который растягивает отрезок, полученный в результате применения алгоритма ренормализации, на единичный интервал. Поток $\Phi(\sigma, r)$ определяется на пространстве $Y = ((\lambda, \tau, t) \in \sigma \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq r(\lambda, \pi))$ и склеивает между собой точки вида $(\lambda, \pi, r(\lambda, \pi))$ и $(\sigma(\lambda, \pi), 0)$. Его действие описывается так:

$$\Phi_t(\lambda, \pi, s) = (\lambda, \pi, t + s)$$

для всех $s + t \in [0, r(\lambda, \pi)]$. В случае перекладываний отрезков построенный аналогично специальный поток, называемый *потоком Вича*, оказывается дискрети-

зацией геодезического потока в пространстве модулей абелевых дифференциалов - потока Тейхмюллера.

6.5 Инвариантная мера, носителем которой является Салфетка Рози

В этом разделе будет доказан один из центральных результатов диссертации.

6.5.1 Формулировка результатов и план доказательства

Мы используем ренормализацию для построения эргодической меры, носителем которой является Салфетка Рози. Эта мера инвариантна относительно нашей ренормализации. Более точно, в [33] доказана следующая

Теорема 88. *Существует и единственна мера максимальной энтропии для специального потока над алгоритмом ренормализации, определяющем Салфетку Рози.*

Замечание 24. Теорема доказана автором диссертации. П. Юберу и А. Авиле принадлежит постановка задачи.

Конструкция инвариантной меры опирается на теории термодинамического формализма для счетных марковских сдвигов. Доказательство приведено в следующих параграфах.

После доказательства утверждения теоремы 88 с помощью формулы Абрамова - Рохлина ([1]) получается мера на Салфетке Рози:

Теорема 89. *Существует вероятностная мера $\mu_{\mathcal{R}}$, носителем которой является Салфетка Рози и которая инвариантна относительно определяющего этот фрактал алгоритма ренормализации.*

Идеи доказательства этой теоремы легли в основу описанного выше подхода Фужерона к построению инвариантных мер в случае марковских многомерных цепных дробей.

6.5.2 Свойства функции крыши

Определение. Пусть W–топологический марковский сдвиг и $\phi : W \to \mathbb{R}$–определенная на нем функция. Тогда *вариации* ϕ задаются формулой

$$var_n(\phi) = \sup\{|\phi(x) - \phi(y)|) : x, y \in W, x_i = y_i, i = 0, \cdots, n-1;\}$$

Определение. Функция ϕ, заданная на топологическом марковском сдвиге W, удовлетворяет *условию Уолтерса*, если для каждого $k \geq 1$

$$\sup[var_{n+k}\phi_n] < \infty$$

и

$$\sup[var_{n+k}\phi_n] \to_{k\to\infty} 0,$$

где ϕ_n - это n-ая эргодическая сумма для функции ϕ.

Определение. Функция ϕ *слабо непрерывна по Гёльдеру* с параметром θ, если найдутся такие $A > 0$ и $\theta \in (0, 1)$, что для всех $n \geq 2$

$$var_n(\phi) < A\theta^n.$$

Определение. Функция ϕ имеет *суммируемые вариации*, если $\sum_{n=2}^{\infty} var_n(\phi) < \infty$.

Лемма 90. *Функция крыши в случае индукции Рози отделена от нуля и слабо непрерывно по Гёльдеру. В частности, она имеет суммируемые вариации и удовлетворяет условию Уолтерса.*

Доказательство. Сначала проверим, что функция крыши отделена от нуля:

$$r(\lambda, \tau) = -\log ||B_\gamma^T \lambda|| = \log ||R\gamma\lambda'|| = \log(\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}\lambda_j') \geq \log(3 \cdot \sum_{j=1}^{3} \lambda_j') = \log 3,$$

потому что γ - положительный путь, а значит, все $\alpha_{ij} > 0$.

Утверждение про свойство Гёльдера следует напрямую из наличия свойства равномерного сжатия у специального ускорения индукции. Проверим это.

Во-первых, функция крыши локально постоянна на клетках марковского разбиения, поэтому можно считать, что она определена на пространстве топологического марковского сдвига. Далее, для любых двух точек x и y из одного и того же

цилиндра глубины n, можно найти векторы λ_x и λ_y такие, что их символическое описание задается x и y соответственно, и

$$r(x) = r(\lambda_x, \tau_x),$$

$$r(y) = r(\lambda_y, \tau_y).$$

Теперь заметим, что каждая из этих точек имеет прообраз ($\lambda_x^{'}$ и $\lambda_y^{'}$ соответственно) по отношению к отображению индукции, так, что

$$\lambda_x = \frac{R\lambda_x^{'}}{||R\lambda_x^{'}||}$$

и

$$\lambda_y = \frac{R\lambda_y^{'}}{||R\lambda_y^{'}||}$$

с одинаковой матрицей ускоренной индукции R, потому что символическая динамика для точек x и y совпадает для n-ого шага включительно.

Используем теперь, что проективизация линейного отображения, заданного матрицей с неотрицательными коэффициентами, является нерасширяющей по отношению к гильбертовой метрике и в случае строго положительных коэффициентов отображение является сильно сжимающим (см. раздел 2.3).

Следовательно, что некоторых $\theta < 1$ верно, что

$$|r(x) - r(y)| = \frac{\log(R_x\lambda_x)}{\log(R_y\lambda_y)} \leq C_2 d_H(\lambda_x, \lambda_y) \leq C_2 C_1 \theta^n,$$

где C_1 и C_2 - равномерные константы. □

6.5.3 Термодинамический формализм

Инвариантная мера, которую мы будем строить, - это *мера Гиббса в смысле Боуэна.*

Определение. *Мера Гиббса* (в смысле Боуэна) для имеющей свойство Уолтерса функции $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ - это инвариантная относительно топологического марковского сдвига σ мера μ, для которой существуют константы $M > 1$ и $P \in \mathbb{R}$ такие, что для любого цилиндра $[a_0, \cdots, a_{n-1}]$ и $n \in \mathbb{R}$ выполнено следующее условие:

$$M^{-1} \leq \frac{\mu[a_0, \cdots, a_{n-1}]}{\exp(\sum_{k=0}^{n-1}(\phi(\sigma^k(x)) - nP)} \leq M \tag{6.6}$$

для $x \in [a_0, \cdots, a_{n-1}]$.

Нам понадобится еще одно обозначение и одно понятие. Пусть n-ая эргодическая сумма для ϕ будет обозначена $\Phi_n(x)$:

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\sigma^k(x)).$$

Тогда

$$Z_m(\phi, i) = \sum_{\sigma^m(x)=x, x_0=i} exp(\Phi_n(x)).$$

Определение. Пусть ϕ –функция с суммируемыми вариациями, а σ–топологически перемешивающий марковский сдвиг. Тогда *давление Гуревича-Сарига* $P_G(\phi) = lim_{m\to\infty} \frac{\log Z_m}{m}$.

Существование меры Гиббса будет следовать из Теоремы 4.9 Сарига ([116]):

Теорема 91 (Сариг)**.** *Пусть σ – топологически перемешивающий марковский сдвиг, а ϕ – обладающая свойством Уолтерса функция. Тогда для ϕ существует мера Гиббса тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *сдвиг σ обладает свойством больших образов и прообразов;*
2. *давление Гуревича конечно: $P_G(\phi) < \infty$;*
3. *ϕ обладает свойством суммируемых вариаций .*

Пусть $x = (\vec{a}, \pi)$ – точка пространства параметров, определим потенциал $\phi(x) = -\kappa r(x)$, где $\kappa > 3$ - некоторая константа.

Проверим выполнение условий 1–3 для имеющегося у нас марковского сдвига и функции $\phi(x)$. Условие 1 следует из леммы 87, условие 3 следует из леммы 90.

Для проверки выполнения условия 2 введем еще одно понятие.

Определение. Оператор Руэлля

$$L_\phi f(x) = \sum_{\sigma(y)=x} e^{\phi(y)} f(y).$$

Замечание 25. Оператор Руэлля также называется оператором переноса.

Докажем важное свойство оператора Руэлля для выбранных нами сдвига и потенциала.

Лемма 92. *Оператор Руэлля является квазикомпактным:*

$$||L_\phi 1|| < \infty. \tag{6.7}$$

Для доказательства этого утверждения нам понадобится пара простых утверждений, связывающих функцию крыши (как отображения первого возвращения) с мерой элементов марковского разбиения, которые мы получаем, применяя ренормализацию в течение заданного времени t. Оба эти утверждения вытекают из того, что $e^{3r(x)} = |DT(x)|$, где T - марковское отображения (этот факт доказан в [34], Лемма 12).

Лемма 93. *Если $r(a) = r(b)$, то $\lambda([a]) = \lambda([b])$, где λ - мера Лебега, а $[a], [b]$ - цилиндры.*

Лемма 94. *Если $|r(a) - r(b)| \leq 1$, то $e^{-3} \leq \frac{\lambda([a])}{\lambda([b])} \leq e^3$.*

Теперь мы хотим оценить $L_\phi 1 = \sum_{a \in S} e^{\phi(a)} = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{s: N \leq r(s) < N+1} e^{\phi(s)}$, где $\phi = -3r$. Легко видеть, что

$$L_\phi 1 \leq \sum_{N=0}^{+\infty} Card(\{a : N \leq r(a) < N+1\}) e^{-3N}.$$

Обозначим $Y(N) = \{a : N \leq r(a) < N+1\}$.

Напомним, что в [34] было доказано, что функция r имеет экспоненциальный хвост: существует положительная константа $\beta > 0$ такая, что $\int e^{r\beta} d\lambda < +\infty$.

Лемма 95. *Существует константа $C > 0$ такая, что $Card(Y(N)) \leq Ce^{(3-\beta)N}$, где β - константа из приведенной выше оценки из определения экспоненциального хвоста.*

Доказательство. Функция крыши локально постоянна на клетках марковского разбиения, поэтому выполнено

$$\int_\Delta e^{r\beta} d\lambda = \sum_{N=0}^{+\infty} \Big(\sum_{a \in Y(N)} \int_{[a]} e^{r\beta} d\lambda \Big) < +\infty, \tag{6.8}$$

а значит, из (6.8) следует, что

$$\sum_{a \in Y(N)} \int_{[a]} e^{r\beta} d\lambda \to 0 (N \to +\infty).$$

Поэтому, начиная с некоторого момента (при $N \geq N_0$) имеем $\sum_{a \in Y(N)} \int_{[a]} e^{r\beta} d\lambda < 1$. Но $\int_{[a]} e^{r\beta} d\lambda \geq \lambda[a] e^{N\beta}$. А кроме того, $\sum_{a \in Y(N)} \lambda([a]) \geq Card(Y(N)) \times e^{-3N-3}$. Поэтому,

$$Card(Y(N)) \times e^{N\beta} \times e^{-3N-3} < 1$$

и утверждение выполнено для $C = e^3$. □

Вернемся теперь к доказательству леммы 92. По предыдущей лемме

$$||L_\phi 1||_\infty \leq C' \sum_{N=0}^{+\infty} C e^{(3-\beta)N} e^{-3N},$$

где C' – некоторая константа. Таким образом, мы оценили норму оператора Руэлля через сумму геометрической прогрессии со знаменателем $e^{-\beta} < 1$. Этот ряд сходится.

Воспользуемся предложением 3.2 из [115], чтобы убедиться, что для топологически перемешивающего сдвига с функцией потенциала, удовлетворяющего условию Уолтерса, из квазикомпактности оператора Руэлля следует конечность давления Гуревича-Сарига.

Таким образом, мы доказали следующую

Теорема 96. *Рассмотрим потенциал $\phi = -\kappa r$, где r – функция крыши и $\kappa > 3$. Тогда для марковского отображения T, определенного на Салфетке Рози, существует инвариантная мера Гиббса с таким потенциалом, и эта мера единственна.*

6.5.4 Доказательство теоремы 88

Прежде, чем доказывать существование и единственность меры максимальной энтропии, докажем аналогичное утверждение для равновесной меры. Напомним определение (см. Определение 4.1 в [115])):

Определение. Пусть X - топологический марковский сдвиг, а σ - отображение левого сдвига, $\beta > 0$, и пусть $U : \sigma \to \mathbb{R}$ - измеримая функция. Инвариантная относительно сдвига вероятностная мера m называется *равновесной мерой* для $\phi = -\beta U$, если

$$h_m(\sigma) + \int \phi dm = \sup\{h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu\}.$$

Теорема 97. *Рассмотрим потенциал $\phi = -\kappa r$, где r - функция крыши. Тогда для марковского отображения T, определенного на салфетке Рози, существует инвариантная равновесная мера и эта мера единственна.*

Доказательство. Из Следствия 2 в [117] следует, что наш потенциал ϕ является положительно рекуррентным (определение положительной рекуррентности приведено в [115], Определение 3.4) и существуют $\lambda > 0, h > 0$ и консервативная борелевская мера ν такие, что выполнены следующие условия:

- $L_\phi h = \lambda h$;
- $L_\phi^* \nu = \lambda \nu$;
- $\int h d\nu < \infty$;
- h отделена от 0 и ∞ и мера ν конечна.

Поэтому равновесная мера существует, а ее единственность следует из [55]. □

Теперь мы переходим к существованию и единственности меры максимальной энтропии. Рассмотрим семейство потенциалов $\phi(\kappa) = -\kappa r$ и значение оператора Руэлля для каждого из потенциалов в точке $f = 1$:

$$L_{\phi(\kappa)} 1(x) = \sum_{y:\sigma(y)=x} e^{-\kappa r(y)}.$$

Нам понадобится следующая техническая

Лемма 98. *При $n \to \infty$ выполнено*

$$\frac{\log L^n_{\phi(\kappa)}(1)(x)}{n} \to P_\kappa.$$

Доказательство. Этот факт следует напрямую из Теоремы 1 в [115]. Более того, из этого результата Сарига мы знаем, что сходимость имеет место для всех κ, но предел может быть равен $+\infty$. В случае $\kappa > 3$ из теоремы 96 следует, что предел ограничен сверху некоторой константой. □

Кроме того, из того, что функция крыши отделена от 0 следует, что $P_\kappa \to -\infty$, когда $\kappa \to \infty$. С другой стороны, $P_0 > 0$ или $P_0 = +\infty$, и в обоих случаях P_κ - это убывающая непрерывная функция κ. Поэтому получается, что

Лемма 99. *Существует значение κ_0, для которого $P_{\kappa_0} = 0$.*

Теорема 100. *Мера Гиббса, которой отвечает значению $\phi = -\kappa_0 r$, является мерой максимальной энтропии для специального потока, и эта мера максимальной энтропии единственна.*

Доказательство. Рассмотрим меру Гиббса, отвечающую потенциалу $\phi_{\kappa_0} = -\kappa_0 r$, и обозначим ее μ_0 (эта мера существует и единственна). Во-первых, заметим, что любая инвариантная мера для специального потока проецируется на инвариантную меру для отображения, по которому он построен, и наоборот (точная формула написана в [2]). Мы хотим доказать, что мера $\hat{\mu}_0$ для специального потока, ассоциированная с мерой μ_0, – это мера максимальной энтропии. Из результатов Сарига известно, что $P_{\kappa_0} = sup_\mu\{h_\mu(\sigma) - \int_X \kappa_0 r d\mu\}$, и μ_0 - это в точность мера, для которой верхняя грань sup достигается. Но в нашем случае $P_{\kappa_0} = 0$. Поэтому,

$$h_{\mu_0}(\sigma) - \int_X \kappa_0 r d\mu_0 = 0$$

и для всех остальных инвариантных мер μ

$$h_\mu(\sigma) - \int_X \kappa_0 r d\mu < 0.$$

Используя формулу Абрамова ([1]), можно увидеть, что $h_{\hat{\mu}_0}(\Phi) = \frac{h_{\mu_0}(\sigma)}{\int_X r d\mu_0} = \kappa_0$ и для любой другой меры $\hat{\mu}$ $h_{\hat{\mu}}(\Phi) < \kappa_0$ (Φ - это обозначение для потока). Единственность следует из [55]. □

6.6 Альтернативная ренормализация: машина Рипса

Известен также альтернативный алгоритм ренормализации для систем изометрий, который в геометрической теории групп описан под названием *машина Рипса*.

Машина Рипса была введена Э. Рипсом в 1991 году в связи с изучением действий групп на $\mathbb{R}$ -деревьях.

Определение. $\mathbb{R}$-*дерево* - это метрическое пространство Y, для которого выполнены следующие условия:

- любые две точки пространства Y соединены единственной *дугой*, целиком лежащей в Y (под дугой мы понимаем путь, являющийся вложением отрезка $[0,1]$ в Y);
- любая такая дуга изометрична отрезку действительной оси.

Известно, что любая группа, действие которой на симплициальном дереве, всегда свободна, но Морган и Шален показали ([111]), что для $\mathbb{R}$-дерева это неверно, потому что фундаментальная группа поверхности, эйлерова характеристика которой строго меньше -1, тоже действует свободно (такие группы называются *группами поверхности*). Рипс доказал, что любая конечно порожденная группа, действующая свободно на $\mathbb{R}$-дереве, является свободным произведением свободных абелевых групп и групп поверхности. Доработанная версия его доказательства изложена в [77]. В частности, как отмечалось выше, там вводится понятие системы изометрий в следующем контексте: если конечно-порожденная группа G с набором порождающих $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ действует на $\mathbb{R}$-дереве Y, то на каждом конечном поддереве $K \subset Y$ каждый γ_i задает изометрию $g_i : K \cap \gamma_i^{-1} K \to \gamma_i K \cap K$, поэтому в случае достаточно большого K для изучения действия G достаточно разобраться со свойствами динамической системы $(K, \{g_i\})$. Заключительный шаг редукции $(K, \{g_i\})$. к системе изометрий S подробно описан в разделе 2 [77]. Обратное тоже верно: имея систему изометрий S, можно сопоставить ей $\mathbb{R}$-дерево со свободным действием группы на нем. Напомним введенное выше понятие ленточного комплекса - это двумерный комплекс Σ с вертикальным слоением $\mathcal{F}$ на нем, при этом две точки отрезка-носителя принадлежат одному слою, если и только если они принадлежат одной орбите системы изометрий. Комплекс Σ имеет гомотопический тип конечного графа, поэтому его фундаментальная группа $\pi_1(\Sigma)$ – это свободная конечно-порожденная группа. Мы обозначим через $\mathcal{L}$ замыкание нормальной продгруппы группы $\pi_1(\Sigma)$, порожденную свободными гомотопическими классами петель, которые содержатся в слоях слоения $\mathcal{F}$. Тогда группа, действие которой на $\mathbb{R}$-дереве следует рассмотреть, это $\pi_1(\Sigma)/\mathcal{L}$.

Машина Рипса действует на ленточный комплекс и позволяет по исходному ленточному комплексу построить новый так, что действие группы на соответствующем $\mathbb{R}$-дереве не изменится. При этом система изометрий под действием машины Рипса также переходит в эквивалентную с точки зрения поведения орбит систему, но число отрезков может изменяться.

Машина Рипса включает в себя 6 движений:

- добавление двумерной клетки (M0) (заклеивание петель);
- добавление кольца (M1) (лента, у которой два основания совпадают, приклеивается к одному из ребер);
- расщепление ленты на две (M2) (лента разрезается по вертикальному слою на две и между ними вклеивается двумерная клетка);
- расщепление точки, являющейся граничной для трех лент (M3) (если есть точка, в которой сходятся три ленты, и она не является внутренней ни для одной из них, эти ленты можно развести, разделив точки на три разные);
- сдвиг (M4):
- сокращение свободной дуги (M5).

Эти движения представляют собой геометрическую версию преобразований Маканина-Разборова.

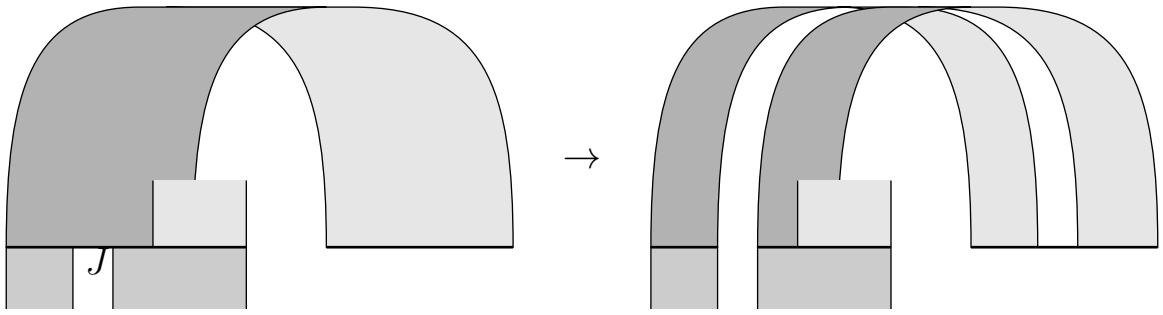


Рис. 6.6: Сокращение свободной дуги

Среди движений машины Рипса наиболее значимым для нас является *сокращение свободной дуги* (формальное определение приведено в [77] и в [43]), потому что системы изометрий тонкого типа определяются как те, для которых процесс сокращения свободной дуги не останавливается ([43], Предложение 8.13). Более точно, применение машины Рипса состоит из нескольких процессов, каждый из которых представляет собой набор движений.

- процесс 0: применение движений M0-M3 для устранения особенностей;
- процесс 1: применение движения M5 до тех пор, пока есть свободные дуги; если свободных дуг нет, то переходим к процессу 2;
- процесс 2: последовательное использование M4 (после которого свободные дуги образуются) и M5.

Рипс показал, что бесконечное число раз может применяться только один из процессов, при этом случай, когда применялся процесс 1, отвечает системе изометрий тонкого типа, а в случае, когда бесконечное число раз был применен процесс 2, система изометрий и ассоциированный ленточный комплекс имеют либо *поверхностный* тип (то есть система изометрий сводится к перекладыванию отрезков, а слоение - к ориентируемому измеримому слоению на поверхности), либо *торический* тип (слоение представляет собой обмотку многомерного тора).

6.7 Число топологических концов орбит систем изометрий тонкого типа

С использованием машины Рипса Габорье ([76]) доказал, что в случае тонкого типа орбиты являются деревьями с конечным числом концов, причем почти все они имеют 1 или 2 топологических конца. Под деревом с 1 топологическим концом мы понимаем локально компактный граф, полученный из луча добавлением бесконечного числа конечных деревьев, которые могут не иметь равномерной границы для своих диаметров; 2 топологических конца у дерева означают замену слова «луч» на слово «прямая». Мы строим конкретные пример, в которых почти все орбиты имеют либо ровно 1, либо ровно 2 топологических конца. В [123] была доказана сформулированная выше теорема 10:

Теорема 101. *Существует система изометрий тонкого типа, почти все орбиты которой имеют ровно 1 топологический конец.*

Замечание 26. В [66] этот результат был усилен: показано, что почти все орбиты самоподобных систем изометрий имеют ровно один топологический конец. Под самоподобием мы понимаем следующее свойство: в результате применения ренормализации получается сжатая версия исходной системы. При этом, как показано в [66], это свойство не зависит от выбора ренормализации (самоподобные с точки зрения машины Рипса системы также являются самоподобными с точки зрения индукции Рози, и наоборот).

Выше мы также формулировали теорему 11:

Теорема 102. *Существуют тонкие системы изометрий, почти все орбиты которых имеют два топологических конца.*

Обе теоремы 10 и 11 были доказаны с помощью анализа эргодических свойств машины Рипса как алгоритма ренормализации. Их доказательство изложено в следующих двух разделах.

6.8 Доказательство теоремы 10

Доказательство этой теоремы состоит из двух этапов. Сначала предъявляются примеры системы изометрий, для которых проверяется, что они принадлежат к тонкому типу. Эти примеры построены по следующему принципу: они являются самоподобными, то есть после конечного числа шагов индукции Рози получается сжатая версия исходной системы. Затем к каждому из этих примеров применяется машина Рипса; показывается, что после нескольких первых шагов алгоритма вновь получается самоподобный ленточный комплекс – после конечного числа итераций процесса 1 получается сжатая версия того же комплекса. При этом за изменения горизонтальных и вертикальных длин лент отвечают две разные матрицы (горизонтальные длины уменьшаются, в то время как вертикальные длины увеличиваются за счет применения преобразования длинной ленты). Если A - матрица, отвечающая за изменения горизонтальных длин лент в цикле машины Рипса, то матрица A^{-1} имеет строго положительные коэффициенты; ее старшее собственное значение, которое определено по теореме Перрона-Фробениуса, удовлетворяет условию $\lambda > 1$. Аналогично можно определить μ - старшее собственное значение отвечающей за изменения вертикальных длин матрицы B. При этом $\lambda\mu < 1$ (это можно проверить непосредственным вычислением или вывести из того, что общая площадь лент при применении Процесса 1 уменьшается). Обозначим последовательность ленточных комплексов, которые возникают после применения k-ый раз цикла машины Рипса, через Y_k; тогда, если $C(Y) = \cap_n Y_n$, то хаусдорфова размерность $C(Y)$ равна $1+\frac{\log\mu}{\log\lambda} \in (1,2)$, поэтому объединение листов слоения F_Y, определенного на исходном ленточном комплексе Y, которые пересекают $C(Y)$, имеет нулевую меру, поэтому почти все листы имеют ровно один топологический конец.

Рассмотрим конкретный пример реализации этой стратегии. Система изометрий, которая будет изучаться, была построена в [122] в качестве первого примера системы изометрий тонкого типа с центральной симметрией.

Пусть

$$N_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что у этой матрицы есть единственное действительное собственное число $\lambda_1 : 0 < \lambda_1 < 1$. Рассмотрим отвечающий этому собственному числу собственный вектор $v_1 = (a_1, b_1, c_1, u_1)$ с нормировочным условием $a_1 + b_1 + c_1 = 1$. Тогда верно следующее

Предложение 103. *Рассмотрим следующую систему изометрий*

$$\begin{aligned} S_1 : [0, a_1] &\leftrightarrow [b_1 + c_1, a_1 + b_1 + c_1]; \\ [0, b_1] &\leftrightarrow [a_1 + c_1, a_1 + b_1 + c_1]; \\ [c_1, c_1 + u_1] &\leftrightarrow [a_1 + b_1 - u_1, a_1 + b_1 + c_1 - u_1]. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Тогда эта система изометрий S_1 - тонкого типа, и почти все графы Γ_x имеют ровно 1 топологический конец.

Доказательство. Начнем с того, что выразим компоненты вектора v_1 через λ_1. Легко видеть, что

$$a_1 = 2\lambda_1 - \lambda_1^2;$$

$$b_1 = \lambda_1;$$

$$c_1 = \lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 1;$$

$$u_1 = \frac{\lambda_1^3}{4} - 3\frac{\lambda_1^2}{2} + 5\frac{\lambda_1}{2} - \frac{1}{4}.$$

После 4 итераций машины Рипса мы получим ленточный комплекс X, состоящий из трех лент, при этом параметры отвечающей ему системы изометрий выражаются через длины отрезков S_1 следующим образом:

$$a' = -4a_1 + 4b_1 + c_1 + 2u_1;$$

$$b' = -a_1 + 2b_1;$$

$$c' = 2a_1 - c_1 - 2u_1;$$

$$u' = -a_1 + 3b_1 - u_1.$$

Эти 4 итерации изображены на рис. 6.7. В результате следующего применения машины Рипса из ленточного комплекса X мы получим ленточный комплекс Y, у которого две компоненты связности отрезка - носителя и четыре ленты. Обозначим горизонтальные длины этих лент (то есть длины отрезков, входящих в соответствующую систему изометрий) через r_1 и r_2 для двух красных лент (слева направо), g для зеленой ленты и b для синей ленты. Длину отрезка - носителя между двумя красными лентами обозначим через h. Вертикальные длины этих лент будем обозначать так: l_1 и l_2 для двух красных лент, l_3 для зеленой ленты и l_4 для синей ленты. Легко вычислить, что $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, $l_3 = 5$, $l_4 = 5$ и

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ h \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ u' \end{pmatrix}.$$

Можно выразить горизонтальные длины лент комплекса Y через λ_1:

$$r_1 = \lambda_1^3;$$

$$r_2 = -2\lambda_1^3 + 5\lambda_1^2 - 5\lambda_1 + 1;$$

$$h = \lambda_1^3/4 - 3\lambda_1^2 + 3\lambda_1/2 - 1/4;$$

$$g = \lambda_1^2;$$

$$b = -\lambda_1^3 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 + 1/2.$$

Соответствующую Y систему изометрий обозначим S_Y.

Теперь проверяем, что после 6 следующих итераций машины Рипса получится комплекс Y' и отвечающая ему система изометрий S'_Y, подобная S_Y, у которой длина каждого отрезка будет умножена на λ_1^2 (см. рис. 6.8). Для этого заметим, что комбинаторика (порядок особых точек) систем изометрий S_Y и S'_Y совпадает,

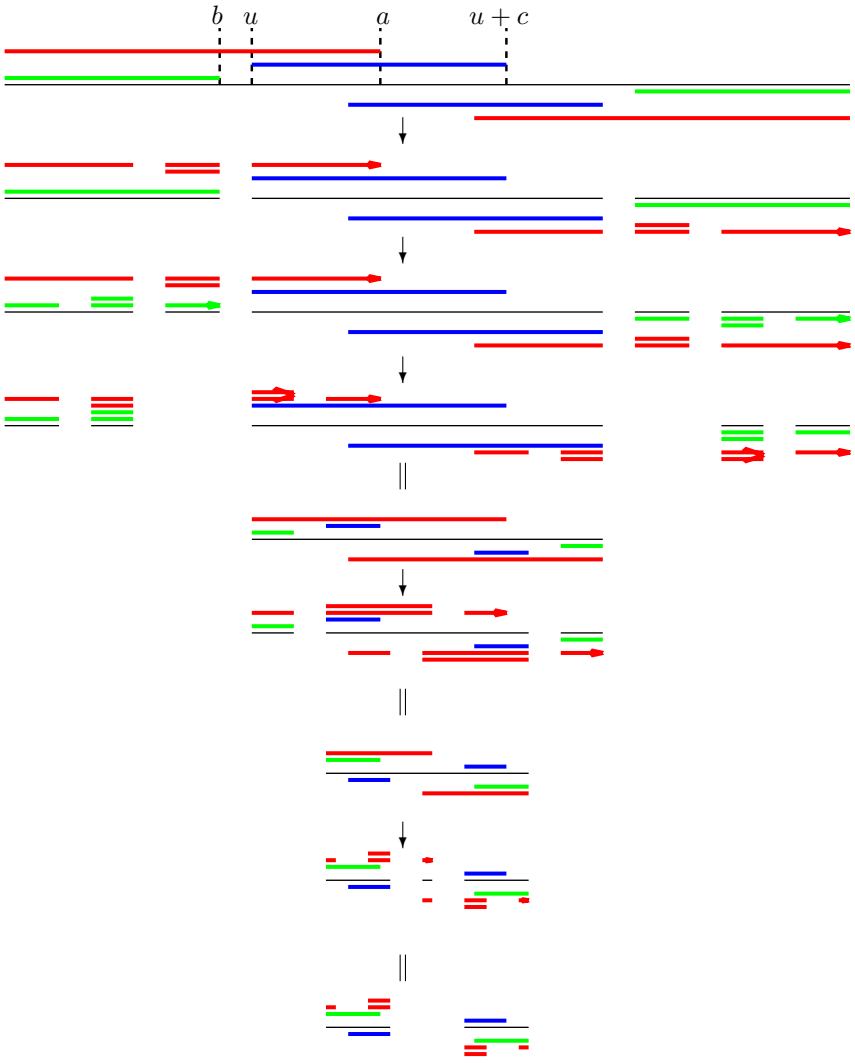


Рис. 6.7: Первые шаги применения машины Рипса

а длины отрезков связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ h' \\ g' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ h \\ g \\ b \end{pmatrix}.$$

Теперь вспомним, что λ_1 - это собственное значение матрицы N_1, а значит, корень ее характеристического многочлена, поэтому:

$$\lambda_1{}^4 - \lambda_1{}^3 - 4\lambda_1{}^2 + 5\lambda_1 - 1 = 0.$$

Вычисляем (r_1', r_2', h', g', b') через λ_1 и видим, что

$$r_1' = 5\lambda_1^3 - \lambda_1^2 - 4\lambda_1 + 1 = r_1\lambda_1^2.$$

$$r_2' = -10\lambda_1^3 + 23\lambda_1^2 - 17\lambda_1 + 3 = r_2\lambda_1^2.$$
$$h = \frac{5}{4}\lambda_1^3 - \frac{13}{2}\lambda_1^2 + \frac{13}{2}\lambda_1 - \frac{5}{4} = h\lambda_1^2.$$
$$g = \lambda_1^3 + 4\lambda_1^2 - 5\lambda_1 + 1 = g\lambda_1^2.$$
$$b = \frac{-7}{2}\lambda_1^3 + 5\lambda_1^2 - 3\lambda_1 + \frac{1}{2} = b\lambda_1^2.$$

При этом вертикальные длины лент комплексов Y и Y' связаны так:

$$\begin{pmatrix} l_1' \\ l_2' \\ l_3' \\ l_4' \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix},$$

где

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Остается сравнить λ_1^2 со старшим собственным числом λ_L матрицы L_1 и убедиться, что $\lambda_L\lambda_1^2 < 1$. □

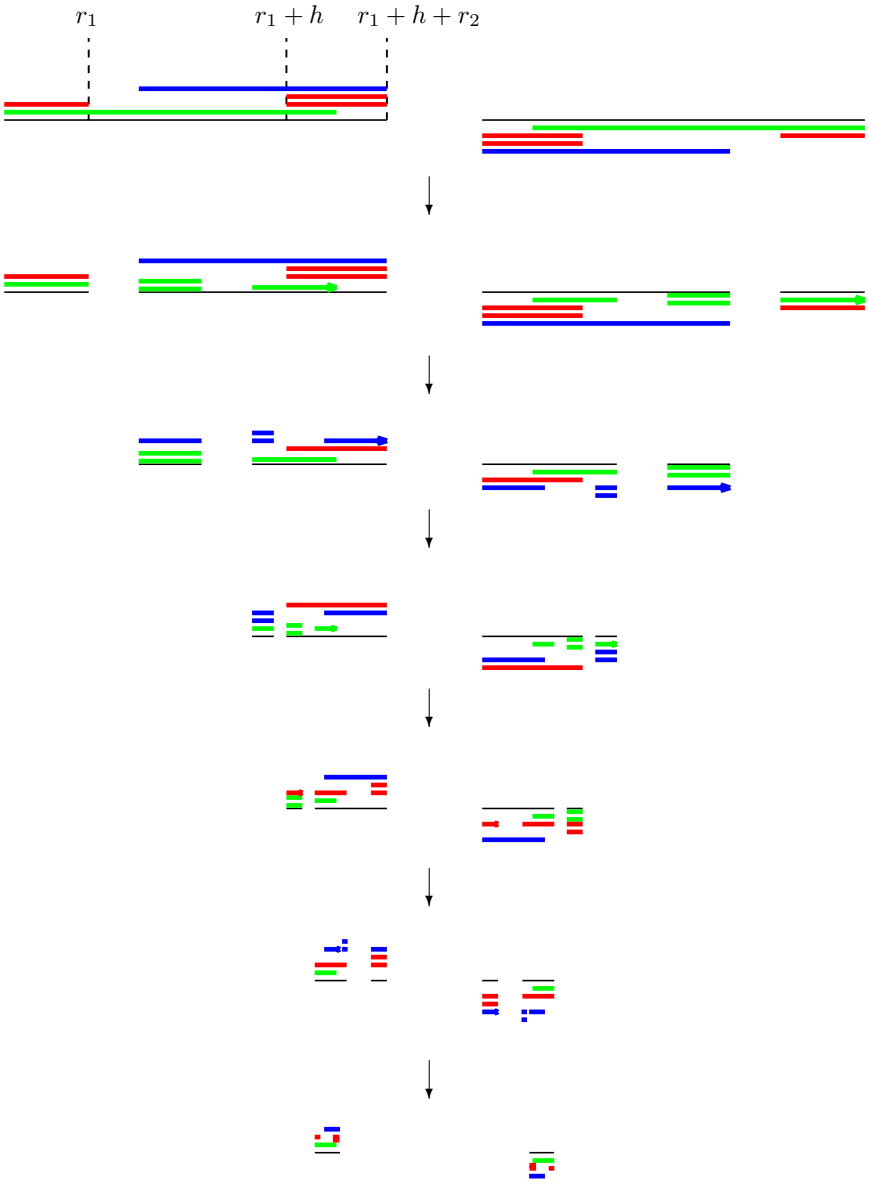


Рис. 6.8: Цикл машины Рипса

6.9 Доказательство теоремы 11

Начнем с нескольких технических определений, в частности, определим формально ранее использованное понятие *ленты*.

Лентой называется (возможно, вырожденный) прямоугольник $B = [a, b] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, $a \leqslant b$, снабженный 1-формой dx, где x – первая координата на $\mathbb{R}^2$. Горизонтальные стороны $[a, b] \times \{0\}$ и $[a, b] \times \{1\}$ называются *базами* ленты, любая дуга вида $\{c\} \times [0, 1]$, где $c \in [a, b]$, называется *вертикальной дугой*. Лента называется *вырожденной,* если $a = b$. Значение $(b-a)$называется *шириной* ленты и обозначается $|B|$.

Напомним еще одно ранее введенное понятие. *Объединение лент* (или ленточный комплекс) - это двумерный комплекс X с заданной замкнутой 1-формой ω, который строится следующим образом: рассмотрим объединение D попарно непересекающихся замкнутых (возможно, вырожденных) интервалов действительной прямой $\mathbb{R}$ (оно называется *мульти-интервалом - носителем для комплекса* X), и нескольких попарно непересекающихся лент $B_i = [a_i, b_i] \times [0, 1]$; приклеим каждую базу каждой ленты изометрично и с сохранением ориентации к мульти-отрезку D. Форма ω - это такая форма, которая получается ограничением dx на соответствующую ленту, поэтому мы будем обозначать ее dx.

Ленточный комплекс называется *невырожденным*, если он не содержит вырожденную ленту или изолированную точку. *Внутренняя часть* объединения лент X - это объединение лент, полученное из X удалением всех вырожденных лент и изолированных точек D.

Вертикальная сторона невырожденной ленты в X называется *вертикальным ребром* X. Вертикальное ребро $\{a\} \times [0, 1]$ ленты $[a, b] \times [0, 1]$ –это *левое ребро* X, а $\{b\} \times [0, 1]$ – *правое ребро* X.

Для объединения лент X обозначим через $|X|$ сумму ширин всех лент, входящих в X . Для мульти-отрезка $D \subset \mathbb{R}$ мы обозначим через $|D|$ сумму длин всех входящих в D отрезков. Разница $|X|-|D|$ называется *избытком* X и обозначается $\mathrm{ex}(X)$.

Пусть Y_1 и Y_2 - объединения лент с мульти-отрезками - носителями D_1 и D_2, соответственно. Скажем, что они *изоморфны,* если существует гомеоморфизм $f : Y_1 \to Y_2$ такой, что выполняется $f^*(dx) = dx$. Если, кроме того, Y_1 имеет

минимальное возможное число лент среди всех объединений лент, изоморфных Y_2, и выполнено $f(D_1) \subset D_2$, то образ $f(B)$ любой ленты B из объединения Y_1 называется *длинной лентой* Y_2.

Легко видеть, что для изоморфных объединений лент выполнено Y_1, Y_2 $\mathrm{ex}(Y_1) = \mathrm{ex}(Y_2)$.

Усиленное объединение лент - это объединение лент Y, для которого каждой ленте поставлено в соответствие неотрицательное действительное число - длина ленты. Лента ширины w и длины ℓ имеет *размер* $w \times \ell$. Подразумевается, что хотя бы одна из длин отлична от нуля. *Длина длинной ленты* B определяется как сумма длин входящих в B лент. Два усиленных объединения лент *изоморфны,* если они изоморфны как объединения лент и их длинные дуги имеют одинаковые длины.

Мы хотим доказать следующее утверждение.

Теорема 104. *Существует более чем счетное множество объединений лент Y тонкого типа таких, что объединение слоев с двумя топологическими концами образуют множество полной меры в Y.*

Эта теорема будет следовать из Предложения 107 ниже.

Мы будем использовать обозначения $\overrightarrow{\ell}$, $\overrightarrow{\ell'}$, $\overrightarrow{\ell_k}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w'}$ и $\overrightarrow{w_k}$ для

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ell'_1 & \ell'_2 & \ell'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ell_{k1} & \ell_{k2} & \ell_{k3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \\ w'_4 \\ w'_5 \end{pmatrix}, \text{ и } \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ w_{3k} \\ w_{4k} \\ w_{5k} \end{pmatrix},$$

соответственно. Все коэффициенты в строках и столбцах будут положительными действительными числами.

Пусть $Z = Z(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\ell})$ Этот комплекс состоит из 4 лент B_1, B_2, B_3, и B_4 следующих размеров: $w_1 \times \ell_1$, $(w_2 + w_3) \times \ell_2$, $(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5) \times \ell_3$, и $(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5) \times \ell_1$, соответственно

Определим теперь:

$$A(m,n) = \begin{pmatrix} m+3 & m+3 & (m+3)(n+1)-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m+2 & m+1 & (m+2)(n+1) \end{pmatrix},$$

$$B(m,n) = \begin{pmatrix} n+3 & 2n+5 & 2n+6 & n+3 & n+3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+2 & 2n+4 & 2n+5 & n+2 & n+2 \\ m(n+5) & m(2n+9)-1 & 2m(n+5)-1 & m(n+5) & m(n+4) \end{pmatrix}.$$

Обозначим: $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Лемма 105. *Пусть* $\overrightarrow{\ell}, \overrightarrow{\ell'} \in (\mathbb{R}_+)^3$, $\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'} \in (\mathbb{R}_+)^5$ *связаны следующим образом:*

$$\overrightarrow{\ell}\, A(m,n) = \overrightarrow{\ell'}, \quad \overrightarrow{w} = B(m,n)\overrightarrow{w'},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$. *Тогда усиленное объединение лент* $Z(\overrightarrow{w'}, \overrightarrow{\ell'})$ *изоморфно одному из комплексов, полученных из* $Z(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\ell})$ *с помощью нескольких сокращений свободной дуги.*

Доказательство. Нужные нам сокращения свободной дуги изображены на рис. 6.9 и 6.10. $Z(\overrightarrow{w'}, \overrightarrow{\ell'})$ получается из $Z(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\ell})$ в два этапа. На верхнем рисунке Fig. 6.9, показано, что осталось от $Z(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\ell})$ после первого этапа, на нижнем изображено полученное объединение лент после упрощения. Рис. 6.10 показывает, что сокращается во время второго этапа. Полученное объединение лент изоморфно $Z(\overrightarrow{w'}, \overrightarrow{\ell'})$.

Фрагменты рисунков, помеченные '$\times m$' и'$\times n$', должны быть повторены m и n раз, соответственно. Верхние и нижние линии на каждом рисунке надо склеить. □

Лемма 106. *Пусть* $m_0, m_1, m_2, \ldots$, $n_0, n_1, n_2, \ldots$ *будут произвольными последовательностями натуральных чисел. Тогда существует бесконечная последовательность* $\overrightarrow{w_0}, \overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \ldots$ *точек из* $(\mathbb{R}_+)^5$ *таких, что*

$$\overrightarrow{w_k} = B(m_k, n_k)\overrightarrow{w_{k+1}}.$$

Эта последовательность единственна с точностью до ренормализующей константы.

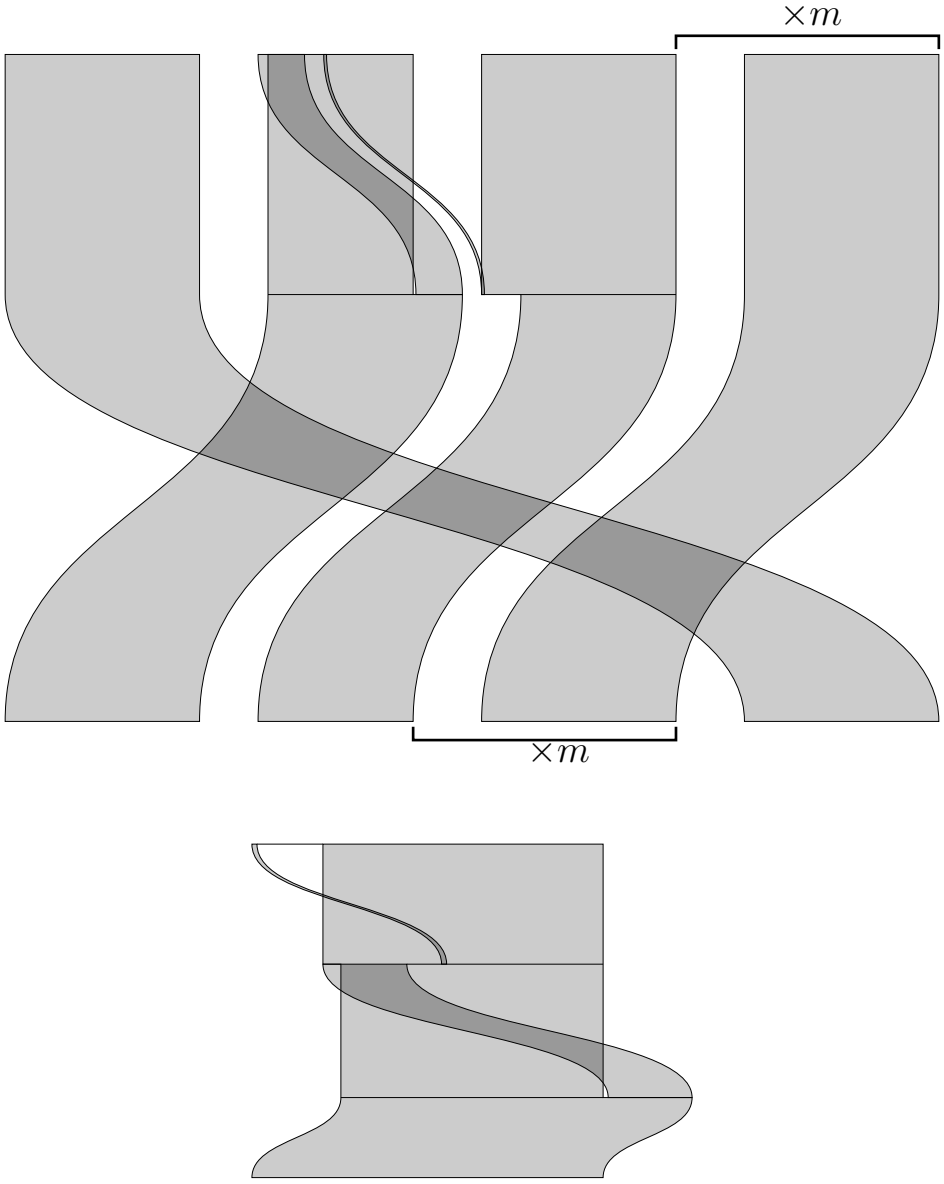


Рис. 6.9: Применение машины Рипса к $Z(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\ell})$, первый этап

Доказательство. Обозначим через S^{r-1} единичную сферу в $\mathbb{R}^r$. Тогда для $r \times r$-матрицы B с неотрицательными коэффициентами, определим отображение η_B из множества $S^{r-1} \cap \mathbb{R}^r_+$ в себя с помощью формулы

$$\eta_B(v) = \frac{Bv}{|Bv|}.$$

(мы используем стандартную евклидову метрику в $\mathbb{R}^r$.)

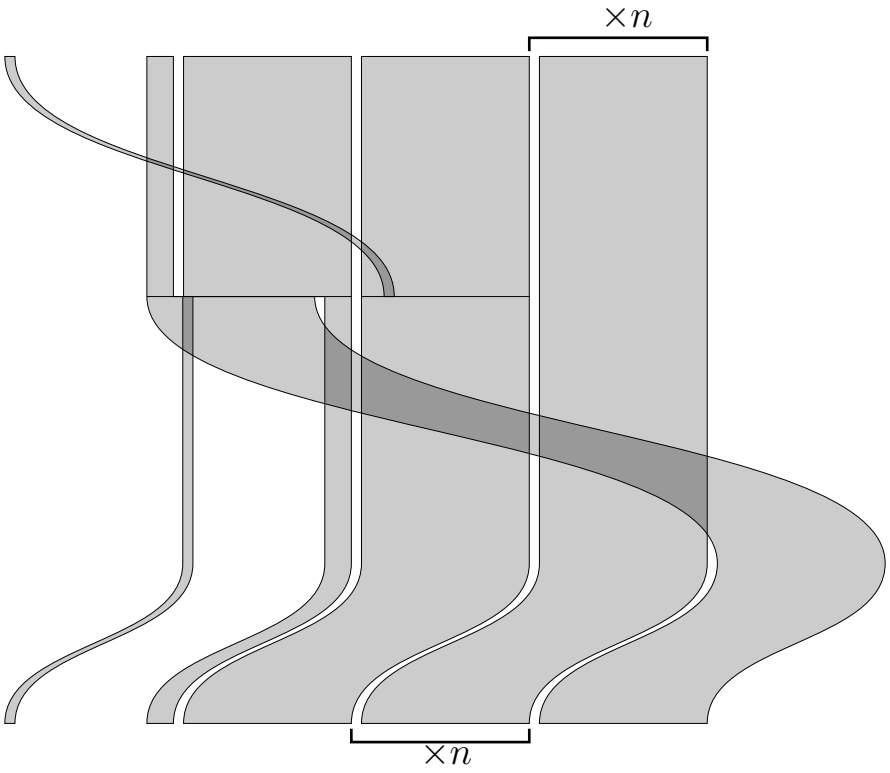


Рис. 6.10: Применение машины Рипса к $Z(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\ell})$, второй этап

Легко видеть, что $B(m,n) = B'(m,n) \cdot B''$, где

$$B'(m,n) = \begin{pmatrix} n+1 & n & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & n & 0 & 1 & 0 \\ m(n+1) & m(n+1)-1 & m & m & m \end{pmatrix}, \quad B'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отображение $\eta_{B'(m,n)}$ является нерасширяющим для любого $m, n \geqslant 1$, отображение $\eta_{B''}$ является сжатием. Следовательно, $\eta_{B(m,n)}$ - это сжатие с коэффициентом сжатия не меньше чем у $\eta_{B''}$. Поэтому, можно определить

$$\overrightarrow{w_0} = \lim_{k\to\infty} \big((\eta_{B(m_1,n_1)} \circ \eta_{B(m_2,n_2)} \circ \eta_{B(m_3,n_3)} \circ \ldots \circ \eta_{B(m_k,n_k)})v_k\big),$$

где $v_k \in \mathbb{R}^5_+$, $k = 1, 2, \ldots$ - случайные, предел всегда существует и не зависит от выбора v_k's. Отсюда следует также единственность $\overrightarrow{w_0}$ с точностью до умножения на константу. □

Обозначим через $Z_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ объединение лент $Z(\overrightarrow{w_0}, \overrightarrow{\ell_0})$, где $\overrightarrow{\ell_0} = (1,1,1)$, и $\overrightarrow{w_0}$ определяется с помощью $\mathbf{m} = (m_0, m_1, \ldots)$, $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \ldots)$ как в Лемме 106.

Определим рекурсивно

$$\overrightarrow{\ell_{k+1}} = \overrightarrow{\ell_k} \cdot A(m_k, n_k).$$

Мы утверждаем, что если $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ растут достаточно быстро, то типичный слой в $Z_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ имеет два топологических конца.

Предложение 107. *Если для всех $k \geqslant 0$ мы имеем $m_k = n_k \leqslant m_{k+1}/2$, то объединение слоев $Z_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, которые не являются деревьями с 2 топологическими концами, имеет нулевую меру.*

Доказательство. Обозначим для краткости:

$$A_k = A(m_k, n_k),\ B_k = B(m_k, n_k),\ Z_k = Z(\overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{\ell_k}).$$

Из Леммы 105 следует, что Z_{k+1} можно получить из Z_k с помощью нескольких сокращений свободной дуги. Поэтому можно рассматривать $Z_0 = Z_{\mathbf{m},\mathbf{n}}, Z_1, Z_2, \ldots$ как последовательность Рипса. Обозначим через S_k общую площадь Z_k:

$$S_k = \overrightarrow{\ell_k} \cdot C \cdot \overrightarrow{w_k},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы утверждаем, что по условиям Предложения

$$\lim_{k\to\infty} S_k > 0. \tag{6.10}$$

В самом деле, непосредственными вычислениями проверяется, что

$$m_k \left(A_k C - \left(1 - \frac{2}{m_k}\right) C B_k \right) B_{k+1}$$

имеет только положительные коэффициенты для всех $k \geqslant 0$ потому что их можно представить в виде многочленов с положительными коэффициентами от m_k и $(m_{k+1} - 2m_k)$. Поэтому,

$$S_{k+1} - \left(1 - \frac{2}{m_k}\right) S_k = \overrightarrow{\ell_k} \left(A_k C - \left(1 - \frac{2}{m_k}\right) C B_k \right) B_{k+1} \overrightarrow{w_{k+2}} > 0,$$

а это можно переписать как

$$S_{k+1} > \Big(1 - \frac{2}{m_k}\Big) S_k.$$

Так как m_k растет с ростом k экспоненциально, мы имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{m_k} < \infty,$$

откуда следует (6.10).

Следовательно, объединение $\mathcal{C}(Z_{\mathbf{m},\mathbf{n}})$ внутренних точек слоев $Z_{\mathrm{m,n}}$ имеет положительную площадь, а значит, то же самое верно для объединения слоев с двумя топологическими концами. Из Леммы 106 следует, что слоение $\mathcal{F}_{dx}$ на $Z_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ является строго эргодичным в следующем смысле: любое измеримое множество точек, составленное из слоев, является множеством либо нулевой, либо полной меры Множество слоев с двумя концами точно не является множеством нулевой меры, значит, это множество полной меры. □

Глава 7

Приложения к задаче С. П. Новикова о плоских сечениях 3-периодических поверхностей

7.1 Формулировка задачи и известные результаты

В 1982 году С. П. Новиков ([12]) в связи с изучением модели полуклассического движения электрона в кристаллической решетке сформулировал следующую задачу: в трехмерном торе $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ задана поверхность уровня M некоторой гладкой функции. Пусть $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{Z}^3$ - стандартная проекция, тогда $\hat{M} = \pi^{-1}(M)$ - 3-периодическая поверхность. Рассмотрим сечения $\hat{M}$ семейством параллельных плоскостей, ортогональных вектору $H = (H_1, H_2, H_3)$; что можно сказать об асимптотическом поведении этих сечений (мы будем называть их H-сечениями)?

Эта задача происходит из теории проводимости монокристаллов в магнитном поле и приложения к физике результатов, о которых далее пойдет речь, обсуждается, например, в работах [100] и [8]). С точки зрения физики вектор H задает магнитное поле, а поверхность M является ферми-поверхностью металла.

Для изучения упомянутых сечений (мы будем называть их H-сечениями) задачу можно сформулировать на языке теории измеримых слоений: рассмотрим

слоение $\mathcal{F}$, определенное ограничением на M 1-формы с постоянными коэффициентами $H_1dx^1 + H_2dx^2 + H_3dx^3$; слои этого слоения - образы интересующих нас сечений при проекции π. Отображением первого возвращения на трансверсаль для этого слоения будут перекладывания отрезков, однако, так как речь идет о поверхности в трехмерном торе, эти перекладывания отрезков не будут удовлетворять условию Кина, поэтому стандартная ренормализация с помощью индукции Рози не может быть применена.

Первые результаты в этой задаче были получены А. Зоричем и И. Дынниковым топологическими методами ([5], [6], [64], [18]). В частности, была получена следующая классификация (будем фокусироваться только на случае общего положения, когда $\dim_{\mathbb{Q}}(H_1, H_2, H_3) = 3$):

- *тривиальный случай:* все компоненты H - сечений компактны;
- *интегрируемый случай:* каждая регулярная незамкнутая компонента H - сечений представляет собой прямую линию, возмущенную конечной деформацией; слоение $\mathcal{F}$ разрезается сепаратрисными циклами на торы с дырками, на которых слоение ведет себя как иррациональная обмотка, и цилиндры, состоящие из замкнутых слоев.
- *хаотический случай:* слоение $\mathcal{F}$ имеет компоненту рода $g \geq 3$.

Хаотический случай был открыт Дынниковым в [64] (ранее С. П. Царев построил промежуточный пример - уже не интегрируемый, но еще не хаотический для случая, когда координаты вектора H не являются полностью рационально независимыми). В настоящее время основные открытые вопросы относятся к хаотическому случаю.

Известно, что хаотические режимы являются редкими в следующем смысле ([64]):

Теорема 108 (Дынников)**.** *В пространстве пар (M, H), где M - гомологичная нулю поверхность в $\mathbb{T}^3$, а H - ковектор в R^3, все пары, задающие хаотические слоения $\mathcal{F}$, сосредоточены на некотором подмножестве $\mathcal{R}$ коразмерности 1 и образуют нигде не плотное подмножество в нем.*

В [100] С. П. Новиков сформулировал гипотезу о том, что множество хаотических режимов является подмножеством нулевой меры в $\mathcal{R}$ и, более того, является

фрактальным множеством. В [7] Дынников показал, что в случае поверхности рода 3 хаотические режимы могут изучаться с помощью систем изометрий порядка 3 тонкого типа. Более точно, было показано, как, используя значения параметров, определяющих систему изометрий тонкого типа, можно задать поверхность рода 3 и выбрать вектор таким образом, что выполняется следующее условие: сечение ленточного комплекса, построенного по системе изометрий, плоскостями, которые ортогональны выбранному вектору, является деформационным ретрактом сечения тем же семейством плоскостей построенной 3-периодической поверхности.

Первый пример хаотического режима на центрально-симметричной поверхности (именно такие примеры интересны с точки зрения физических приложений) был построен в [122].

Специальные системы изометрий отвечают хаотическому режиму на поверхности рода три, обладающей дополнительной симметрией, а слоение имеет два кратных седла. Было показано, что в этом случае отображением первого возвращения на правильно выбранную трансверсаль является семейство перекладываний отрезков, которое впервые было описано Арну и Рози в связи с приложениями к символической динамике (детали написаны в [65]).

7.2 От системы изометрий к 3-периодической поверхности

В этом разделе мы кратко опишем конструкцию, предложенную Дынниковым в [7]. С помощью этой конструкции по системе изометрий тонкого типа строится хаотический режим в задаче Новикова. В настоящем тексте мы сконцентрируемся на специальных системах изометрий.

Наша задача состоит в том, чтобы построить кусочно-гладкую поверхность в трехмерном торе $\mathbb{T}^3$ и изучить асимптотическое поведение сечений $\mathbb{Z}^3$-накрывающей этой поверхности в $\mathbb{R}^3$ семейством параллельных плоскостей α : $H_1x_1 + H_2x_2 + H_3x_3 = const$, где H - некоторый заданный ковектор. По техническим причинам нам будет удобнее зафиксировать ковектор $H = (0, 1, 0)$ и варьировать систему координат так, что H оставался неизменным, а менялись векторы решетки $\mathbb{Z}^3$, относительно сдвигов на которые инвариантна поверхность.

Наш план таков: по системе изометрий S мы построим ленточный комплекс Σ и определим решетку сдвигов Λ; абелево накрытие Σ, полученное с помощью Λ, назовем $\hat{\Sigma}$; используя параметры S, зададим фундаментальную область поверхности M_0, абелево накрытие которой (по отношению к решетке Λ) будет 3-периодической поверхностью $\hat{M}$; тогда ее сечения $\hat{\Sigma}$ плоскостями, ортогональными вектору $H = (0, 1, 0)$, будут являться деформационным ретрактом сечений $\hat{M}$ тем же семейством плоскостей.

Начинаем с системы тонкого типа S, заданной тремя длинами отрезков a, b, c.Рассмотрим следующие прямоугольники в $\mathbb{R}^2$:

$$T_1 = [0, 1] \times [0, a + b + 2c];$$

$$T_2 = [1/5, 2/5] \times [0, c];$$

$$T_3 = [3/5, 4/5] \times [a, a + c];$$

$$T_4 = [1/5, 2/5] \times [a + b, a + b + c].$$

Легко видеть, что $T_2, T_3, T_4 \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$. Кусочно-линейная фундаментальная область M_0 поверхности $\hat{M}$ определяется так (см. рис. 7.1):

$$(T_1 \setminus (T_2 \cup T_3)) \times \frac{1}{4} \cup (T_1 \setminus (T_3 \cup T_4)) \times \frac{3}{4} \cup \partial T_2 \times [0, \frac{1}{4}] \cup \partial T_3 \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \cup \partial T_4 \times [\frac{3}{4}, 1].$$

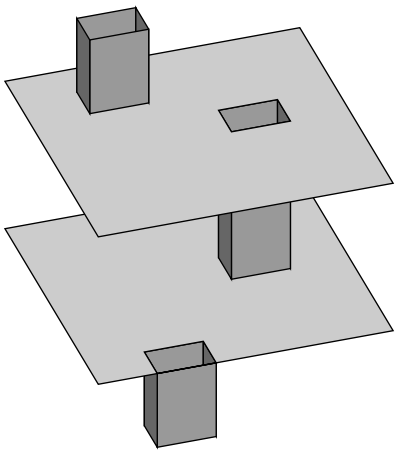


Рис. 7.1: Поверхность M_0

Решетка Λ натянута на следующие 3 вектора:

$$e_1 = (1, -b - c, 0), e_2 = (1, a + c, 0), e_3 = (0, a + b, 1).$$

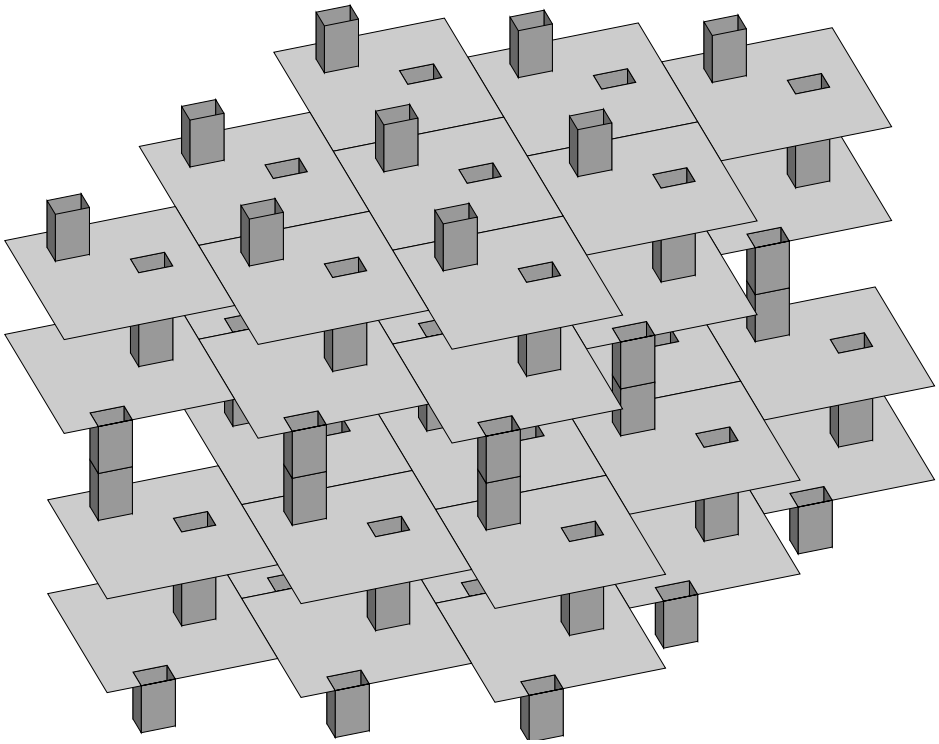


Рис. 7.2: Поверхность $\hat{M}$

Накрывающая поверхность $\hat{M} = M_0 + G$, где G - группа сдвигов на векторы из Λ (см. рис. 7.2).

Как уже было сказано, $H = (0, 1, 0)$.

Теорема 109. *[Дынников, 2008] Пусть S - специальная система изометрий тонкого типа, длины отрезков которой определяются вектором (a, b, c). Тогда сечения поверхности $\hat{M}$, определенной выше, плоскостями, ортогональными вектору $H = (0, 1, 0)$ являются хаотическими.*

Доказательство этого утверждения полностью повторяет приведенное в [7] доказательство аналогичной теоремы для произвольной системы изометрий тонкого типа. Подробности написаны в [33], здесь мы приводим только его набросок.

Обозначим через M образ проекции $\hat{M}$ в тор $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\Lambda$: $M = \pi(\hat{M})$. Для изучения поведения сечений $\alpha \cap \hat{M}$ мы рассмотрим слоение F на M, заданное ограничением на M 1-формы dx_2. Легко видеть, что поверхность M имеет род 3. Для того, чтобы убедиться, что у F нет замкнутых слоев и сепаратрисных циклов, мы рассмотрим не саму поверхность M, а один из полноториев, на которые она разрезает тор $\mathbb{T}^3$. Выберем полноторий, содержащий точку $\pi(0, 0, 1/2))$, и обозначим его через M_1, а его $\mathbb{Z}^3$-накрывающую через $\hat{M}_1$.

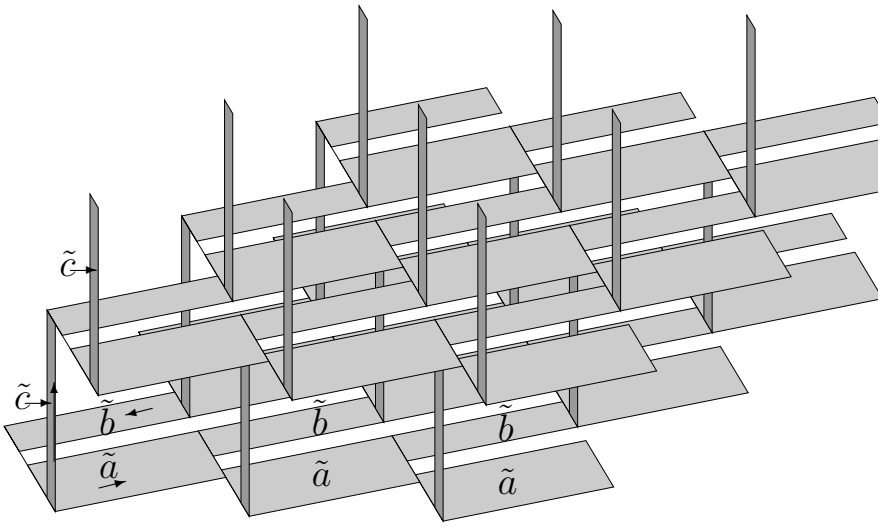


Рис. 7.3: Комплекс $\hat{\Sigma}'$

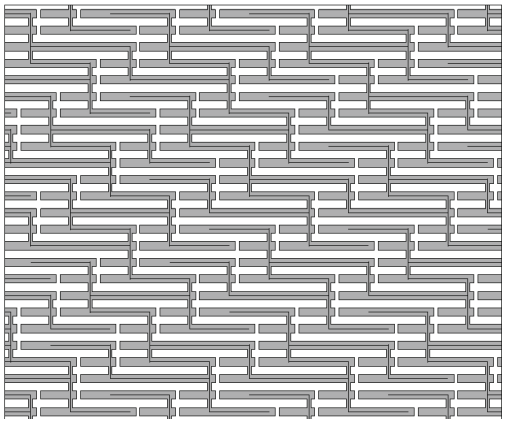


Рис. 7.4: Сечение $\hat{\Sigma}' \cap \alpha$ является деформационным ректрактом сечения $\hat{M} \cap \alpha$.

Теперь определим ленточный комплекс Σ' – это будет двумерный комплекс в торе $\mathbb{T}^3$, состоящий из трех прямоугольников (пример изображен на рис. 3.8):

$$P_1 = \pi([3/10, 13/10] \times [0, a] \times 1/2)$$

$$P_2 = \pi([3/10, 13/10] \times [a + c, a + b + c] \times 1/2)$$

$$P_3 = \pi(3/10 \times [0, c] \times [1/2, 3/2]).$$

Отсутствие сепаратрисных циклов следует и замкнутых слоев у F теперь следует из того, что система S – тонкого типа (и, в частности, минимальна).

7.3 Новые результаты в задаче С. П. Новикова

7.3.1 Показатели Ляпунова и диффузия

Анализ спектральных свойств алгоритма ренормализации для специальных систем изометрий позволил нам доказать, что ляпуновский спектр ассоциированного с отображением ренормализации коцикла почти всегда *простой* (то есть все показатели Ляпунова различны) и удовлетворяет *свойству Пизо* (один из показателей положителен, два других отрицательны). Простота спектра проверяется с помощью алгоритма, описанного в [73], а утверждение для свойства Пизо следует из аналогичного утверждения для сопряженного с нашей ренормализацией алгоритма полного вычитания, которое было доказана в [30]. Доказательство приведено в разделе 7.4.

Прямым следствием этого результата является

Теорема 110. *В случае поверхности Арну - Рози почти все хаотические траектории имеют скорость диффузии строго между* $\frac{1}{2}$ *и 1.*

Доказательство этой теоремы приведено в разделах 7.4 и 7.5.

Кроме того, теорема 83 доказывает гипотезу Новикова для поверхности типа Арну - Рози.

7.3.2 Число связных компонент хаотических режимов

Теорема 111. *Существуют 3-периодическая поверхность* $\hat{M}$ *и вектор* H *такие, что сечение* $\hat{M}$ *почти всеми плоскостями, ортогональными* H*, состоят ровно из 1 связной компоненты.*

Эта теорема является следствием утверждения 10. Доказательство опирается на следующие элементарные соображения, использующие эйлерову характеристику: пусть построенная по самоподобной системе изометрий центрально - симметричная поверхность является поверхностью уровня некоторой функции f; предположим, что сечение состоит хотя бы из 2 связных компонент; тогда выполнено, что

$$\chi(\mathbb{R}^2) = \chi(f > 0) + \chi(f < 0) - \chi(\delta),$$

где δ - это компонента границы. Из-за центральной симметрии поверхности $\chi(f > 0) = \chi(f < 0) = 1$, поэтому $\chi(\delta)$ тоже должно быть равно 1.

Аналогично доказывается

Теорема 112. *Существуют 3-периодическая поверхность $\hat{M}$ и вектор H такие, что сечение $\hat{M}$ почти всеми плоскостями, ортогональными H, состоят из бесконечного числа связных компонент.*

Это утверждение следует из теоремы 11.

7.3.3 Перекладывания отрезков типа Арну -Рози

Определение. Для $\lambda \in \Delta$ определим *перекладывание отрезков типа Арну - Рози* T_λ^{AR} как композицию $\Phi \circ T'_\lambda : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, где Φ - это сдвиг (поворот) $1/2$, то есть , $\Phi(x) = x + 1/2$, и T'_λ - это перекладывание отрезков, определенное на отрезке $[0, 1)$ перестановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

и параметрами $\left(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_3}{2}, \frac{\lambda_3}{2}\right)$. Соответствующее отображение выглядит так:

$$T_\lambda^{\mathrm{AR}}(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1+\lambda_1}{2}, & \text{если } x \in [0, \lambda_1/2) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1-\lambda_1}{2}, & \text{если } x \in [\lambda_1/2, \lambda_1) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1+\lambda_2}{2}, & \text{если } x \in [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2/2) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1-\lambda_2}{2}, & \text{если } x \in [\lambda_1 + \lambda_2/2, \lambda_1 + \lambda_2) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1+\lambda_3}{2}, & \text{если } x \in [\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3/2) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1-\lambda_3}{2}, & \text{если } x \in [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3/2, 1) + \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первым представителем этого класса был пример Арну-Йоккоза ([27]), определенный в терминах слоения на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Мы уже упоминали этот пример в связи с обнулением SAF.

Опираясь на описанную Вичем конструкцию зашнурованных прямоугольников, мы можем построить поверхность рода три, для которой перекладывание

отрезков типа Арну - Рози будет отображением первого возвращения вертикального потока на отрезок трансверсали. Подробно взаимосвязь между хаотическими слоениями в задаче Новикова и измеримыми слоениями типа Арну - Рози описана в [65]; приведем краткое описание важных для нас результатов.

Сначала определим иррациональную часть Салфетки Рози, то есть множество точек этого фрактала, которые заданы рационально независимыми $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Это множество мы будем обозначать $\mathcal{R}_{irr}$.

Следующее утверждение доказано в [42] (Лемма 4.2) и [25]:

Предложение 113. *Рациональную часть салфетки Рози можно определить следующим образом:*

$$\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_{irr} = \cup_i f_i(\delta\Delta),$$

где объединение берется по всем конечным словам i из букв $\{1, 2, 3\}$.

Верно следующее

Предложение 114 (Дынников, Скрипченко, Юбер)**.** *Для любого $\lambda \in \Delta$ перекладывание отрезков Арну–Рози $T^{AR}(\lambda)$ минимально тогда и только тогда, когда $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$.*

Доказательство этого утверждения опирается на идеи из [25] и изложено подробно в разделе 7.6.

Используя описанные выше методы ренормализации для систем изометрий, мы получаем следующий результат:

Теорема 115. *Перекладывания отрезков типа Арну - Рози допускают не более двух инвариантных эргодических мер и почти все эти перекладывания отрезков (по отношению к мере $\mu_{\mathcal{R}}$) являются строго эргодичными.*

Замечание 27. С учетом того, что поверхность, ассоциированная с перекладываниями отрезков типа Арну - Рози, имеет род 3, из теоремы Катка следовало, что число инвариантных эргодических мер для перекладываний отрезков Арну–Рози не превосходит 3. Наш результат дает более сильную оценку.

Кроме того, верно следующее утверждение ([65]):

Теорема 116. *Почти все (по отношению к мере $\mu_{\mathcal{R}}$) перекладывания отрезков типа Арну - Рози не является слабо перемешивающими.*

Замечание 28. Это утверждение следует из [23] и [42].

Замечание 29. Ни одно из утверждений теорем 115 и 116 не может быть усилена: известны примеры перекладываний отрезков типа Арну - Рози, допускающих две инвариантные меры ([67]), и примеры, обладающие свойством слабого перемешивания. При этом взаимоотношения между двумя исключительными множествами - множеством нестрого эргодичных и множеством слабо перемешивающих перекладываний отрезков типа Арну - Рози не изучены и представляют из себя интересный открытый вопрос.

7.4 Показатели Ляпунова коцикла

В этом разделе мы определим показатели Ляпунова для коцикла, ассоциированного с индукцией Рози, докажем, что его показатели Ляпунова отвечают за скорость распространения хаотической траектории, и проверим, что ляпуновский спектр коцикла Рози является простым и удовлетворяет свойству Пизо, из чего последует оценка на скорость диффузии в теореме 110.

Определим показатели Ляпунова для коцикла B. Мы будем опираться на мультипликативную эргодическую теорему ([13]). Необходимо проверить, что все условия этой теоремы выполняются для коцикла B и построенной нами меры μ.
Во-первых, напомним, что специальный поток Φ сохраняет меру максимальной энтропии $\mu = \hat{\mu}_0$ и является эргодическим по отношению к этой мере. Последний факт следует из результатов Сарига ([115] и [117]) о перемешивающих свойствах меры μ.
Во-вторах, очевидно, что коцикл B измерим, потому что это локально постоянный коцикл.
Наконец, B и B^{-1} являются log-интегрируемым по отношению к мере μ:

Лемма 117.

$$\int \log^+ ||B|| d\mu < +\infty,$$

$$\int \log^+ ||(B^{-1})^T|| d\mu < +\infty.$$

Доказательство. Из результатов Сарига 91 мы знаем, что давление Гуревича-Сарига P_G и энтропия h_μ конечны. Кроме того, выполняется

$$sup\{h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu\} < \infty. \tag{7.1}$$

Поэтому $\int \phi d\mu < \infty$, где ϕ–это потенциал: $\phi = -\kappa_0 r$. Отсюда следует, что $\int r d\mu < \infty$. По определению функции крыши это означает, что $\int \log^+ ||(B^T)^{-1}|| d\mu < +\infty$. Учитывая, что $B \in SL(3, \mathbb{R})$, из последнего утверждения следует, что коцикл B является log-интегрируемым. □

Таким образом, можно применять мультипликативную эргодическую теорему:

Теорема 118. *Существуют числа $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3$ такие, что для почти всех точек x из Салфетки Рози существует фильтрация $\mathbb{R}^3 = E_1(x) \supseteq E_2(x) \supseteq E_3(x) \supseteq E_4(x) = 0$ и для каждого $v \in E_i \setminus E_{i+1}$*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log ||B(x)v||}{N} = \nu_i,$$

где $B = B^{(N)}$ это матрица коцикла, которая получается как произведение N последовательных блоков $B(n_i)$ (возможно, с перестановками).

Эти числа ν_i называются *показателями Ляпунова* коцикла B.

Докажем два ключевых свойства показателей Ляпунова коцикла B.

Определение. Матрица с определителем 1 обладает *свойством Пизо*, если у нее есть ровно 1 доминирующее (максимальное по модулю) собственное значение, а все остальные собственные значения имеют норму строго меньше 1.

Доказательство использует наличие связи между используемым нами алгоритмом ренормализации - индукцией Рози и другим марковской многомерной цепной дробью, которая называется в литературе *алгоритмом полного вычитания.* Эта связь впервые была описана в [26]. Алгоритм полного вычитания определен на положительном конусе $\mathbb{R}^3_{\geq 0}$, при применении этого алгоритма к тройке числе наименьшее вычитается из двух других, то есть соответствующее линейное отображение - это $S : \mathbb{R}^3_{\geq 0} \mapsto \mathbb{R}^3_{\geq 0}$, определенное так:

$$\tilde{S} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_1) & \text{если } x_1 \leq x_2, x_1 \leq x_3 \\ (x_1 - x_2, x_2, x_3 - x_2) & \text{если } x_2 \leq x_1, x_2 \leq x_3 \\ (x_1 - x_3, x_2 - x_3, x_3) & \text{если } x_3 \leq x_1, x_3 \leq x_2 \end{cases}$$

Легко видеть, что матрица $B(n)$ совпадает с матрицей алгоритма полного вычитания после n итераций. Свойство Пизо для матрицы алгоритма полного вычитания доказана в работе Авилы и Делакруа (см [30], Раздел 2). Поэтому верна следующая

Лемма 119. *Матрица коцикла B имеет свойство Пизо.*

Теперь мы проверим, что спектр коцикла B почти всегда простой.

Сначала убедимся, что построенная нами мера имеет свойство ограниченного искажения. Мы докажем это утверждение в большей общности:

Лемма 120. *Мера Гиббса μ для марковского сдвига обладает свойством ограниченного искажения.*

Доказательство. Рассмотрим меру с потенциалом $-\kappa r$. Тогда существует две константы P (давление) и Q такие, что для любого цилиндра $[i_0 \cdots i_{n-1}]$ и любой точки x этого цилиндра мы имеем:

$$\frac{1}{Q} \leq \frac{\mu[i_0 \cdots i_{n-1}]}{e^{\Phi_n(x)-nP}} \leq Q.$$

Тогда легко видеть, что $x \in [i_{-m} \cdots i_{-1} \cdots i_0 \cdots i_n]$

$$\frac{\mu([i_{-m} \cdots i_{-1} i_0 \cdots i_n])}{\mu[i_{-m} \cdots i_{-1}]\mu[i_0 \cdots i_n]} \leq \frac{Q^3 e^{\Phi_{n+m}(x)-(n+m)P}}{e^{\Phi_n(x)-nP} e^{\Phi_m(\sigma^n(x))-mP}} = \frac{Q^3}{e^P} \leq Q^3 e^P.$$

Аналогично:

$$\frac{\mu([i_{-m} \cdots i_{-1} i_0 \cdots i_n])}{\mu[i_{-m} \cdots i_{-1}]\mu[i_0 \cdots i_n]} \geq Q^3 e^P.$$

Поэтому условие определения выполнено с константой $\hat{C} = Q^3 e^P$. □

Теперь мы воспользуемся Галуа-версией критерия простоты ляпуновского спектра многомерных цепных дробей. Галуа-версия критерия простоты ляпуновского спектра была доказана в [105] для многомерной цепной дроби, используемой как алгоритм ренормализации для так называемых поверхностей в клеточку (square-tiled surfaces). Впоследствии этот результат был обобщен в [73] для широкого класса многомерных цепных дробей, к которым относится и индукция Рози для специальных систем изометрий.

Используемый нами метод опирается на фундаментальный результат Авилы-Вианы [36], которые доказали достаточное условие для простоты ляпуновского

спектра над марковским отображением и использовали это условие для доказательства гипотезы Концевича-Зорича о простоте ляпуновского спектра потока Тейхмюллера в пространстве поверхностей сдвига. В свою очередь, теорема Авилы-Вианы использует наблюдения из [3] и [79] о спектре произведения случайных матриц и результат Бонатти-Вианы [46] о ляпуновском спектре коциклов, которые линейно постоянны или удовлетворяют Аксиоме А.

Сначала напомним теорему Авилы-Вианы.

Пусть задан конечный или счетный алфавит Λ и множество слов Σ: $\Sigma = \Lambda^{\mathbb{N}}$. Через $\hat{\Sigma}$ обозначим множество бесконечных в обе стороны последовательностей букв алфавита $\Lambda^{\mathbb{Z}}$. Пусть T и $\hat{T}$ - сдвиги, которые действуют на Σ и $\hat{\Sigma}$ соответственно. Каждому слову $\underline{l}$ мы ставим в соответствие

$$\Sigma(\underline{l}) = \{x \in \Sigma : x \text{ начинается с } \underline{l}\}.$$

Рассмотрим отображение $A : \Sigma \to G$, где G - какая-то матричная группа (например, $G = SL(d, \mathbb{Z})$). Теперь можно определить матричный коцикл (T, A), действующий на $\Sigma \times \mathbb{R}^d$:

$$(T, A)(x, v) = (T(x), A(x)v).$$

Тогда для каждого $l = (l_0, \cdots, l_{n-1}) \in \cup_{n\geq 0}\Lambda^n$ мы определяем $A^{\underline{l}^*} = A_{l_{n-1}} \cdots A_{l_0}$, так что $(T, A)^n(x, v) = (T^n(x), A^{\underline{l}^*}(x)v)$ для любого $x \in \Sigma(\underline{l})$.

Определение. Коцикл называется *зажимающим*, если существует слово $\underline{l}^* \in \cup_{n\geq 0}\Lambda^n$ такое, что спектр $A^{\underline{l}^*}$ прост. Матрица $A^{\underline{l}^*}$ называется *зажимающей*.

Пусть $Gr(k)$ - грассманиан, составленный из k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^d$.

Определение. Коцикл называется *закручивающим*, если для любого $m \geq 1$, и $1 \leq k_1, \cdots, k_m < n$, и любых подпространств $F_i \in Gr(k_i)$ и $F_i' \in Gr(n - k_i)$ существует слово $\underline{l}$ такое, что $A^{\underline{l}(F_i)} \cap F_i' = \{0\}$.

В [36] была доказана следующая:

Теорема 121 (Авила-Виана)**.** *Пусть μ - T-инвариантная вероятностная мера на Σ, обладающая свойством ограниченного искажения. Пусть A – локально постоянный интегрируемый коцикл, заданный матрицами из группы G. Предположим, что A- зажимающий и скручивающий коцикл. Тогда ляпуновский спектр (T, A) по отношению к μ простой.*

Галуа-версия этой теоремы выглядит следующим образом.

Определение. Пусть $A \in G$ - зажимающая матрица. Матрица $B \in G$ называется *k-скручивающей* по отношению к A, если для каждой пары A-инвариантных $F \in Gr(k)$ и $F' \in Gr(n-k)$, $B(F) \cap F' = \{0\}$.

В [105] доказано.

Предложение 122 (Йоккоз - Матеус - Моллер)**.** *Коцикл A является зажимающим и скручивающим тогда и только тогда, когда существует слово $\underline{l}^*$ такое, что $A^{\underline{l}^*}$ - зажимающая матрица и для некоторого слова $\underline{l}(k)$ $A^{\underline{l}(k)}$ является k-скручивающей по отношению к A.*

Поэтому для проверки простоты спектра коцикла при наличии меры, обладающей свойством ограниченного искажения, достаточно найти зажимающую матрицу A и матрицу B, которая является k-скручивающей по отношению к матрице A.

Понятие зажимающей матрицы тоже можно несколько модифицировать:

Определение. Матрица $A \in SL(d, \mathbb{Z})$ называется *Галуа - зажимающей,* если ее характеристический многочлен неприводим над полем $\mathbb{Q}$, все его корни действительные и группа Галуа $\mathcal{G}$ является максимально возможной, то есть совпадает с S_d.

По аналогии с Предложением 4.2 в [105], в [73] мы доказали, что

Предложение 123. *Галуа-зажимающая матрица является зажимающей.*

Кроме того, в [73] мы адаптировали Теорему 4.6 из [105], предложив алгоритм поиска k-скручивающей матрицы:

Теорема 124. *Пусть A и B - две матрицы из $SL(d, \mathbb{Z})$. Предположим, что у этих двух матриц A и B нет общего инвариантного подпространства и при этом матрица A является Галуа-зажимающей. Тогда существует $m \geq 1$ и, для всех l^*, целые $l_1, \cdots, l_m - 1 > l^*$ такие, что произведение $BA^{l_1} \cdots BA^{l_{m-1}}B$ является k-скручивающим по отношению к матрице A.*

Таким образом, для доказательства простоты спектра коцикла B нам достаточно найти Галуа-сжимающую и k-скручивающую матрицу.

Лемма 125. *Следующая матрица B_1 обладает свойством Галуа-сжатия для B:*

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 30. Матрица B_1 отвечает следующей петле на диаграмме Рози: $(1,2,3) \to (2,3,1) \to (3,1,2) \to (1,2,3)$ с таким числом итераций неускоренной индукции в каждом шаге ускоренной индукции: 1 (для первого ребра), 1 (для второго), 5 (для последнего). Мы будем называть наибольшее число последовательных шагов с одним и тем же победителем, которые входят в один шаг ускоренной индукции, временем ожидания в соответствующей вершине.

Доказательство. Легко видеть, что :

- характеристический многочлен матрицы B_1 имеет вид $P_{B_1}(\nu) = \nu^3 - 19\nu^2 + 9\nu - 1$;
- многочлен $P_{B_1}(\nu)$неприводим, потому что его коэффициенты при старшем члене и при свободном члене равны, соответственно, 1 и -1;
- все его корни действительны, потому что дискриминант $\Delta_1 > 0$;
- группа Галуа изоморфна S_3, потому что $\Delta_1 = 1940$ не является квадратом рационального числа.

□

Теперь нам нужно предъявить матрицу B_2, которая является скручивающей по отношению к B_1.

Лемма 126. *Следующая матрица коцикла B_2 является скручивающей по отношению к B_1:*

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 31. Комбинаторно матрица B_2 отвечает той же петле на поправленной диаграмме Рози, что и матрица B_1, отличается только количество итераций нескоренной индукции, входящих в шаги ускоренной версии алгоритма, то есть время ожидания в вершинах диаграммы: для матрицы B_2 время ожидания в каждой вершине задается вектором $(1, 1, 4)$).

Доказательство. Сначала проверим, что матрица B_2 тоже является Галуа-зажимающей (и, в частности, зажимающей). Для этого достаточно вычислить характеристический многочлен этой матрицы и его дискриминант: $P_{B_2}(\nu) = \nu^3 - 16\nu^2 + 8\nu - 1$ и $\Delta_2 = 229$. Отсюда следует, что B_1 и B_2 не имеют общих инвариантных подпространств. Поэтому B_2 является скручивающей по отношению к B_1. □

Теперь из доказанного следует, что верна следующая

Теорема 127. *Показатели Ляпунова попарно различны: $\nu_1 > 0 > \nu_2 > \nu_3$.*

7.5 Скорость диффузии хаотических траекторий

Для доказательства оценки скорости диффузии нам нужно связать ее с показателями Ляпунова рассмотренного выше коцикла. Основной результат сформулирован в следующей теореме:

Теорема 128. *Для почти любой (по отношению к мере μ) точки (a, b, c), принадлежащей Салфетке Рози, для любой точки $x \in \hat{M}$*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{d(x, x_t)}{\log t} = -\frac{\nu_3}{\nu_1}, \tag{7.2}$$

где x_t - это точка слоя слоения $F = F(a, b, c)$., находящаяся на расстоянии t от точки x (расстояние измеряется вдоль слоя).

Покажем, что скорость диффузии определяется параметрами коцикла A. Заметим, что на ленточном комплексе можно явно указать базис группы $H_1(M_1, \mathbb{Z})$ (аналогичное утверждение верно для перекладываний отрезков и использовано Вичем в его конструкции зашнурованных прямоугольников): достаточно взять слой вертикального слоения на ленточном комплексе, который соединяет середины отрезков A_i и B_i, и замкнуть его с помощью фрагмента отрезка - носителя.

Теперь можно рассмотреть действие коцикла на гомологиях поверхности M_1, это действие индуцирует действие на семействе автоморфизмов свободной группы на фундаментальной группе π_1.

А именно, применение шага ренормализации приводит к следующем: рассмотрим специальную систему изометрий с длинами отрезков a, b, c, приклеим к отрезкам ленты с вертикальным слоением и ориентацией на них, обозначим ориентированные длины этих лент через $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, тогда после одного шага индукции мы получим:

$$\tilde{a}' = \tilde{a};$$

$$\tilde{b}' = \tilde{b}\tilde{a}^{-1};$$

$$\tilde{c}' = \tilde{c}\tilde{a}^{-1}.$$

Вертикальные сечения комплекса $\hat{\Sigma}$ содержат следующие блоки

1. горизонтальный: $\tilde{b}\tilde{a}^{-1}, \tilde{a}\tilde{b}^{-1}$;
2. вертикальный: $\tilde{c}\tilde{a}^{-1}, \tilde{a}\tilde{c}^{-1}$;
3. вертикальный: $\tilde{b}\tilde{c}^{-1}, \tilde{c}\tilde{b}^{-1}$.

Поэтому любое вертикальное сечение (или, что то же самое, хаотическое сечение) кодируется символами $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$; при применении индукции мы остаемся на той же траектории и можем кодировать ее с помощью символов $\tilde{a}', \tilde{b}', \tilde{c}'$. Единственный момент, который необходимо контролировать, - это появление петель, когда траектория возвращается обратно.

Такие петли могут возникать только в третьем из перечисленных случаев (когда $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ имеют разные знаки). Но в этом случае траектория, кодировка которой включала, например, петлю $\tilde{b}'\tilde{c}'^{-1}$, it не вносит вклада в диффузию; поэтому достаточно проверить, что такая траектория не вносит вклада и в правую часть равенства (7.2) (другими словами, информация об этой петле не сохраняется коциклом A). Это верно, потому что вектор $(0, 1, -1)$ для матрицы коцикла является инвариантным.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим вертикальное сечение комплекса $\hat{\Sigma}'$, снабженное естественным временем (натуральным параметром на этой кривой) t. Обозначим через $\hat{\psi}(t)$ часть этой кривой между моментами 0 и t. Проекция $\hat{\psi}(t)$ на исходный комплекс Σ будет обозначена $\psi(t)$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим также подотрезок D_k, который является отрезком-носителем системы изометрий, получающейся из S после k итераций ускоренной индукции Рози. Пусть $n = n(t)$ будет наибольшим таким k, что $\psi(t)$ пересекает D_k по меньшей мере дважды.

Тогда верна следующая:

Лемма 129. *Пусть n и t - такие, как описаны выше. Тогда*

$$\lambda_1 n \sim \log t.$$

Доказательство. Доказательство дословно совпадает с доказательством аналогичного утверждения в [139]. □

Теперь докажем **оценку сверху**. Будем использовать стратегию, описанную для разных случаев в [139], [60] и [71]: любую траекторию мы будем разделять на части так, чтобы отклонение каждой из этих частей можно было контролировать с помощью теоремы Оселедца [13].

Рассмотрим точку x на кривой $\hat{\psi}$ и возьмем вектор $v_t = x_t - x \in \mathbb{R}^3$. Так как направляющие векторы лент и отрезок-носитель комплекса Σ' параллельны координатным линиям, а плоскость параллельна $x_2 = 0$, легко видеть, что вектор r v_t является линейной комбинацией образов двух базисных векторов e_1 и e_3 под действием концикла A (здесь $e_1 = (1, 0, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$).

Обозначим через $A^{(i)}$ матрицу, которая является произведением i блоков $A(n_j), j = 1, \cdots, i$ и матриц перестановок.

Тогда мы имеем следующее представление:

Лемма 130.

$$v_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,3} a_i^j v_j^i, \tag{7.3}$$

где $v_i^j = A^{(i)} e_j$, $j = 1, 3$ и a_i^j - неотрицательные натуральные числа субэкспоненциального роста

Доказательство. Доказательство этого утверждения полностью аналогично приведенному в [60] и [139]. □

Субэкспоненциальный рост показателей a_i^j и теорема Оселедца, которую мы применяем к коциклу A, означают, что для каждого $\epsilon > 0$ мы имеем

$$\log d(x, x_t) \leq log||v_t|| \leq \log(\sum a_i^j v_j^i) \leq -n(\nu_3 + \epsilon). \tag{7.4}$$

Применяем теперь оценку (7.4) и лемму 129 и получаем верхнюю оценку. Теперь можно переходить к **нижней оценке**. Начнем со следующего технического утверждения:

Лемма 131. *Рассмотрим $E = \langle e_1, e_3 \rangle$ и прямую сумму ляпуновских подпространств, которые определяются в теореме Оселедца, когда мы применяем ее к коциклу A: $\mathbb{R}^3 = \tilde{E}_1 \oplus \tilde{E}_2 \oplus \tilde{E}_3$. Тогда существует $f \in E$ такое, что проекция f на $\tilde{E}_3$ не равна нулю для почти всех точек (a, b, c), принадлежащих Салфетке Рози.*

Замечание 32. Будем предполагать, что ляпуновский спектр коцикла простой, иначе утверждение тривиально.

Доказательство. Мы хотим убедиться, что $E \neq \tilde{E}_1 \oplus \tilde{E}_2$. Будем доказывать от противного: если это не так, пространство E является инвариантным по отношению к коциклу A', индуцированному отображением первого возвращения в какой-то подсимплекс положительной меры. Но матрица обратного коцикла является матрицей индукции, полученной ускорением индукции, заданной коциклом B^T и значит, после достаточного числа шагов индукции Рози эта матрица содержит только строго положительные коэффициенты. Так быть не может. □

Значит, существует f из предыдущей леммы и выполняется одно из следующих утверждений:

$$\frac{\log ||A^{(k)} e_1||}{k} \to \nu_1(A) = -\nu_3 \tag{7.5}$$

или

$$\frac{\log ||A^{(k)} e_3||}{k} \to \nu_1(A) = -\nu_3. \tag{7.6}$$

Поэтому можно применить стандартный подход из [139] для получения оценки снизу, а именно: воспользуемся снова разложением (7.3). Если нужное нам неравенство не выполняется в момент, когда траектория ударяется в отрезок D_n в первый раз, мы можем продолжить следовать по траектории и (в силу выполнения одной из оценок (7.5) или (7.6)), рано или поздно настанет момент, когда

нужное неравенство будет выполнено для какой-то части траектории (выбор этой части зависит от того, какое именно неравенство из предыдущей леммы выполнено). Отсюда следует нижняя граница, подробности написаны в [60] и [139]. Тем самым, доказано утверждение теоремы 128.

Из леммы 6 из работы [30] и леммы 119 следует, что $\nu_1 > 0 > \nu_2 \geq \nu_3$, при этом

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0.$$

Поэтому

Следствие 132. *Для показателей Ляпунова специального потока выполняется*

$$\nu = -\frac{\nu_3}{\nu_1} < 1.$$

Следствие 133. *Показатели Ляпунова специального потока удовлетворяют следующему неравенству:*

$$\nu = -\frac{\nu_3}{\nu_1} > \frac{1}{2}.$$

Теперь итоговая оценка на скорость диффузии хаотической траектории легко следует из теоремы 128 и следствий 133 и 132.

Следствие 134. *Почти для всех плоских сечений в хаотическом случае существует доминирующее направление, но отклонение траекторий от него не ограничено.*

7.6 Эргодические свойства перекладываний отрезков типа Арну–Рози

В этом разделе мы будем доказывать Теорему 115. С каждым измеримым слоением $\mathcal{F}$ на поверхности ассоциируем пространство $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ инвариантных борелевских трансверсальных мер слоения $\mathcal{F}$.

7.6.1 Символическое описание перекладываний отрезков типа Арну–Рози

Начнем с определения *слов Арну–Рози.*

Они были определены в [25] как обобщение штурмовых слов и тесно связаны с перекладываниями отрезков Арну–Рози T_λ^{AR} для $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$. Опишем эту взаимосвязь подробнее.

Напомним стандартное определение из символической динамики:

Определение. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u_0u_1u_2u_3}\ldots$ - бесконечное слово из букв некоторого алфавита $\mathcal{A}$. Фактор w слова $\mathbf{u}$ называется *правым специальным* (или, соответственно, *левым специальным*), если есть две буквы в $a, b \in \mathcal{A}$, $a \neq b$, для которых оба слова wa и wb (соответственно, aw и bw) являются факторами $\mathbf{u}$.

Определение. *Слово Арну–Рози* - это бесконечное слово $\mathbf{u}$, составленное из букв алфавита $\{1, 2, 3\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. слово $\mathbf{u}$ является *рекуррентным*: каждый фактор встречается в этом слове бесконечное число раз ;
2. для любого $n \in \mathbb{N}$, число различных факторов $\mathbf{u}$ длины n равно $2n + 1$;
3. для любого $n \in \mathbb{N}$, существует ровно 1 правый специальный фактор и ровно 1 левый специальный фактор длины n.

С каждой парой (λ, x), где $\lambda \in \Delta$ и $x \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, мы ассоциируем бесконечное слово $\mathbf{u}(\lambda, \mathbf{x})$из букв алфавита $\{1, 2, 3\}$, определенное следующим образом:

$$u_i(\lambda, x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \left(T_\lambda^{AR}\right)^i(x) \in [0, \lambda_1); \\ 2, \text{ если } \left(T_\lambda^{AR}\right)^i(x) \in [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2); \\ 3, \text{ если } \left(T_\lambda^{AR}\right)^i(x) \in [\lambda_1 + \lambda_2, 1). \end{cases}$$

Обозначим через $\widetilde{T}_\lambda^{AR}(x)$ предел $\lim_{y \to x-0} T_\lambda^{AR}(y)$. Аналогично описанному выше определим слово $\widetilde{\mathbf{u}}(\lambda, x)$ из букв алфавита $\{1, 2, 3\}$ таким образом:

$$\widetilde{u}_i(\lambda, x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \left(\widetilde{T}_\lambda^{AR}\right)^i(x) \in (0, \lambda_1]; \\ 2, \text{ если } \left(\widetilde{T}_\lambda^{AR}\right)^i(x) \in (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2]; \\ 3, \text{ если } \left(\widetilde{T}_\lambda^{AR}\right)^i(x) \in (\lambda_1 + \lambda_2, 1]. \end{cases}$$

Легко видеть, что если T_λ^{AR}-орбита точки x регулярна (то есть не содержит концов отрезков непрерывности из определения перекладывания отрезков T_λ^{AR}), то $\mathbf{u}(\lambda, \mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{u}}(\lambda, \mathbf{x})$.

Каждому бесконечному слову $\mathbf{u}$, составленному из букв алфавита $\mathcal{A}$, можно сопоставить символическую динамическую систему $(\Omega(\mathbf{u}), \sigma)$, для которой $\Omega(\mathbf{u})$ - это набор, состоящий из бесконечных слов $\mathbf{w}$, любой фактор каждого из которых является также фактором $\mathbf{u}$, и сдвига $\sigma : \Omega(\mathbf{u}) \to \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u})$:

$$\sigma(u_1u_2u_3u_4\ldots) = u_2u_3u_4\ldots.$$

Множество $\Omega(\mathbf{u})$ снабжено топологией, которая индуцируется из топологии произведения $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Следующее утверждение следует из Предложения 113 и [26], [25], [47]:

Теорема 135. (i) *Слово* $\mathbf{u}(\lambda, \mathbf{x})$ *(или* $\widetilde{\mathbf{u}}(\lambda, x)$*) является словом Арну–Рози, если и только если* $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$.

(ii) *Каждое слово Арну–Рози* $\mathbf{u}$ *имеет вид* $\mathbf{u}(\lambda, \mathbf{x})$ *or* $\widetilde{\mathbf{u}}(\lambda, x)$ *для некоторого* $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$, $x \in \mathbb{S}^1$. *Более того,* λ_1, λ_2, *и* λ_3 *являются частотами соответствующих слов в* $\mathbf{u}$.

(iii) *Если* $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$, *то* $\Omega(\mathbf{u}(\lambda, \mathbf{x})) = \boldsymbol{\Omega}(\widetilde{\mathbf{u}}(\lambda, \mathbf{x})) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{u}(\lambda, \mathbf{y}))$ *для всех* $x, y \in \mathbb{S}^1$.

(iv) *Если* $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$, *то система* $(\Omega(\mathbf{u}(\lambda, \mathbf{x})), \sigma)$ *минимальна и строго эргодична.*

7.6.2 Минимальность

В этом разделе мы докажем утверждение 114.

Напомним определение *регулярных* и *сингулярных* орбит. Орбита отображения T_λ^{AR} называется *сингулярной*, если она содержит точку разрыва отображения T_λ^{AR} (то есть точку из множества $\{0, \lambda_1/2, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2/2, \lambda_1 + \lambda_2, 1 - \lambda_3/2.\}$ В противном случае орбита *регулярна.*

Доказательство. Доказательство опирается на идеи из [25].

Заметим, что если $\lambda \in \Delta \cap \mathbb{Q}$, то все орбиты соответствующего перекладывания отрезков T_λ^{AR} конечны. Поэтому мы будем предполагать, что $\lambda \notin \Delta \cap \mathbb{Q}$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ удовлетворяют строгому неравенству треугольника, то есть $\lambda \in \Delta_0 \backslash \partial\Delta_0$, где

$$\Delta_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Delta : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq \frac{1}{2}.\}$$

Тогда легко видеть, что T_λ^{AR} имеет регулярные орбиты порядка три. Для примера, если $1/2 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, то $\left(T_\lambda^{\mathrm{AR}}\right)^3(x) = x$ для всех $x \in [\lambda_1, 1/2) \cup [\lambda_1 + 1/2, 1)$; см. рис. 7.5. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

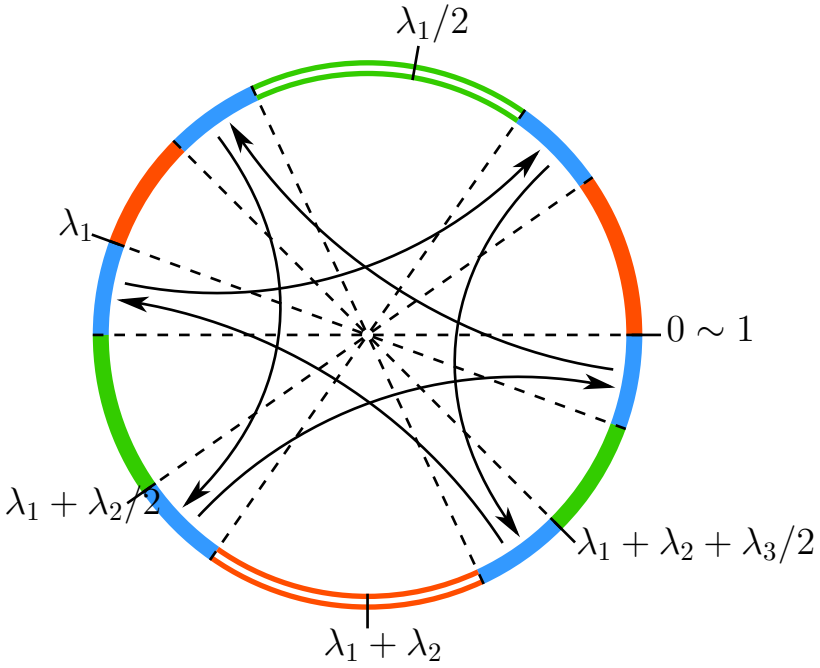


Рис. 7.5: Неминимальные T_λ^{AR}. Голубым выделено объединение орбит порядка 3; красным и зеленым отмечены инвариантные подмножества T_λ^{AR}.

Если $\lambda \in \partial\Delta$, то легко видеть, что T_λ^{AR} не минимально и не имеет конечных орбит. Например, если $\lambda_3 = 0$, то отрезок $\big[\lambda_1/2, (\lambda_1+1)/2\big)$ и его дополнение в $\mathbb{S}^1$ инвариантны относительно T_λ^{AR}, и ограничение T_λ^{AR} на каждое из инвариантных подмножеств сопряжено с иррациональным вращением, поэтому все орбиты бесконечны.

В общем случае мы применим модифицированную индукцию Рози. А именно, для $\lambda \in f_i(\Delta)$, $i = 1, 2, 3$, перекладывания отрезков T_λ^{AR} и $T_{f_i^{-1}(\lambda)}^{AR}$ имеют одинаковые динамические свойства. В самом деле, пусть $\lambda = f_1(\lambda')$, $\lambda' \in \Delta$. Это означает, что $\lambda_1 \geqslant 1/2$. Каждая орбита попадает на $[0, \lambda_1)$, так как из условия $x \in [\lambda_1, 1)$ следует, что $T_\lambda^{\mathrm{AR}}(x) \in [0, \lambda_1)$. Определим $T : [0, \lambda_1) \to [0, \lambda_1)$ следующим образом:

$$T(x) = \begin{cases} T_\lambda^{\mathrm{AR}}(x), & \text{если } T_\lambda^{\mathrm{AR}}(x) \in [0, \lambda_1), \\ T_\lambda^{\mathrm{AR}}\big(T_\lambda^{\mathrm{AR}}(x)\big), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Склеим точки λ_1 и 0, тогда перекладывание отрезков T можно рассматривать как отображение окружности $\mathbb{R}/(\lambda_1\mathbb{Z})$. Теперь легко проверить, что T сопряжено с $T_{\lambda'}^{AR}$, и сопрягающее отображение расширяет лебегову меру в $1/\lambda_1$ раз.

Если $i = 2$ или 3, можно заменить $[0, \lambda_1)$ на $[\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$ или $[\lambda_1 + \lambda_2, 1)$, соответственно, в конструкции T.

Если $\lambda \notin \mathcal{R}$, тогда, для некоторой конечной последовательности $\boldsymbol{i}$ с элементами из $\{1,2,3\}$, мы получаем $\lambda \in f_{\boldsymbol{i}}(\Delta_0 \setminus \partial\Delta_0)$, и следовательно T_λ^{AR} имеет регулярные конечные орбиты.

Если $\lambda \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_{irr}$, то существует конечная последовательность $\boldsymbol{i}$ такая, что $\lambda \in f_{\boldsymbol{i}}(\partial\Delta)$, и, следовательно, T_λ^{AR} не минимально и не имеет регулярных конечных орбит.

Чтобы убедиться, что T_λ^{AR} минимально для всех $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$, рассмотрим измеримое слоение, для которого T_λ^{AR} – это отображение Пуанкаре. Для $\lambda \in \Delta$, определим $\Sigma_\lambda^{\mathrm{AR}}$ как поверхность, полученную из цилиндра вида $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ с помощью склейки $(x,1)$ с $(T_\lambda^{AR}(x),0)$ для всех $x \in \mathbb{S}$ (см. верхний рисунок на 7.6).

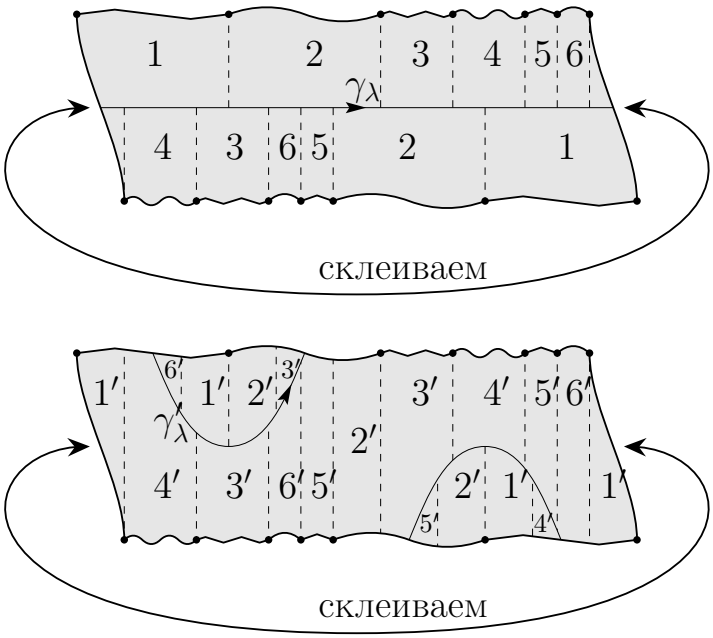


Рис. 7.6: Шаг индукции Рози

На этой поверхности определено измеримое слоение с особыми точками , которое мы обозначим $\mathcal{F}_\lambda^{AR}$, которое получается при склейке из вертикального слоения $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$, определенного на цилиндрах дугами $\{x\} \times [0,1]$. Легко видеть, что для $\lambda \notin \partial\Delta$, поверхность Σ_λ^{AR} – это ориентируемая компактная поверхность рода 3, и слоение $\mathcal{F}_\lambda^{AR}$ имеет две особые точки, каждая из которых является обезьяньим седлом. Отображение Пуанкаре этого слоения на трансверсаль $\gamma_\lambda = \mathbb{S}^1 \times \{1/2\}$ (за исключением 6 точек, где это отображение не определено) – это в точности T_λ^{AR}. Разрезание на 6 полос, отвечающих 6 интервалам непре-

рывности этого перекладывания отрезков, изображено на рисунке пунктирными линиями.

Минимальность отображения T_λ^{AR} эквивалетно минимальности слоения $\mathcal{F}_\lambda^{AR}$, поэтому мы будем доказывать только минимальность слоения.

Предположим, что $\lambda \in f_i(\mathcal{R}_{irr})$. Как мы уже видели, существует подотрезок γ_λ такой, что отображение первого возвращения для T_λ^{AR} на этот подотрезок эквивалетно (после склейки концов и умножения на константу) отображению $T^{AR}_{f_i^{-1}(\lambda)}$. Это означает, что существует замкнутая трансверсаль γ'_λ, для которой отображение Пуанкаре, индуцированное $\mathcal{F}_\lambda$, эквивалентно, после умножения на константу, отображению $T^{AR}_{f_i^{-1}(\lambda)}$. Такая трансверсаль показана на нижней части рис. 7.6 в случае $i = 1$, и там же приведено новое разбиение на отрезки непрерывности.

Следовательно, существует гомеоморфизм $\Sigma_\lambda \to \Sigma_{f_i^{-1}(\lambda)}$, который отображение слоение $\mathcal{F}_\lambda$ в слоение $\mathcal{F}_{f_i^{-1}(\lambda)}$, трансверсаль γ'_λ в трансверсаль $\gamma_{f_i^{-1}(\lambda)}$, и меру Лебега γ'_λ в меру Лебега $\gamma_{f_i^{-1}(\lambda)}$, умноженную на константу λ_i.

Пусть $i_1 i_2 i_3 \ldots$ – это направляющее слово для λ. Действуя по индукции, мы можем найти замкнутую трансверсаль γ_k для слоения $\mathcal{F}_\lambda$, отображение Пуанкаре на которую эквивалентно (после умножения на константу) отображению $T^{AR}_{f^{-1}_{i_1\ldots i_k}(\lambda)}$. Ренормализующий коэффициент

$$\lambda_{i_1} \cdot \prod_{j=2}^{k} \left(f^{-1}_{i_1\ldots i_{j-1}}(\lambda)\right)_{i_j}. \tag{7.7}$$

Легко видеть, что если $i_j \neq i_{j+1}$, то $\left(f^{-1}_{i_1\ldots i_{j-1}}(\lambda)\right)_{i_j} \leqslant 3/4$. Следовательно, трансверсальная мера γ_k, которая равно (7.7), стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности.

Предположим, что $\mathcal{F}_\lambda$ имеет седловую связку α. Тогда, для некоторого k, трансверсаль γ_k пересекает α ровно один раз. Это означает, что образ какой-то точки разрыва отображения $T^{\mathrm{AR}}_{\lambda'}$ тоже является точкой разрыва, где $\lambda' = f^{-1}_{i_1\ldots i_k}(\lambda)$. Легко проверить, что такое не может произойти, если $\lambda' \in \mathcal{R}_{irr}$, поэтому мы пришли к противоречию, а значит, $\mathcal{F}_\lambda$ не имеет седловых связок.

Для измеримого слоения с особенностями на связной компактной поверхности отсутствие седловых связок влечет минимальность (это утверждение следует из теоремы Кина).

□

7.6.3 Строгая эргодичность перекладываний отрезков типа Арну–Рози

Начнем со следующего наблюдения:

Теорема 136. *Для любого $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$, для которого направляющее слово является рекуррентным, перекладывание отрезков $T^{AR}(\lambda)$ является строго эргодичным: dim $\mathcal{M}(\mathcal{F}_\lambda^{AR})$ =1.*

Доказательство. По построению, существует замкнутая трансверсаль $\gamma_\lambda \subset \Sigma_\lambda = \Sigma_\lambda^{\mathrm{AR}}$ для слоения $\mathcal{F}_\lambda$ такая, что отображение Пуанкаре первого возвращения для слоения $\mathcal{F}_\lambda$ на γ_λ совпадает с T_λ^{AR} после идентификации γ_λ с окружностью $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Пусть $\lambda \in f_i(\mathcal{R}_{irr})$.

Напомним, что отображение T_λ^{AR} является композицией перекладывания отрезков с перестановкой $(12)(34)(56)$ и длинами отрезков $(\lambda_1/2, \lambda_1/2, \lambda_2/2, \lambda_2/2, \lambda_3/2, \lambda_3/2)$ и поворота на $1/2$. Как известно, любая инвариантная относительно перекладывания отрезков мера полностью определяется мерами отрезков непрерывности (см. [21, Предложение 4.2 в Главе 1]; это также следует из [85, Lemma 1]).

Следовательно, так как отображение T_λ^{AR} является минимальным, любая инвариантная мера $\mu \in \mathscr{M}(\mathcal{F}_\lambda)$ полностью задается следующим набором из 7 параметров:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \mu([0, \lambda_1/2]),\\
x_2 &= \mu([\lambda_1/2, \lambda_1]),\\
x_3 &= \mu([\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2/2]),\\
x_4 &= \mu([\lambda_1 + \lambda_2/2, \lambda_1 + \lambda_2]),\\
x_5 &= \mu([\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3/2],\\
x_6 &= \mu([\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3/2, 1]),\\
x_7 &= \mu([0, 1/2]) - x_1 - x_3 - x_5,
\end{aligned}
$$

которые удовлетворяют такому условию:

$$
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 > 0, \quad |x_7| < \sum_{j=1}^{6} x_j. \tag{7.8}
$$

Как мы видели при доказательстве предыдущего утверждения, существует гомеоморфизм $\varphi : \Sigma_\lambda \to \Sigma_{f_i^{-1}(\lambda)}$, отображающий слоение $\mathcal{F}_\lambda$ в слоение $\mathcal{F}_{f_i^{-1}(\lambda)}$.

Пусть x'_i, $i = 1, \ldots, 7$ - это набор из 7 параметров, определенный аналогичным образом для меры $\varphi_*(\mu)$, инвариантной для слоения $\mathcal{F}_{f_i^{-1}(\lambda)}$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что наборы $x = (x_1, \ldots, x_7)^\top$ и $x' = (x'_1, \ldots, x'_7)^\top$ связаны следующим образом:

$$x = \widetilde{N}_i x',$$

где

$$\widetilde{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{N}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{N}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь пусть $\boldsymbol{i} = i_1 i_2 i_3 \ldots$ будет направляющим словом для λ. Легко видеть (по индукции), что

$$x = \widetilde{N}_{i_1} \widetilde{N}_{i_2} \ldots \widetilde{N}_{i_k} x^{(k)}, \tag{7.9}$$

где координаты вектора $x^{(k)} \in \mathbb{R}^7$ также удовлетворяют (7.8). В частности, мы имеем $x_7 = x_7^{(1)} = x_7^{(2)} = \ldots$, из чего следует $|x_7| < \sum_{i=1}^6 x_i^{(k)}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Можно заметить, что $\sum_{i=1}^6 x_i^{(k)}$ стремится к нулю, когда k стремится к бесконечности, а значит, $x_7 = 0$. Поэтому последняя координата каждого вектора $x^{(k)}$ равно нулю; следовательно, равенство (7.9) останется верным, если все элементы последнего столбца каждой матрицы $\widetilde{N}_i$ заменить нулями.

Для $i = 1, 2, 3$, положим, что N_i – это матрица, полученная из $\widetilde{N}_i$ удалением последней строки и последнего столбца. Через X_k для $k \in \mathbb{N}$ обозначим образ положительного конуса $\mathbb{R}^6_{>0}$ под действием линейного отображения $N_{i_1} N_{i_2} \dots N_{i_k}$. Тогда мы имеем $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in X_k$ для всех k.

Легко видеть, что все компоненты $N_1 N_2 N_3 N_1 N_2$ сторого положительны. То же самое верно для любой матрицы вида $N_{j_1} N_{j_2} \dots N_{j_m}$, при условии что

последовательность $j_1 j_2 \dots j_m$ содержит подпоследовательность $j_{k_1} j_{k_2} j_{k_3} j_{k_4} j_{k_5} =$ '12312' (7.10)

(числа k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 не обязательно идут подряд), так как каждая N_i имеет форму

$$\mathbb{1}_6 + \text{матрица с неотрицательными коэффициентами},$$

где $\mathbb{1}_6$ обозначает единичную 6×6-матрицу. Линейное отображение, определенное такой матрицей на $\mathbb{R}^6_{>0}$, является сжимающим в гильбертовой метрике с коэффициентом сжатия меньше 1.

Так как каждая буква из $\{1, 2, 3\}$ встречается в $\boldsymbol{i}$ бесконечно часто, существует фактор $\boldsymbol{j} = j_1 j_2 \dots j_m$ слова $\boldsymbol{i}$, удовлетворяющий (7.10). Так как $\boldsymbol{i}$ рекуррентно, фактор $\boldsymbol{j}$ появляется в $\boldsymbol{i}$ бесконечно часто, а это означает, что $\cap_{k=1}^{\infty} X_k$ – это луч. Из этого следует, что x определяется направляющим словом $\boldsymbol{i}$ однозначно с точностью до ренормализации, а это эквивалентно тому, что T_λ^{AR} (или, что то же, $\mathscr{F}_\lambda$) строго эргодично.

□

Следствие 137. *Для почти всех (по отношению к $\mu_{\mathcal{R}}$) $\lambda \in \mathcal{R}$ перекладывание отрезков $T^{AR}_{\lambda(x)}$ строго эргодично.*

7.6.4 Оценка сверху на число инвариантных мер

Предложение 138. *Почти все перекладывания отрезков типа Арну–Рози допускают не более 2 инвариантных эргодических мер.*

Доказательство. Существует инволюция Ψ на множестве мер $\mathcal{M}(\mathcal{F}^{AR}_\lambda)$, заданная в терминах параметров $x_1, \dots, x_6$, введенных в доказательстве теоремы 136 с помощью перестановки $(12)(34)(56)$. Если $\lambda \in \mathcal{R}_{irr}$, то любая мера $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{F}^{AR}_\lambda)$,

инвариантная относительно Ψ, может быть отождествлена с введенной выше символической динамической системой $(\Omega(\lambda), \sigma)$. Эта система является строго эргодичной.

Поэтому кратность собственного значения 1 инволюции Ψ равна 1, в то время как кратность значения -1 не может быть больше. Следовательно, $\dim \mathcal{M}(\mathcal{F}_\lambda^{AR}) \leqslant 2$. □

7.6.5 Связь перекладываний отрезков типа Арну–Рози и хаотических слоений

В работе [65] подробно описана связь перекладываний отрезков типа Арну–Рози и других моделей хаотических режимов в задаче Новикова для случая симметричной поверхности рода три с двумя двойными седлами. В частности, Теорема 1.1 – утверждение об эквивалетности конструкции, использованной в работе [63], описанной выше пары (поверхность + слоение), которая строится по системе изометрий тонкого типа, стандартного (в смысле Вича) слоения и поверхности, построенных по перекладыванию отрезков типа Арну-Рози, а также слоения на $\mathbb{R}P^2$, конструкция которого обобщает пример Арну-Йоккоза.

Глава 8

Слоение абсолютных периодов для вещественно-нормированных дифференциалов с полюсом порядка 2

8.1 Вещественно-нормированные дифференциалы с полюсом порядка 2

Общее понятие вещественно-нормированных дифференциалов было определено в [10] в связи со спектральной теорией периодических линейных операторов.

Определение. Мероморфный дифференциал на римановой поверхности называется *вещественно-нормированным,* если все его периоды – действительные. .

Вещественно-нормированные дифференциалы тесно связаны с понятием гармонических функций на римановой поверхности с отмеченными точками. В самом деле, по определению мнимая часть

$$y(p) := \Im \int^p d\zeta$$

абелева интеграла вещественно-нормированного дифференциала $d\zeta$ является гармонической функцией, принимающей единственной значение (с точностью до добавления константы).

И наоборот, пусть $y(p)$ –это вещественно-значная гармоническая функция на римановой поверхности с проколами; тогда локально существует единственная (с точностью до добавления константы) сопряженная гармоническая функция $x(p)$. Следовательно, $y(p)$ однозначно определяет дифференциал $d\zeta = dx + idy$, который, по построению, является вещественно-нормированным голоморфным дифференциалом на дополнении к отмеченным точкам римановой поверхности. Доопределим асимптотическое поведение функции $y(p)$ рядом с отмеченной точкой, потребовав, чтобы $d\zeta$ продолжилось до мероморфного дифференциала на римановой поверхности и имело заданное значение в отмеченных точках.

Определение. *Главной частью* мероморфного дифференциала в точке p римановой поверхности C называется класс эквивалетности мероморфных дифференциалов ω в окрестности p, для которого отношение эквивалетности задано так: $\omega \sim \omega'$ если и только если $\omega' - \omega$ голоморфно в p.

Невырожденность мнимой части римановой матрицы b-периодов нормированного голоморфного дифференциала на гладкой алгебраической кривой рода g гарантирует, что верно следующее

Предложение 139. *Для любых главных частей полюсов с чисто мнимыми вычетами, сумма которых равна нулю, существует единственный вещественно-нормированный дифференциал $d\zeta$, имеющий заданные главные части в полюсах.*

Вещественно-нормированные дифференциалы играют центральную роль в теории возмущений Уитхема алгебро-геометрических решений интегрируемых систем [11, 94]. Любое пространство дифференциалов расслоено на локусы дифференциалов, имеющих заданный вектор периодов (слоение абсолютных периодов). Это слоение для голоморфных дифференциалов, подробно описанное в Главе 1, играет важную роль в описании динамики потока Тейхмюллера на пространстве Тейхмюллера. Этот поток сохраняет стратификацию на пространстве дифференциалов, которая определяется порядком их нулей. В теории Уитхэма было показано ([62, 93, 94]), что слои слоения абсолютных периодов для мероморфных

дифференциалов имеют структуру фробениусовых многообразий. Этот факт может рассматриваться как геометрическое выражение идей топологической квантовой теории поля. Нашей целью является изучение стратификации и слоения абсолютных периодов с единственным полюсом второго порядка с помощью комбинаторной модели - так называемых диаграмм с разрезами.

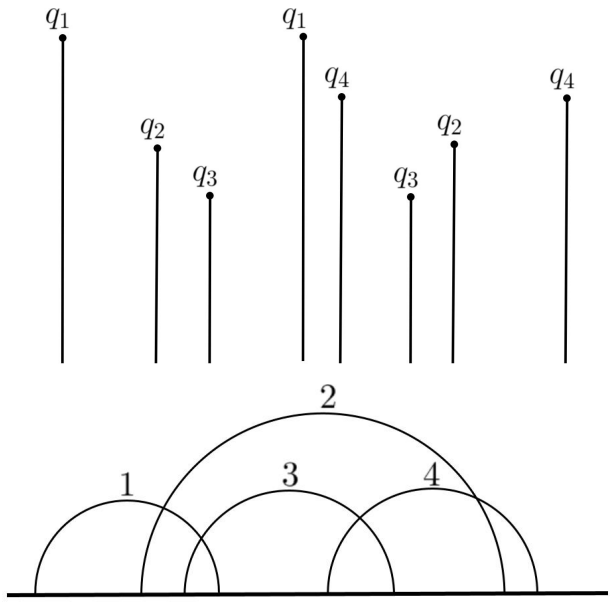
8.2 Комбинаторная модель для пространства вещественно-нормированных дифференциалов общего положения

Пусть ϕ - мероморфный дифференциал на римановой поверхности C и q - точка общего положения (не ноль и не полюс). Рассмотрим касательное пространство к C в точке q и зафиксируем там прямую, касательную к ростку кривой, заданной уравнением $\mathcal{R}\int_q^z \phi = 0$ (здесь

$$\mathcal{R}$$

означает действительную часть). Зададим ориентацию на этой прямой так, что мнимая часть $\mathcal{I}\int_q^z \phi$ возрастает. Такие прямые задают гладкое линейное векторное поле, которое можно определить везде, кроме нулей и полюсов ϕ и доопределить естественным образом в нулях ϕ.

Будем считать, что ϕ - вещественно - нормированный дифференциал общего положения (с полюсом второго порядка); под этим мы подразумеваем, что, во-первых, все нули ϕ простые (и, соответственно, их ровно $2g$), а во-вторых, что интегралы ϕ по соединяющим любую пару нулей путям не являются чисто мнимыми. Каждый ноль соединяется с полюсом двумя интегральными кривыми линейного векторного поля I_ϕ. Разрежем поверхность C вдоль половин этих кривых, входящих в соответствующий ноль. Полученную поверхность будем называть *поверхностью с разрезами*. Выберем точку A на поверхности с разрезами C и введем координаты $\int_A^x C$ на этой поверхности; тогда поверхность можно идентифицировать с комплексной прямой $\mathbb{C}$, на которой отмечены $4g$ попарно различные точки, разбитые на $2g$ пар так, что в каждой паре точки находятся на одном уровне по вертикали, и которая разрезана $4g$ вертикальными лучами, выходящими из отмеченных точек. Исходную поверхность из этой модели с вертикальными разрезами



a) b)

Рис. 8.1: (a) Диаграмма с разрезами (b) и соответствующая дуговая диаграмма

можно восстановить, склеив противоположные берега каждой пары разрезов.

Соответственно, если задана комплексная прямая $\mathbb{C}$ с $2g$ парами различных точек $(p_i, q_i)(i = 1, \cdots, 2g)$, для которых в каждой паре точки имеют одинаковую мнимую часть, а у точек из разных пар мнимые части различаются, то можно сделать вертикальные разрезы, соединяющие каждую из точек p_i, q_i с бесконечностью, и склеить противоположные берега разрезов. Тогда мероморфный дифференциал dz индуцирует на полученной после склейки поверхности $C(p, q)$ дифференциал ϕ, который будет вещественно-нормированным.

Однако, сформулированных выше требований недостаточно для того, что гарантировать, что у этого дифференциала ϕ будет ровно один полюс второго порядка - необходимо ввести дополнительное условие невырожденности, которое удобнее всего описать на языке *дуговых диаграмм*. Рассмотрим горизонтальную прямую в $\mathbb{C}$, расположенную достаточно низко для того, чтобы каждый из $4g$ разрезов пересек ее. Тогда мы имеем $4g$ точек пересечения, которые разбиты на $2g$ пар. Утверждение о том, что у соответствующего дифференциала ϕ ровно один полюс второго порядка эквивалентно следующему свойству: если мы разрежем и переклеим эту прямую в соответствии со схемой, предписанной ϕ (когда мы приклеиваем левый берег одного разреза из пары к правому берегу другого), то снова получим связную прямую (а не объединение непересекающихся лучей и

окружностей).

Дуговая диаграмма получается, если мы соединяем дугой в $\mathbb{C}$ две точки пересечения прямой с разрезами, которые отвечают разрезам, выпущенным из точек из одной пары. Дуги пересекаются, если их концы на прямой чередуются. С каждой дуговой диаграммой можно ассоциировать *граф пересечений*, вершинами которого будут дуги, а ребро соединяет две вершины, если и только если соответствующие этим вершинам дуги пересекаются. Тогда условие невырожденности формулируется в терминах матрицы смежности этого графа ([40], [121]):

Предложение 140. *Результат разрезания и переклейки горизонтальной линии является связной прямой, если и только если матрица смежности графа пересечений невырождена над* $\mathbb{F}_2$.

8.3 Основные результаты

Для вещественно-нормированного дифференциала ϕ на римановой поверхности C обозначим через L_ϕ подгруппу по сложению в $\mathbb{R}$, состоящую из периодов ϕ. Для дифференциала общего положения ϕ подгруппа L_ϕ порождается целочисленными линейными комбинациями чисел $p_i - q_i, i = 1, \cdots, 2g$. Поэтому подгруппа L_ϕ плотна в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда хотя бы два периода ϕ рационально несоизмеримы. Если все периоды рационально несоизмеримы (то есть L_ϕ является $\mathbb{Z}$ - модулем ранга $2g$, дифференциал будет называться *полностью несоизмеримым.*

Обозначим через $\mathcal{R}_g$ пространство вещественно-нормированных мероморфных дифференциалов с единственным полюсом второго порядка на поверхностях рода g. Для каждой аддитивной подгруппы $L \subset \mathbb{R}$, у которой не более $2g$ порождающих, рассмотрим локус $\mathcal{A}_L \subset \mathcal{R}_g$ слоения периодов в $\mathcal{R}_g$, состоящий из тех вещественно - нормированных дифференциалов ϕ, для которых $L_\phi = L$.

Верно следующее

Теорема 141. *Для плотной подгруппы периодов* $L \subset \mathbb{R}$, *локус* $A_L \subset \mathcal{R}_g$ *плотен в* $\mathcal{R}_g$.

Кроме того,

Теорема 142. *Для полностью несозимеримого дифференциала ϕ локус A_{L_ϕ} содержит по меньшей мере столько же связных компонент, сколько имеет множество классов сопряженности $GL(2g,\mathbb{Z})/Sp(2g,\mathbb{Z})$. В частности, для поверхности рода 1 связных компонент будет 2, а для поверхностей рода больше 1 их число будет бесконечным.*

Замечание 33. Из этой теоремы следует важное отличие вещественно-нормированного от голоморфного случая: типичный локус изопериодического слоение для абелевых дифференциалов связен, а в нашем случае он состоит из бесконечного числа связных компонент.

Доказательства теорем 141 и 142 используют язык дуговых диаграмм и опираются на изучение комбинаторных свойств алгоритма ренормализации, который в этом случае может быть представлен как аналог *второго движения Васильева* для дуговых диаграмм. Подробно они изложены в следующих разделах.

Вопросы об эргодичности соответствующего слоения и о геометрии замыкания его слоев остаются открытыми.

8.4 Доказательство теоремы 141

Заметим, что если подгруппа L с по крайней мере $2g$ порождающими плотна как $\mathbb{Z}$-модуль в $\mathbb{R}$, то подмножество в $\mathbb{R}^{2g}$, состоящее из векторов $(a_1,\dots,a_{2g})$, таких, что набор $\{a_1,\dots,a_{2g}\}$ длины $2g$, составленный из их координат, порождает L, является плотным в $\mathbb{R}^{2g}$. Теперь мы можем взять произвольный дифференциал общего вида $\phi \in \mathbb{R}_g$, тогда в любой его окрестности можно найти 1-форму общего вида, у которой дуговая диаграмма совпадает с диаграммой ϕ, а группа периодов совпадает с L: для этого достаточно заменить набор из $2g$ элементов, задающих абсолютные периодоы ϕ, на достаточно близкий набор из $2g$ элементов общего положения, порождающих группу L.

8.5 Доказательство теоремы 142

Начнем с простого наблюдения: пусть зафиксирована комбинаторная модель (мы будем ее называть *диаграммой с разрезами*); если мы сдвигаем пару разрезов

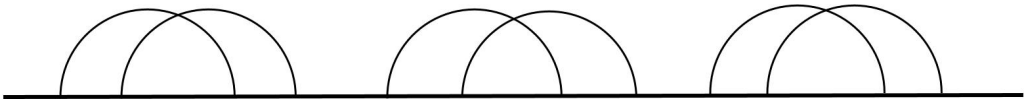


Рис. 8.2: Караван из 3 дуг

по вертикали (то есть изменяем мнимые части особых точек), подгруппа периодов L_ϕ, отвечающая 1-форме ϕ, остается неизменной. Отсюда следует, что любую диаграмму с разрезами можно соединить с помощью непрерывного пути в локусе A_{L_ϕ} с такой диаграммой с разрезами, у которой все ее особые точки (концы разрезов) имеют одинаковую мнимую часть, то есть находятся на одной высоте. Без ограничения общности можно считать, что эта мнимая часть равна 0. Из аналогичных соображений понятно, что разрезы можно двигать друг относительно друга горизонтально, не покидая локуса A_{L_ϕ}, до тех пор пока два разреза не перекрываются.

Назовем *g-караваном* дуговую диаграмму, составленную из g последовательных пар дуг слева направо, такую, что дуги в каждой паре пересекаются друг с другом и не пересекаются с другими дугами. Диаграмма с разрезами, для которой отвечающая ей дуговая диаграмма является g-караваном, называется *g-караваном с разрезами*, а построенная по ней поверхность с разрезами называется *поверхностью g-каравана*. Пример каравана изображен на рисунке 8.2.

Докажем следующее

Предложение 143. *Для полностью несозимеримой подгруппы периодов L_ϕ каждая поверхность с разрезами в общем положении может быть связана непрерывным путем в локусе периодов A_{L_ϕ}, которому она принадлежит, с поверхностью g-каравана.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму с разрезами, у которой мнимые части у сингулярных точек равны 0. Двигая горизонтально пары соответствующих разрезов, например, в положительную сторону мы остаемся на том же слое слоения периодов, и эта ситуация не меняется, даже если в какой-то момент два разреза совпадают (а условие общего положения тем самым нарушается). Так как мы потребовали, чтобы подгруппа периодов 1-формы ϕ была полностью несоизмеримой, мы точно знаем, что если при таком горизонтальном сдвиге разрезы в двух парах совпадут, вторые разрезы в этих парах совпасть не смогут. Поэтому, если

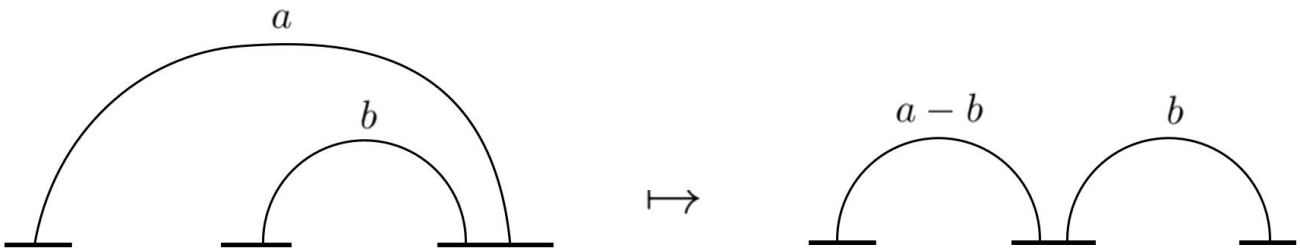


Рис. 8.3: Ренормализация: при движении дуги a налево правый конец этой дуги переходит на левый конец внутренней дуги b

мы продолжим то же горизонтальное движение, разрез, наскочивший на разрез из другой пары, перепрыгнет на другой берег второго разреза из этой же пары и продолжит движение.

Посмотрим, что при этом произойдет с диаграммой с разрезами и отвечающей ей дуговой диаграммой. Дуговая диаграмма перестроится в соответствии с так называемым *вторым движением Васильева*: один конец дуги скользит вдоль другой дуги. В [38] показано, что для любой невырожденной дуговой диаграммы из $2g$ дуг существует последовательность вторых движений Васильева, превращающих ее в g-караван. Нам нужно адаптировать доказательство этого утверждения к нашей ситуации, чтобы отразить наличие длин - расстояний между концами дуг. Сделаем это следующим образом.

Шаг 1. Возьмем дугу с самым левым концом и начнем двигать ее влево так, что концы остальных дуг не двигались. Будем продолжать движение до того момента, когда правый конец той дуги, которую мы двигали, наткнется на конец какой-то другой дуги (это произойдет, потому что они все на одной высоте). Если две эти дуги не пересекаются во внутренних точках (такое может быть, если правый конец первой дуги натолкнулся на правый конец второй), можно применить второе движение Васильева к первой дуге относительно второй дуги и повторить процесс. Так как дуговая диаграмма невырождена, то в конце концов мы придем к ситуации, когда две дуги пересекаются в какой-то внутренней точке. В этот момент мы начнем двигать эти две пересекающиеся дуги влево так, чтобы отделить эту пару от остальных дуг.

Шаг 2. Теперь мы имеем две пересекающиеся дуги, одна из которых имеет самый левый конец (на дуговой диаграмме), при этом левый конец второй дуги является левым соседом правого конца первой дуги. Назовем отрезок между ле-

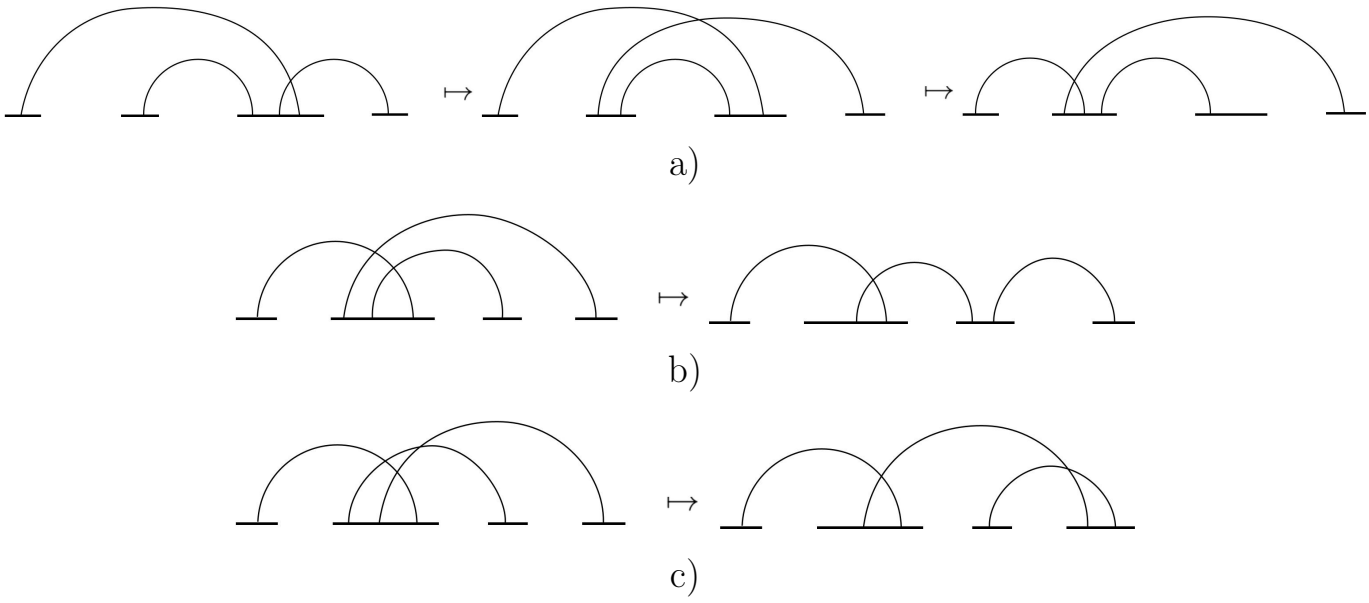


Рис. 8.4: Случай 2.1, шаг 2

выми концами первой и второй дуги левым интервалом, а отрезок между правыми концами этих дуг - правым интервалом. Когда мы двигаем две пересекающиеся дуги с соседними концами влево, конец другой дуги может натолкнуться либо на левый, либо на правый конец второй дуги из рассматриваемой нами пары (рис. 8.4).

Случай 2.1 Разберем сначала первый случай, когда конец новой дуги попал на левый интервал (рис. 8.4, возможны три варианта). В этом случае мы применяем второе движение Васильева к этой новой (третьей) дуге, ее конец скользит по второй дуге. В результате число концов дуг на левом интервале уменьшается, а на правом не растет.

Случай 2.2. Пусть теперь конец новой дуги попадает на правый интервал. Если этот конец был правым концом новой дуги, то можно применить снова второе движение Васильева, правый конец второй дуги будет скользить вдоль третьей дуги. В результате число концов на правом отрезке уменьшится по крайней мере на 2, а на левом не изменится. Если же этот конец был левым концом, то есть вторая и третья дуга не пересекаются, то двигая с помощью второго движения Васильева левый конец третьей дуги вдоль второй дуги, мы переместим этот конец с правого интервала на левый. В результате число концов на правом интервале уменьшится на 1, а на левом увеличится на 1.

Таким образом, уменьшается либо общее число концов дуг на левом и правом интервале, либо число концов дуг на правом интервале, поэтому можно продол-

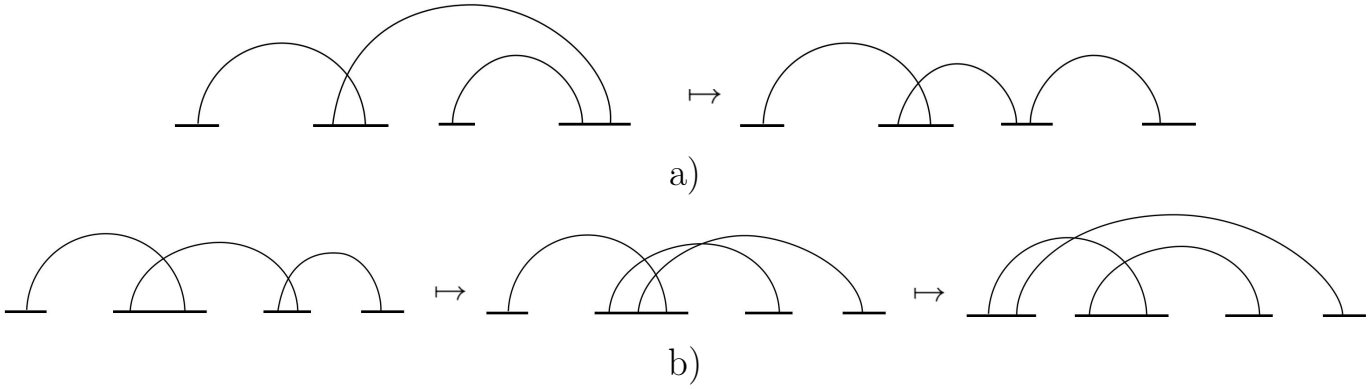


Рис. 8.5: Случай 2.2, шаг 2

жить по индукции и отделить сцепленную пару из первой и второй дуги так, чтобы остальные с ними не пересекались.

Продолжим этот процесс и отцепим одну за другой g пар попарно сцепленных дуг, в результате получим g-караван и, соответственно, поверхность g-каравана, соединенную с нашей исходной поверхностью с разрезами, принадлежащую тому же слою слоения абсолютных периодов. Предложение доказано. □

Вернемся теперь к доказательству теоремы 142. Заметим сначала, что для полностью несоизмеримой 1-формы ϕ, любой g-караван в локусе A_{L_ϕ} определяет базис в $\mathbb{Z}$-модуле L_ϕ: базис состоит из длин дуг, пронумерованных слева направо. Любые два таких базиса связаны с помощью единственного линейного преобразования $GL(2g, \mathbb{Z})$. С другой стороны, любой g-караван определяет базис в первых гомологиях соответствующей двумерной поверхности с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, и матрица перехода в гомологиях от одного базиса к другому принадлежит группе $Sp(2g, \mathbb{Z})$. Следовательно, множество связных компонент локуса A_{L_ϕ} по меньшей мере так же велико, как и $GL(2g, \mathbb{Z})/Sp(2g, \mathbb{Z})$. Наконец, для $g = 1$, любой элемент в $Sp(2, \mathbb{Z})$ может быть представлен в виде произведения последовательности матриц, отвечающих второму движению Васильева. Чтобы убедиться в этом, заметим, следующее множество симплектических матриц является множеством порождающих симплектической группы $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$: $\{A_i, B_i\}$. Здесь A_i, $i = 1, \ldots, g$, - это матрица из блоков размером 2×2, у которой все блоки, кроме i ого – это единичные матрицы, в то время как i й блок записывается так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица B_i, $i = 1, 2, \ldots, g-1$ - это сумма единичной матрицы и кососимметрической матрицы, у которой все компоненты, кроме двух, – нули, на месте $(2i, 2i+2)$ стоит 1 и на месте $(2i+1, 2i-1)$ стоит -1. Например, матрица B_1, для $g = 2$, это

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A_i реализуются вторым движением Васильева для i ой пары в g-караване, а матрицы B_i реализуются последовательностью движений Васильева (см. рис. 8.6). Теорема 142 доказана.

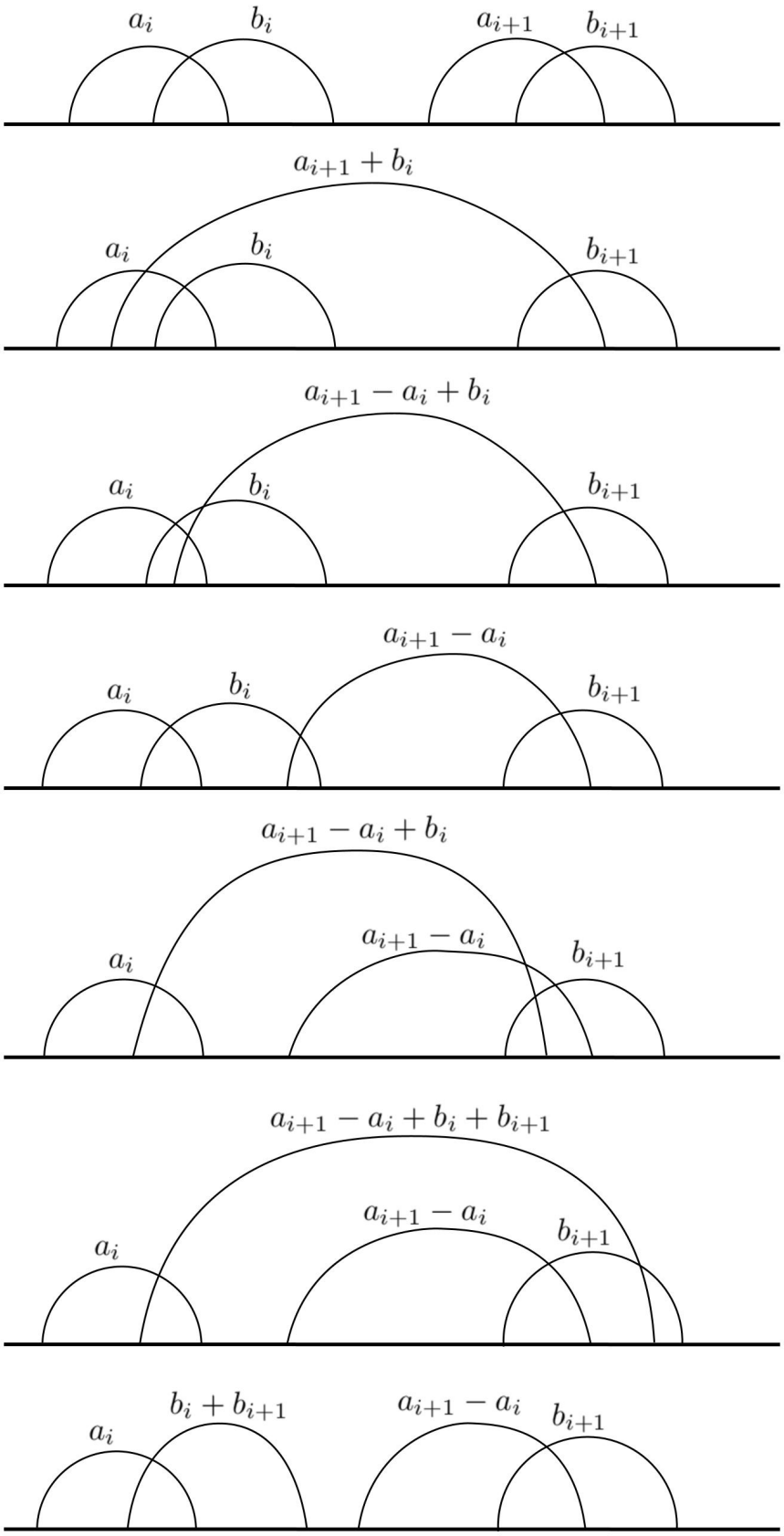


Рис. 8.6: Последовательность движений Васильева, реализующих матрицу B_i

Глава 9

Заключение

9.1 Основные результаты диссертации

Основные результаты диссертации касаются динамических и геометрических свойств различных классов перекладываний отрезков и их обобщений, а также связанных с этими отображениями слоений на поверхностях, ленточных комплексах и в пространствах модулей.

Центральным результатом является является разработка ренормализационных методов, позволяющих исследовать эргодические, геометрические и топологические свойства широкого класса динамических систем, включающего в себя различные обобщения перекладываний отрезков и семейства перекладываний отрезков, не удовлятворяющих условию рациональной несоизмеримости длин.

Например, подробное описание динамических свойств перекладываний отрезков типа Арну–Рози с использованием нескольких различных алгоритмов ренормализации (индукции Рози и ее ускорений, машины Рипса и др.). В частности, построена естественная мера, носителем которой является множество параметров, задающее минимальные перекладывания отрезков типа Арну - Рози, и доказано, что почти все перекладывания отрезков по отношению к этой мере являются строго эргодичными, но допускают не более 2 инвариантных мер. Кроме этого, благодаря взаимосвязям между перекладываниями отрезков типа Арну–Рози и хаотическими режимами в задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3-периодических поверхностей, для наиболее простого случая поверхности рода 3 с двумя двойными седлами доказаны оценки на скорость диф-

фузии хаотической траектории и получены оценки на хаусдорфову размерность множества параметров, задающих хаотические режимы.

Наряду с перечисленными, к ключевыми результатам диссертации относятся следующие:

- доказана верхняя оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами;
- теорема Марми - Мусса - Йоккоза о когомологических уравнениях для перекладываний отрезков обобщена для неприводимых линейных инволюций;
- построена новая ренормализация для отображений сдвигов отрезков Бруина - Трубецкого; построена мера, инвариантная относительно этой ренормализации, носителем которой является множество параметров, задающих отображения Бруина - Трубецкого бесконечного типа; доказано, что типичные (по отношению к этой мере) отображения сдвигов отрезков Бруина - Трубецкого бесконечного типа являются строго эргодичными;
- аналогичный результат получен для двойных вращений - с использованием описанной совместно с соавторами ренормализации автором построена мера, инвариантная относительно этой ренормализации, носителем которой является множество параметров, задающих двойные вращения бесконечного типа; доказано, что типичные (по отношению к этой мере) двойные вращения бесконечного типа являются строго эргодичными и получена оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, определяющих двойные вращения бесконечного типа.
- для ленточных комплексов тонкого типа построены примеры, для которых почти все слои вертикального слоения имеют ровно топологический конец, и примеры, для которых почти все слои вертикального слоения имеют ровно 2 топологических конца. С использованием этих примеров в задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3-периодических поверхностей построены хаотические режимы, имеющие 1 или бесконечное число компонент связности.
- для слоения абсолютных периодов главного страта пространства модулей вещественно-нормированных дифференциалов с единственным полюсом второго порядка доказана плотность локуса, отвечающего заданному вектору периодов в общем положении, и подсчитано число связных компонент такого

локуса.

Кроме того, в диссертации содержатся некоторые технические результаты, в том числе касающиеся многомерных цепных дробей и символической динамики.

9.2 Открытые задачи

В процессе исследования в каждом из указанных выше направлений возникли интересные открытые вопросы, которые сформулированы в тексте диссертации по ходу изложения. Перечислим вкратце основные из них.

В Главе 1, посвященной перекладываниям отрезков и их эргодическим свойствам, рассказывается в том числе о семействах перекладываний отрезков, между длинами интервалов непрерывности которых есть рациональные соотношения. Такие перекладывания отрезков возникают во многих топологических осмысленных задачах, при этом широкий класс методов, разработанных для изучения эргодических свойств перекладываний отрезков общего вида, для таких отображений оказывается неприменим. Поэтому одной из наиболее важных открытых задач в этом направлении является развитие подходов, позволяющих исследовать эргодические свойства перекладываний отрезков, не удовлетворяющих условию Кина. Важный открытый вопрос состоит в возможной модификации упомянутого в первой главе алгоритма Делакруа - Рюта для перекладываний отрезков с нулевым инвариантом Са-Арну-Фати и проверке гипотезы Дынникова-Скрипченко о богатом семействе ограничений перекладываний отрезков.

В Главе 2, где речь идет о многомерных марковских цепных дробях, самые интересные открытые задачи связаны с изучением спектральных свойств таких алгоритмов, в частности, речь идет о проверке выполнения свойства Пизо для широкого класса марковских цепных дробей. Решение этой задачи позволит, с одной стороны, оценить скорость сходимости рассматриваемого алгоритма, а с другой - получить важную информацию о перемешивающих свойствах динамической системы, ренормализация для которой описана с помощью изучаемого алгоритма.

В Главе 3, в которой изучаются перекладывания отрезков с флипами, сформулирован ключевой вопрос о построении меры, инвариантной относительно алгоритма ренормализации, носителем которой является множество параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами. Описанные в насто-

ящей диссертации подходы, использующие методы термодинамического формализма для марковского сдвига, в данном случае не могут применяться напрямую из-за сложной комбинаторной структуры диаграммы Рози, ассоциированной с алгоритмом ренормализации. Возможные подходы к этой задаче могут состоять либо в адаптации подходов термодинамического формализма к марковским сдвигам, которые не обязательно являются топологически перемешивающими, либо в конструкции альтернативного алгоритма ренормализации.

Глава 4 посвящена линейным инволюциям и их свойствам, и в этом контексте важнейшей открытой задачей является следующая

Гипотеза 7. *Почти все неприводимые линейные инволюции являются слабо перемешивающими.*

Для отображений сдвигов отрезков, рассмотренных в Главе 5, ключевой является задача построения эффективной ренормализации для отображений с числом отрезков непрерывности от 4 и выше. Интересно также продвинуться в понимании эргодических и комбинаторных свойств отображений сдвигов 3 отрезков, в частности, исследовать вопрос о свойстве слабого перемешивания для отображений бесконечного типа. Важно также разобраться, будет ли аналогичное свойство выполняться для двойных вращений бесконечного типа, а также получить эффективную оценку комбинаторной сложности для двойных вращений.

Отдельный интерес представляет интерпретация полученных результатов на языке бильярдов со шпионскими зеркалами и их эргодических свойств.

В Главе 6 изучаются системы изометрий и формулируется сразу несколько важных гипотез, ни одна из которых в настоящий момент не доказана.

Глава 7 посвящена обсуждению приложений полученных ранее результатов к задаче С. П. Новикова о плоских сечениях 3-периодических поверхностей. Основная часть изложенных в этой главе результатов относится к конкретной поверхности рода 3, обладающей дополнительной симметрией, и индуцированное 1-формой слоение в этом случае имеет два двойных седла. Ключевая задача в этом направлении - обобщение полученных результатов для более широкого класса семейств поверхностей рода 3; здесь можно выделить два ключевых случая - центрально-симметричные поверхности (с учетом физического происхождения задачи именно такие поверхности наиболее осмысленно изучать с точки зрения приложений) и

поверхности, не обладающие дополнительной симметрией. Эти случаи должны рассматриваться отдельно, потому что первое семейство является подмножеством второго коразмерности 1. В каждом из этих случаев центральной открытой задачей является гипотеза Новикова, а также вопросы об эргодических свойствах хаотических слоений.

В Главе 8 центральной открытой задачей является

Гипотеза 8. *Слоение абсолютных периодов для вещественно-нормированных дифференциалов эргодично.*

Литература

[1] Л. М. Абрамов, В. А. Рохлин. Энтропия косого произведения преобразований с инвариантной мерой.// Вестник ЛГУ – 1962 – 1 – стр. 5–13.

[2] А. И. Буфетов, Б. М. Гуревич. Существование и единственность меры с максимальной энтропией для потока Тейхмюллера на пространстве модулей абелевых дифференциалов.// Мат. Сб. – 2011 – 202:7 – стр. 3–42.

[3] И. Я. Гольдшейд, Г. А. Маргулис. Показатели Ляпунова произведения случайных матриц.// УМН – 1989 – 44:3 – стр. 13–59.

[4] И. А. Дынников. Задача С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона. УМН – 1993 – 48:2(290) – стр. 179–180.

[5] И. А. Дынников. Доказательство гипотезы С. П. Новикова для случая малых возмущений рациональных магнитных полей.// УМН – 1992 – 47:3(285) – стр. 161–162.

[6] И. А. Дынников. Доказательство гипотезы С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона.// Матем. заметки – 1993 – 53:5 – стр. 57–68.

[7] И. А. Дынников. Системы наложений отрезков и плоские сечения 3-периодических поверхностей.// Тр. МИАН – 2008 – 263 – стр. 72–84.

[8] С. П. Новиков, Р. Де Лео, И. А. Дынников, А. Я. Мальцев. Теория динамических систем и транспортные явления в нормальных металлах.// ЖЭТФ – 2019 – 156:4 – стр. 761–774.

[9] А. Б. Каток. Инвариантные меры потоков на ориентируемых поверхностях.// Докл. АН СССР – 1973 – 211 – стр. 775–778.

[10] И. М. Кричевер. Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шрёдингера. Нестационарная модель Пайерлса.//Функц. анализ и его прил. – 1986 – 20(3) – стр. 42–54.

[11] И. М. Кричевер. Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений. Функц. анализ и его прил. – 1988 – 22(3) – стр. 37–52.

[12] С. П. Новиков. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. // УМН – 1982 – 37:5 – стр. 3-49.

[13] В. И. Оселедец. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем.// Труды ММО – 1968 – 19 – стр. 179–210.

[14] В. А. Рохлин. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.// УМН – 1967 – 22:5 – стр. 3–56

[15] Е. А. Сатаев. О числе инвариантных мер для потоков на ориентируемых поверхностях.// Изв. АН СССР. Сер. математическая. – 1975 – 39:4 – стр. 860–878.

[16] А. С. Скрипченко. Перекладывания отрезков с нулевым инвариантом Са-Арну-Фати.// Труды МИАН им. В. А. Стеклова – 2024 – 325 – стр. 277–296.

[17] А. С. Скрипченко. Ренормализация в одномерной динамике.// УМН – 2023 – 78:6 – стр. 3–46.

[18] А. В. Зорич. Задача С.П. Новикова о полуклассическом движении электрона в однородном магнитном поле, близком к рациональному.// УМН – 1984 – 39:5(239) – стр. 235–236.

[19] J. Aaronson. An introduction to infinite ergodic theory.// Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI – 1997 – vol. 50.

[20] N. Aoki, K. Hiralde. Topological Theorem of dynamical systems: recent advances.// North Holland Mathematical Library (1994).

[21] P. Arnoux. Thèse de 3^{e}cycle.// Université de Reims – 1981.

[22] P. Arnoux. Échanges d'intervalles et flots sur les surfaces.// L'Enseignement Mathématique – 1981 – 29 – pp. 5–38.

[23] P. Arnoux, J. Cassaigne, S. Ferenczi, P. Hubert. Arnoux-Rauzy interval exchanges.// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. – 2022 – 23 – pp. 233–264.

[24] P. Arnoux, M. Furukado, Sh. Ito. Substitutions from Rauzy induction on 4-interval exchange transformations and Quasi-periodic tilings.// Inst. Math. Anal. Kokyuroku – 2011 – 1725 – pp. 152–174.

[25] P. Arnoux and G. Rauzy. Représentation géométrique de suites de complexité $2n + 1$.// Bull. Soc. Math. France – 1991 – 119:2 – 199–215.

[26] P. Arnoux and S. Starosta. Rauzy gasket.// Further developments in fractals and related fields, Mathematical Foundations and Connections – pp. 1–23.

[27] P. Arnoux, J.-C.Yoccoz. Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov. (French) // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. – 1981 – 292:1 – pp. 75–78.

[28] M. Artigiani, Ch. Fougeron, P. Hubert, A. Skripchenko. A note on double rotations of infinite type.// Tp. MMO – 2021 – 82:1 – pp. 185—203// Trans. Moscow Math. Soc. – 2021 – 82 – pp. 157–172

[29] A. Avila, V. Delecroix. Weak mixing direction in non-arithmetric Veech surfaces. J. Amer. Math. Soc. – 2016 –29 – pp. 1167–1208.

[30] A. Avila, V. Delecroix. Some Monoids of Pisot Matrices.// New Trends in One-Dimensional Dynamics – 2015.

[31] A. Avila, S. Gouëzel and J.-C. Yoccoz. Exponential mixing for Teichmüller flow. // Publ. Math. IHÉS – 2006 – 104 – pp. 143–211.

[32] A. Avila, G. Forni. Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows. // Ann. of Math. – 2007 – 165:2 – pp. 637–664.

[33] A. Avila, P. Hubert, A. Skripchenko. Diffusion for chaotic plane sections of 3-periodic surfaces. // Invent. Math. – 2016 – 206:1 – pp. 109–146.

[34] A. Avila, P. Hubert, A. Skripchenko. On the Hausdorff dimension of the Rauzy gasket. // Bull. Soc. Math. France – 2016 – 144:3 – pp. 539–568.

[35] A. Avila, M. J. Resende. Exponential mixing for the Teichmüller flow in the space of quadratic differentials.// Comm. Math. Helv.– 2012 – 87 – pp. 589–638.

[36] A. Avila and M. Viana. Simplicity of Lyapunov spectra: proof of the Zorich–Kontsevich conjecture.// Acta Math. – 2–7 – 198:1 – pp. 1–56.

[37] M. Bainbridge, J. Smillie and B. Weiss. Horocycle dynamics: new invariants and eigenform loci in the stratum H(1, 1).// Mem. AMS. – 2022 – 1384.

[38] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis. On the Melvin-Morton- Rozansky conjecture.// Invent. Math. –1996 – 125:1 – pp. 103–133.

[39] A. Linero Bas, G. Soler López. Minimal non uniquely ergodic flipped IETs.// Journal of Differential Equations – 2023 – 360 – pp. 232–259.

[40] I. Beck. Cycle decompositions by transpositions.// J. Combinatorial Theory Ser. A – 1977 – 23 – pp. 198–207.

[41] M. Bell, V. Delecroix, V. Gadre, R. Guttiérez-Romo, S. Schleimer. The flow group of rooted abelian or quadratic differentials.// ArXiv: 2101.12197

[42] V. Berthé, W. Steiner, J. Thuswaldner. On the second Lyapunov exponent of some multidimensional continued fraction algorithms.// Mathematics of computation – 2021 – 90:328 – pp.883–905.

[43] M. Bestvina and M. Feign. Stable Actions of groups on real trees.// Invent.Math. – 1995 – 121 –pp. 287–321.

[44] C. Boissy, E. Lanneau. Dynamics and geometry of the Rauzy-Veech induction for quadratic differentials.// Ergodic Theory Dyn. Syst. – 2009 – 29:3 – pp. 767–816.

[45] C. Boldrighini, M. Keane, F. Marchetti. Billiards in Polygons.// Publ. math. et inform. de Rennes – 1976 – pp. 1–19.

[46] C. Bonatti and M. Viana. Lyapunov exponents with multiplicity 1 for deterministic products of matrices. // Ergod. Th. Dyn. Syst – 2004 – 24 – pp. 1295–1330.

[47] M. Boshernitzan. A condition for minimal interval exchange maps to be uniquely ergodic.// Duke Math. J. – 1985 – 52 – pp. 723–752.

[48] M. Boshernitzan. Rank two interval exchange transformations.// Ergod. Th. and Dynam. Syst. – 1988 – 8(3) – pp. 379–394.

[49] M. Boshernitzan and I. Kornfeld. Interval translation mappings. // Ergodic Theory Dyn. Syst. – 1995 – 15:5 – pp. 821–832.

[50] R. Bowen. Topological entropy and axiom A. // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Am. Math. Soc. – Providence, RI – 1970 –pp. 23–41.

[51] A. Brown, A. Eskin, S. Filip, F. Rodriguez Hertz. Normal forms for contracting dynamics, revisited. https://arxiv.org/abs/2405.16208

[52] H. Bruin. Renormalisation in a class of interval translation maps of d branches.// Dynamical Systems, an international journal – 2007 – 22 – pp. 11 - 24.

[53] H. Bruin и S. Troubetzkoy. The Gauss map on a class of interval translation mappings.// Israel J. Math. – 2003 – 137 – pp. 125–148.

[54] J. Buzzi и P. Hubert Piecewise monotone maps without periodic points: Rigidity, measures and complexity.// Ergod. Th. and Dynam. Syst. –2004 – 24:2 – pp. 383–405.

[55] J. Buzzi and O. Sarig. Uniqueness of equilibrium measures for countable Markov shifts and multi-dimensional piecewise expanding maps.// Erg. Th. Dyn. Syst. – 2003 – 23:5 – pp. 1383–1400.

[56] G. Calsamiglia, B. Deroin, S. Francaviglia. A transfer principle: from periods to isoperiodic foliations.// GAFA – 2023 – 57 – 169.

[57] J. Chaika, B. Weiss. On the ergodic theory of the real Rel foliation.// Forum of Mathematics – Pi – 2024 – 12:e7.

[58] M. Damron, J. Fickensher. The number of ergodic measures for transitive subshifts under the regular bispecial condition.// Ergod. Th. and Dynam. Syst. – 42:1 – 2022 – pp. 86–140.

[59] Cl. Danthony, A. Nogueira. Measured foliations on nonorientable surfaces.// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. – 1990 –23:4 (3) – pp. 469–494.

[60] V. Delecroix, P. Hubert, S. Leliévre. Diffusion for the periodic wind-tree model.// Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. – 2014 –47 – pp. 1085–1110.

[61] V. Delecroix, R. Rüth, Minimality and unique ergodicity of interval exchange transformations.// https://www.labri.fr/perso/vdelecro/2022-beamer-RICE.pdf.

[62] B.Dubrovin. Integrable systems in topological field theory.// Nuclear Phys. B – 1992 –379:3 – pp. 627–689.

[63] R. De Leo, I. Dynnikov. Geometry of plane sections of the infinite regular skew polyhedron 4,6|4.// Geom. Dedic. – 2009 – 138:1 – pp. 51–67.

[64] I. Dynnikov. Semiclassical motion of the electron. A proof of the Novikov conjecture in general position and counterexamples. // Solitons, geometry and topology: on the crossroad, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 (Amer. Math. Soc., Providence, RI) – 1997 – 179 – pp. 45–73.

[65] I. Dynnikov, P. Hubert, A. Skripchenko. Dynamical Systems Around the Rauzy Gasket and Their Ergodic Properties.// IMRN – 2023 – 8 – pp. 6461–6503.

[66] I. Dynnikov, A. Skripchenko. On typical leaves of a measured foliated 2-complex of thin type. // Topology, geometry, integrable systems, and mathematical physics – Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 – 2014 – 234 – pp. 173–199.

[67] I. Dynnikov, A. Skripchenko. Symmetric band complexes of thin type and chaotic sections which are not quite chaotic.// Trans. Moscow Math. Soc. – 2015 – 76:2 – pp. 251–269.

[68] I. Dynnikov, A. Skripchenko. Minimality of interval exchange transformations with restrictions.// Journal of Modern Dynamics – 2017 – 11 – pp. 219–248.

[69] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru. Thurston's work on surfaces// Translated from the 1979 French original by Djun M. Kim and Dan Margalit.// Mathematical Notes. Vol. 48. Princeton University Press.

[70] G. Forni. Solutions of the cohomological equation for area–preserving flows on compact surfaces of higher genus.// Ann. of Math. – 1997 – 146 – pp. 295–344.

[71] G. Forni. Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus.// Ann. Math. – 2002 – 155 – pp. 1–103.

[72] Ch. Fougeron. Dynamical properties of simplicial systems and continued fraction algorithms.// ArXiv: 2001.01367.

[73] Ch. Fougeron, A. Skripchenko. Simplicity of spectrum for certain multidimensional continued fraction algorithms.// Monatsh. für Math.–2021 – 194:4 – 767–787.

[74] A. Eskin, M. Mirzakhani. Invariant and stationary measures for the action on moduli space.// Publ.math.IHÉS – 127 – 2018 – pp. 95–324.

[75] J. Fickenscher. Self–inverses, Lagrangian permutations and minimal interval exchange transformations with many ergodic measures. // Commun. Contempp. Math. – 2014 – 16:1 –ID 1350019.

[76] D. Gaboriau. Dynamique des systémes d'isométries: sur les bouts des orbits. Invent. Math. –1996 – 126 – pp. 297–318.

[77] D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin. Pseudogroups of isometries of $\mathbb{R}$ and Rips' theorem on free actions on $\mathbb{R}$-trees.// Isr. J. Math.– 1994 – 87 – pp. 403–428.

[78] G. Galperin, T. Krüger and S. Troubetzkoy. Local instability of orbits in polygonal and polyhedral billiards.// Commun. Math. Phys.–1995 – 169 – pp. 463–473.

[79] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Products of random matrices : convergence theorems.// Contemp.Math. – 1986 – 50 – pp. 31–54.

[80] C. Gutierrez, S. Lloyd, V. Medvedev, B. Pires, and E. Zhuzhoma. Transitive circle exchange transformations with flips.// Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2010 – 26:1 – pp. 251–263.

[81] R. Gutiérrez-Romo, C. Matheus. Lower bounds on the dimension of the Rauzy gasket.// Bull. de la SMF – 2020 – 148:2 – pp. 321–327.

[82] E. Gutkin and N. Haydn. Topological entropy of polygon exchange transformations and polygonal billiards.// Ergod. Th. Dynam. Sys.–1997 – 17 – pp. 849–867.

[83] U. Hamenstädt. Ergodicity of the absolute period foliations.// Isr. J. of Math. – 2018 – 225:2 – pp. 661–680.

[84] C. Angosto Hernández and G. Solar Lopez. Minimality and the Rauzy-Veech algorithm for interval exchange transformations with flips.// Dynamical Systems – 2013 – 28:4 – pp. 539–550.

[85] A. Katok. Interval exchange transformations and some special flows are not mixing.// Israel J. Math. – 1980 –35 –pp. 301–310.

[86] A. Katok. The growth rate for the number of singular and periodic orbits of a polygonal billiard.// Commun. Math. Phys. – 1987 – 111 – pp. 151–160.

[87] M. Keane. Interval Exchange Transformations.// Math. Z. – 1975 – 141 – pp. 25–31.

[88] M. Keane. Non–ergodic interval exchange transformations.// Israel Journal of Math. – 1977 – 26:2 – pp. 188–196.

[89] H. B. Keynes, D. Newton. A "Minimal", Non–Uniquely Ergodic Interval Exchange Transformation. // Math. Z. – 1976 – 148 –pp. 101—-105.

[90] S. Kerckhoff. Simplicial systems for interval exchange maps and measured foliations.// Ergod. Th. Dynam. Sys. – 1985 – 5 – pp. 257 – 271.

[91] S. Kerckhoff, H. Masur, J. Smillie. Ergodicity of Billiard Flows and Quadratic Differentials.// Ann. of Math. – 1986 – 124:2 – pp. 293–311.

[92] M. Kontsevich, A. Zorich. Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities. // Invent. math.–2003–153–pp. 631–678.

[93] I.Krichever. The dispersionless Lax equations and topological minimal models. //Comm. Math. Phys.– 1992 – 143:2 – 415–429.

[94] I.Krichever. The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories.// Comm. Pure Appl. Math. – 1994 – 47:4 – pp. 437–475.

[95] I. Krichever, S. Lando, A. Skripchenko. Real-normalized differentials with a single order 2 pole.// Lett. Math. Phys. – 2021 – 111:36.

[96] J. C. Lagarias. The quality of the Diophantine approximations found by the Jacobi- Perron algorithm and related algorithms. // Monatsh. Math.– 1993 – 115:4 – pp. 299–328.

[97] E. Lanneau, S. Marmi, A. Skripchenko. Cohomological equations for linear involutions.// Dynam. Syst. – 2021 – 36:2 – pp. 292–304.

[98] G. Levitt. La dynamique des pseudogroupes de rotations. (French).// Invent. Math. – 1993 – 113:3 – pp. 633–670.

[99] J. Li, W. Pan, D. Xu. On the dimension of limit sets on $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ via stationary measures: the theory and applications.// ArXiv: 2311.10265.

[100] A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov. Dynamical Systems, Topology, and Conductivity in Normal Metals.// J. Stat. Phys. – 2003 – 115 – стр. 31–46.

[101] R. Mane. Ergodic Theory and Differentiable dynamics.// Translated from the Portuguese by S. Levy – Ergebnisse de Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3 Folge-Band 8. Springer-Verlag – 1987.

[102] S. Marmi, pp. Moussa, J. –C. Yoccoz. The cohomological equation for Roth–type interval exchange maps.// J. Amer. Math. Soc.– 2005 – 18:4 – pp. 823–872.

[103] S. Marmi, pp. Moussa, J. –C. Yoccoz. Linearization of generalized interval exchange maps.// Ann. of Math. – 2012 – 176:3 – pp. 1583–1646.

[104] H. Masur. Interval exchange transformations and measured foliations.// Ann. of Math. – 1982 – 115:1 – pp. 169–200.

[105] C. Matheus, M. Möller, M. и J. -C. Yoccoz. A criterion for the simplicity of the Lyapunov spectrum of square-tiled surfaces. // Invent. Math. –2015 –202:1 – pp. 333–425

[106] C. T. McMullen, Foliations of Hilbert Modular Surfaces.// Amer. J. of Math. – 2007 – 129:1 – pp. 183–215.

[107] C. T. McMullen, Moduli spaces of isoperiodic forms on Riemann surfaces.// Duke Math. J. – 2014 – 163:12 – pp. 2271–2323.

[108] P. Mercat, Coboundaries and eigenvalues of morphic subshifts. ArXiv: https://arxiv.org/abs/2404.13656

[109] P. Mercat, Geometrical representation of subshifts for primitive substitutions, ArXiv: https://arxiv.org/pdf/2201.01268.pdf

[110] Y. Minsky and B. Weiss. Cohomology classes represented by measured foliations, and Mahler's question for interval exchanges.// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. – 2014 – 47:4 – pp. 242–284.

[111] J. Morgan and P. Shalen. Free actions of surface groups on $\mathbb{R}$-trees. Top. – 1991 – 30:2 – pp. 143–154.

[112] A. Nogueira. Almost all interval exchange transformations with flips are nonergodic. Ergod. Th. Dynam. Sys. – 1989 – 9 – pp. 515–525.

[113] M. Policott, B. Sewell. An upper bound on the dimension of the Rauzy gasket.// Bull. Soc. Math. France – 2023 – 4:151 – pp. 595–611.

[114] R. Rüth, A convexity criterion for unique ergodicity of interval exchange transformations.// MJCNP – 2020 – 9:1 – pp. 51–54.

[115] O. Sarig. Lecture Notes on Thermodynamical Formalism for Topological Markov Shifts.// https://www.weizmann.ac.il/math/sarigo/sites/math.sarigo/files/uploads/tdfn

[116] O. Sarig, Thermodynamic formalism for countable Markov shift.// Erg.Th. Dyn. Syst.– 1999 – 19:6 – pp. 1565–1593.

[117] O. Sarig. Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts.// Proc. Amer. Math. Soc. – 2003 – 131:6 – pp. 1751–1758.

[118] S. Schwartzman. Asymptotic cycles.// Ann. Math. – 1957 – 66:2 – pp. 270–284.

[119] F. Schweiger. Multidimensional continued fractions. Oxford Science Publications.// Oxford University Press, Oxford, 2000.

[120] Ya. Sinai, C. Ulcigrai. Weak Mixing in Interval Exchange Transformations of Periodic Type.// Lett. in Math. Phys.– 2005 – 74 – pp. 111–133.

[121] E. Soboleva. Vassiliev knot invariants coming from Lie algebras, and 4-invariants.// J. Knot Theory Ramifications – 2001 – 10:1 – pp. 161–169.

[122] A. Skripchenko. Symmetric interval identification systems of order three. // DCDS – 2012 – 32(2) – pp. 643–656.

[123] A. Skripchenko. On connectedness of chaotic sections of some 3-periodic surfaces. // Ann. Glob. Anal. Geom. – 2013 – 43 – pp. 253–271.

[124] A. Skripchenko and S. Troubetzkoy. On the Hausdorff dimension of minimal interval exchange transformations with flips.// J. Lond. Math. Soc.– 2018 – 97:2 – pp. 149–169.

[125] A. Skripchenko, S. Troubetzkoy. Polygonal billiards with one sided scattering.// Ann. Inst. Fourier – 2015 – 65:5 – p. 1881–1896.

[126] A. Skripchenko, S. Troubetzkoy, Entropy and complexity of polygonal billiards with spy mirrors.// Nonlinearity – 2015 – 28:9 – 3443.

[127] H. Suzuki, S. Ito, and K. Aihara. Double rotations. // Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2005 – pp. 515–532.

[128] W. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps.// Ann. Math. – 1982 – 115:1 – pp. 201–242.

[129] W. Veech. Interval exchange transformations. J. Analyse Math. – 1978 – 33 – pp. 222–272.

[130] M. Viana. Ergodic Theory of Interval Exchange Mapp. // Revista Matemática Complutense – 2006 – 19:1 – pp. 7–100.

[131] M. Viana Stochastic dynamics of deterministic systems. // Brazillian Math. Colloquium. IMPA – 1997.

[132] D. Volk. Almost every interval translation map of three intervals is finite type.// Discrete Contin. Dyn. Syst. – 2014 – pp. 2307–2314.

[133] Winsor K. Dynamics of the absolute period foliation of a stratum of holomorphic 1-forms.// ArXiv: 2109.12669.

[134] Winsor K. Dense real Rel flow orbits and absolute period leaves.// ArXiv: 2207.04628.

[135] Y. Wu. Applications of the Rauzy induction on the generic ergodic theory of Interval Exchange Transformations. // PhD Thesis, Rice University https://repository.rice.edu/server/api/core/bitstreams/10c898a2-f4e2-41b5-8725-7f75c873897c/content

[136] A. Zorich. Flat surfaces, in Frontiers in number theory, physics and geometry.// In: pp. Cartier, B. Julia, pp. Moussa and pp. Vanhove (eds), Springer (2006).

[137] A. Zorich. Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents. // Ann. de l'Inst. Fourier – 1996 – 46:2 – pp. 325–370.

[138] A. Zorich. Deviation for interval exchange transformations.// Ergodic Theory Dynam. Systems – 1997 – 17:6 – pp. 1477–1499.

[139] A. Zorich. How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface?// Pseudoperiodic topology, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 eds. V. Arnold, M. Kontsevich, A. Zorich, Amer. Math. Soc., Providence, RI – 1999 – 197, pp. 135–178.