МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Кузьмичев Михаил Дмитриевич

Ренормгрупповые функции в калибровочных теориях с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией

1.3.3. - теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент
Степаньянц Константин Викторович

Москва - 2023

Оглавление

Введение **3**

1 Связь между трехпетлевыми вкладами духов в β-функцию и двухпетлевыми вкладами в аномальную размерность γ_c в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса **19**

1.1 Ренормгрупповые функции в суперсимметричных калибровочных теориях 19

1.2 Действие и правила Фейнмана для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса 26

1.3 Вклад в двухпетлевую аномальную размерность γ_c 38

1.4 Вычисление соответствующего вклада в трехпетлевую β-функцию 52

2 Непланарные вклады с петлей суперполей материи в трехпетлевую β-функцию для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теорий **65**

2.1 Вклад суперполей материи в трехпетлевую β-функцию $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса 65

2.2 Вклад в трехпетлевую β-функцию для $\mathcal{N}=1$ СКЭД 72

3 Конечность $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении **81**

3.1 Постановка задачи 81

3.2 Правила Фейнмана в пределе нулевых внешних импульсов 83

3.3 Двухпетлевой вклад в $V\bar{c}c$ вершины от диаграмм с петлей материи 84

3.4 Двухпетлевой вклад в $V\bar{c}c$ вершины, пропорциональный C_2^2 . . . 90

4 Условие редукции констант связи в $P=\frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теориях **98**

4.1 Мотивация и постановка задачи 98

4.2 Условие редукции констант связи и аномальные размерности квантовых суперполей 99

4.3 Точные соотношения для $P=\frac{1}{3}Q$ теорий 101

4.4 Справедливость условия редукции констант связи в высших порядках 102

Заключение **107**

Литература **111**

Введение

Актуальность темы исследования, степень ее разработанности

Суперсимметрия дает возможность устранить несколько проблем, присущих Стандартной модели. Так, например, суперсимметричные теории оказались полезными в решении вопроса о существовании квадратично расходящихся радиационных поправок к массе бозона Хиггса [1, 2]. Характерным свойством Теорий Великого Объединения (ТВО) с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией [3, 4] является возможность объединить калибровочные бегущие константы связи на масштабах энергии порядка 10^{16} Гэв [5, 6]. Важным экспериментом, позволяющим проверить указанный масштаб, является распад протона, характерный для большинства ТВО, однако пока еще не обнаруженный экспериментально [7]. Суперсимметричные ТВО продолжают играть важную роль в феноменологических исследованиях распада протона [8, 9].

Суперсимметричные модели также позволяют исследовать фундаментальные аспекты квантовой теории поля. Например, они важны для изучения проблемы сокращения расходимостей в квантовой теории поля (КТП) [3]. Суперсимметрия позволяет улучшить ультрафиолетовые свойства теорий, что проявляется в некотором количестве точных соотношений, выполняющихся во всех порядках теории возмущений. Например, суперпотенциал в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях не содержит расходящихся квантовых поправок [10]. Не менее известным примером является NSVZ соотношение, связывающее во всех прядках теории возмущений β-функцию и аномальные размерности суперполей материи, справедливое для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий [11, 12] и, в частности, для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной электродинамики [13].

Особое значение среди суперсимметричных теорий имеет $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса ($\mathcal{N} = 4$ SYM). Данная теория входит в известное AdS/CFT соответствие [14] со стороны конформных калибровочных теорий и представляет огромный интерес. Одной из особенностей данной теории является ее конечность во всех порядках теории возмущений [15, 16, 17, 18, 19].

Иногда суперсимметричные теории позволяют аналитически получить ре-

зультаты, качественно схожие с соответствующими величинами в несуперсимметричных теориях, вычислить которые в них крайне затруднительно [20]. Например, $\mathcal{N} = 4$ SYM теория делает возможным нахождение сдвиговой вязкости с помощью AdS/CFT соответствия. Стоит подчеркнуть, что ее качественное поведение совпадает с вязкостью сдвига для кварк-глюонной плазмы в КХД [21, 22].

Увидеть конечность и конформную инвариантность $\mathcal{N} = 4$ SYM можно с помощью вычисления β-функции в каждом приближении теории возмущений. Для этого можно воспользоваться NSVZ соотношением, которое устанавливает взаимосвязь между β-функцией и аномальной размерностью суперполей материи для суперсимметричных калибровочных теорий [11, 12, 23, 24]. NSVZ β-функция для $\mathcal{N} = 4$ SYM оказывается равной 0 [11].

Важно отметить, что недавно NSVZ соотношение было получено из первых принципов путем суммирования сингулярных вкладов во всех порядках теории возмущений [25, 26, 27, 28]. Стоит подчеркнуть, что для доказательства NSVZ соотношения в случае $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса необходимым ингредиентом является теорема о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин [29]. Стоит отметить, что впервые конечность $V\bar{c}c$ вершин была обнаружена в однопетлевом приближении в работе [30].

NSVZ соотношение позволяет также доказать конечность $\mathcal{N} = 2$ SYM теорий за рамками одной петли [19, 31]. Для того чтобы сделать это, необходимо построить процедуру квантования и регуляризацию, сохраняющую симметрии теории [32]. Для этого используется гармоническое суперпространство [33, 34]. Формула типа NSVZ также была выведена для D-функции Адлера в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой хромодинамике в работах [35, 36].

Необходимо отметить важность пертурбативных вычислений для исследования конечности определенных теорий или для установления точных соотношений (например, NSVZ) между ренормгрупповыми функциями, выполняющихся во всех порядках. В качестве такого примера можно привести многопетлевые вычисления β-функции в случае $\mathcal{N} = 4$ SYM [37, 38].

Другим примером могут служить работы [39, 40], которые позволили увидеть структуру из полных производных в выражении для β-функции $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики (СКЭД) в двух- и трехпетлевом приближениях. При использовании регуляризации высшими производными

это в конечном счете позволило построить вывод NSVZ-сотношения во всех порядках теории возмущений для суперсимметричной электродинамики [41, 42].

Двухпетлевая β-функция для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными, была получена в работе [43], причем было показано, что интегралы, дающие вклад в окончательный результат, являются интегралами от полных производных. При дальнейшей разработке данного подхода на примере вычислений в низших петлях [44] и нахождении вкладов, содержащих юкавское взаимодействие [45, 46, 47], было в последствии предложено доказательство NSVZ соотношения для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий общего вида, полученное из первых принципов [25, 26, 27, 28].

Для получения точных результатов и проведения петлевых вычислений в рамках суперсимметричных квантовых теорий поля важным моментом является регуляризация (см., например, [29, 30]). Наличие суперсимметрии позволяет улучшить ультрафиолетовое поведение данных теорий, поэтому важно ее сохранить на квантовом уровне. В качестве регуляризации, которая позволяет сохранить суперсимметрию при вычислении квантовых поправок, выступает регуляризация высшими ковариантными производными [48, 49], в суперполевой формулировке [50, 51].

Многие многопетлевые вычисления, совершенные с помощью данной регуляризации [45, 46, 52], показали, что NSVZ соотношение справедливо для реномгрупповых функций, определенных в терминах голых констант связи. Из первых принципов (суммированием во всех порядках теории возмущений) NSVZ соотношение также выводится для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых констант связи [25, 26, 27, 28].

Важно отметить, что $\overline{\text{DR}}$-схема, являющаяся одной из самых популярных, не позволяет получить формулу NSVZ в терминах перенормированных констант связи и требует для ее восстановления дополнительной конечной перенормировки [53, 54, 55]. NSVZ соотношение для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД выполняется для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированных констант связи, в HD+MSL (Высшие Производные + Минимальные Вычитания Логарифмов) схеме перенормировки [26, 56, 57]. На примере $\mathcal{N} = 1$ СКЭД можно видеть, что существует непрерывное множество NSVZ-схем [58]. Стоит отметить, что одной из NSVZ-схем в $\mathcal{N} = 1$ СКЭД также является on-shell схема

[59]. NSVZ-схема для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий общего вида была построена в работах [25, 26, 27, 28, 29], и также дается HD+MSL предписанием.

Различные NSVZ-подобные соотношения также были получены для теорий с мягко нарушенной суперсимметрией [60, 61, 62]. Дальнейшее исследование данного вопроса позволило исследовать перенормировку теорий с мягко нарушенной суперсимметрией [63, 64, 65] и получать точные соотношения на ренормгрупповые функции [62, 66, 67] в мягко нарушенных теориях. В суперсимметричной электродинамике с мягким нарушением суперсимметрии с использованием прямого суммирования суперграфов были получены точные соотношения, описывающие перенормировку массы фотино во всех порядках теории возмущений [68]. С помощью регуляризации высшими производными такие соотношения были выведены для ренормгрупповых функций, определенных как в терминах голых констант связи, так и в терминах перенормированных констант связи [69].

В рамках теорий с мягким нарушением суперсимметрии было показано, что точные соотношения из суперсимметричных теорий переносятся на соответствующие им теории с мягким нарушением суперсимметрии [70, 71, 72]. Это было доказано рассмотрением правил Фейнмана и их применением к вычислению диаграмм Фейнмана [70, 73]. Тем самым еще раз подчеркивается важность пертурбативных вычислений в явно суперсимметричных теориях, поскольку эти результаты в том числе распространяются и на соответствующие теории с мягким нарушением суперсимметрии. Модели с суперсимметрией, нарушенной мягким образом, также, как и суперсимметричные теории, не содержат квадратичных расходимостей [70, 74]. Мягко нарушенные суперсимметричные модели также интересны феноменологически, могут выступать в качестве кандидатов на расширение Стандартной модели и тестироваться на наличие следствий из данных теорий, проверяемых на эксперименте [74, 75].

Еще одно интересное NSVZ-подобное соотношение было получено в т.н. $P = \frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теориях [76, 77] для аномальной размерности суперполей материи из требования ренорминвариантности отношения юкавских констант связи к калибровочной. В $\overline{\mathrm{DR}}$ схеме это соотношение оказалось справедливым в одно- и двухпетелвом приближениях [76]. Тем не менее, в трехпетлевом приближении в общем случае оно уже не выполняется [76]. Несмотря на это,

очень интересным представляется исследование того, при каких условиях оно может быть справедливо, поскольку это может позволить установить, в каких случаях может оказаться возможной редукция констант связи или, другими словами, в каких случаях юкавские константы могут оказаться пропорциональны калибровочной.

Цели и задачи диссертации

Целью данного исследования является явное вычисление определенных вкладов в ренормгрупповые функции в двух- и трехпетлевом приближении в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях и проверка соотношений между ними, следующих из формулы NSVZ и теоремы о конечности тройных духово-калибровочных вершин. Еще одной целью является изучение особенностей квантовых поправок и возможных точных соотношений в $P = \frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теориях, а также условий их справедливости.

Научная новизна

Петлевые вклады в ренормгрупповые функции, вычисляемые в данной работе с помощью регуляризации высшими ковариантными производными, были получены впервые.

Вклады от определенных суперграфов в β-функции различных суперсимметричных теорий впервые были найдены с помощью нового подхода, основанного на вычислении вакуумных суперграфов.

Для конкретных графов, содержащих петли суперполей духов или материи, впервые было проверено NSVZ соотношение между β-функцией и аномальными размерностями γ_c и $\left(\gamma_\phi\right)_i^{\ j}$.

Были вычислены некоторые вклады в тройную духово-калибровочную вершину, которые в сумме с другими аналогичными вкладами позволили произвести проверку теоремы о конечности $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении, что ранее никогда не делалось.

Для $P = \frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теорий впервые было получено соотношение между аномальными размерностями γ_c, γ_V и $\left(\gamma_\phi\right)_i^{\ j}$, эквивалентное требованию ренорминвариантности отношения юкавских констант связи к калибровочной, и исследованы условия его справедливости в низших петлях.

Достоверность результатов

Результаты вычислений трехпетлевых вкладов в β-функции суперсимметричных теорий оказались связанными с соответствующими вкладами в аномальные размерности духов γ_c и материи $\left(\gamma_\phi\right)_i^{\ j}$ NSVZ соотношением нового вида, доказанным во всех порядках теории возмущений, что может рассматриваться как критерий правильности этих вычислений.

Двухпетлевые вклады в тройную $V\bar{c}c$ вершину при суммировании с аналогичными вкладами дали конечный вклад, что согласуется с общей теоремой о конечности данной вершины.

Все вышеприведенные результаты позволили в совокупности с другими аналогичными вычислениями, сделанными другими учеными, получить суммарные вклады, удовлетворяющие общим утверждениям и теоремам.

Новое условие редукции констант связи для $P = \frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теорий было проверено явными вычислениями в одно- и двухпетлевом приближениях. Полученные при этом результаты согласуются с выводами других авторов об условиях ренормгрупповой инвариантности отношения λ^{ijk}/e для данных теорий.

Данные результаты были опубликованы в ведущих мировых рецензируемых журналах в области физики высоких энергий.

Теоретическая и практическая значимость

Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий, регуляризованных высшими ковариантными производными, продемонстрирована справедливость общих всепетлевых результатов, таких как NSVZ соотношение и теорема о конечности тройных духово-калибровочных вершин, с помощью явных пертурбативных вычислений.

Пертурбативные результаты для явно суперсимметричных теорий могут быть распространены на соответствующие модели КТП с мягким нарушением суперсимметрии [63, 70], которые являются очень интересными с точки зрения феноменологии [74, 75].

Исследование нового соотношения между ренормгрупповыми функциями в $P = \frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теориях является важным для изучения вопроса о построении суперсимметричных теорий, в которых юкавские константы связа-

ны с калибровочной, что может представлять интерес для феноменологических приложений [78].

Методы исследования

В данной работе используются пертурбативные методы квантовой теории поля, сформулированные для суперсимметричных теорий, записанных в терминах суперполей. Квантование теории осуществляется с помощью метода континуального интеграла. Поскольку рассматриваемые теории являются калибровочными, то это подразумевает введение слагаемых, фиксирующих калибровку, и духов Фаддеева–Попова. Важной особенностью является использование регуляризации высшими ковариантными производными. Данная регуляризация, в частности, позволяет сохранить суперсимметрию на квантовом уровне. Для вычисления вкладов определенного порядка в различные ренормгрупповые функции используется метод теории возмущений и суперпространственные диаграммы Фейнмана, а также стандартная техника вычисления суперграфов.

Основные положения выносимые на защиту

1. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсиммеричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными, вычислен определенный трехпетлевой вклад от духов Фаддеева–Попова в β-функцию с использованием нового подхода, основанного на исследовании вакуумных суперграфов. Вычисляемый вклад получается из трехпетлевого непланарного вакуумного суперграфа и некоторых планарных. Полученное выражение сопоставлено с соответствующим двухпетлевым вкладом в аномальную размерность духовых полей γ_c. Показано, что для этих вкладов в ренормгрупповые функции, определенные в терминах голых констант связи, выполняется NSVZ соотношение нового вида, что подтверждает правильность нового алгоритма для вычисления β-функции в суперсимметричных теориях.

2. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной калибровочной теории с полями материи, регуляризованной высшими ковариантными производными, был также вычислен определенный трехпетлевой вклад от суперполей материи в β-функцию, который в рамках нового подхода для нахождения β-функции по-

лучается из трехпетлевого непланарного вакуумного суперграфа. Данный вклад соотнесен с соответствующим двухпетлевым вкладом в аномальную размерность полей материи $\left(\gamma_\phi\right)_i^{\ j}$. Как оказалось, результаты вычислений удовлетворяют NSVZ соотношению нового вида, связывающему в данном случае β-функцию в трех петлях и $\left(\gamma_\phi\right)_i^{\ j}$ в двух. В результате явными вычислениями был проверен новый подход для вычисления β-функции для суперсимметричных калибровочных теорий.

3. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики, регуляризованной высшими производными, был вычислен определенный трехпетлевой вклад в β-функцию, который с помощью нового подхода получается из трехпетлевого непланарного вакуумного суперграфа. Данный результат сопоставлен с соответствующим выражением для двухпетлевого вклада в аномальную размерность суперполей материи. Как оказалось, результаты вычислений удовлетворяют NSVZ соотношению для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой электродинамики. Это подтвердило правильность нового подхода для вычисления β-функции для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД.

4. Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий, регуляризованных высшими ковариантными производными, были вычислены определенные двухпетлевые вклады в тройную духово-калибровочную вершину. Полученные выражения при суммировании с другими аналогичными вкладами позволили показать конечность $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении.

5. Для $P = \frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теорий написано новое соотношение, связывающее аномальные размерности квантовых суперполей γ_c, γ_V и $\left(\gamma_\phi\right)_i^{\ j}$, эквивалентное условию ренорминвариантности отношения юкавских констант связи к калибровочной. Данное условие было проверено явными вычислениями на однопетлевом и двухпетлевом уровне. Допуская существование дополнительных ограничений на рассматриваемые теории, при которых это условие будет справедливо во всех порядках теории возмущений, была получена новая форма точного выражения для аномальной размерности суперполей материи $\left(\gamma_\phi\right)_i^{\ j}$.

Личный вклад автора

Результаты вычислений, выносимые на защиту, являются новыми и были получены непосредственно автором данной диссертационной работы. Результаты, полученные при участии соавторов совместных работ, которые используются при изложении, приводятся со ссылками на соответствующие работы. При этом результаты, полученные лично соискателем, четко отделяются от результатов, полученных соавторами совместных работ.

В статье [79] соискателем самостоятельно были вычислены вклады в аномальную размерность γ_c от двухпетлевых супердиаграмм Фейнмана с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова, которые приведены в параграфе 1.3. Рассмотренные суперграфы отличаются большим количеством поддиаграмм, что делает их вычисление технически сложным. Правильность этих вычислений является критически важной для нахождения полной двухпетлевой аномальной размерности духов Фаддеева–Попова, поскольку в противном случае ренормгрупповые уравнения для аномальной размерности γ_c не будут выполняться. В связи с этим вклад автора в совместную работу [79] является очень важным и существенным.

В статье [80] непосредственно соискателем был вычислен определенный трехпетлевой вклад от духов Фаддеева–Попова в β-функцию с использованием нового подхода, основанного на исследовании вакуумных суперграфов. Вакуумные супердиаграммы, определяющие этот вклад, приведены в параграфе 1.4. Один из вкладов задается трехпетлевым непланарным вакуумным суперграфом с духовой петлей и двумя калибровочными пропагаторами. Вычисление данного вклада являлось технически непростой задачей. Вычисляемые в данной диссертации вклады духов в трехпетлевую β-функцию оказались ненулевыми и при суммировании с аналогичными вкладами соавторов работы [80] позволили найти полный вклад духов в трехпетлевую β-функцию и проверить новое NSVZ соотношение. Из этого следует, что вклад соискателя в работу [80] является очень важным и значительным.

В статье [81] лично автором диссертации был вычислен трехпетлевой вклад в β-функцию $\mathcal{N} = 1$ СКЭД от непланарного вакуумного суперграфа с петлей материи и двумя пропагаторами калибровочного поля, рассматриваемого в параграфе 2.2. Из-за большого количества поддиаграмм данный вклад оказался самым сложным для вычисления среди остальных трехпетлевых вкладов

в β-функцию. Полученный ненулевой результат для данного вклада от трехпетлевого непланарного вакуумного суперграфа при суммировании с другими вкладами соавторов работы [81] позволил получить трехпетлевую β-функцию для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД и проверить выполнение NSVZ соотношения. Вследствие этого вклад соискателя в статью [81] можно считать основополагающим.

В статье [82] соискателем лично исследовалась двухпетлевая перенормировка $V\bar{c}c$ вершин на примере суперграфов, содержащих петлю материи и приведенных в параграфе 3.3. Рассмотренные вклады объединило наличие общей однопетлевой поддиаграммы с петлей материи, содержащей три пропагатора суперполей материи и три внешние линии калибровочного суперполя, на одной из которых суперполе $\bar{D}^2\alpha$. Вычисление данной поддиаграммы оказалось довольно сложным из-за большого количества расстановок пропагаторов. Полученные результаты оказались ненулевыми. В совокупности с другими аналогичными вычислениями, произведенными соавторами работы [82], результат, полученный соискателем, позволил подтвердить теорему о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин на двухпетлевом уровне. Поэтому вклад соискателя в работу [82] является очень существенным.

В статье [83] лично соискателем было вычислено большое количество двухпетлевых супердиаграмм с двумя внешними духовыми линиями и одной внешней линией, содержащей суперполе $\bar{D}^2\alpha$. Эти суперграфы, содержащие только духовые и калибровочные пропагаторы, приведены в параграфе 3.4. Данные супердиаграммы дают вклад в двухпетлевую перенормировку тройных духово-калибровочных вершин. Было показано, что результат для вычисленных суперграфов оказывается не равным нулю. При суммировании с другими вкладами, вычисленными соавторами работы [83], итоговый результат оказался равным нулю, что позволило окончательно подтвердить конечность $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении. По этой причине вклад соискателя в работу [83] определенно является очень важным и существенным.

В статье [84] лично автором диссертации было получено условие, связывающее аномальные размерности квантовых суперполей в $P = \frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теориях. Им лично была проверена справедливость этого условия в одной и двух петлях. Предполагая выполнение этого условия во всех порядках теории возмущений, автором лично была получена новая форма точного выражения для аномальной размерности суперполей материи. В связи с этим вклад

соискателя в работу [84] можно считать определяющим.

Кроме того, автор диссертации принимал непосредственное участие в подготовке работ [79, 80, 81, 82, 83, 84] к публикации.

Апробация результатов

Результаты, представленные в данной диссертации, докладывались лично автором на конференциях:

1. «Двухпетлевой вклад в тройную духово-калибровочную вершину в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса», XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2019», Москва, Россия, 8–12 апреля 2019

2. «Трехпетлевая бета-функция для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД в неминимальной калибровке», XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2020», Москва, Россия, 10–27 ноября 2020

а также соавторами совместных публикаций на конференциях:

3. «Двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева–Попова в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными», XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2018», Москва, Россия, 9–13 апреля 2018

4. «Two-loop anomalous dimension of the Faddeev-Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories», Nineteenth Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow, August 22–28 2019

5. «Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева–Попова в β-функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса в трехпетлевом приближении», XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2020», Москва, Россия, 10–27 ноября 2020

Публикации

Результаты, выносимые на защиту, были опубликованы в 6 статьях в ведущих рецензируемых международных журналов, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus и RSCI:

1. Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. Two-loop renormalization of the Faddeev-Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives. // JHEP. — 2018. — Vol. 1806. — P. 020.

2. Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Stepanyantz K. V. Three-loop contribution of the Faddeev–Popov ghosts to the β -function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories and the NSVZ relation. // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79. — P. 809.

3. Aleshin S. S. and others. Three-loop verification of a new algorithm for the calculation of a β-function in supersymmetric theories regularized by higher derivatives for the case of $\mathcal{N} = 1$ SQED. // Nucl. Phys. B. — 2020. — Vol. 956. — P. 115020.

4. Kuzmichev M., Meshcheriakov N., Novgorodtsev S., Shirokov I., Stepanyantz K. Finiteness of the two-loop matter contribution to the triple gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives. // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104. — P. 025008.

5. Kuzmichev M., Meshcheriakov N., Novgorodtsev S., Shatalova V., Shirokov I., Stepanyantz K. Finiteness of the triple gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories: the two-loop verification. // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82. — P. 69.

6. Kuzmichev M., Stepanyantz K. A condition for the reduction of couplings in the $P = \frac{1}{3}Q$ supersymmetric theories. // Phys. Lett. B. — 2023. — Vol. 844. — P. 138094.

Кроме того, имеется ряд публикаций в трудах конференций:

1. Казанцев А. Е., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Скопцов М. Б., Широков И. Е. Двухпетлевая перенормировка духов

Фаддеева–Попова в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими ковариантными производными. // XXV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2018». Секция «Физика». Сборник тезисов. — Физический факультет МГУ, Москва, 2018. — С. 182—184.

2. Кузьмичев М. Д. Двухпетлевой вклад в тройную духово-калибровочную вершину в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса. // XXVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2019». Секция «Физика». Сборник тезисов. — Физический факультет МГУ, Москва, 2019. — С. 702—704.

3. Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Широков И. Е. Использование нового метода для вычисления вкладов духов Фаддеева–Попова в β-функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса в трехпетлевом приближении.// XXVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2020». Секция «Физика». Подсекция «Теоретическая физика». Сборник тезисов. — Физический факультет МГУ, Москва, 2020.

4. Дурандина И. С., Кузьмичев М. Д., Мещеряков Н. П., Новгородцев С. В., Петров И. А., Шаталова В. В., Широков И. Е. Трехпетлевая бета-функция для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД в неминимальной калибровке.// XXVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов – 2020». Секция «Физика». Подсекция «Теоретическая физика». Сборник тезисов. — Физический факультет МГУ, Москва, 2020.

5. Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. Two-loop anomalous dimension of the Faddeev-Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories. // Particle Physics at the Year of 150th Anniversary of the Mendeleev's Periodic Table of Chemical Elements. Proceedings of the Nineteenth Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics. — World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2021. — P. 544–546.

Содержание работы

Глава 1 посвящена нахождению трехпетлевых вкладов духов в β-функцию с помощью алгоритма, основанного на вычислении вакуумных суперграфов, и установлению связи с соответствующими вкладами в аномальную размерность γ_c в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными.

В параграфе 1.1 определяются ренормгрупповые функции, а именно, β-функция и аномальные размерности различных суперполей. Ренормгрупповые функции определяются в терминах голых констант связи и в терминах перенормированных констант связи. Здесь описывается HD+MSL схема, в которой эти определения эквивалентны с точностью до замены аргументов в ренормгрупповых функциях.

В параграфе 1.2 рассматриваются $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные калибровочные теории, регуляризованные высшими ковариантными производными. При этом квантование производится в формализме суперполей методом континуального интеграла. В этом параграфе также приводятся правила Фейнмана.

В параграфе 1.3 с помощью правил Фейнмана и при использовании стандартной техники вычисления суперграфов находятся двухпетлевые вклады в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова, от супердиаграмм подробно рассмотренных в данном параграфе.

В параграфе 1.4 вычисляются трехпетлевые духовые вклады в β-функцию. Устанавливаются связи с соответствующими вкладами в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова из параграфа 1.3. Основной особенностью данного вычисления является применение нового алгоритма для нахождения вкладов в β-функцию, основанного на вычислении вакуумных суперграфов.

Глава 2 посвящена нахождению определенных трехпетлевых вкладов с петлей суперполей материи в β-функцию с помощью алгоритма, основанного на вычислении вакуумных суперграфов, и установлению связи с соответствующими вкладами в аномальную размерность суперполей материи для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий, регуляризованных высшими ковариантными производными.

В параграфе 2.1 для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса вычисляется вклад в β-функцию от определенных трехпетлевых диаграмм, содержащих петлю суперполей материи. Для этого вначале формулируются прави-

ла Фейнмана, которые необходимы для проводимых вычислений. Далее с помощью нового подхода для нахождения β-функции вычисляется трехпетлевой вклад, который соответствует непланарному вакуумному суперграфу с внешней петлей материи и двумя пропагаторами квантового калибровочного суперполя. Данный результат сопоставляется с соответствующим вкладом в двухпетлевую аномальную размерность суперполей материи. Показывается, что вычисленные вклады связаны между собой с помощью NSVZ соотношения нового вида, что подтверждает правильность полученных в этом параграфе результатов.

В параграфе 2.2 рассматривается $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная квантовая электродинамика, регуляризованная высшими производными. Эта теория формулируется в формализме суперполей и квантуется с помощью метода континуального интеграла. Для данной теории с использованием нового алгоритма вычисляется трехпетлевой вклад в β-функцию (суперграф для данного вклада совпадает с диаграммой из параграфа 2.1) и соответствующий двухпетлевой вклад в аномальную размерность, а также проверяется, что вычисленные вклады связаны с помощью NSVZ соотношения для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД.

В главе 3 в рамках $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий, регуляризованных высшими ковариантными производными, изучается двухпетлевая перенормировка тройных духово-калибровочных вершин. Вычисления проводятся в общей ξ-калибровке, но в пределе нулевых внешних импульсов, что позволяет упростить вычисления. В параграфе 3.1 ставится задача, а именно, для данной теории в приближении нулевых внешних импульсов вычислить определенные суперграфы, которые дают вклад в двухпетлевую перенормировку тройных духово-калибровочных вершин. В параграфе 3.2 приводятся правила Фейнмана, необходимые для того, чтобы произвести указанные вычисления.

В параграфе 3.3 исследуется двухпетлевая перенормировка $V\bar{c}c$ вершин на примере суперграфов, содержащих петлю материи. Данное вычисление в совокупности с другими аналогичными вычислениями позволило показать, что в пределе нулевых внешних импульсов сумма вкладов от двухпетлевых суперграфов, содержащих петлю материи, равна нулю [82]. Это подтверждает теорему о неперенормировке тройных духово-калибровочных вершин на двухпетлевом уровне [82].

Ряд суперграфов с петлями духов и калибровочных суперполей, дающих вклад в двухпетлевую перенормировку тройных духово-калибровочных вер-

шин, вычислен в параграфе 3.4. Было показано, что вклад от некоторых суперграфов в пределе нулевого внешнего импульса оказывается равным нулю. Оставшиеся ненулевые вклады при суммировании с другими аналогичными вкладами по итогу сокращаются, и суммарный результат в рассматриваемом пределе оказывается равным нулю [83], что доказывает конечность рассматриваемых вершин в двухпетлевом приближении.

В главе 4 рассматриваются $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные калибровочные теории, которые удовлетворяют, так называемому, условию $P = \frac{1}{3}Q$. В параграфе 4.1 приводится мотивация, и ставится задача, заключающаяся в исследовании возможной редукции констант связи в рассматриваемых теориях. В параграфе 4.2 из ренормгрупповой инвариантности отношения юкавских констант связи к калибровочной выводится соотношение между аномальными размерностями квантовых суперполей для теорий $P = \frac{1}{3}Q$ и проверяется его справедливость в однопетлевом приближении. Используя это соотношение, в параграфе 4.3 точное выражение для аномальной размерности суперполей материи переписывается в новой форме, которая предположительно может быть использована для его вывода. Справедливость соотношения между аномальными размерностями квантовых суперполей в высших порядках теории возмущений обсуждается в параграфе 4.4.

Глава 1

Связь между трехпетлевыми вкладами духов в β-функцию и двухпетлевыми вкладами в аномальную размерность γ_c в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

1.1 Ренормгрупповые функции в суперсимметричных калибровочных теориях

Данная глава посвящена вычислению различных вкладов в ренормгрупповые функции и проверке соотношений между ними. Поэтому вначале мы дадим определения рассматриваемых здесь величин. Несмотря на то, что дальнейшее рассмотрение является довольно общим, легче его провести на примере конкретной модели. Пожалуй, самым простым примером калибровочной суперсимметричной теории является $\mathcal{N} = 1$ СКЭД.

Определим ренормгрупповые функции в терминах голых констант связи [56]. В рамках $\mathcal{N} = 1$ СКЭД можно рассмотреть двухточечную функцию Грина материи $G(\alpha_0, \Lambda/p)$, где Λ — параметр обрезания, p — внешний импульс. Для того, чтобы получить перенормированную функцию Грина, нужно домножить исходную функцию $G(\alpha_0, \Lambda/p)$ на константу перенормировки

$$G_{\text{рен}}\left(\alpha, \mu/p\right) = \lim_{\Lambda\to\infty} Z\left(\alpha, \Lambda/\mu\right) G\left(\alpha_0, \Lambda/p\right). \tag{1.1}$$

Тогда в пределе параметра обрезания, стремящегося к бесконечности ($\Lambda \to \infty$), перенормированная функция Грина $G_{\text{рен}}\left(\alpha, \mu/p\right)$ (где μ — параметр перенормировки) будет конечной.

Ренормгрупповые функции в терминах голых констант связи (в случае $\mathcal{N} = 1$ СКЭД голая константа связи обозначается через α_0) определяются сле-

дующим образом

$$\beta\left(\alpha_0\left(\alpha,\Lambda/\mu\right)\right) \equiv \left.\frac{d\alpha_0\left(\alpha,\Lambda/\mu\right)}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha=\text{const}};$$
$$\gamma\left(\alpha_0\left(\alpha,\Lambda/\mu\right)\right) \equiv -\left.\frac{d\ln Z\left(\alpha,\Lambda/\mu\right)}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha=\text{const}}. \qquad (1.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что ренормгрупповые функции, определенные формулами (1.2), не зависят от схемы перенормировки [26, 56]. Для этого соотношение (1.1) должно быть переписано следующим образом

$$\ln G\left(\alpha_0,\Lambda/p\right) = \ln G_{\text{рен}}\left(\alpha,\mu/p\right) - \ln Z\left(\alpha,\Lambda/\mu\right) + \\ +(\text{нулевые вклады при } p\to 0). \qquad (1.3)$$

Далее следует продифференцировать соотношение (1.3) по $\ln\Lambda$ при фиксированном значении перенормированной константы связи α и рассмотреть полученное выражение в пределе нулевого внешнего импульса $p\to 0$. Тогда, учитывая, что производная от $G_{\text{рен}}\left(\alpha,\mu/p\right)$ даст 0, и используя соотношения (1.2), получим

$$\gamma(\alpha_0) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{\partial\ln G(\alpha_0,\Lambda/p)}{\partial\alpha_0}\beta(\alpha_0) - \frac{\partial\ln G(\alpha_0,\Lambda/p)}{\partial\ln p}\right). \qquad (1.4)$$

Из соотношения (1.4) видно, что аномальная размерность $\gamma(\alpha_0)$, определенная в терминах голых констант связи, не зависит от вида функции $\alpha_0(\alpha,\Lambda/\mu)$ и, стало быть, не зависит от схемы перенормировки.

Аналогично, можно показать, что β-функция, определенная формулой (1.2), также является схемно не зависимой [26, 56].

Однако стандартно ренормгрупповые функции определяются в терминах перенормированных констант связи

$$\widetilde{\beta}(\alpha) \equiv \left.\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0=\text{const}}; \qquad \widetilde{\gamma}(\alpha) \equiv \left.\frac{d\ln Z}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0=\text{const}}. \qquad (1.5)$$

В данном случае производные берутся по $\ln\mu$ при фиксированном значении голой константы связи.

В работах [26, 56] было показано, что для $\mathcal{N}=1$ СКЭД, при наличии спе-

циального дополнительного условия, фиксирующего некоторую специальную схему перенормировки, ренормгрупповые функции, определенные в терминах голых констант связи (1.2) и в терминах перенормированных констант связи (1.5), задаются функциями, имеющими одинаковый вид с точностью до замены аргументов. Такие граничные условия накладываются при некотором значении $\ln \Lambda/\mu = x_0$ и имеют следующий вид

$$Z_\alpha(\alpha_0, \ln \Lambda/\mu \to x_0) = 1; \qquad Z(\alpha_0, \ln \Lambda/\mu \to x_0) = 1. \tag{1.6}$$

Схема перенормировки HD+MSL [56], где HD — аббревиатура для высших производных, а MSL — минимальные вычитания логарифмов, соответствует точке $x_0 = 0$. Константы перенормировки в HD+MSL содержат только степени логарифма $\ln \Lambda/\mu$. Процедура вычитания, в свою очередь, не включает в себя никаких конечных констант.

Схема перенормировки в точке $x_0 \neq 0$ представляет собой более общий вариант HD+MSL. Она также является NSVZ-схемой и связана с HD+MSL [58, 85].

Если формально записать вышеприведенные утверждения, то, накладывая граничные условия (1.6), можно показать, что в $\mathcal{N} = 1$ СКЭД ренормгрупповые функции (1.2) и (1.5) связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}(\alpha) &= \beta(\alpha_0 \to \alpha); \\ \widetilde{\gamma}(\alpha) &= \gamma(\alpha_0 \to \alpha). \end{aligned} \tag{1.7}$$

В соответствии с [56], равенства (1.7) доказываются следующим образом. Учитывая тот факт, что константа связи перенормируется, как $\alpha = \alpha_0 Z_\alpha$, и пользуясь определением для ренормгрупповых функций в терминах перенормированных констант связи, можно видеть, что

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta}(\alpha) &= \frac{d\alpha}{d\ln\mu}\bigg|_{\alpha_0=\text{const}} = \frac{d}{d\ln\mu}\Big(\alpha_0 Z_\alpha(\alpha, \ln\Lambda/\mu)\Big)\bigg|_{\alpha_0=\text{const}} = \\ &= \alpha_0 Z_\alpha\left(\frac{\partial \ln Z_\alpha}{\partial \ln\mu} + \frac{\partial \ln Z_\alpha}{\partial\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\right), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где последнее равенство получается расписыванием действия полной производной $d/d\ln\mu$ на Z_α. Учитывая определение частной производной $\partial/\partial\ln\mu$ и тот факт, что Z_α зависит от Λ и μ только через отношение, получаем, что

$$\frac{\partial \ln Z_\alpha}{\partial \ln \mu} = -\frac{\partial \ln Z_\alpha}{\partial \ln \Lambda} \equiv -\frac{d \ln Z_\alpha}{d \ln \Lambda}\bigg|_{\alpha=\text{const}} = \frac{d \ln (Z_\alpha)^{-1}}{d \ln \Lambda}\bigg|_{\alpha=\text{const}}. \tag{1.9}$$

Рассматривая формулу (1.8) при фиксированном значении $\ln\Lambda/\mu = x_0$, мы видим, что с учетом граничных условий (1.6), последнее слагаемое в (1.8) уходит, так как пропорционально $\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln Z_\alpha\left(\alpha, \ln\Lambda/\mu = x_0\right) = 0$. Тогда, учитывая соотношения (1.8) и (1.9), β-функция, определенная в терминах перенормированных констант связи, в схеме (1.6) будет равна

$$\widetilde{\beta}(\alpha) = \alpha\, \frac{d \ln (Z_\alpha)^{-1}}{d \ln \Lambda}\bigg|_{\alpha=\text{const}} = \frac{d\alpha_0}{d \ln \Lambda}\bigg|_{\alpha=\text{const}} = \beta(\alpha_0)\Big|_{\ln\Lambda/\mu=x_0}. \tag{1.10}$$

Благодаря граничным условиям (1.6), в точке $\ln\Lambda/\mu = x_0$ значения перенормированной и голой константы связи совпадают, $\alpha\big(\alpha_0, \ln\frac{\Lambda}{\mu} = x_0\big) = \alpha_0$. Отсюда непосредственно следует соотношение, связывающее β-функции, определенные в терминах голых и перенормированных констант — первое соотношение из (1.7).

Аналогично получается связь между аномальными размерностями, определенными в терминах голых и перенормированных констант связи — второе соотношение в (1.7) [25, 26, 56].

Из совпадения ренормгрупповых функций, определенных через голые и перенормированные константы связи, (1.7) следует, что если NSVZ соотношение справедливо для первых, то оно автоматически становится справедливым и для вторых. Таким образом, показывается, что HD+MSL и ее модификация для случая $x_0 \neq 0$ являются NSVZ-схемами [56, 58].

NSVZ соотношение в терминах голых констант связи для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД, выведенное, в том числе, с помощью прямого суммирования диаграмм Фейнмана [41], записывается в форме

$$\beta(\alpha_0) = \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi}(1 - \gamma(\alpha_0)). \tag{1.11}$$

В терминах перенормированных констант связи, в соответствии с вышепри-

веденными рассуждениями, для класса HD+MSL схем [56] данное соотношение будет иметь вид

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi}(1 - \gamma(\alpha)). \tag{1.12}$$

Рассмотрим ренормгрупповые функции для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса. Тождества Славнова–Тейлора позволяют доказать перенормируемость суперсимметричных теорий [86, 87, 88, 89, 90]. Как следствие, все расходимости могут быть поглощены в константы перенормировки суперполей и констант связи. Соотношения, позволяющие определить константы перенормировки, имеют следующий вид [30, 80]

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha_0} = \frac{Z_\alpha}{\alpha}; && \frac{1}{\xi_0} = \frac{Z_\xi}{\xi}; && \phi_i = \left(\sqrt{Z_\phi}\right)_i^{\ j}\left(\phi_R\right)_j; \\ &V = Z_V Z_\alpha^{-1/2} V_R; && \bar{c}c = Z_c Z_\alpha^{-1}\bar{c}_R c_R; && y_0 = Z_y y, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где голые константы связи отмечены индексом 0, а перенормированные суперполя обозначены индексом R. Z_V, Z_c, $\left(\sqrt{Z_\phi}\right)_i^{\ j}$ — константы перенормировки калибровочного поля, духов Фаддеева–Попова и суперполей материи, а y — первая из бесконечного набора констант, соответствующих нелинейной перенормировке квантового калибровочного суперполя V [79]. Далее включим калибровочный параметр ξ в общее обозначение, содержащее все константы нелинейной перенормировки, $Y = (\xi, y, \dots)$.

Рассмотрим ренормгрупповые функции, возникающие в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [25, 26, 91]. В терминах голых констант связи их можно определить аналогично тому, как это было сделано для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД в формуле (1.2). Тогда голые ренормгрупповые функции для теории Янга–Миллса с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) &\equiv \left.\frac{d\alpha_0}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha,\lambda,Y=\text{const}}; \\ \gamma_V(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) &\equiv -\left.\frac{d\ln Z_V}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha,\lambda,Y=\text{const}}; \\ \gamma_c(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) &\equiv -\left.\frac{d\ln Z_c}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha,\lambda,Y=\text{const}}; \\ \left(\gamma_\phi\right)_i^{\ j}(\alpha_0, \lambda_0, Y_0) &\equiv -\left.\frac{d\left(\ln Z_\phi\right)_i^{\ j}}{d\ln\Lambda}\right|_{\alpha,\lambda,Y=\text{const}}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где γ_V, γ_c, $\left(\gamma_\phi\right)_i{}^j$ — аномальные размерности калибровочного поля, духов Фаддеева–Попова и суперполей материи соответственно, а λ_0 — обозначение для голых юкавских констант.

Соответствующие ренормгрупповые функции, записанные в терминах перенормированных констант связи, определяются как

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}(\alpha,\lambda,Y) &\equiv \left.\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0,\lambda_0,Y_0=\text{const}};\\
\widetilde{\gamma}_V(\alpha,\lambda,Y) &\equiv \left.\frac{d\ln Z_V}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0,\lambda_0,Y_0=\text{const}};\\
\widetilde{\gamma}_c(\alpha,\lambda,Y) &\equiv \left.\frac{d\ln Z_c}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0,\lambda_0,Y_0=\text{const}};\\
(\widetilde{\gamma}_\phi)_i{}^j(\alpha,\lambda,Y) &\equiv \left.\frac{d(\ln Z_\phi)_i{}^j}{d\ln\mu}\right|_{\alpha_0,\lambda_0,Y_0=\text{const}}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

В соответствии с работами [25, 26, 91] существуют граничные условия, аналогичные ранее рассмотренным для случая $\mathcal{N}=1$ СКЭД (1.6), при которых ренормгрупповые функции, определенные в терминах голых и перенормированных констант связи формулами (1.14) и (1.15) соответственно, будут иметь одинаковый вид с точностью до замены аргумента

$$\begin{aligned}
&\alpha(\alpha_0,\lambda_0,Y_0,\ln\Lambda/\mu\to x_0)=\alpha_0; \qquad Z_V(\alpha_0,\lambda_0,Y_0,\ln\Lambda/\mu\to x_0)=1;\\
&Z_c(\alpha_0,\lambda_0,Y_0,\ln\Lambda/\mu\to x_0)=1; \qquad (Z_\phi)_i{}^j(\alpha_0,\lambda_0,Y_0,\ln\Lambda/\mu\to x_0)=\delta_i^j;\\
&Y(\alpha_0,\lambda_0,Y_0,\ln\Lambda/\mu\to x_0)=Y_0.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Доказательство данного утверждения получается методом, ранее описанным в этом параграфе для $\mathcal{N}=1$ СКЭД .

NSVZ соотношение [11, 12, 23, 24] для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с суперполями материи в терминах голых констант связи записывается в виде

$$\beta(\alpha_0,\lambda_0)=-\frac{\alpha^2\left(3C_2-T(R)+C(R)_i{}^j\gamma_j{}^i(\alpha_0,\lambda_0)/r\right)}{2\pi(1-C_2\alpha_0/2\pi)}, \tag{1.17}$$

где

$$\mathrm{tr}(T^A T^B) \equiv T(R)\delta^{AB}; \quad (T^A)_i{}^k (T^A)_k{}^j \equiv C(R)_i^j;$$
$$f^{ACD} f^{BCD} \equiv C_2 \delta^{AB}; \quad r \equiv \delta_{AA}. \tag{1.18}$$

При этом, T^A — это генераторы представления, в котором лежат суперполя материи, а r — размерность калибровочной группы.

Конечность вершин с одной линией квантового калибровочного суперполя и двумя духовыми линиями [29] позволяет переписать точную NSVZ β-функцию (1.17) в новом виде. В работе [29] (см. также [25]) во всех порядках теории возмущений было получено NSVZ соотношение нового вида, которое в терминах голых констант связи записывается следующим образом:

$$\frac{\beta(\alpha_0,\lambda_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{1}{2\pi}\Big(3C_2 - T(R) - 2C_2\gamma_c(\alpha_0,\lambda_0) - 2C_2\gamma_V(\alpha_0,\lambda_0) +$$
$$+C(R)_i{}^j\gamma_j{}^i(\alpha_0,\lambda_0)/r\Big). \tag{1.19}$$

Соотношение (1.19) уже не содержит знаменателя, зависящего от калибровочной константы связи.

Можно показать [25], что это NSVZ соотношение также будет выполняться и для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированных констант связи, в схеме HD+MSL. Отсюда следует, что граничные условия (1.16) позволяют получить NSVZ соотношение в терминах перенормированных констант связи для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с полями материи.

NSVZ соответствие нового вида (1.19) для ренормгрупповых функций, определенных в терминах перенормированных констант связи, будет иметь вид

$$\frac{\beta(\alpha,\lambda)}{\alpha^2} = -\frac{1}{2\pi}\Big(3C_2 - T(R) - 2C_2\gamma_c(\alpha,\lambda) - 2C_2\gamma_V(\alpha,\lambda) +$$
$$+C(R)_i{}^j\gamma_j{}^i(\alpha,\lambda)/r\Big), \tag{1.20}$$

и, как было показано в работе [25], выполняется в схеме HD+MSL во всех порядках теории возмущений.

Соответственно, NSVZ соотношение (1.17) в терминах перенормированных констант связи будет иметь такой же вид с точностью до замены аргументов у

ренормгрупповых функций

$$\beta(\alpha,\lambda) = -\frac{\alpha^2\left(3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j\gamma_j{}^i(\alpha,\lambda)/r\right)}{2\pi(1 - C_2\alpha/2\pi)} \tag{1.21}$$

и будет выполняться во всех порядках теории возмущений в схеме HD+MSL, задаваемой граничными условиями (1.16).

1.2 Действие и правила Фейнмана для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

$\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную теорию Янга–Миллса с суперполями материи удобно рассматривать в формализме суперпространства [92]. После добавления регуляризующего слагаемого с высшими производными и процедуры фиксации калибровки ее полное действие принимает вид

$$S_\Sigma = S + S_\Lambda + S_{gf} + S_{FP} + S_{mat}, \tag{1.22}$$

где S — действие Янга–Миллса, S_Λ и S_{gf} отвечают за регуляризацию и фиксацию калибровки соответственно, S_{mat} — часть действия с суперполями материи, а S_{FP} — действие духов Фаддеева–Попова.

Действие $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса на классическом уровне будет иметь вид

$$S = \frac{1}{2e_0^2}\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W^a W_a, \tag{1.23}$$

где e_0 — голый заряд, а W_a — суперсимметричная напряженность калибровочного суперполя, которая имеет вид

$$W_a = \frac{1}{8}\bar{D}^2\left(e^{-2V}D_a e^{2V}\right). \tag{1.24}$$

В данной части действия суперполя V раскладываются по генераторам фундаментального представления калибровочной группы G как $V = e_0 V^A t^A$. При этом генераторы t^A удовлетворяют нормировочному условию $\mathrm{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}$.

Действие (1.23) является инвариантным относительно калибровочных пре-

образований

$$e^{2V} \longrightarrow e^{-A^+} e^{2V} e^{A}, \tag{1.25}$$

где A — произвольное киральное суперполе. Тогда суперсимметричная напряженность преобразуется по закону

$$W_a \longrightarrow e^{A} W_a e^{-A}. \tag{1.26}$$

Отсюда, в частности, следует, что величина $\mathrm{tr}(W_a W^a)$ будет являться калибровочно инвариантной.

Вклады, включающие в себя суперполя материи, имеют вид

$$S_{mat} = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^{*i}\,(e^{2V})_i^{\,j}\phi_j + \left\{\int d^4x\, d^2\theta\, \Big(\frac{1}{4}m_0^{ij}\phi_i\phi_j + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\Big) + \text{к.с.}\right\}, \tag{1.27}$$

где ϕ_i — киральные суперполя материи, лежащие в некотором представлении R калибровочной группы, а m_0^{ij} и λ_0^{ijk} — голые массовая матрица и юкавские константы соответственно.

Первое слагаемое в формуле (1.27) задает взаимодействие суперполей материи с калибровочным суперполем, которое теперь раскладывается по генераторам представления R как $V = e_0 V^A T^A$, а генераторы удовлетворяют условию $\mathrm{tr}(T^A T^B) = T(R)\delta^{AB}$.

Действие (1.27) является инвариантным относительно калибровочных преобразований калибровочного суперполя (1.25) и суперполей материи

$$\phi_i \to \left(e^{A}\phi\right)_i, \tag{1.28}$$

если массы m_0^{ij} и юкавские константы λ_0^{ijk} удовлетворяют соотношениям

$$m_0^{ik}(T^A)_k^{\ j} + m_0^{kj}(T^A)_k^{\ i} = 0; \tag{1.29}$$

$$\lambda_0^{ijm}(T^A)_m^{\ k} + \lambda_0^{imk}(T^A)_m^{\ j} + \lambda_0^{mjk}(T^A)_m^{\ i} = 0. \tag{1.30}$$

Можно показать, что при дополнительном условии на массы m_0^{ij}

$$m_0^{ik} m^*_{0kj} = m_0^2 \delta^i_j \tag{1.31}$$

будет выполняться [82] условие сокращения калибровочных аномалий [93], справедливое и для суперсимметричных теорий [94]

$$\mathrm{tr}\Big(T^A\{T^B, T^C\}\Big) = 0. \tag{1.32}$$

Вычисление β-функции удобно проводить в формализме фонового поля [95, 96], который можно сформулировать и в суперсимметричном случае [97]. Также необходимо учесть, что квантовое калибровочное суперполе V перенормируется нелинейным образом [90, 98, 99]. Это приводит к замене вида

$$e^{2V} \to e^{2\boldsymbol{V}} e^{2\mathcal{F}(V)}, \tag{1.33}$$

где $\boldsymbol{V}$ — фоновое калибровочное суперполе, а функция $\mathcal{F}(V)$ нужна для описания нелинейной перенормировки квантового калибровочного суперполя.

Тогда выражение для суперсимметричной напряженности (1.24) перейдет в

$$W_a \equiv \frac{1}{8}\bar{D}^2\Big[e^{-2\boldsymbol{V}} e^{-2\mathcal{F}(V)}\, D_a\Big(e^{2\mathcal{F}(V)} e^{2\boldsymbol{V}}\Big)\Big]. \tag{1.34}$$

Функция $\mathcal{F}(V)$ представляет собой ряд по V, включающий в себя бесконечное число новых констант связи, аналогичных калибровочному параметру. В работах [100, 101] (см. также [79]) было показано, что первые члены разложения ряда $\mathcal{F}(V)$ имеют вид

$$\mathcal{F}(V)^A = V^A + e_0^2\, y_0\, G^{ABCD} V^B V^C V^D + \ldots, \tag{1.35}$$

где y_0 — это первая голая константа среди бесконечного набора, а G^{ABCD} — симметричный по всем перестановкам индексов тензор, построенный из структурных констант, который задается формулой

$$G^{ABCD} \equiv \big(f^{AKL} f^{BLM} f^{CMN} f^{DNK} + \text{перестановки } B,\, C, \text{ и } D\big)/6. \tag{1.36}$$

Регуляризация $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса осуществ-

ляется с помощью метода высших ковариантных производных [48, 49]. Тогда регуляризованное действие, содержащее калибровочные суперполя и суперполя материи, будет иметь вид

$$S_{\rm reg} = S + S_\Lambda + S_{mat} = \frac{1}{2e_0^2}\,{\rm Re\,tr}\int d^4x\,d^2\theta\,W^a\Big[e^{-2\boldsymbol{V}}e^{-2\mathcal{F}(V)}\,R\Big(-\frac{\bar\nabla^2\nabla^2}{16\Lambda^2}\Big)\cdot$$
$$\cdot e^{2\mathcal{F}(V)}e^{2\boldsymbol{V}}\Big]_{Adj}W_a + \frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\,\phi^{*i}\Big[F\Big(-\frac{\bar\nabla^2\nabla^2}{16\Lambda^2}\Big)e^{2\mathcal{F}(V)}e^{2\boldsymbol{V}}\Big]_i^{\ j}\phi_j +$$
$$+\Big\{\int d^4x\,d^2\theta\,\Big(\frac{1}{4}m_0^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\Big) + \text{к.с.}\Big\}, \qquad (1.37)$$

где добавление слагаемого S_Λ приводит к появлению функций регуляторов $F(x), R(x)$, которые удовлетворяют условиям $R(0) = F(0) = 1$; $F(\infty) = \infty$ и $R(\infty) = \infty$. Функции R и F здесь осуществляют регуляризацию высшими ковариантными производными, поскольку добавляют в знаменатель пропагатора калибровочного поля слагаемые выше второй степени по импульсу. Суперсимметричные ковариантные производные в (1.37) задаются формулами

$$\nabla_a = D_a; \qquad \bar\nabla_{\dot a} = e^{2\mathcal{F}(V)}e^{2\boldsymbol{V}}\bar D_{\dot a}e^{-2\boldsymbol{V}}e^{-2\mathcal{F}(V)}. \qquad (1.38)$$

Подстрочный индекс Adj в (1.37) обозначает, что отмеченные величины раскладываются по генераторам присоединенного представления. При этом генераторы в присоединенном представлении задаются и нормированы следующим образом:

$$(T^A_{Adj})_B{}^C = -if^{ABC}, \qquad {\rm Tr}(T^A_{Adj}T^B_{Adj}) = C_2\delta^{AB}. \qquad (1.39)$$

Согласно процедуре квантования полей Янга–Миллса необходимо добавить в действие слагаемое, фиксирующее калибровку,

$$S_{gf} = -\frac{1}{16\xi_0 e_0^2}\,{\rm tr}\int d^4x\,d^4\theta\,\boldsymbol{\nabla}^2 V K\Big(-\frac{\bar{\boldsymbol{\nabla}}^2\boldsymbol{\nabla}^2}{16\Lambda^2}\Big)_{Adj}\bar{\boldsymbol{\nabla}}^2 V, \qquad (1.40)$$

где функция регулятор $K(x)$ имеет аналогичные граничные условия $K(0) = 1$ и $K(\infty) = \infty$, а ξ_0 — калибровочный параметр. Фоновые ковариантные производные, присутствующие в этом выражении, имеют вид

$$\boldsymbol{\nabla}_a \equiv D_a; \qquad \bar{\boldsymbol{\nabla}}_{\dot a} \equiv e^{2\boldsymbol{V}}\bar D_{\dot a}e^{-2\boldsymbol{V}}. \qquad (1.41)$$

После фиксации калибровки, согласно процедуре квантования, необходимо добавить действие для духов Фаддеева–Попова, которое имеет следующий вид:

$$S_{FP} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^4\theta\, \frac{\partial \mathcal{F}^{-1}(\widetilde{V})^A}{\partial \widetilde{V}^B}\bigg|_{\widetilde{V}=\mathcal{F}(V)} \left(e^{2\boldsymbol{V}}\bar{c}e^{-2\boldsymbol{V}} + \bar{c}^{+}\right)^A \times$$
$$\times \left\{\left(\frac{\mathcal{F}(V)}{1-e^{2\mathcal{F}(V)}}\right)_{Adj} c^{+} + \left(\frac{\mathcal{F}(V)}{1-e^{-2\mathcal{F}(V)}}\right)_{Adj}\left(e^{2\boldsymbol{V}}ce^{-2\boldsymbol{V}}\right)\right\}^B, \qquad (1.42)$$

где c — киральное духовое суперполе Фаддеева–Попова, а $\bar{c}$ — киральное антидуховое суперполе.

Использование метода фонового поля приводит к необходимости введения духов Нильсена–Каллош [102, 103], которые в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса описываются действием [104]

$$S_{NK} = \frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, b^{+}\left(K\Big(-\frac{\bar{\boldsymbol{\nabla}}^2\boldsymbol{\nabla}^2}{16\Lambda^2}\Big)e^{2\boldsymbol{V}}\right)_{Adj} b, \qquad (1.43)$$

где b — киральное духовое суперполе Нильсена–Каллош в присоединенном представлении калибровочной группы

В результате, полное действие $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с суперполями материи, регуляризованное высшими ковариантными производными, с учетом вкладов (1.22), (1.37), (1.40), (1.42) и (1.43) будет записываться в виде

$$S_{full} = S_{\Sigma} + S_{NK} = S_{reg} + S_{gf} + S_{FP} + S_{NK}. \qquad (1.44)$$

Добавление к действию слагаемых с высшими ковариантными производными не позволяет регуляризовать однопетлевые (под)расходимости [105]. Остаточные однопетлевые расходимости и подрасходимости устраняются введением детерминантов Паули–Вилларса [106] в производящий функционал. Устранение однопетлевых расходимостей в суперсимметричных калибровочных теориях с помощью детерминантов Паули–Вилларса рассматривалось в работах [30, 107]. Для этого используется два детерминанта. Первый из них

$$\mathrm{Det}(\mathrm{PV}, M_{\varphi})^{-1} = \int D\varphi_1 D\varphi_2 D\varphi_3 \exp(iS_{\varphi}), \qquad (1.45)$$

где φ_i $(i = 1, 2, 3)$ — киральные коммутирующие суперполя, отвечает за устранение калибровочных и духовых однопетлевых расходимостей и подрасходимостей, а сами поля φ_i лежат в присоединенном представлении калибровочной группы G. Действие для этих полей задается выражением

$$S_\varphi = \frac{1}{2e_0^2}\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, \Big(\varphi_1^+\Big[R\Big(-\frac{\bar\nabla^2\nabla^2}{16\Lambda^2}\Big)e^{2\mathcal{F}(V)}e^{2\boldsymbol{V}}\Big]_{Adj}\varphi_1 + \\ +\varphi_2^+\Big[e^{2\mathcal{F}(V)}e^{2\boldsymbol{V}}\Big]_{Adj}\varphi_2 + \varphi_3^+\Big[e^{2\mathcal{F}(V)}e^{2\boldsymbol{V}}\Big]_{Adj}\varphi_3\Big) + \\ +\frac{1}{2e_0^2}\Big(\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, M_\varphi(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2) + \text{к.с.}\Big). \tag{1.46}$$

Однопетлевые (под)расходимости, создаваемые суперполями материи, устраняются введением второго детерминанта Паули–Вилларса

$$\mathrm{Det}(\mathrm{PV}, M)^{-1} = \int D\Phi\, \exp(iS_\Phi), \tag{1.47}$$

где суперполя Φ_j также являются киральными и коммутирующими и лежат в определенном представлении R_{PV}. Действие для полей Φ_j имеет структуру, похожую на (1.27), но не содержит слагаемого с юкавским взаимодействием

$$S_\Phi = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi^+ F\Big(-\frac{\bar\nabla^2\nabla^2}{16\Lambda^2}\Big)e^{2\mathcal{F}(V)}e^{2\boldsymbol{V}}\Phi + \Big(\frac{1}{4}\int d^4x\, d^2\theta\, M^{ij}\Phi_i\Phi_j + \text{к.с.}\Big). \tag{1.48}$$

В связи с этим, ограничение (1.32), необходимое для сокращения аномалий, должно быть наложено и для представления R_{PV}, если массы суперполей Паули–Вилларса удовлетворяют условию $M^{ik}M^*_{kj} = M^2\delta^i_j$. Это равносильно тому, что генераторы в представлении R_{PV} удовлетворяют соотношению

$$\mathrm{tr}\Big(T^A_{\mathrm{PV}}\{T^B_{\mathrm{PV}}, T^C_{\mathrm{PV}}\}\Big) = 0. \tag{1.49}$$

Массы суперполей Паули–Вилларса должны быть пропорциональны параметру ультрафиолетового обрезания Λ,

$$M_\varphi \equiv a_\varphi\Lambda; \qquad M \equiv a\Lambda, \tag{1.50}$$

где константы a_φ и a не являются зависящими от констант связи.

Окончательное выражение для производящего функционала регуляризован-

ной теории будет иметь вид

$$Z[\boldsymbol{V}, \text{Источники}] = \int D\mu \left(\text{Det}(\text{PV}, M)\right)^{T(R)/T(R_{\text{PV}})} \text{Det}(\text{PV}, M_\varphi)^{-1} \times \\ \times \exp\left(iS_{full} + iS_{sources}\right), \qquad (1.51)$$

где $D\mu$ — это мера функционального интегрирования по всем полям теории, а $S_{sources}$ — задает взаимодействие суперполей с источниками.

В данном параграфе будут получены правила Фейнмана для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, которые в дальнейшем будут использоваться при вычислениях различных супердиаграмм.

Рассмотрим слагаемые в действии S_Σ, которые содержат только квантовое калибровочное суперполе. Разложим соответствующее выражение до второй степени по полю V включительно и выделим слагаемые, соответствующие порядку V^2. Данная процедура позволит получить выражение для пропагатора суперполя V. Итак,

$$S^{(2)}_{\text{Я-М}} = S^{(2)} + S^{(2)}_\Lambda + S^{(2)}_{gf} = \frac{1}{2e_0^2}\text{Re tr}\int d^4x\, d^2\theta \frac{1}{4}\overline{D}^2 D^a V R\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\frac{1}{4}\overline{D}^2 D_a V - \\ -\frac{1}{16\xi_0 e_0^2}\text{Re tr}\int d^4x\, d^4\theta\, D^2 V \cdot K\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\cdot \overline{D}^2 V \underbrace{=}_{\text{по частям}} \\ = -\frac{1}{16e_0^2}\text{tr}\int d^8x \left[8VR\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\partial^2\Pi_{1/2}V + \frac{1}{\xi_0}D^2V\cdot K\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)\cdot\overline{D}^2V\right]. \qquad (1.52)$$

При этом поперечный проектор определяется как

$$\partial^2\Pi_{1/2} = -\frac{1}{8}D^a\overline{D}^2D_a = -\frac{1}{8}\overline{D}^{\dot{a}}D^2\overline{D}_{\dot{a}} \qquad (1.53)$$

и удовлетворяет соотношению

$$\partial^2\Pi_{1/2} + \frac{D^2\overline{D}^2}{16} + \frac{\overline{D}^2D^2}{16} = -\partial^2. \qquad (1.54)$$

Применяя тождество (1.54), получаем, что

$$S^{(2)}_{\text{Я-М}} = \frac{1}{2e_0^2}\ \text{tr}\int d^8x\left[V\partial^2RV + \frac{1}{16}V(D^2\overline{D}^2 + \overline{D}^2D^2)\left(R - \frac{1}{\xi_0}K\right)V\right]. \qquad (1.55)$$

Перепишем эту формулу через коэффициенты разложения суперполей по генераторам. При этом разложение произвольного поля H, лежащего в присоединенном представлении, имеет вид

$$H = e_0 H^A t^A, \tag{1.56}$$

а генераторы фундаментального представления t^A удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[t^A, t^B\right] = i f^{ABC} t^C, \tag{1.57}$$

где f^{ABC} — структурные константы.

Как мы уже упоминали, предполагается, что генераторы фундаментального представления нормированы условием

$$\mathrm{tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}. \tag{1.58}$$

Далее нужно применить стандартную процедуру получения выражения для пропагатора. Слагаемое с источником для квантового калибровочного суперполя записывается в виде

$$S_{source} = \int d^8x J^A V^A. \tag{1.59}$$

При его учете уравнения движения принимают вид

$$0 = \frac{1}{2}\left(\partial^2 R V^A + \frac{1}{16}(D^2\overline{D}^2 + \overline{D}^2 D^2)\left(R - \frac{1}{\xi_0}K\right)V^A\right) + J^A. \tag{1.60}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$V^A = -\frac{2}{R\partial^2}J^A + 2x(D^2\overline{D}^2 + \overline{D}^2 D^2)J^A. \tag{1.61}$$

После подстановки в формулу (1.60) получаем, что

$$x = \frac{1}{16\partial^4}\Big(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R}\Big), \tag{1.62}$$

благодаря чему

$$V^A = -\frac{2}{R\partial^2}J^A + \frac{1}{8\partial^4}\Big(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R}\Big)J^A. \tag{1.63}$$

Подставляя это выражение в квадратичную часть действия, мы видим, что

$$Z_0[J] = exp\Big\{ i \int d^8x J^A \Big[-\frac{1}{R\partial^2} + \frac{1}{16\partial^4}\big(D^2\overline{D}^2 + \overline{D}^2 D^2\big)\Big(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R}\Big)\Big] J^A \Big\}. \quad (1.64)$$

Отсюда легко находим выражение для пропагатора квантового калибровочного суперполя в общей ξ-калибровке:

$$\big(\mathrm{P}_V\big)_{12} = 2i\left(-\frac{1}{R\partial^2} + \frac{1}{16\partial^4}\big(D^2\overline{D}^2 + \overline{D}^2 D^2\big)\Big(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R}\Big)\right)\delta^8_{12}. \quad (1.65)$$

Для упрощения вычислений часто используется калибровка Фейнмана, в которой $R = K$ и $\xi_0 = 1$. Выражение для пропагатора в этой калибровке принимает наиболее простой вид

$$\big(\mathrm{P}_V\big)_{12} = -2i\frac{1}{R\partial^2}\delta^8_{12}. \quad (1.66)$$

Графически пропагатор квантового калибровочного суперполя будет изображаться волнистой линией, как показано на Рис. 1.1.



Рис. 1.1: Пропагатор квантового калибровочного суперполя

Выражение для действия духов Фаддеева–Попова с точностью до линейных по суперполю V слагаемых имеет вид

$$\begin{aligned} S_{FP} \to \frac{1}{e_0^2}\,\mathrm{tr}\int d^8x(\overline{c}+\overline{c}^+)\left[-\frac{1}{2}(1-V)_{Adj}\cdot c^+ + \frac{1}{2}(1+V)_{Adj}\cdot c + O(V^2)\right] = \\ = \frac{1}{2e_0^2}\,tr\int d^8x(-\overline{c}c^+ + \overline{c}^+c + \overline{c}[V,c^+] + \overline{c}^+[V,c^+] + \overline{c}[V,c] + \\ +\overline{c}^+[V,c] + O(V^2)), \end{aligned} \quad (1.67)$$

где мы учли, что в присоединенном представлении

$$(f_0 + f_1V + f_2V^2 + ...)_{Adj}X \equiv f_0X + f_1[V,X] + f_2[V,[V,X]] + ... \quad (1.68)$$

и использовали разложения

$$\frac{V}{1-e^{2V}} \approx \frac{V}{1-(1+2V+2V^2)} = -\frac{V}{2(V+V^2)} = -\frac{1}{2(1+V)} \approx \frac{1}{2}(1-V);$$
$$\frac{V}{1-e^{-2V}} \approx \frac{1}{2}(1+V). \tag{1.69}$$

Для того чтобы получить выражения для духовых пропагаторов, нужно добавить слагаемые с источниками

$$S_{source} = \int d^4x\, d^2\theta (j_c^A c^A + \overline{j}_c^A \overline{c}^A) + \int d^4x\, d^2\overline{\theta} (j_c^{*A} c^{*A} + \overline{j}_c^{*A} \overline{c}^{*A}). \tag{1.70}$$

Для нахождения свободного производящего функционала для духов $Z_0[j_c]$ рассмотрим следующее действие

$$S_{FP}^{(2)} + S_{source} = \frac{1}{4} \int d^8x (-\overline{c}^A c^{*A} + \overline{c}^{*A} c^A) + S_{source}. \tag{1.71}$$

Тогда, используя уравнения движения и выражая духовые поля через поля источников, мы получаем, что

$$Z_0[j_c] = exp\left\{ i \int d^8x \left(\overline{j}_c^A \frac{1}{\partial^2} j_c^{*A} + j_c^A \frac{1}{\partial^2} \overline{j}_c^{*A} \right) \right\}. \tag{1.72}$$

Отсюда дифференцированием по источникам находятся выражения для двух духовых пропагаторов, изображенных на Рис. 1.2:

$$\left(\mathrm{P}_{\bar{c}c^*}\right)_{12} = +i\delta_{AB} \frac{\overline{D}_1^2 D_2^2}{4\partial^2} \delta_{12}^8; \tag{1.73}$$

$$\left(\mathrm{P}_{\bar{c}^*c}\right)_{12} = -i\delta_{AB} \frac{D_1^2 \overline{D}_2^2}{4\partial^2} \delta_{12}^8. \tag{1.74}$$



Рис. 1.2: Духовые пропагаторы

Рассмотрим линейную по V часть действия (1.67). Используя соотношения (1.56), (1.57) и (1.58), получаем выражение для тройной вершины, изображенной на Рис. 1.3, в которой сходятся две духовые линии и одна линия квантового

калибровочного суперполя:

$$\frac{ie_0}{4}\int d^8x f^{ABC}\left(\overline{c}^A V^B c^{*C}+\overline{c}^{*A}V^B c^{*C}+\overline{c}^A V^B c^C+\overline{c}^{*A}V^B c^C\right). \tag{1.75}$$

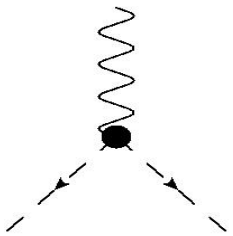


Рис. 1.3: Тройная духово-калибровочная вершина

Для того, чтобы получить четверную вершину, изображенную на Рис. 1.4, в которой сходятся две калибровочные и две духовые линии, нужно провести разложение по V до более высокого порядка:

$$\frac{V}{1-e^{2V}}\approx -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}V-\frac{1}{6}V^2-\frac{V^4}{90}+O(V^6); \tag{1.76}$$

$$\frac{V}{1-e^{-2V}}\approx \frac{1}{2}+\frac{1}{2}V+\frac{1}{6}V^2-\frac{V^4}{90}+O(V^6). \tag{1.77}$$

Отсюда сразу видно, что вершины, в которой сходятся три калибровочные и две духовые линии, не существует.

В действии S_{FP} рассмотрим слагаемые квадратичные по V, которые имеют вид

$$\begin{aligned}&\frac{1}{e_0^2}\ \mathrm{tr}\int d^8x(\overline{c}+\overline{c}^+)\left(-\frac{1}{6}V_{Adj}^2c^+ +\frac{1}{6}V_{Adj}^2c\right)=\\&=\frac{1}{e_0^2}\ \mathrm{tr}\int d^8x(\overline{c}+\overline{c}^+)\left(-\frac{1}{6}[V,[V,c^+]]+\frac{1}{6}[V,[V,c]]\right).\end{aligned} \tag{1.78}$$

Используя соотношения (1.56), (1.57) и (1.58), это выражение можно переписать в виде

$$-\frac{e_0^2}{12}\int d^8x(\overline{c}^A+\overline{c}^{*A})f^{ABC}V^B f^{CDE}V^D(-c^{*E}+c^E). \tag{1.79}$$

Стоит отметить, что из-за нелинейного характера перенормировки квантового калибровочного суперполя (1.33) вершина, изображенная на Рис. 1.4, будет

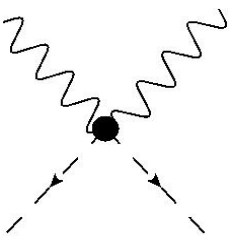


Рис. 1.4: Духово-калибровочная вершина с четырьмя линиями

содержать дополнительное слагаемое, которое получается исходя из соотношений (1.35) и (1.42), и оказывается равным

$$-\frac{3}{4}e_0^2\, y_0\, G^{ABCD} \int d^4x\, d^4\theta\, (\bar{c}^A + \bar{c}^{*A}) V^C V^D (c^B - c^{*B}), \tag{1.80}$$

где y_0 и G^{ABCD} были введены в формуле (1.35).

Эта добавка к вершине является важной для вычисления двухпетлевой аномальной размерности и выполнения ренормгрупповых уравнений [79]. Но выражение (1.80) нужно учитывать в однопетлевых диаграммах, поскольку тогда эффективно получается вклад исследуемого порядка. При вычислении двухпетлевых диаграмм, содержащих вершину на Рис. 1.4, учет добавки (1.80) будет приводить к превышению точности.

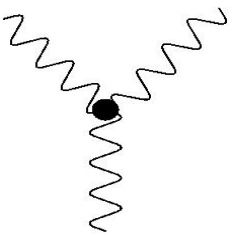


Рис. 1.5: Вершина с тремя линиями квантового калибровочного суперполя

Найдем теперь выражение для вершины, изображенной на Рис. 1.5, в которой сходятся три линии квантового калибровочного суперполя. Рассмотрим часть действия, включающую в себя слагаемые с суперполями Янга–Миллса третьей степени по V. Если положить фоновое поле равным нулю и принять во внимание, что учет нелинейной перенормировки здесь также приведет к превышению точности, то вклад в регуляризованное действие запишется в виде

$$S_{\text{reg}} \to \frac{1}{2e_0^2}\text{Re tr} \int d^4x d^2\theta\, W^a \left[e^{-2V} R \left(-\frac{\bar{\nabla}^2\nabla^2}{16\Lambda^2} \right) e^{2V} \right]_{Adj} W_a, \tag{1.81}$$

где суперсимметричная напряженность калибровочного суперполя задается вы-

ражением (1.24), а суперсимметричные ковариантные производные принимают вид

$$\nabla_a \to D_a; \qquad \bar{\nabla}_{\dot{a}} \to e^{2V} \bar{D}_{\dot{a}} e^{-2V}. \tag{1.82}$$

Выделяя из выражения (1.81) часть кубичную по V, получаем окончательное выражение для вершины, изображенной на Рис. 1.5,

$$\frac{1}{8e_0^2}\mathrm{tr}\int d^8x \overline{D}^2 D^a V R\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)[V, D_a V] + \frac{1}{64e_0^2\Lambda^2}\mathrm{tr}\int d^8x \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cdot$$
$$\cdot \sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)^{\alpha} \cdot D^2\overline{D}^2 D^a V \left[V, \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)^{n-1-\alpha} \overline{D}^2 D_a V\right], \tag{1.83}$$

где r_n являются коэффициентами разложения функции R в ряд Тейлора

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n. \tag{1.84}$$

Анализируя структуру выражения (1.83), видим, что после взятия следа оба слагаемых будут содержать структурные константы f^{ABC}.

1.3 Вклад в двухпетлевую аномальную размерность γ_c

Все супердиаграммы, которые дают вклад аномальную размерность духов Фаддеева–Попова в двухпетлевом приближении, [79] приведены на Рис. 1.6. В данном параграфе будет вычислен вклад диаграмм 1, 2, 3 и 4, изображенных на Рис. 1.7, в аномальную размерность духов γ_c. При этом вычисления проводятся в общей ξ-калибровке, так что пропагатор квантового калибровочного суперполя дается формулой (1.65). В каждой из рассматриваемых диаграмм одной духовой внешней линии соответствует суперполе c, а другой $\overline{c}^*$.

Используя формулы (1.65), (1.73), (1.74), (1.75), (1.79) и (1.83) для вершин и пропагаторов, составим выражения для рассматриваемых суперграфов, следуя правилам Фейнмана.

Для диаграммы, изображенной на Рис. 1.8 (диаграмма (9) на Рис. 1.6), есть четыре способа расстановки духовых полей с указанной выше фиксацией внешних линий. Все варианты расстановки приведены на Рис. 1.9.

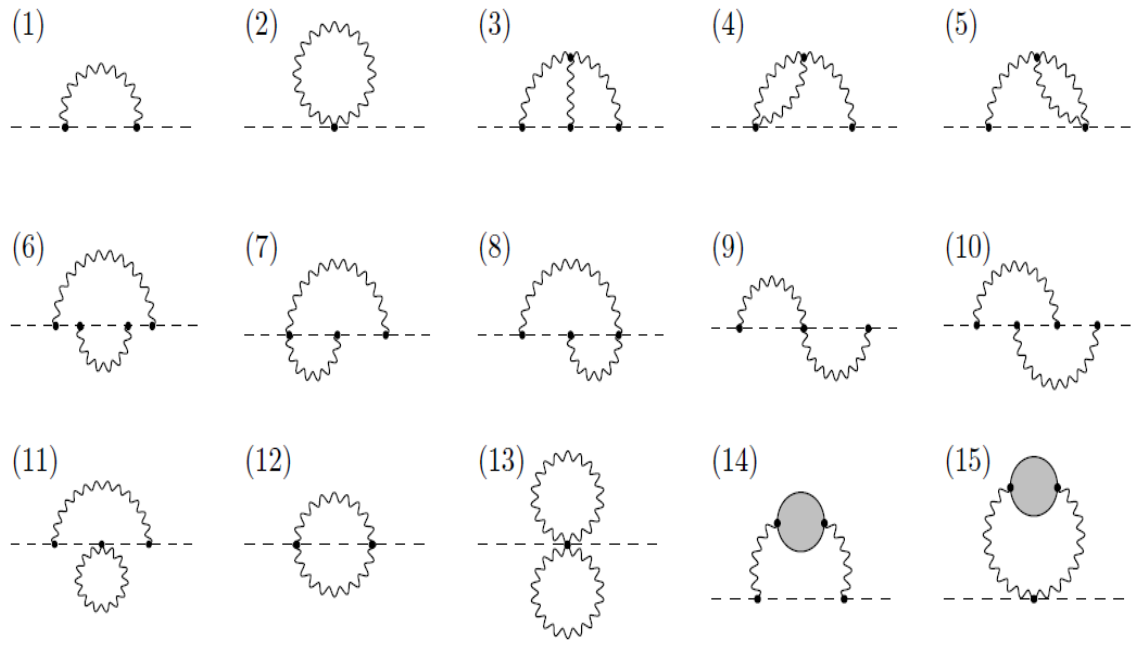


Рис. 1.6: Суперграфы, дающие вклады в двухточечную функцию Грина духов в двухпетлевом приближении. Закрашенная область обозначает однопетлевой поляризационный оператор.

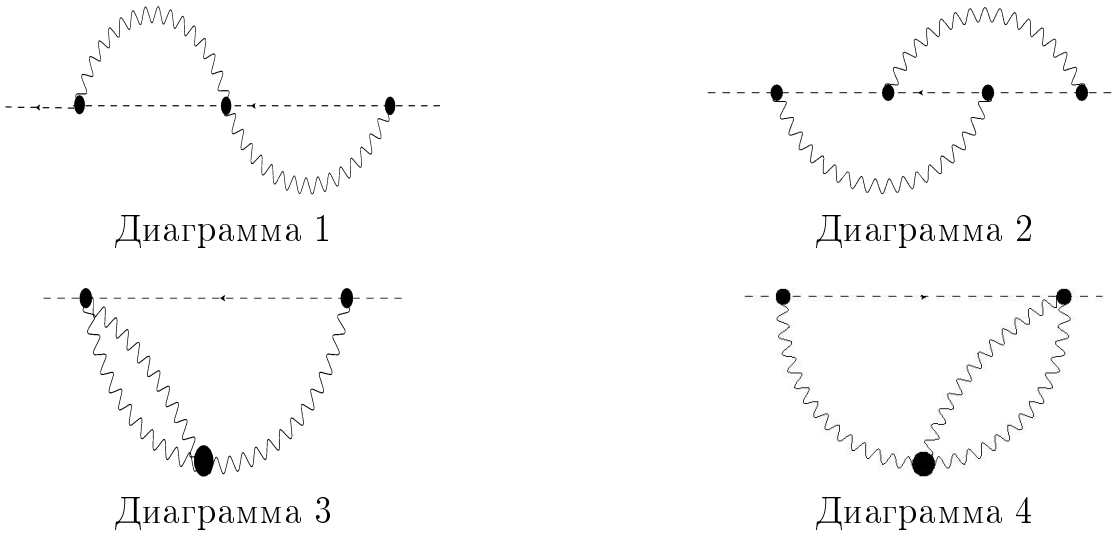


Рис. 1.7: Вычисляемые двухпетлевые диаграммы, дающие вклад в двухточечную функцию Грина духов (суперграфы (9), (10), (4) и (5) на Рис. 1.6)

Полученное с помощью правил Фейнмана выражение для поддиаграммы 1, изображенной на Рис. 1.9, будет иметь вид

$$\boldsymbol{I_1} = K_{AH} \int d^8x_1 d^8x_2 d^8x_3 \frac{\overline{D}_1^2 D_2^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{12}}_{k+p} \underbrace{\left(\mathrm{P}_V\right)_{12}}_{k} \frac{\overline{D}_2^2 D_3^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{23}}_{l+p} \underbrace{\left(\mathrm{P}_V\right)_{23}}_{l} c_1^A \overline{c}^{*H}_3 , \quad (1.85)$$

где пропагаторы квантового калибровочного суперполя P_V задаются формулой

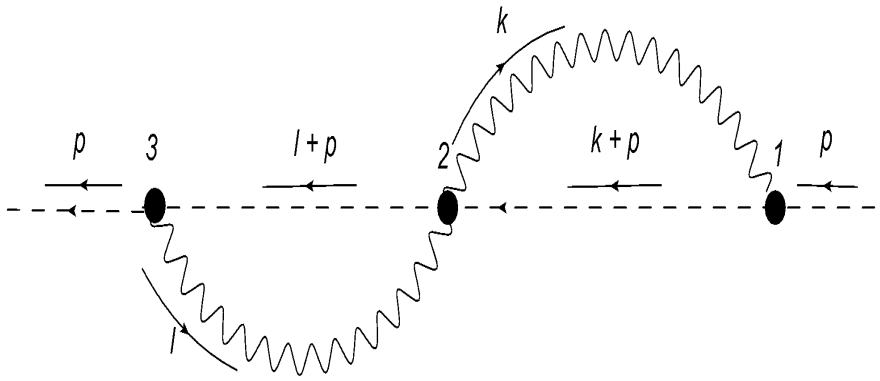


Рис. 1.8: Расстановка импульсов на диаграмме 1

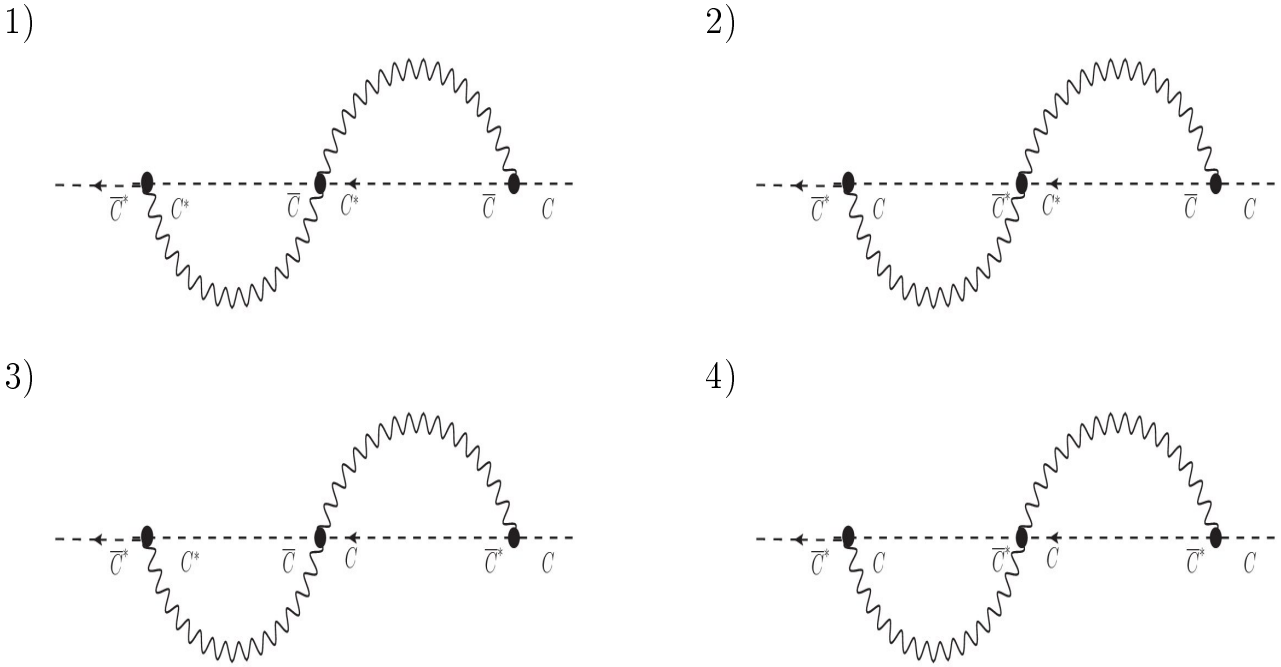


Рис. 1.9: Способы расстановки духовых полей для диаграммы 1

(1.65), а K_{AH} — некоторая числовая постоянная.

Вначале найдем константу K_{AH}. Ее можно представить в виде

$$K_{AH} = \varkappa \cdot \widetilde{K}_{AH}, \tag{1.86}$$

где $\varkappa$ задается следующим выражением

$$\varkappa = \underbrace{\left(\frac{ie_0}{4}\right)^2}_{\bar{c}Vc \text{ вершины}} \cdot \underbrace{\left(+\frac{e_0^2}{12}\right)}_{\bar{c}V^2c^* \text{ вершина}} \cdot \underbrace{(2i)^2}_{\text{пропагатор } \mathrm{P}_V} \cdot \underbrace{(i)^2}_{\text{пропагатор } \mathrm{P}_{\bar{c}c^*}} = -\frac{e_0^4}{48}, \tag{1.87}$$

а

$$\widetilde{K}_{AH} = f^{ABC}\left(f^{FEK}f^{KBD} + f^{FBK}f^{KED}\right) f^{GEH}\delta_{CD}\delta_{GF} = \\ = \left(1+\frac{1}{2}\right)(C_2)^2\,\delta_{AH} = \frac{3}{2}(C_2)^2\,\delta_{AH}. \tag{1.88}$$

При этом было использовано тождество Якоби и равенство

$$f^{ACD}f^{BCD} = C_2\delta^{AB}, \tag{1.89}$$

где C_2 — значение квадратичного оператора Казимира. В итоге получаем, что

$$K_{AH} = -\frac{e_0^4}{32}\cdot(C_2)^2\,\delta_{AH}. \tag{1.90}$$

Рассмотрим процесс сведения супердиаграмм Фейнмана к импульсным интегралам на примере поддиаграммы 1, выражение для которой задается формулой (1.85). При вычислении данного выражения в калибровке Фейнмана будет возникать конструкция следующего вида

$$\boldsymbol{I_{1F}} = K_{AH}\int d^8x_1 d^8x_2 d^8x_3 \frac{\overline{D}_1^2 D_2^2}{4\partial^2}\underbrace{\delta_{12}^8}_{k+p}\frac{1}{R\partial^2}\underbrace{\delta_{12}^8}_{k}\frac{\overline{D}_2^2 D_3^2}{4\partial^2}\underbrace{\delta_{23}^8}_{l+p}\cdot \\ \cdot\frac{1}{R\partial^2}\underbrace{\delta_{23}^8}_{l}c_1^A\overline{c}^{*H}_3 \tag{1.91}$$

Вклад $\boldsymbol{I_{1F}}$ дает часть полного выражения для $\boldsymbol{I_1}$, который, в свою очередь, вычисляется в общей ξ-калибровке.

Импульсы под δ-функциями указаны без учета знака. При вычислениях важно учитывать входит импульс в вершину или выходит. Условимся считать входящий в вершину импульсом со знаком $-$, а выходящий со знаком $+$.

Из явного вида δ_{12}^8 и суперпроизводных D следуют следующие соотношения:

$$\delta_{12}^8 D^\alpha \delta_{12}^8 = 0, \text{ если } \alpha \le 3; \tag{1.92}$$

$$\delta_{12}^8 D^2\overline{D}^2\delta_{12}^8 = 4\delta_{12}^8\delta^4(x_1-x_2). \tag{1.93}$$

Воспользуемся соотношением (1.93) и затем перейдем к импульсному пред-

ставлению в пространстве Минковского. В результате получаем, что

$$\boldsymbol{I_{1F}} = K_{AH}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}d^4\theta c^A\overline{c}^{*H}\int\frac{d^4kd^4l}{(2\pi)^8}\frac{1}{R_kR_lk^2l^2(k+p)^2(l+p)^2}\equiv$$
$$\equiv K_{AH}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}d^4\theta c^A\overline{c}^{*H}I_{1F}, \tag{1.94}$$

где

$$I_{1F} = \int\frac{d^4kd^4l}{(2\pi)^8}\frac{1}{R_kR_lk^2l^2(k+p)^2(l+p)^2}, \tag{1.95}$$

а для функций регуляторов введено обозначение

$$R_k \equiv R\left(\frac{-k^2}{\Lambda^2}\right). \tag{1.96}$$

После проведения аналогичных вычислений в общей ξ-калибровке были получены следующие выражения для диаграмм, приведенных на Рис. 1.9

$$I_1 = \int\frac{d^4kd^4l}{(2\pi)^8}\,\frac{1}{k^2l^2(k+p)^2(l+p)^2}\Big[\frac{1}{R_kR_l}+\frac{1}{R_k}\cdot\Big(\frac{\xi_0}{K_l}-\frac{1}{R_l}\Big)+$$
$$+\frac{1}{R_l}\cdot\Big(\frac{\xi_0}{K_k}-\frac{1}{R_k}\Big)+\Big(\frac{\xi_0}{K_l}-\frac{1}{R_l}\Big)\cdot\Big(\frac{\xi_0}{K_k}-\frac{1}{R_k}\Big)\Big]=$$
$$=\int\frac{d^4kd^4l}{(2\pi)^8}\,\frac{1}{k^2l^2(k+p)^2(l+p)^2}\cdot\frac{(\xi_0)^2}{K_kK_l}; \tag{1.97}$$

$$I_2 = -\int\frac{d^4kd^4l}{(2\pi)^8}\,\frac{1}{k^2l^2(k+p)^2(l+p)^2}\Big[\frac{1}{R_kR_l}+\frac{1}{R_l}\cdot\Big(\frac{\xi_0}{K_k}-\frac{1}{R_k}\Big)+$$
$$+\frac{1}{R_k}\cdot\Big(\frac{\xi_0}{K_l}-\frac{1}{R_l}\Big)\Big(\frac{p^2+(p+l)^2}{l^2}\Big)+$$
$$+\Big(\frac{\xi_0}{K_l}-\frac{1}{R_l}\Big)\cdot\Big(\frac{\xi_0}{K_k}-\frac{1}{R_k}\Big)\cdot\Big(\frac{p^2+(p+l)^2}{l^2}\Big)\Big]; \tag{1.98}$$

$$I_3 = -I_2(l\leftrightarrow k); \tag{1.99}$$

$$I_4 = -\int \frac{d^4k d^4l}{(2\pi)^8}\,\frac{1}{k^2 l^2 (k+p)^2 (l+p)^2}\Big[\frac{1}{R_k R_l} + \frac{1}{R_k}\Big(\frac{\xi_0}{K_l} - \frac{1}{R_l}\Big)\times$$
$$\times\Big(\frac{p^2+(p+l)^2}{l^2}\Big) + \frac{1}{R_l}\Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k}\Big)\Big(\frac{p^2+(p+k)^2}{k^2}\Big) +$$
$$+\Big(\frac{\xi_0}{K_l} - \frac{1}{R_l}\Big)\Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k}\Big)\cdot\Big(\frac{p^2+(p+l)^2}{l^2}\Big)\cdot\Big(\frac{p^2+(p+k)^2}{k^2}\Big)\Big]. \tag{1.100}$$

В пределе нулевого внешнего импульса ($p \to 0$) выражение для I_1 приобретает следующий вид

$$I_1 \to \int \frac{d^4k d^4l}{(2\pi)^8}\,\frac{(\xi_0)^2}{K_k K_l k^4 l^4}. \tag{1.101}$$

В оставшихся вариантах структура подынтегрального выражения одинакова с точностью до знака. На знак могут влиять духовые пропагаторы, выражения для которых приведены в формулах (1.73) и (1.74), и четверная духово-калибровочная вершина, выражение для которой представлено в формуле (1.79). Аккуратно следя за знаком, получаем, что

$$I_2 \to \underbrace{(-1)}_{\mathrm{P}_{\bar{c}^* c}} \cdot I_1 = -I_1; \tag{1.102}$$

$$I_3 \to \underbrace{(-1)}_{\mathrm{P}_{\bar{c}^* c}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\bar{c} V^2 c} \cdot I_1 = I_1; \tag{1.103}$$

$$I_4 \to \underbrace{(-1)}_{\mathrm{P}_{\bar{c}^* c}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\mathrm{P}_{\bar{c}^* c}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\bar{c}^* V^2 c} \cdot I_1 = -I_1. \tag{1.104}$$

Поэтому сумма всех вкладов в пределе нулевого внешнего импульса оказывается равной 0:

$$I_\Sigma = \sum_{n=1}^{4} I_i = I_1 - I_1 + I_1 - I_1 = 0. \tag{1.105}$$

Таким образом, данная диаграмма не дает расходящегося вклада в константу перенормировки Z_c духов Фаддеева–Попова и, следовательно, в аномальную

размерность γ_c.

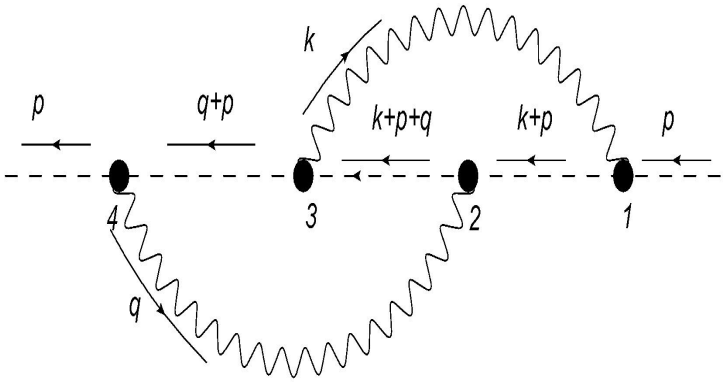


Рис. 1.10: Расстановка импульсов для диаграммы 2

Для диаграммы, приведенной на Рис. 1.10 (диаграмма (10) на Рис. 1.6), есть восемь способов расстановки духовых полей с указанной выше фиксацией внешних линий. Все варианты расстановки приведены на Рис. 1.11.

Полученное с помощью правил Фейнмана выражение для поддиаграммы 1, изображенной на Рис. 1.11, будет иметь вид

$$\boldsymbol{E_1} = M_{AJ} \cdot \int d^8x_1 d^8x_2 d^8x_3 d^8x_4 \frac{D_2^2 \overline{D}_1^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{12}}_{k+p} \underbrace{\left(\mathrm{P}_V\right)_{13}}_{k} \frac{\overline{D}_3^2 D_2^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{23}}_{k+p+q} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\left(\mathrm{P}_V\right)_{24}}_{q} \frac{\overline{D}_4^2 D_3^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{34}}_{p+q} c_1^A \overline{c}^{*J}{}_4. \tag{1.106}$$

Проводя вычисления аналогичные вычислениям для диаграммы 1, получаем, что

$$M_{AJ} = \frac{e_0^4}{32} \cdot (C_2)^2 \, \delta_{AJ}. \tag{1.107}$$

При вычислении поддиаграммы 1, изображенной на Рис. 1.11, будет возникать конструкция следующего вида

$$\boldsymbol{E_{1F}} = M_{AJ} \cdot \int d^8x_1 d^8x_2 d^8x_3 d^8x_4 \frac{D_2^2 \overline{D}_1^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{12}}_{k+p} \frac{1}{R\partial^2} \underbrace{\delta^8_{13}}_{k} \frac{\overline{D}_3^2 D_2^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{23}}_{k+p+q} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{R\partial^2} \underbrace{\delta^8_{24}}_{q} \frac{\overline{D}_4^2 D_3^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{34}}_{p+q} c_1^A \overline{c}^{*J}{}_4, \tag{1.108}$$

которая соответствует выбору калибровки Фейнмана для пропагаторов P_V в формуле (1.106). Вклад $\boldsymbol{E_{1F}}$ дает часть полного выражения для $\boldsymbol{E_1}$, который

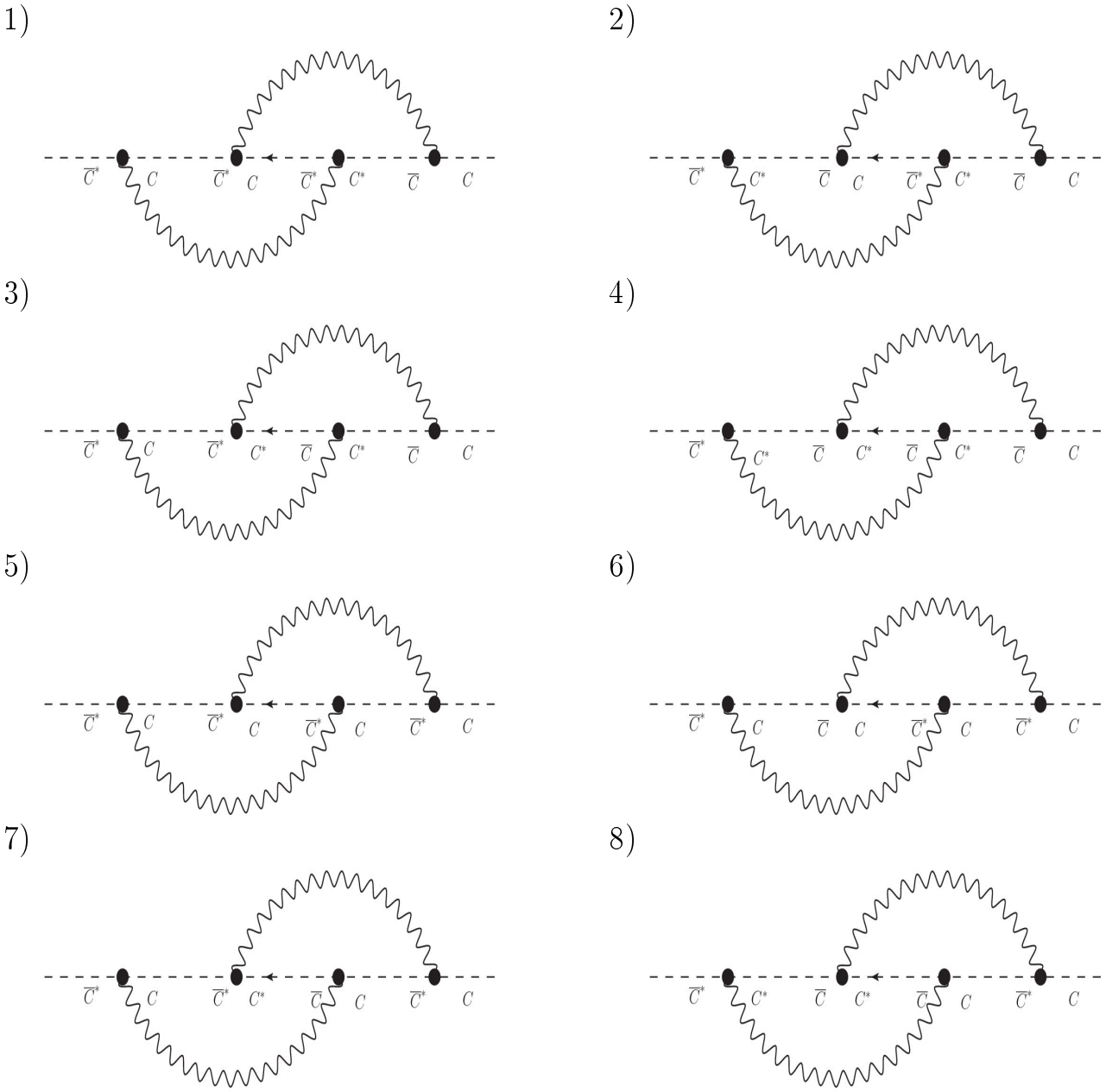


Рис. 1.11: Способы расстановки духовых полей для диаграммы 2

вычисляется в общей ξ-калибровке.

В формуле (1.108) интегрируя по тем δ-функциям, на которые не действуют суперпроизводные, сводим выражение для супердиаграммы к следующему интегралу

$$\boldsymbol{E} = \int d^8x_1 d^8x_2 c_1^A \overline{c}^{*J}_2 \frac{D_2^2 \overline{D}_1^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{12}}_{k+p} \frac{\overline{D}_1^2 D_2^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{21}}_{k+p+q} \cdot \frac{\overline{D}_2^2 D_1^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{12}}_{p+q}. \qquad (1.109)$$

Далее интегрируем по частям, перебрасывая D^2 и $\overline{D}^2$ с δ-функции, учитывая,

что при переносе второй степени суперпроизводной знак не меняется. Тогда

$$\boldsymbol{E} = \int d^8x_1 d^8x_2 c_1^A \underbrace{D_2^2\overline{D}_2^2}_{-16\partial^2} \underbrace{\left(\overline{c}^{*J}_2 \frac{D_2^2\overline{D}_1^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{12}}_{-(k+p)} \frac{\overline{D}_1^2 D_2^2}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{21}}_{k+p+q}\right)}_{\text{антикиральное суперполе по перем. 2}} \frac{1}{4\partial^2} \underbrace{\delta^8_{12}}_{p+q}, \tag{1.110}$$

где было использовано соотношение

$$D_1^2\overline{D}_1^2\delta^8_{12} = D_1^2\overline{D}_2^2\delta^8_{12} = \overline{D}_2^2 D_1^2\delta^8_{12} = \overline{D}_2^2 D_2^2\delta^8_{12}. \tag{1.111}$$

Кроме того, если Φ — киральное суперполе, то коммутируя суперпроизводные, получаем, что

$$\overline{D}^2 D^2\Phi = -16\partial^2\Phi; \tag{1.112}$$

$$D^2\overline{D}^2\Phi^* = -16\partial^2\Phi^*. \tag{1.113}$$

В формуле (1.110) выделенное выражение в скобках является антикиральным суперполем, поэтому при его вычислении мы можем воспользоваться соотношением (1.113). Суммарный импульс в этих скобках, считается с учетом направления импульсов (входящие или исходящие для рассматриваемой вершины) на диаграмме, изображенной на Рис. 1.10.

$$P_{\Sigma 2\mu} = p_\mu - (k+p)_\mu + (q+p+k)_\mu = (q+p)_\mu. \tag{1.114}$$

Используя также равенство (1.93), после перехода в импульсное представление получаем окончательное выражение для структуры (1.108)

$$\boldsymbol{E_{1F}} = M_{AJ}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta c^A \overline{c}^{*J} \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{1}{R_k R_q k^2 q^2 (k+p)^2} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{(k+p+q)^2} \equiv M_{AJ}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4\theta c^A \overline{c}^{*J} E_{1F}. \tag{1.115}$$

Из соотношений (1.112) и (1.113) следует, что

$$D^2\overline{D}^2 D^2 = -16 D^2\partial^2; \tag{1.116}$$

$$\overline{D}^2 D^2 \overline{D}^2 = -16\overline{D}^2\partial^2. \tag{1.117}$$

Проводя аналогичные вычисления в общей ξ-калибровке, используя допол-

нительно соотношения (1.92), (1.116) и (1.117), получаем выражения для каждой расстановки духовых полей на Рис. 1.11:

$$E_1 = \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{1}{k^2 q^2 (k+p)^2 (k+p+q)^2} \cdot \frac{(\xi_0)^2}{K_k K_q}; \tag{1.118}$$

$$E_2 = 0; \tag{1.119}$$

$$\begin{aligned} E_3 = -\int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{1}{k^2 q^2 (k+p)^2 (q+p)^2 (k+p+q)^2} \Big[\frac{k^2}{R_k R_q} + \\ + \frac{1}{R_k} \Big(\frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q} \Big) \Big(k^2 \cdot \frac{p^2 + (p+q)^2}{q^2} + \propto p \Big) + \\ + \frac{k^2}{R_q} \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) + \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) \cdot \Big(\frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q} \Big) \times \\ \times \Big(k^2 \cdot \frac{p^2 + (p+q)^2}{q^2} + \propto p \Big) \Big], \end{aligned} \tag{1.120}$$

где $\propto p$ обозначает выражение, пропорциональное внешнему импульсу p;

$$E_4 = \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{1}{k^2 q^2 (k+p)^2 (q+p)^2} \cdot \frac{(\xi_0)^2}{K_k K_q}; \tag{1.121}$$

$$\begin{aligned} E_5 = -\int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{1}{k^2 q^2 (k+p)^2 (q+p)^2 (k+p+q)^2} \Big[\frac{(k+2p+q)^2}{R_k R_q} + \\ + \frac{1}{R_k} \Big(\frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q} \Big) \Big(2(p+q, k+p) + (q+p)^2 + \\ + (k+p)^2 \cdot \frac{p^2 + (p+q)^2}{q^2} \Big) + \frac{1}{R_q} \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) \Big(2(p+q, k+p) + \\ + (k+p)^2 + (p+q)^2 \cdot \frac{p^2 + (p+k)^2}{k^2} \Big) + \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) \cdot \Big(\frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q} \Big) \times \\ \times \Big((k+p+q)^2 \cdot \frac{p^2 + (p+k)^2}{k^2} + \propto p \Big) \Big]; \end{aligned} \tag{1.122}$$

$$E_6 = \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{1}{k^2 q^2 (q+p)^2 (k+p+q)^2} \cdot \frac{(\xi_0)^2}{K_k K_q}; \tag{1.123}$$

$$E_7 = \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{1}{k^2 q^2 (k+p)^2 (q+p)^2 (k+p+q)^2} \Big[\frac{p^2}{R_k R_q} + \\ + \frac{p^2}{R_k} \cdot \Big(\frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q} \Big) + \frac{p^2}{R_q} \cdot \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) + \\ + \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) \cdot \Big(\frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q} \Big) \cdot \Big(2p^2 \cdot \frac{(p+k)^2}{k^2} \Big) \Big]; \tag{1.124}$$

$$E_8 = - \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{1}{k^2 q^2 (k+p)^2 (q+p)^2 (k+p+q)^2} \Big[\frac{q^2}{R_k R_q} + \\ + \frac{q^2}{R_k} \cdot \Big(\frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q} \Big) + \frac{1}{R_q} \cdot \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) \times \\ \times \Big(q^2 \cdot \frac{p^2 + (p+k)^2}{k^2} + \propto p \Big) + \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) \cdot \Big(\frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q} \Big) \times \\ \times \Big(\frac{p^2 + (p+k)^2}{k^2} \cdot (p+q)^2 + p^2 \Big) \Big]. \tag{1.125}$$

В пределе нулевого внешнего импульса ($p \to 0$) данные выражения приобретают следующий вид:

$$E_1 \to \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{(\xi_0)^2 \cdot q^2}{K_k K_q k^4 q^4 (k+q)^2}; \tag{1.126}$$

$$E_2 \to 0; \tag{1.127}$$

$$E_3 \to - \int \frac{d^4k d^4q}{(2\pi)^8} \frac{(\xi_0)^2 \cdot k^2}{K_k K_q k^4 q^4 (k+q)^2}; \tag{1.128}$$

$$E_4 \to \int \frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^8} \frac{(\xi_0)^2 \cdot (k+q)^2}{K_k K_q k^4 q^4 (k+q)^2}; \tag{1.129}$$

$$E_5 \to -\int \frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^8} \frac{(\xi_0)^2 \cdot (k+q)^2}{K_k K_q k^4 q^4 (k+q)^2}; \tag{1.130}$$

$$E_6 \to \int \frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^8} \frac{(\xi_0)^2 \cdot k^2}{K_k K_q k^4 q^4 (k+q)^2}; \tag{1.131}$$

$$E_7 \to 0; \tag{1.132}$$

$$E_8 \to -\int \frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^8} \frac{(\xi_0)^2 \cdot q^2}{K_k K_q k^4 q^4 (k+q)^2}. \tag{1.133}$$

Тогда суммарный вклад

$$E_\Sigma = \sum_{n=1}^{8} E_i \tag{1.134}$$

будет равен

$$E_\Sigma = \int \frac{d^4kd^4q}{(2\pi)^8} \frac{(\xi_0)^2 \cdot \Sigma(P)^2}{K_k K_q k^4 q^4 (k+q)^2}, \tag{1.135}$$

где

$$\Sigma(P)^2 = q^2 - 0 - k^2 + (k+q)^2 - (k+q)^2 + (k)^2 + 0 - q^2 = 0. \tag{1.136}$$

Следовательно, мы получаем, что

$$E_\Sigma = \sum_{n=1}^{8} E_i = 0. \tag{1.137}$$

Это означает, что данная диаграмма также не дает расходящегося вклада в константу перенормировки Z_c духов Фаддеева–Попова и, следовательно, в аномальную размерность γ_c.

Диаграмма на Рис. 1.12 распадается на две поддиаграммы в зависимости от

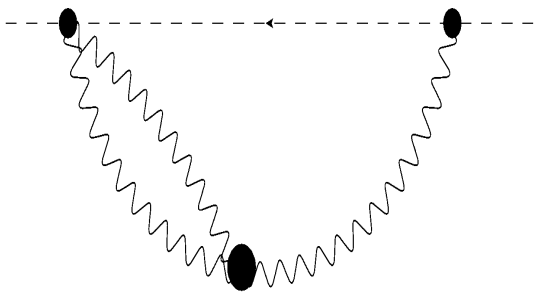


Рис. 1.12: Диаграмма 3 (диаграмма (4) на Рис. 1.6)

расстановки духовых пропагаторов. Оба варианта расстановки приведены на Рис. 1.13.



Рис. 1.13: Расстановка духовых суперполей для диаграммы 3

Рассмотрим вначале вклад первого слагаемого в выражении для тройной вершины (1.83). Тогда каждый из вариантов расстановки духов в свою очередь будет распадаться на сумму из шести слагаемых, возникающих при симметризации тройной вершины квантовых калибровочнх полей, см. Рис. 1.14. Разобьем эти шесть слагаемых на три пары, причем каждая пара будет состоять из слагаемых, переходящих друг в друга при перестановке линий в калибровочной петле.

Из полученного ранее выражения для первой части вершины, в которой сходятся три линии квантового калибровочного суперполя (формула (1.83)), следует, что она пропорциональна f^{ABC}.

Очевидно, что при использовании правил Фейнмана подынтегральные выражения в обоих слагаемых каждой пары будут одинаковыми, и остается только вычислить общую константу перед интегралом. Эта константа с точностью до непринципиального в данных вычислениях числового множителя будет равна

$$D^{AG} = d \cdot f^{ABC}\delta_{CD} \cdot (f^{DEI}f^{IFG}f^{EFB} + f^{DFI}f^{IEG}f^{EFB}) = \\ = d \cdot f^{ABD}f^{EFB}(f^{DEI}f^{IFG} + f^{DFI}f^{IEG}), \qquad (1.138)$$

где d — некоторое число. С помощью тождества Якоби и соотношения (1.89),

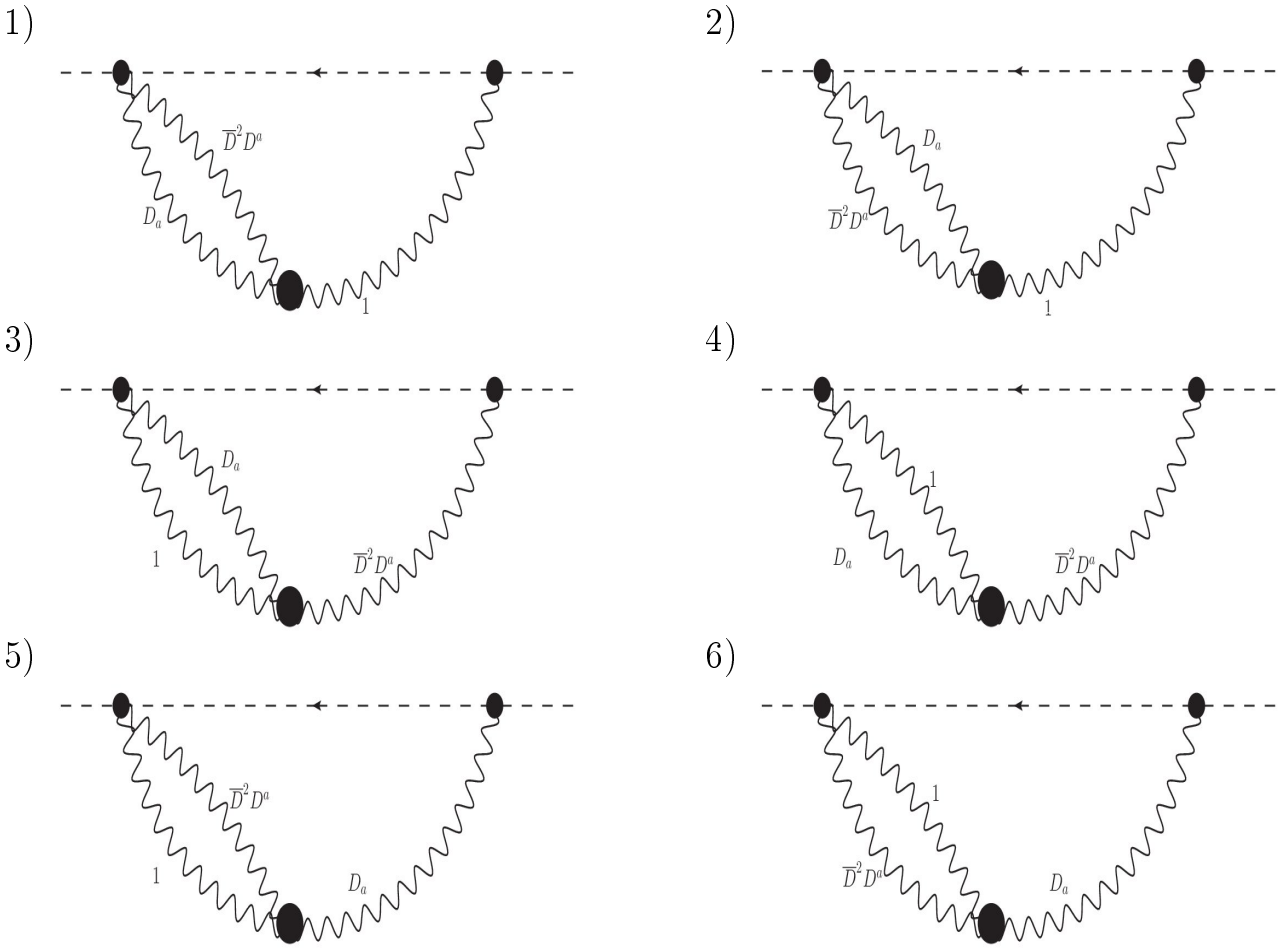


Рис. 1.14: Различные варианты действия суперпроизводных в тройной вершине в диаграмме 3

это выражение можно преобразовать к виду

$$D^{AG} = d \cdot \left(-\frac{1}{2} C_2 f^{AIF} f^{IFG} + \frac{1}{2} C_2 f^{AIE} f^{IEG} \right) =$$
$$= -\frac{1}{2} C_2 d \left(C_2 \delta^{AG} - C_2 \delta^{AG} \right) = 0. \qquad (1.139)$$

Следовательно, каждая пара из трех для данного выбора расстановки духовых полей будет в сумме давать 0. Естественно, тоже самое получается и для второй расстановки духовых полей.

Поскольку второе слагаемое в тройной вершине (1.83) также пропорционально f^{ABC}, то соответствующий вклад также будет равен 0.

Таким образом, даже не сводя выражения для рассматриваемой диаграммы к импульсным интегралам, убеждаемся, что ее вклад равен 0.

Очевидно, что вклад диаграмм 3 и 4, изображенных на Рис. 1.7, структурно выглядит одинаково, и, следовательно, вклад от супердиаграммы 4 (диаграмма

(5) на Рис. 1.6) в аномальную размерность духов также будет равен 0.

Итак, рассмотренные суперграфы 1, 2, 3 и 4 на Рис. 1.7 необходимые для исследования перенормировки духов Фаддеева–Попова в двухпетлевом приближении дают нулевой вклад в аномальную размерность духов γ_c. Полный вклад (см. Рис. 1.6) в двухпетлевую аномальную размерность духов Фаддеева–Попова, полученный с учетом этого результата, был найден в работе [79] и в терминах голых констант связи имеет вид

$$\gamma_c(\alpha_0,\lambda_0,\xi_0,y_0=0)=\frac{\alpha_0 C_2(\xi_0-1)}{6\pi}-\frac{\alpha_0^2}{24\pi^2}C_2^2\Big(\xi_0^2-1\Big)-\frac{\alpha_0^2C_2^2}{4\pi^2}\Big(\ln a_\varphi+1\Big)+$$
$$+\frac{\alpha_0^2C_2T(R)}{12\pi^2}\Big(\ln a+1\Big)+\text{вклады более высоких порядков.} \qquad (1.140)$$

Соответствующее выражение для двухпетлевой аномальной размерности в терминах перенормированных констант связи $\widetilde{\gamma}_c(\alpha,\lambda,\xi,y=0)$ в HD+MSL схеме, как следует из параграфа 1.1, получаются заменой $\alpha_0\to\alpha$, $\xi_0\to\xi$ в вышеприведенном выражении для γ_c.

1.4 Вычисление соответствующего вклада в трехпетлевую β-функцию

В соответствии с работами [27, 80] петлевые вклады в β/α_0^2 (где β — бета-функция, определенная в терминах голых констант связи) могут быть найдены с помощью следующего алгоритма. Рассмотрим некоторый вакуумный суперграф. Вклад в β-функцию от всех двухточечных диаграмм, получающихся прикреплением двух внешних линий фонового суперполя всеми возможными способами к данному вакуумному суперграфу, получается следующим образом. Необходимо

1. С использованием правил Фейнмана составить аналитическое выражение, соответствующее рассматриваемой вакуумной супердиаграмме.

2. Вставить $\theta^4(v^B)^2$ в произвольную точку вакуумной супердиаграммы, где v^B — почти постоянная функция, которая медленно убывает на характерном расстоянии R.

3. Используя стандартную технику вычисления супердиаграмм, свести полу-

ченное выражение к импульсным интегралам. Произвести поворот Вика и перейти к евклидовым импульсам. Отбросить слагаемые, стремящиеся к 0 при $R \to \infty$.

4. Отметить определенное количество пропагаторов (равное числу петлей в супердиаграмме) с независимыми евклидовыми импульсами Q_i^μ . При этом индекс a_i будет соответствовать началу пропагатора.

5. В подынтегральном выражении дельта-символы от пропагаторов

$$\prod_{i=1}^{L} \delta_{a_i}^{b_i} \tag{1.141}$$

должны быть заменены на дифференциальный оператор, составленный по следующему правилу:

$$\sum_{k,l=1}^{L} \prod_{i\neq k,l} \delta_{a_i}^{b_i} \, (T^A)_{a_k}{}^{b_k} (T^A)_{a_l}{}^{b_l} \frac{\partial^2}{\partial Q_k^\mu \partial Q_l^\mu}. \tag{1.142}$$

6. Подействовать на полученное выражение оператором

$$-\frac{2\pi}{r\mathcal{V}_4} \cdot \frac{d}{d\ln\Lambda}, \tag{1.143}$$

где $\mathcal{V}_4 \equiv \int d^4x \left(v^B\right)^2$.

Итоговый результат дает вклад от рассматриваемой диаграммы в выражение

$$\frac{1}{\alpha_0^2}\Big(\beta(\alpha_0,\lambda_0,Y_0) - \beta_{\text{1-петля}}(\alpha_0)\Big). \tag{1.144}$$

Данный подход для вычисления петлевых вкладов в β-функцию является технически более простым, потому что вычисляемые графы не содержат внешних линий, а количество супердиаграмм существенно меньше.

Графически действие дифференциального оператора, представленного в формуле (1.142), выражается в разрезании определенных пропагаторов. Разрезание

пропагатора устанавливает соответствие между данным трехпетлевым графом и получающимися при разрезании двухпетлевыми диаграммами.

Здесь рассматривается случай разрезания духового пропагатора. Тогда с помощью описанного выше подхода для вычисления вкладов в β-функцию на уровне отдельно взятых диаграмм Фейнмана получается установить явную связь между вкладом в β-функцию и аномальной размерностью духов γ_c.

Поскольку духи лежат в присоединенном представлении калибровочной группы G, то соответствующие им генераторы $(T^A)_{a_k}{}^{b_k}$ будут пропорциональны структурным константам. В связи с этим коэффициенты при двойных производных в выражении для дифференциального оператора (1.142), будут строиться из констант C_2 и размерности группы r.

Все диаграммы с духовой петлей, необходимые для вычисления трехпетлевого духового вклада в β-функцию, [80] приведены на Рис. 1.15. В данной работе будут вычислены несколько суперграфов существенных для нахождения трехпетлевой β-функции с петлями духов Фаддеева–Попова. Данные графы изображены на Рис. 1.16, Рис. 1.17 и Рис. 1.18.

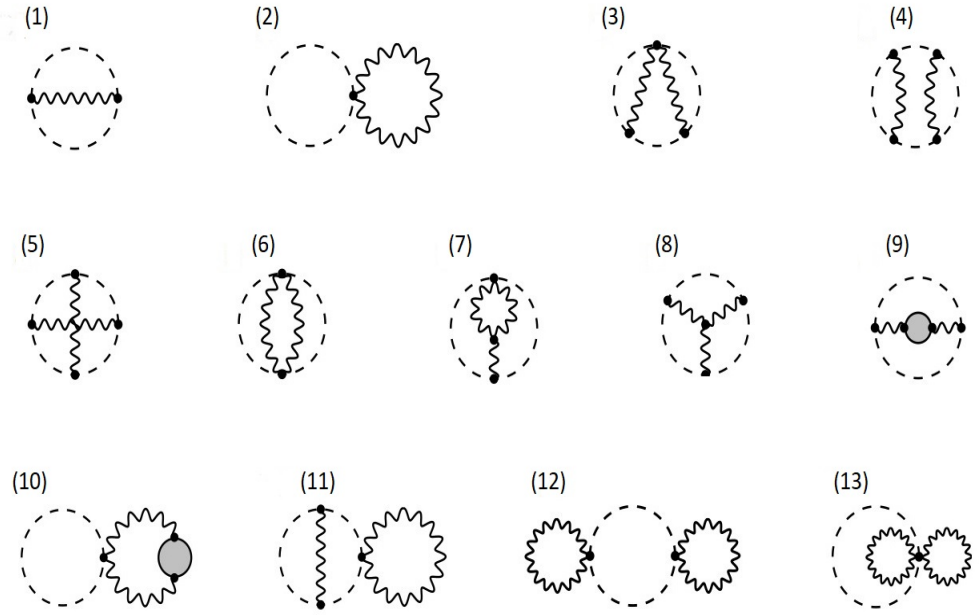


Рис. 1.15: Суперграфы, дающие духовые вклады в трехпетлевую β-функцию. Закрашенная область обозначает однопетлевой поляризационный оператор.

Далее согласно вышеприведенному алгоритму каждому суперграфу с помощью правил Фейнмана сопоставляем некоторое аналитическое выражение, которое затем с помощью стандартной техники сводится к импульсным интегралам. После этого для каждого выражения, соответствующего определенной

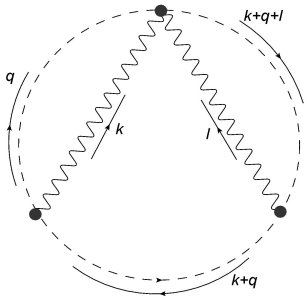


Рис. 1.16: Диаграмма D1 (диаграмма (3) на Рис. 1.15)

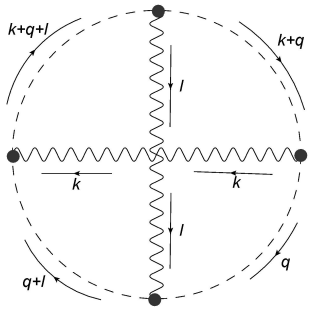


Рис. 1.17: Диаграмма D2 (диаграмма (5) на Рис. 1.15)

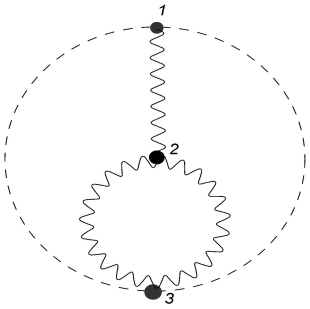


Рис. 1.18: Диаграмма D3 (диаграмма (7) на Рис. 1.15)

трехпетлевой диаграмме Фейнмана, строим дифференциальный оператор из двойных полных производных по импульсам с помощью формулы (1.142). На полученный результат действуем оператором (1.143) и получаем искомый трехпетлевой вклад в β-функцию от рассматриваемых супердиаграмм на Рис. 1.16, Рис. 1.17 и Рис. 1.18.

Рассмотрим поддиаграммы, которые дают вклад в суперграф, изображенный на Рис. 1.16. Нетривиальными будут те из них, которые изображены на Рис. 1.19.

В случае, если на функции регуляторы наложено условие $K\big(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\big) = R\big(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\big)$, выражение для модифицированной диаграммы D1, получающееся суммированием всех поддиаграмм, показанных на Рис. 1.19, оказывается равным

$$D1 = -\frac{1}{2}\mu \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{1}{L^2K^2Q^2(K+Q+L)^2(K+Q)^2}\cdot$$
$$\cdot\Big[\frac{2(\xi_0-1)}{R_LR_K}\cdot\Big(\frac{(K+Q)^2+Q^2}{K^2}-1\Big)+\frac{(\xi_0-1)^2}{R_KR_LK^2L^2}\cdot\Big(Q^2(K+Q+L)^2+$$
$$+(K+Q)^2\big(Q^2+(K+Q)^2+(K+Q+L)^2\big)-K^2\big((K+Q)^2+$$
$$+(K+Q+L)^2\big)+L^2\big((K+Q)^2+Q^2-K^2\big)\Big)\Big], \qquad (1.145)$$

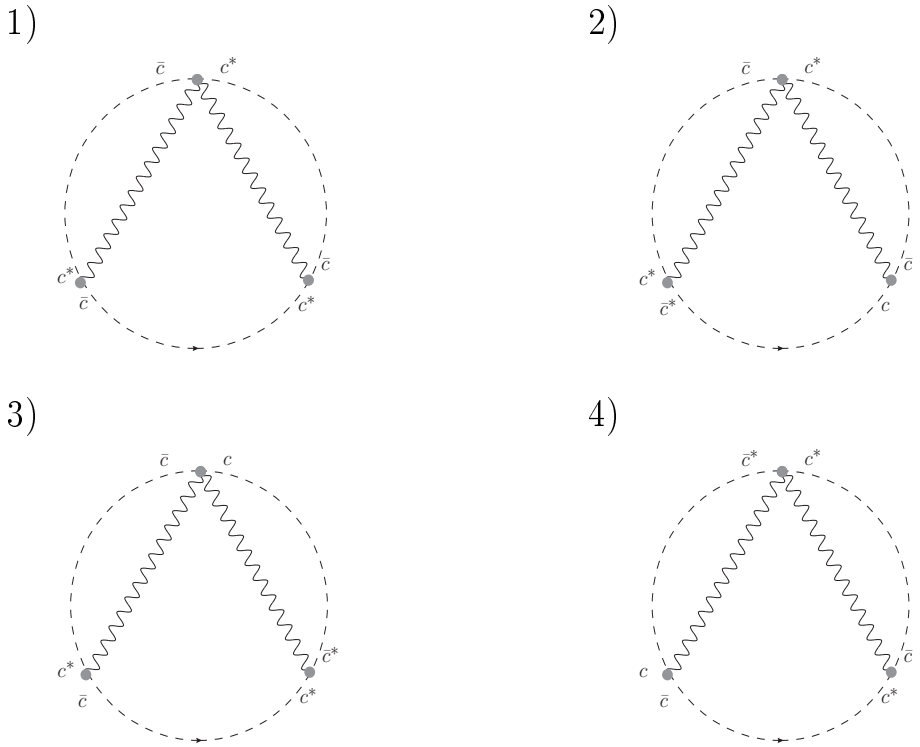


Рис. 1.19: Нетривиальные расстановки духовых полей для диаграммы D1

где для функций регуляторов введено обозначение

$$R_K \equiv R\left(\frac{K^2}{\Lambda^2}\right), \tag{1.146}$$

а

$$\mu = \frac{\mathcal{V}_4 e_0^4}{3}\Big[\mathrm{Tr}\Big(T^D_{Adj}T^B_{Adj}T^D_{Adj}T^B_{Adj}\Big) + \mathrm{Tr}\Big(T^B_{Adj}T^B_{Adj}T^D_{Adj}T^D_{Adj}\Big)\Big], \tag{1.147}$$

где генераторы присоединенного представления $(T^A_{Adj})_B{}^C$ задаются формулой (1.39).

Далее с помощью формулы (1.142) строим дифференциальный оператор для данной диаграммы. Тогда μ будет заменяться на структуру из полных производных следующего вида

$$\mu \to \frac{\mathcal{V}_4 e_0^4}{3} C_2^3 r\Big(\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} - \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial Q_\mu}\frac{\partial}{\partial K^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial K_\mu}\frac{\partial}{\partial L^\mu} - \frac{\partial}{\partial Q_\mu}\frac{\partial}{\partial L^\mu} + \\ + \frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2}\Big). \tag{1.148}$$

Для того чтобы найти вклад в β-функцию от диаграммы, изображенной на Рис.

1.16, нужно подействовать на результат оператором (1.143). Тогда получаем

$$\Delta_{D1}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = \frac{\pi C_2^3 e_0^4}{3}\cdot\frac{d}{d\ln\Lambda}\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\Big(\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}-\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial Q_\mu}\frac{\partial}{\partial K^\mu}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial K_\mu}\frac{\partial}{\partial L^\mu}-\frac{\partial}{\partial Q_\mu}\frac{\partial}{\partial L^\mu}+\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2}\Big)\frac{1}{L^2K^2Q^2(K+Q+L)^2(K+Q)^2}\cdot$$
$$\cdot\Big[\frac{2(\xi_0-1)}{R_LR_K}\cdot\Big(\frac{(K+Q)^2+Q^2}{K^2}-1\Big)+\frac{(\xi_0-1)^2}{R_KR_LK^2L^2}\cdot\Big(Q^2(K+Q+L)^2+$$
$$+(K+Q)^2\big(Q^2+(K+Q)^2+(K+Q+L)^2\big)-K^2\big((K+Q)^2+$$
$$+(K+Q+L)^2\big)+L^2\big((K+Q)^2+Q^2-K^2\big)\Big)\Big]. \qquad (1.149)$$

Возникающие интегралы от двойных полных производных аналогичны интегралу

$$I\equiv\int\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}\Big(\frac{1}{Q^2}f\left(Q^2\right)\Big), \qquad (1.150)$$

который не равен нулю из-за расходимости в точке $Q_\mu=0$. Для того чтобы разобраться с данной сингулярностью, ее окружают трехмерной сферой S_ε^3 с радиусом ε, стремящимся к нулю. В результате интеграл (1.150) сводится к поверхностному интегралу [27]

$$I=-2\int\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{Q^\mu}{Q^4}\frac{\partial}{\partial Q^\mu}\Big(f(Q^2)-Q^2f'(Q^2)\Big)=\frac{1}{8\pi^4}\oint\limits_{S_\varepsilon^3}dS\,\frac{1}{Q^3}\Big(f(Q^2)-$$
$$-Q^2f'(Q^2)\Big)=\frac{1}{4\pi^2}f(0), \qquad (1.151)$$

где при выполнении интегрирования было учтено направление нормали, что приводит к появлению дополнительного знака минус.

Следуя данной логике, в работах [25, 27] было показано, что интегралы от полных производных не исчезают из-за сингулярностей

$$\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu\partial Q_\mu}\Big(\frac{1}{Q^2}\Big)=-4\pi^2\delta^4(Q). \qquad (1.152)$$

Формула для вычисления интеграла от двойных смешанных производных приведена в работе [25] и имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial Q_{\mu,1}\partial Q_{\mu,2}}\Big(\frac{1}{(a_1Q_{\mu,1}+a_2Q_{\mu,2}+Q_{\mu,3})^2}\Big)=-4\pi^2a_1a_2\,\delta^4\Big(a_1Q_{\mu,1}+a_2Q_{\mu,2}+Q_{\mu,3}\Big), \tag{1.153}$$

где a_1, a_2 — некоторые постоянные.

Важно отметить, что при вычислении интеграла (1.149) мы будем разрезать только духовые пропагаторы, которые обратно пропорциональны квадратам импульсов Q^2, $(K+Q)^2$, $(K+Q+L)^2$ (разрезание этих пропагаторов дает вклад в γ_c). Вклады в двухточечную функцию Грина квантового калибровочного суперполя, определяющие γ_V, для установления соответствия с вкладами в β-функцию должны быть поперечными. Для получения поперечности также необходимо учесть и суперграфы с исключительно калибровочными суперполями [80]. Такие супердиаграммы в данной работе не рассматриваются, поэтому вклады в γ_V вычисляться не будут. В связи с этим при взятии интегралов от полных производных в выражении (1.149) формулы (1.152) и (1.153) должны применяться только к вышеуказанным духовым пропагаторам. В результате соответствующий духовый вклад в β-функцию от диаграммы D1 будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta_{D1}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big)\to\frac{e_0^4C_2^3}{4\pi}\xi_0(\xi_0-1)\frac{d}{d\ln\Lambda}\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{1}{R_KK^4}\frac{1}{R_LL^4}. \tag{1.154}$$

Графически взятие интеграла от двойных полных производных (1.148) соответствует разрезанию духовых линий диаграммы, представленной на Рис. 1.16. В результате одного из них получается диаграмма, изображенная на Рис.1.8, которая, как ранее было показано в формуле (1.105), дает нулевой вклад в аномальную размерность γ_c. Также при разрезании вакуумной диаграммы, изображенной на Рис. 1.16, другими способами появляются дополнительные диаграммы, показанные на Рис. 1.20 и 1.21. Вклады данных диаграмм были посчитаны в совместной работе [79]. При этом было показано, что диаграмма на Рис. 1.20 не дает вклада в аномальную размерность γ_c духов Фаддеева–Попова, а диаграмма на Рис. 1.21 дает ненулевой вклад

$$\gamma_c\Big|_{\text{F2}}=\frac{d}{d\ln\Lambda}\Big[\frac{e_0^4C_2^2}{4}\xi_0(\xi_0-1)\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{1}{R_KK^4}\frac{1}{R_LL^4}\Big]. \tag{1.155}$$

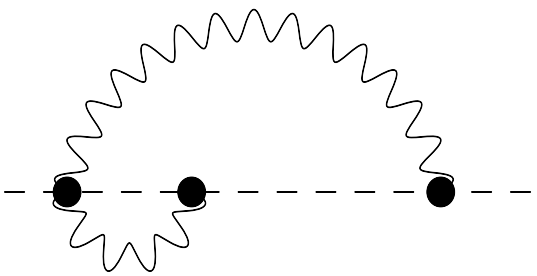


Рис. 1.20: Диаграмма F1

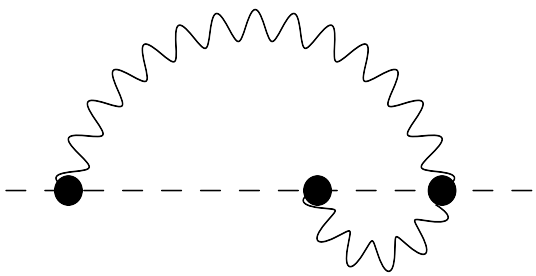


Рис. 1.21: Диаграмма F2

Сравнивая выражение (1.155) с формулой (1.154), мы видим, что для суперграфов, изображенных на Рис. 1.8, 1.16, 1.20 и 1.21, выполняется NSVZ соотношение вида (1.19)

$$\Delta_{D1}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = \frac{C_2}{\pi}\Big(\gamma_c\Big|_{\text{диаграмма 1}} + \gamma_c\Big|_{\text{F1}} + \gamma_c\Big|_{\text{F2}}\Big) + \ldots, \tag{1.156}$$

где многоточие обозначает вклады в γ_V, которые здесь не вычислялись.

Соотношение (1.156) подтверждает правильность нового алгоритма для вычисления β-функции в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса, основанного на вычислении вакуумных суперграфов.

Еще один трехпетлевой вклад в β-функцию получается из непланарного вакуумного трехпетлевого суперграфа, показанного на Рис. 1.17. Поддиаграммы, составляющие вклад в данную диаграмму, приведены на Рис. 1.22. Их вычисление мы, как и ранее, проводим для случая $K\big(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\big) = R\big(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\big)$.

Выражение для модифицированной с помощью вставки $\theta^4(v^B)^2$ супердиаграммы D2, получающееся суммированием всех поддиаграмм, показанных на Рис. 1.22, приведено в формуле (1.157).

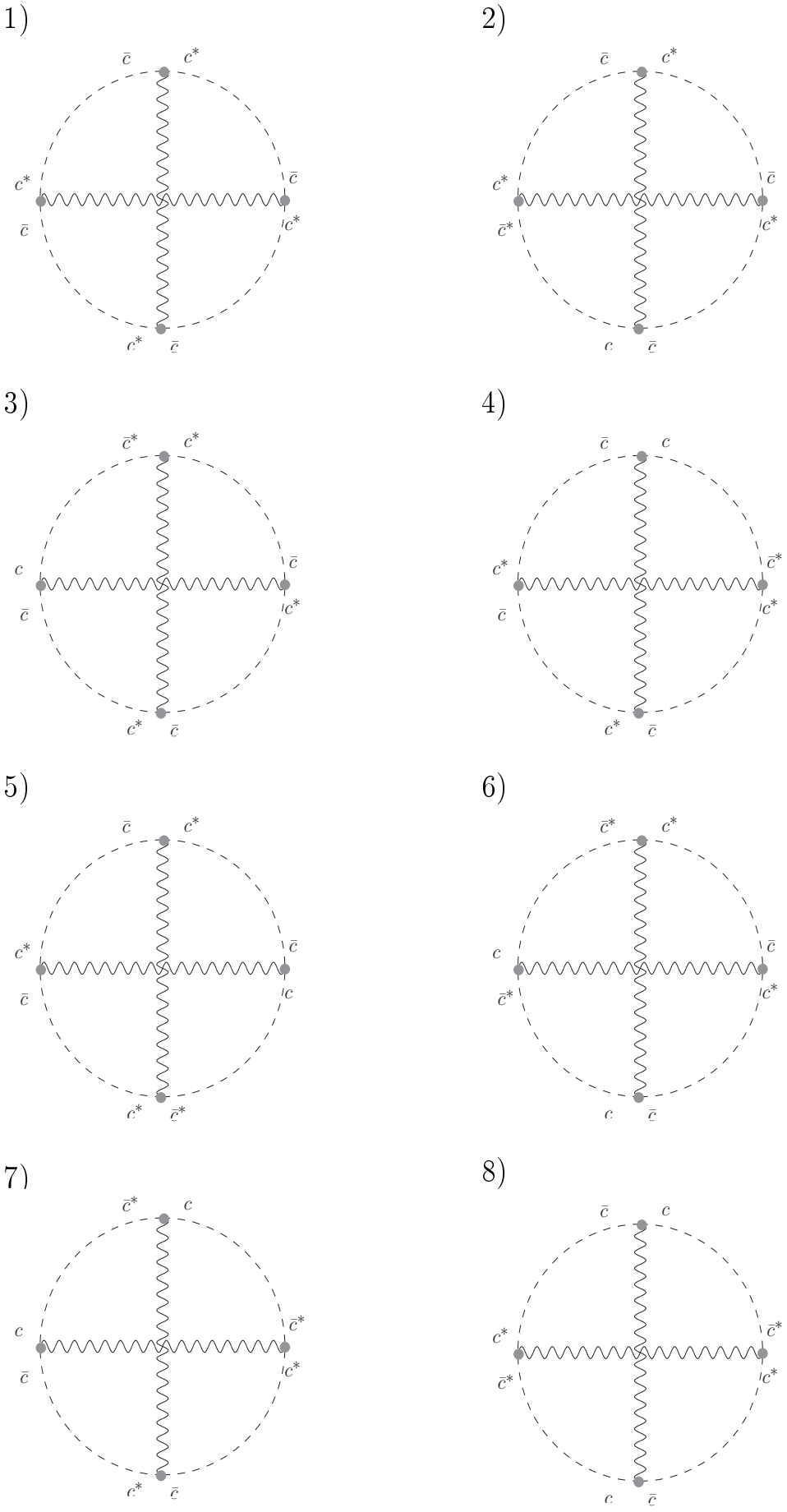


Рис. 1.22: Способы расстановки духовых полей для супердиаграммы D2

$$D2 = -\frac{1}{8}\tilde{\mu}\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{1}{L^2(Q+L)^2K^2(K+Q+L)^2Q^2}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{(K+Q)^2}\Big[-\frac{1}{R_KR_L}(K+2Q+L)^2+\frac{\xi_0^2}{R_KR_L}\big((K+Q)^2+Q^2+$$
$$+(Q+L)^2+(K+Q+L)^2\big)-\frac{\xi_0}{R_KR_L}(L^2+K^2)-\frac{\xi_0-1}{R_KK^2}\Big(\frac{1}{R_L}\cdot$$
$$\cdot\big((K+Q)^2(K+Q+L)^2+Q^2(Q+L)^2\big)+\frac{\xi_0}{R_L}\big(Q^2(K+Q+L)^2+$$
$$+(K+Q)^2(Q+L)^2\big)\Big)-\frac{\xi_0-1}{R_LL^2}\Big(\frac{1}{R_K}\cdot\big((L+Q)^2(K+Q+L)^2+$$
$$+Q^2(Q+K)^2\big)+\frac{\xi_0}{R_K}\big(Q^2(K+Q+L)^2+(K+Q)^2(Q+L)^2\big)\Big)-$$
$$-\frac{(\xi_0-1)^2}{R_KR_LK^2L^2}\cdot\Big((K+Q+L)^2Q^2(Q+L)^2+(K+Q)^2Q^2(Q+L)^2+$$
$$+(K+Q)^2(K+Q+L)^2(Q+L)^2+(K+Q)^2(K+Q+L)^2Q^2\Big)\Big], \quad (1.157)$$

где

$$\tilde{\mu} = e_0^4\mathcal{V}_4\mathrm{Tr}\Big(T^B_{Adj}T^N_{Adj}T^B_{Adj}T^N_{Adj}\Big). \quad (1.158)$$

Далее с помощью формулы (1.142) строим дифференциальный оператор для данной диаграммы. Тогда $\tilde{\mu}$ будет заменяться на структуру из полных производных следующего вида

$$\tilde{\mu}\to e_0^4\mathcal{V}_4C_2^3r\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}-\frac{\partial}{\partial Q_\mu}\frac{\partial}{\partial L^\mu}-\frac{\partial}{\partial Q_\mu}\frac{\partial}{\partial K^\mu}+\frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2}+\frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2}\Big). \quad (1.159)$$

Для того чтобы найти вклад в β-функцию от диаграммы, изображенной на Рис. 1.17, нужно подействовать на результат (1.157) с учетом замены, которая

задается формулой (1.159), оператором (1.143). В результате получим, что

$$\Delta_{D2}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big)=\frac{\pi C_2^3 e_0^4}{8}\cdot\frac{d}{d\ln\Lambda}\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\Big(\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}-\frac{\partial}{\partial Q_\mu}\frac{\partial}{\partial L^\mu}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial Q_\mu}\frac{\partial}{\partial K^\mu}+\frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2}+\frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2}\Big)\frac{1}{L^2(Q+L)^2K^2(K+Q+L)^2Q^2}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{(K+Q)^2}\Big[-\frac{1}{R_KR_L}(K+2Q+L)^2+\frac{\xi_0^2}{R_KR_L}\big((K+Q)^2+Q^2+$$
$$+(Q+L)^2+(K+Q+L)^2\big)-\frac{\xi_0}{R_KR_L}(L^2+K^2)-\frac{\xi_0-1}{R_KK^2}\Big(\frac{1}{R_L}\cdot$$
$$\cdot\big((K+Q)^2(K+Q+L)^2+Q^2(Q+L)^2\big)+\frac{\xi_0}{R_L}\big(Q^2(K+Q+L)^2+$$
$$+(K+Q)^2(Q+L)^2\big)\Big)-\frac{\xi_0-1}{R_LL^2}\Big(\frac{1}{R_K}\cdot\big((L+Q)^2(K+Q+L)^2+$$
$$+Q^2(Q+K)^2\big)+\frac{\xi_0}{R_K}\big(Q^2(K+Q+L)^2+(K+Q)^2(Q+L)^2\big)\Big)-$$
$$-\frac{(\xi_0-1)^2}{R_KR_LK^2L^2}\cdot\Big((K+Q+L)^2Q^2(Q+L)^2+(K+Q)^2Q^2(Q+L)^2+$$
$$+(K+Q)^2(K+Q+L)^2(Q+L)^2+(K+Q)^2(K+Q+L)^2Q^2\Big)\Big]. \quad (1.160)$$

Важно отметить, что при вычислении данного интеграла мы будем разрезать только духовые пропагаторы, обратно пропорциональные квадратам импульсов Q^2, $(K+Q)^2$, $(K+Q+L)^2$, $(Q+L)^2$, поскольку разрезание этих пропагаторов дает вклад в γ_c. Для учета вкладов в γ_V, получающихся при разрезании калибровочных пропагаторов, как и ранее, необходимо учесть суперграфы, содержащие только калибровочные суперполя [80]. Такие супердиаграммы в данной работе не рассматриваются, поэтому вклады в γ_V вычисляться не будут.

При взятии интегралов от полных производных в выражении (1.160) формулы (1.152) и (1.153) должны применяться только к вышеуказанным духовым пропагаторам. В результате соответствующий духовый вклад в β-функцию от диаграммы D2 оказывается равным нулю

$$\Delta_{D2}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big)\to 0. \quad (1.161)$$

Графически взятие интегралов от двойных полных производных с учетом особенностей только в духовых пропагаторах соответствует разрезанию внутренних духовых линий диаграммы, изображенной на Рис. 1.17. При ее разре-

зании получается диаграмма, дающая вклад в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова и изображенная на Рис. 1.10. Как было показано ранее в формуле (1.137), вклад в аномальную размерность от диаграммы, приведенной на Рис. 1.10, по сумме различных расстановок духов на внутренних линиях равен 0.

Поэтому на примере суперграфов, изображенных на Рис. 1.10 и 1.17, мы видим, что выполняется NSVZ соотношение вида (1.19)

$$\Delta_{D2}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = \frac{C_2}{\pi}\gamma_c\Big|_{\text{диаграмма 2}} + \dots \tag{1.162}$$

Данное вычисление также подтверждает справедливость нового алгоритма для вычисления β-функции в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных калибровочных теориях, регуляризованных высшими производными.

Диаграмма, изображенная на Рис. 1.18, дает нулевой результат. Это доказывается аналогично тому, как это было сделано в параграфе 1.3. Дело в том, что в диаграмме D3 имеется структура, зануляющая диаграмму на Рис. 1.12, а именно петля квантового калибровочного суперполя, находящаяся между тройной калибровочной вершиной (1.83) и четверной духово-калибровочной вершиной с двумя духовыми и двумя калибровочными линиями (1.79).

Эта структура оказывается равной 0 из-за наличия свертки симметричного и антисимметричного тензора, как это было подробно показано в (1.139). Поэтому

$$\Delta_{D3}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = 0. \tag{1.163}$$

Поскольку трехпетлевой вклад в β-функцию от диаграммы на Рис. 1.18 равен 0, а двухпетлевой вклад в аномальную размерность от диаграмм 3 и 4 на Рис. 1.7 также равен 0 в силу (1.139), то на примере данных суперграфов можно сделать вывод о справедливости алгоритма нахождения вкладов в β-функции на основе вычисления вакуумных суперграфов для рассматриваемых диаграмм и выполнении NSVZ соотношения (1.19),

$$\Delta_{D3}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = \frac{C_2}{\pi}\Big(\gamma_c\Big|_{\text{диаграмма 3}} + \gamma_c\Big|_{\text{диаграмма 4}}\Big) + \dots \tag{1.164}$$

Важно отметить, что при установлении данного соотношения мы также не учитывали разрезание калибровочных линий, которое дает вклад в γ_V. Это связано с необходимостью дополнительного вычисления аналогичных чисто калибровочных вкладов [80] для получения поперечности квантовых поправок к двухточечной функции Грина квантового калибровочного суперполя. Чисто калибровочные вклады в данной работе не вычисляются.

Таким образом, с помощью нового алгоритма вычисления β-функции, основанного на вычислении вакуумных суперграфов, были найдены вклады в трехпетлевую β-функцию, графически представленные на Рис. 1.16, 1.17 и 1.18. Сравнив эти результаты с соответствующими двухпетлевыми вкладами в аномальную размерность духов γ_c, было показано, что для данных графов выполняется NSVZ соотношение нового вида (1.19).

Данное вычисление в совокупности с аналогичными вкладами [108, 109] позволило найти полный духовый трехпетлевой (см. Рис. 1.15) вклад в β-функцию для $\mathcal{N} = 1$ SYM и убедиться, что он связан с двухпетлевой аномальной размерностью γ_c (1.140) соотношением (1.19). Данные результаты были опубликованы в работе [80].

Глава 2

Непланарные вклады с петлей суперполей материи в трехпетлевую β-функцию для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий

2.1 Вклад суперполей материи в трехпетлевую β-функцию $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

Рассмотрим правила Фейнмана для суперполей материи, которые необходимы для вычислений в этом параграфе.

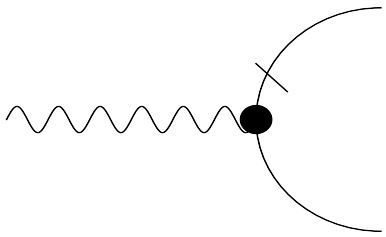


Рис. 2.1: Тройная вершина с суперполями материи и калибровочным суперполем. Киральное суперполе обозначено чертой.

Выражение для тройной вершины, в которой сходятся два суперполя материи и одно квантовое калибровочное суперполе, изображенной на Рис. 2.1, может быть получено вычленением вкладов вида $\phi^+ V \phi$ из действия (1.37)

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2}\int d^4\theta \, \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left(\underset{q+p}{\phi^+}\, \underset{-p}{V}\, \underset{-q}{\phi}\, \frac{(q+p)^2 F((q+p)^2) - q^2 F(q^2)}{(q+p)^2 - q^2} + \right.$$
$$\left. -\frac{1}{16}\underset{q+p}{\bar{D}^2\phi^+}\, \underset{-p}{V}\, \underset{-q}{D^2\phi}\, \frac{F((q+p)^2) - F(q^2)}{(q+p)^2 - q^2} \right), \tag{2.1}$$

где V_1 и V_2 обозначают первую и вторую часть рассматриваемой вершины со-

ответственно, а импульсы p и q лежат в пространстве Минковского.

Выражение для пропагаторов суперполей материи в безмассовом случае может быть получено дифференцированием по источникам производящего функционала свободной безмассовой теории, который имеет вид

$$Z_0[j,j^*]\big|_{\text{matter}} = \exp\Big\{ i\int d^8x\, j^a\, \frac{1}{\partial^2 F}\, j^*_a \Big\}, \tag{2.2}$$

где j — источники для суперполей материи ϕ, а j^* — источники для сопряженных суперполей материи ϕ^*.

Однопетлевые (под)расходимости от суперполей материи устраняются добавлением детерминантов Паули–Вилларса, которые были введены в формулах (1.47) и (1.48). Выражения для пропагаторов суперполей Паули–Вилларса с массой M^{ab} может быть получено дифференцированием по источникам производящего функционала для свободной массивной теории, который задается формулой

$$\begin{aligned} Z_0[j,j^*]\big|_{\text{PV}} = \exp\Big\{ &- iM^*_{ab}\int d^4x\, d^2\theta\, j^a\, \frac{1}{\partial^2 F^2 + M^2}\, j^b - \\ &- iM^{ab}\int d^4x\, d^2\bar\theta\, j^*_a\, \frac{1}{\partial^2 F^2 + M^2}\, j^*_b + i\int d^8x\, j^a\, \frac{F}{\partial^2 F^2 + M^2}\, j^*_a \Big\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где j — источники для суперполей Паули–Вилларса Φ, а j^* — источники для сопряженных суперполей Φ^*.

Вычисления в этом параграфе проводятся в калибровке Фейнмана. В связи с этим упрощается выражение для пропагатора квантового калибровочного суперполя V, теперь оно будет задаваться формулой (1.66).

В данном параграфе вычисляется вклад в трехпетлевую β-функцию от диаграммы, показанной на Рис. 2.2. Вычисления проводятся с помощью процедуры, описанной в параграфе 1.4.

Рассматриваемому суперграфу с помощью правил Фейнмана сопоставляем некоторое аналитическое выражение, которое затем с помощью стандартной техники сводится к импульсным интегралам. После этого для данной диаграммы строим дифференциальный оператор из двойных полных производных по импульсам с помощью формулы (1.142). На полученный результат действуем оператором в соответствии с формулой (1.143) и получаем искомый трехпетлевой вклад в β-функцию от супердиаграммы, представленной на Рис. 2.2.

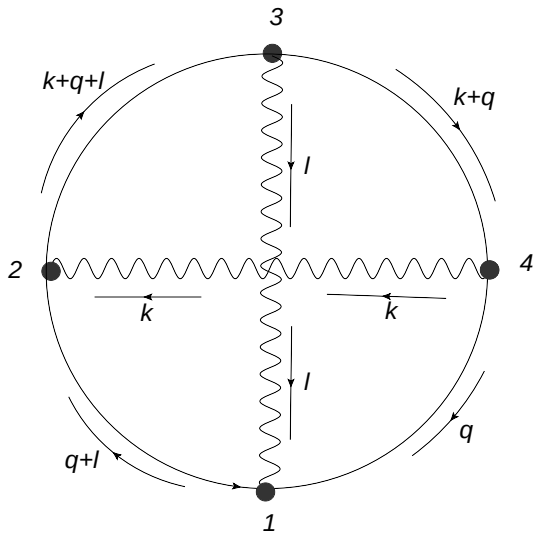


Рис. 2.2: Расстановка импульсов на диаграмме G1

В случае диаграмм с петлями материи и петлями калибровочных суперполей, рассматриваемых здесь, конструкции из генераторов $(T^A)_{a_k}{}^{b_k}$, определяющие коэффициенты при двойных производных в формуле (1.142), будут строиться из констант C_2 и $C(R)_i{}^j$, где R обозначает представление калибровочной группы G, в котором лежат суперполя материи.

Графически действие дифференциального оператора для супердиаграммы, изображенной на Рис. 2.2, состоит в разрезании определенных пропагаторов. Это также будет выражаться в явной связи между трехпетлевым вкладом в β-функцию от данного суперграфа и соответствующего вклада в аномальную размерность суперполей материи $(\gamma_\phi)_j{}^i$.

Вершина, изображенная на Рис. 2.1, задается формулой (2.1) и содержит два слагаемых. Поэтому вклад от супердиаграммы, представленной на Рис. 2.2, которая содержит четыре вершины такого типа, будет состоять из 16 слагаемых.

Для того чтобы записать выражение для модифицированного вакуумного суперграфа, изображенного на Рис. 2.2, введем дополнительные обозначения. Вклад от первого слагаемого в выражении для тройной вершины $\phi^\dagger V\phi$, приведенном в формуле (2.1), для вершин рассматриваемой супердиаграммы обозна-

чим, как

$$V_1(1) = \frac{(Q+L)^2 F_{Q+L} - Q^2 F_Q}{(Q+L)^2 - Q^2};$$
$$V_1(2) = \frac{(K+Q+L)^2 F_{K+Q+L} - (Q+L)^2 F_{Q+L}}{(K+Q+L)^2 - (Q+L)^2};$$
$$V_1(3) = \frac{(K+Q)^2 F_{K+Q} - (K+Q+L)^2 F_{K+Q+L}}{(K+Q)^2 - (K+Q+L)^2};$$
$$V_1(4) = \frac{Q^2 F_Q - (K+Q)^2 F_{K+Q}}{Q^2 - (K+Q)^2}, \tag{2.4}$$

где большими буквами мы, как и ранее, обозначаем евклидовы импульсы.

Вклад от второго слагаемого в тройной вершине $\phi^\dagger V \phi$ для каждой вершины рассматриваемого суперграфа обозначим, как

$$V_2(1) = \frac{1}{16} \cdot \frac{F_{Q+L} - F_Q}{(Q+L)^2 - Q^2};$$
$$V_2(2) = \frac{1}{16} \cdot \frac{F_{K+Q+L} - F_{Q+L}}{(K+Q+L)^2 - (Q+L)^2};$$
$$V_2(3) = \frac{1}{16} \cdot \frac{F_{K+Q} - F_{K+Q+L}}{(K+Q)^2 - (K+Q+L)^2};$$
$$V_2(4) = \frac{1}{16} \cdot \frac{F_Q - F_{K+Q}}{Q^2 - (K+Q)^2}. \tag{2.5}$$

Введем также обозначение $I(V_i, V_j, V_m, V_n)$, где $i, j, m, n \in \{1, 2\}$, а аргументы в скобках указывают на то, какое слагаемое (V_1 или V_2) из выражения (2.1) взято для каждой вершины (от 1 до 4) в супердиаграмме, изображенной на Рис. 2.2. Это позволит компактно записать 16 вкладов, которые суммарно дают итоговый результат для рассматриваемого суперграфа.

Нетрудно видеть, что в силу симметрийных свойств рассматриваемой супердиаграммы будут выполняться следующие соотношения между этими вкладами

$$I(V_2, V_1, V_1, V_1) = I(V_1, V_2, V_1, V_1) = I(V_1, V_1, V_2, V_1) = I(V_1, V_1, V_1, V_2); \tag{2.6}$$

$$I(V_2, V_2, V_1, V_1) = I(V_1, V_1, V_2, V_2) = I(V_2, V_1, V_1, V_2) = I(V_1, V_2, V_2, V_1); \tag{2.7}$$

$$I(V_1, V_2, V_2, V_2) = I(V_2, V_1, V_2, V_2) = I(V_2, V_2, V_1, V_2) = I(V_2, V_2, V_2, V_1). \tag{2.8}$$

Интегрируя по частям и используя соотношения (1.92) и (1.93), получаем, что

$$I(V_2, V_1, V_2, V_1) = 0 = I(V_1, V_2, V_1, V_2). \tag{2.9}$$

Тогда суммарный вклад от модифицированного трехпетлевого вакуумного суперграфа, изображенного на Рис. 2.2, будет равен

$$\begin{aligned} I = {} & I(V_1, V_1, V_1, V_1) + 4 \cdot I(V_2, V_1, V_1, V_1) + 4 \cdot I(V_2, V_2, V_1, V_1) + \\ & + 4 \cdot I(V_1, V_2, V_2, V_2) + I(V_2, V_2, V_2, V_2). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Далее приведем результаты для вкладов, составляющих это выражение, в импульсном представлении.

Введем обозначение для меры интегрирования рассматриваемого трехпетлевого суперграфа

$$d\mu = \frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}. \tag{2.11}$$

Вклады от пропагаторов суперполей материи, структурных констант и вставки $\theta^4(v^B)^2$ соберем в выражение

$$\begin{aligned} C = {} & \frac{e_0^4\mathcal{V}_4}{4} \cdot \mathrm{Tr}(T^A T^B T^A T^B) \frac{1}{(Q+L)^2 F_{Q+L}} \cdot \frac{1}{(K+Q+L)^2 F_{K+Q+L}} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{(K+Q)F_{K+Q}} \cdot \frac{1}{Q^2 F_Q}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Тогда в импульсном представлении рассматриваемые выражения имеют следующий вид

$$\begin{aligned} I(V_1, V_1, V_1, V_1) = {} & -\int d\mu\, C \cdot \frac{1}{R_K K^2}\frac{1}{R_L L^2} \cdot 4 \cdot (K + 2Q + L)^2 \times \\ & \times V_1(4)V_1(3)V_1(2)V_1(1); \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} I(V_2, V_1, V_1, V_1) = {} & \int d\mu\, C \cdot \frac{1}{R_K K^2}\frac{1}{R_L L^2} \cdot 4^3 \cdot Q^2 (K+Q)^2 \times \\ & \times V_2(4)V_1(3)V_1(2)V_1(1); \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$I(V_2,V_2,V_1,V_1) = -\int d\mu\, C\cdot \frac{1}{R_K K^2}\frac{1}{R_L L^2}\cdot 4^5\cdot Q^2(K+Q)^2\times$$
$$\times (K+Q+L)^2\cdot V_2(4)V_2(3)V_1(2)V_1(1); \qquad (2.15)$$

$$I(V_1,V_2,V_2,V_2) = \int d\mu\, C\cdot \frac{1}{R_K K^2}\frac{1}{R_L L^2}\cdot 4^7\cdot Q^2(K+Q)^2(Q+L)^2\times$$
$$\times (K+Q+L)^2\cdot V_1(4)V_2(3)V_2(2)V_2(1); \qquad (2.16)$$

$$I(V_2,V_2,V_2,V_2) = -\int d\mu\, C\cdot \frac{1}{R_K K^2}\frac{1}{R_L L^2}\cdot 4^9\cdot Q^2(K+Q)^2(Q+L)^2\times$$
$$\times (K+Q+L)^2(K+2Q+L)^2\cdot V_2(4)V_2(3)V_2(2)V_2(1). \qquad (2.17)$$

Далее с помощью формулы (1.142) строим дифференциальный оператор для данной диаграммы. При этом возникает структура из полных производных следующего вида:

$$\mathrm{Tr}(T^A T^B T^A T^B) \to \Big(\mathrm{tr}\left(C^3(R)\right) - \frac{1}{2}C_2\mathrm{tr}\left(C^2(R)\right)\Big)\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2} +$$
$$+ C_2\Big(\mathrm{tr}\left(C^2(R)\right) - \frac{1}{2}C_2\mathrm{tr}\left(C(R)\right)\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial L_\mu} -$$
$$- \frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K_\mu}\Big) = \hat{D}. \qquad (2.18)$$

Важно отметить, что при действии данного оператора мы будем разрезать только пропагаторы суперполей материи (см. Рис. 2.2) обратно пропорциональные Q^2, $(K+Q)^2$, $(K+Q+L)^2$, $(Q+L)^2$ (разрезание именно этих пропагаторов дает вклад в $(\gamma_\phi)_j{}^i$). Вклады в γ_V, получающиеся при разрезании калибровочных пропагаторов, для сравнения с вкладами β-функцию требуют учета суперграфов, содержащих исключительно калибровочные суперполя. Такие супердиаграммы в данной работе не рассматриваются, поэтому вклады в γ_V вычисляться не будут.

При действии дифференциального оператора на подынтегральные выражения в (2.10) формула (1.153) должна применяться только к вышеуказанным пропагаторам суперполей материи.

$I(V_1,V_2,V_2,V_2)$ и $I(V_2,V_2,V_2,V_2)$ не содержат обратных квадратов импуль-

сов, идущих от пропагаторов суперполей материи, поэтому они не дадут вклад в $(\gamma_\phi)_j{}^i$ после действия дифференциального оператора $\hat{D}$.

Второе слагаемое в выражении для дифференциального оператора $\hat{D}$ пропорционально $\left(\frac{\partial^2}{\partial L_\mu^2}+\frac{\partial^2}{\partial K_\mu^2}-\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial L_\mu}-\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu \partial K_\mu}\right)$ и при действии на оставшиеся подынтегральные выражения в формуле (2.10) по сумме будет давать нулевой результат.

Для того чтобы найти вклад в β-функцию от диаграммы, изображенной на Рис. 2.2, нужно подействовать на результат (2.10), модифицированный с учетом формулы (2.18), оператором (1.143). Тогда, учитывая вышеприведенные замечания, получаем, что

$$\Delta_{G1}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) \to -\frac{\pi}{2r}\cdot\frac{d}{d\ln\Lambda}\Big(\mathrm{tr}\left(C^3(R)\right)-\frac{1}{2}C_2\mathrm{tr}\left(C^2(R)\right)\Big)\frac{e_0^4}{\pi^2}\times$$
$$\times\int\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{R_K K^4}\frac{1}{R_L L^4}\cdot(-F_{K+L}). \tag{2.19}$$

Стоит отметить, что, вообще говоря, для данных вычислений также необходимы поля Паули–Вилларса (1.48), которые позволяют устранить однопетлевые подрасходимости согласно выбранной процедуре регуляризации и перенормировки. С другой стороны, пропагаторы полей Паули–Вилларса содержат $\frac{1}{P^2+M^2}$, где P — евклидов импульс пропагатора, а M^2 — квадрат массы Паули–Вилларса. Следовательно, такие вклады не влияют на конечный результат после взятия интеграла от полных производных, благодаря отсутствию сингулярностей в знаменателе. Поэтому здесь мы не будем выписывать вклады, идущие от диаграмм с петлей суперполей Паули–Вилларса. Аналогичные вклады будут подробно рассмотрены в следующей главе для $\mathcal{N}=1$ СКЭД.

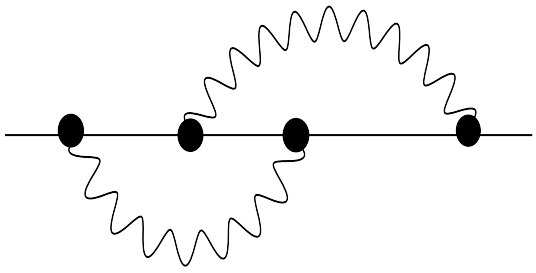


Рис. 2.3: Диаграмма A1

Соответствующий вклад в аномальную размерность для данной диаграммы, графически получается разрезанием пропагатора суперполей материи в

вакуумном суперграфе, изображенном на Рис. 2.2. Он должен быть связан с трехпетлевым вкладом суперполей материи в β-функцию с помощью NSVZ соотношения нового вида (1.19). Диаграмма, дающая вклад в аномальную размерность, получаемая с помощью этой процедуры, приведена на Рис. 2.3 . В калибровке Фейнмана вклад от данной диаграммы в аномальную размерность будет равен

$$\left(\gamma_\phi\right)_j{}^i\Big|_{A1} = -e_0^4\left(T^B T^A T^B T^A\right)^i_j \frac{d}{d\ln\Lambda}\int \frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{1}{R_K K^4}\frac{1}{R_L L^4}F_{K+L}. \quad (2.20)$$

Сравнивая это выражение с вкладом в β-функцию (2.19), мы видим, что для рассматриваемого вакуумного суперграфа выполняется соотношение

$$\Delta_{G1}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = -\frac{1}{2\pi r}C(R)_i{}^j\left(\gamma_\phi\right)_j{}^i\Big|_{A1} + \ldots \quad (2.21)$$

Это означает выполнение NSVZ соотношения (1.19), связывающего в данном случае трехпетлевой вклад в β-функцию и двухпетлевой вклад в аномальную размерность $\left(\gamma_\Phi\right)_j{}^i$ суперполей материи. Таким образом, на примере супердиаграмм, изображенных на Рис. 2.2 и 2.3, была показана справедливость нового алгоритма вычисления вклада в β-функцию от суперполей материи в рамках $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теорий Янга–Миллса.

2.2 Вклад в трехпетлевую β-функцию для $\mathcal{N}=1$ СКЭД

Действие для $\mathcal{N}=1$ СКЭД в массивном случае имеет вид

$$S = \frac{1}{4e_0^2}\mathrm{Re}\int d^4x d^2\theta W^a W_a + \sum_{i=1}^{N_f}\frac{1}{4}\int d^4x d^4\theta\big(\phi_i^* e^{2V}\phi_i + \widetilde{\phi}_i^* e^{-2V}\widetilde{\phi}_i\big) +$$
$$+\sum_{i=1}^{N_f}\Big(\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta\; m_0\widetilde{\phi}_i\phi_i + \text{к.с.}\Big), \quad (2.22)$$

где аналог тензора напряженности представляет собой киральное поле $W_a = \frac{1}{4}\bar{D}^2 D_a V$, а N_f — число ароматов.

Вне однопетлевого приближения [105] расходимости можно регуляризовать с помощью метода высших производных. Регуляризованное действие будет иметь вид

$$S_{\text{reg}} = \frac{1}{4e_0^2}\text{Re}\int d^4x\, d^2\theta\; W^a R\big(\partial^2/\Lambda^2\big)W_a + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N_f}\int d^4x\, d^4\theta\,\Big(\phi_i^* e^{2V}\phi_i + \\ +\widetilde{\phi}_i^* e^{-2V}\widetilde{\phi}_i\Big) + \sum_{i=1}^{N_f}\big(\frac{1}{2}\int d^4x d^2\theta\; m_0\widetilde{\phi}_i\phi_i + \text{к.с.}\big), \tag{2.23}$$

где $R(x)$ — функция регулятор, такая что $R(0) = 1$, а на бесконечности $\lim_{x\to\infty} R(x) = \infty$. Одним из вариантов функции $R(x)$, который будет удовлетворять данным условиям, является полином $R(x) = 1 + x^n$, где n — положительное целое число.

Согласно процедуре квантования (суперсимметричной) электродинамики в действие теории нужно добавить слагаемое, фиксирующее калибровку, которое мы выбираем в виде

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{32e_0^2\xi_0}\int d^4x\, d^4\theta\, D^2 V K\big(\partial^2/\Lambda^2\big)\bar{D}^2 V, \tag{2.24}$$

где $K(x)$ — еще одна функция регулятор с аналогичным поведением в 0 и на бесконечности, а ξ_0 — калибровочный параметр.

Регуляризовать однопетлевые вклады можно добавлением детерминантов Паули–Вилларса [106]

$$\text{Det}(PV, M)^{-1} = \int D\Phi D\widetilde{\Phi}\;\exp(iS_\Phi). \tag{2.25}$$

При этом действие суперполей Паули–Вилларса для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД будет иметь вид

$$S_\Phi = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\,\Big(\Phi^* e^{2V}\Phi + \widetilde{\Phi}^* e^{-2V}\widetilde{\Phi}\Big) + \Big(\frac{1}{2}M\int d^4x\, d^2\theta\,\widetilde{\Phi}\,\Phi + \text{к.с.}\Big), \tag{2.26}$$

где суперполя Φ и $\widetilde{\Phi}$ являются коммутирующими, их масса удовлетворяет соотношению $M = a\Lambda$, а постоянная a не зависит от константы связи.

Для сокращения однопетлевых расходимостей нужно добавить детерминант

$\mathrm{Det}(PV, M)$ в степени N_f, после чего производящий функционал примет вид

$$Z = \exp(iW) = \int DVD\phi D\widetilde{\phi}\,\mathrm{Det}(PV, M)^{N_f} \exp\Big(iS_{\mathrm{reg}} + iS_{\mathrm{gf}} + iS_{\mathrm{sources}}\Big), \quad (2.27)$$

где слагаемые с источниками для калибровочного суперполя и суперполей материи данной теории выглядят следующим образом

$$S_{\mathrm{sources}} = \int d^4x\, d^4\theta\, JV + \Big(\sum_{i=1}^{N_f} \int d^4x\, d^2\theta\, \big(j_i\phi_i + \widetilde{j}_i\widetilde{\phi}_i\big) + \text{к.с.}\Big). \quad (2.28)$$

Выражения для пропагаторов суперполей материи и квантового калибровочного суперполя получаются из квадратичной части действия (2.23). Это соответствует рассмотрению свободой теории, производящий функционал которой может быть записан в виде

$$\begin{aligned} Z_0[j, \tilde{j}, j^*, \tilde{j}^*, J] = \exp\Big[i\sum_{i=1}^{N_f} \int d^8x \Big(j_i \frac{1}{\partial^2 + m_0^2} j_i^* + \tilde{j}_i \frac{1}{\partial^2 + m_0^2} \tilde{j}_i{}^*\Big) - \\ -i\sum_{i=1}^{N_f} \int d^4x\, d^2\theta\, \tilde{j}_i\, \frac{2m_0}{\partial^2 + m_0^2}\, j_i - i\sum_{i=1}^{N_f} \int d^4x\, d^2\bar{\theta}\, \tilde{j}_i{}^*\, \frac{2m_0}{\partial^2 + m_0^2}\, j_i^*\Big] \times \\ \times \exp\Big[i\int d^8x J\Big(-\frac{1}{R\partial^2} + \frac{1}{16\partial^4}\Big(\frac{\xi_0}{K} - \frac{1}{R}\Big)\big(D^2\overline{D}^2 + \overline{D}^2 D^2\big)\Big) J\Big]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Пропагаторы суперполей материи и квантового калибровочного суперполя получаются дифференцированием производящего функционала (2.29) по соответствующим источникам.

Выражения для вершин взаимодействия между суперполями материи и калибровочным суперполем определяются из (2.23) и не содержат функций регуляторов. Так, часть действия (2.23), соответствующая тройной вершине, имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_f} \int d^4x\, d^4\theta \Big(\phi_i^* V \phi_i - \widetilde{\phi}_i^* V \widetilde{\phi}_i\Big). \quad (2.30)$$

Все трехпетлевые диаграммы, которые дают вклад в трехпетлевую β-функцию для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД приведены на Рис. 2.4.

В данной работе вычисляется вклад в β-функцию от диаграммы S5, показанной на Рис. 2.5, с помощью процедуры, описанной в статье [27]. Для рассматри-

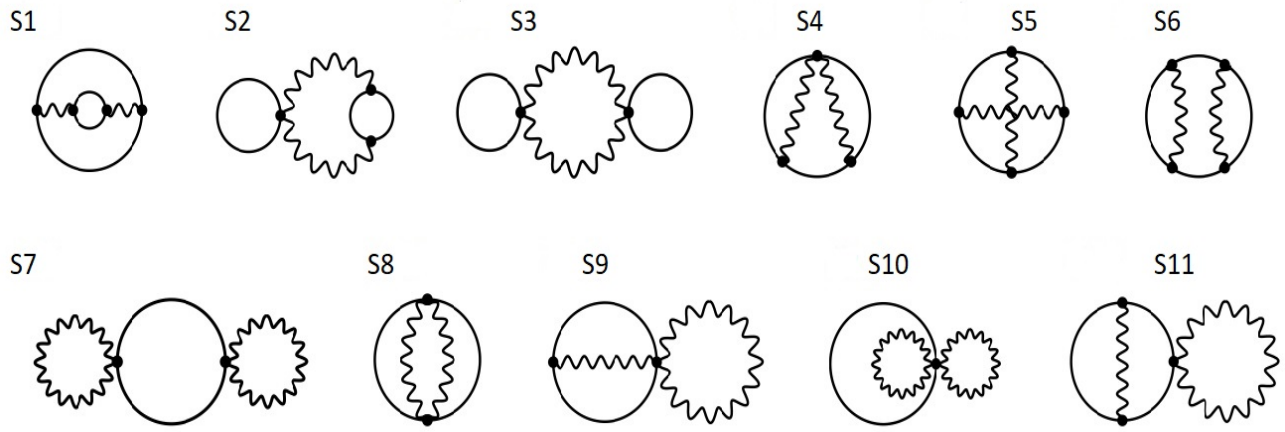


Рис. 2.4: Вакуумные суперграфы, позволяющие найти трехпетлевой вклад в β-функцию $\mathcal{N}=1$ СКЭД.

ваемого вклада в $\mathcal{N}=1$ СКЭД эта процедура задается следующим алгоритмом [81]:

1. Необходимо вставить $\theta^4(v^B)^2$ в произвольную точку вакуумного суперграфа, где v^B — почти постоянная функция, которая медленно убывает на большом масштабе $R\to\infty$.

2. Затем выражение для супердиаграммы нужно свести к импульсным интегралам в евклидовом пространстве, используя стандартную технику вычисления суперграфов, отбрасывая слагаемые, которые стремятся к 0 при $R\to\infty$.

3. На подынтегральное выражение необходимо подействовать дифференциальным оператором $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial Q_{\mu i}^2}$, где m — число петель материи.

4. К суммарному результату применяется оператор (1.143), учитывая, что размерность калибровочной группы $r=\dim U(1)=1$.

Вычисления для диаграммы S5, представленной на Рис. 2.5, в рамках $\mathcal{N}=1$ СКЭД будут проводиться в массивном случае. Это позволит также найти выражения для вкладов суперполей Паули–Вилларса. Поскольку действия для суперполей материи (2.23) и суперполей полей Паули–Вилларса (2.26) имеют одинаковую структуру, но, по построению регуляризованного производящего функционала (2.27), входят с разным знаком, то для учета вкладов детерминантов Паули–Вилларса нужно будет из выражения полученного при $m=0$

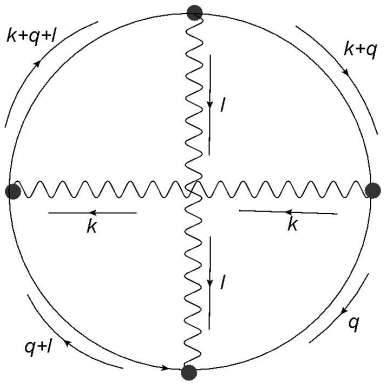


Рис. 2.5: Расстановка импульсов на диаграмме S5

вычесть вклады с ненулевой массой, произведя замену $m \to M$, где M — масса Паули–Вилларса.

Графически поддиаграммы, дающие вклад в диаграмму S5, изображены на Рис. 2.6, где черточками отмечены киральные суперполя. Далее для каждой поддиаграммы, модифицированной вставкой $\theta^4(v^B)^2$, проведем вычисления в массивном случае и запишем результат в импульсном представлении. Тогда получаем

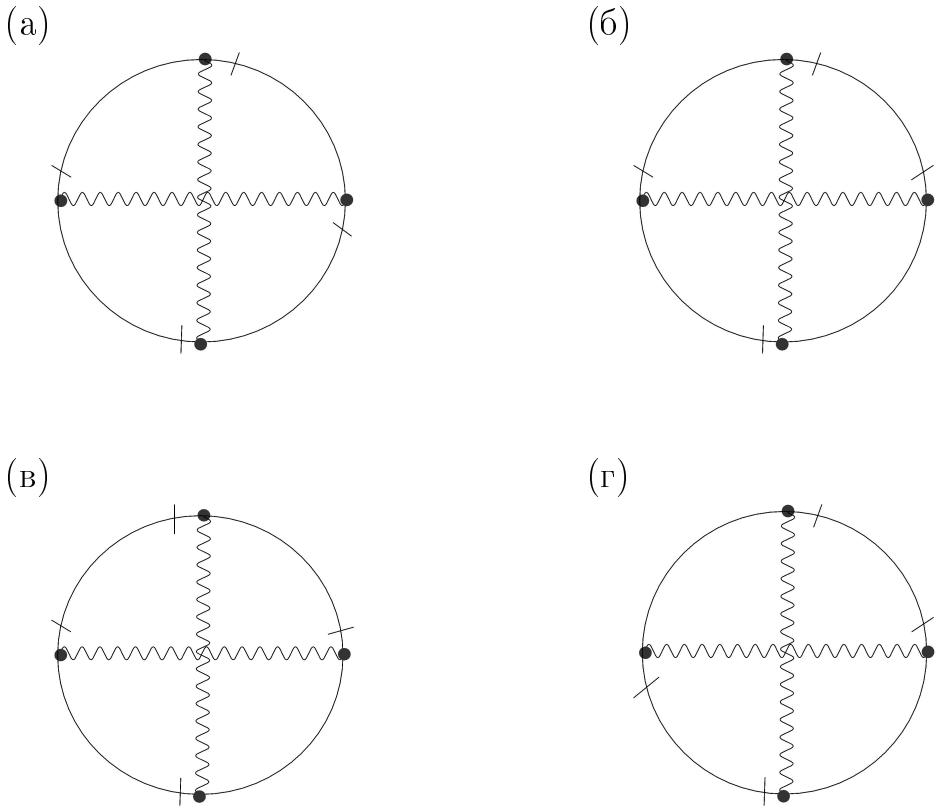


Рис. 2.6: Способы расстановки киральных суперполей материи для диаграммы S5

$$(\text{а}) = 2N_f e_0^4 \mathcal{V}_4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(Q^2+m^2)((Q+K)^2+m^2)}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{((Q+L)^2+m^2)((Q+K+L)^2+m^2)}\Big[-\frac{(K+2Q+L)^2}{R_K K^2 R_L L^2} -$$
$$-\frac{4}{R_L L^2 \Delta_K K^4}(K+Q)^2(K+Q+L)^2 - \frac{4}{\Delta_K K^4 \Delta_L L^4}(Q+L)^2\cdot$$
$$\cdot(Q+K)^2(K+Q+L)^2\Big], \tag{2.31}$$

где

$$\frac{1}{\Delta_L} = \frac{\xi_0}{K_L} - \frac{1}{R_L}; \tag{2.32}$$

$$(\text{б}) = 2N_f e_0^4 \mathcal{V}_4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(Q^2+m^2)((Q+K)^2+m^2)}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{((Q+L)^2+m^2)((Q+K+L)^2+m^2)}\Big[-\frac{4m^2}{K^2L^2R_K R_L} -$$
$$-8m^2\frac{Q^2}{R_L L^2 \Delta_K K^4} - \frac{4m^2}{R_K K^2 \Delta_L L^2} + \frac{1}{\Delta_K K^4 \Delta_L L^4}\big(-12m^2Q^2\cdot$$
$$\cdot(Q+K)^2 - 4m^2Q^2(Q+K+L)^2\big)\Big]; \tag{2.33}$$

$$(\text{в}) = N_f e_0^4 \mathcal{V}_4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(Q^2+m^2)((Q+K)^2+m^2)}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{((Q+L)^2+m^2)((Q+K+L)^2+m^2)}\Big[\frac{4m^2}{R_K K^2 R_L L^2} +$$
$$+\frac{8m^2}{R_L L^2 \Delta_K K^2} + \frac{m^2}{\Delta_K K^4 \Delta_L L^4}\big(4Q^2(K+Q+L)^2 +$$
$$+4Q^2(K+Q+L)^2 + 4(Q+K)^2(Q+L)^2 + 4Q^2(K+Q+L)^2\big)\Big]; \tag{2.34}$$

$$(\text{г}) = -8N_f e_0^4 \mathcal{V}_4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{m^4}{(Q^2+m^2)((Q+K)^2+m^2)}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{((Q+L)^2+m^2)((Q+K+L)^2+m^2)}\Big[\frac{1}{R_L L^2 \Delta_K K^4} +$$
$$+\frac{Q^2}{\Delta_K K^4 \Delta_L L^4}\Big]. \tag{2.35}$$

Теперь, чтобы получить суммарный вклад от модифицированного суперграфа, изображенного на Рис. 2.5, нужно сложить вышеприведенные результаты для поддиаграмм, представленных на Рис. 2.6. В результате получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathrm{S5} = 2N_f e_0^4 \mathcal{V}_4 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\Big[&- \frac{(K+2Q+L)^2+2m^2}{R_K K^2 R_L L^2 (Q^2+m^2)} \cdot \\
\cdot &\frac{1}{((Q+K)^2+m^2)((Q+L)^2+m^2)((Q+K+L)^2+m^2)} - \\
- &\frac{4}{R_L L^2 \Delta_K K^4}\frac{1}{(Q^2+m^2)((Q+L)^2+m^2)} - \frac{4}{\Delta_K K^4 \Delta_L L^4} \cdot \\
\cdot &\Big(\frac{1}{Q^2+m^2} + \frac{m^2}{(Q^2+m^2)((Q+K)^2+m^2)} - \frac{2m^2}{(Q^2+m^2)} \cdot \\
\cdot &\frac{1}{(K+Q+L)^2+m^2}\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Для того чтобы получить вклад в β-функцию, нужно сначала регуляризовать полученное выражение для суперграфа S5 с помощью метода Паули–Вилларса. Для этого из полученного выражения для супердиаграммы S5, взятого при $m = 0$, нужно вычесть это выражение при $m = M$, где M — масса Паули–Вилларса. Далее действуем на полученное выражение оператором (1.143) при условии, что размерность калибровочной группы $r = 1$, получаем

$$\begin{aligned}
\Delta_{S5}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = 4\pi N_f e_0^4 \frac{d}{d\ln\Lambda}\int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\frac{\partial^2}{\partial Q_\mu^2}\Big[&\frac{(K+2Q+L)^2}{R_K K^2 R_L L^2 Q^2} \cdot \\
\cdot &\frac{1}{(Q+K)^2(Q+L)^2(K+Q+L)^2} - \frac{(K+2Q+L)^2+2M^2}{R_K K^2 R_L L^2 (Q^2+M^2)} \cdot \\
\cdot &\frac{1}{((Q+K)^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)((K+Q+L)^2+M^2)} + \\
+ &\frac{4}{R_L L^2 \Delta_K K^4}\Big(\frac{1}{Q^2(Q+L)^2} - \frac{1}{(Q^2+M^2)((Q+L)^2+M^2)}\Big) + \\
+ &\frac{4}{\Delta_K K^4 \Delta_L L^4}\Big(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^2+M^2} - \frac{M^2}{(Q^2+M^2)((Q+K)^2+M^2)} - \\
- &\frac{2M^2}{(Q^2+M^2)((K+Q+L)^2+M^2)}\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{2.37}$$

где $\frac{1}{\Delta_L}$ и $\frac{1}{\Delta_K}$ задаются формулой (2.32).

Интеграл по Q_μ является интегралом от двойных полных производных и может быть вычислен аналитически с помощью формулы (1.153). Важно отме-

тить, что вклады, содержащие в знаменателе множители вида $P^2 + M^2$, где P — импульс какого-то пропагатора, не будут содержать сингулярных вкладов, и, как следствие, не будут давать вклада в β-функцию после вычисления интегралов от полных производных. После интегрирования получаем выражение

$$\Delta_{S5}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = \frac{1}{\pi} N_f e_0^4 \frac{d}{d\ln\Lambda} \int \frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{d^4L}{(2\pi)^4}\Big[\frac{4}{R_K K^4 R_L L^4} + \\ + \frac{8}{R_L L^4 \Delta_K K^4} + \frac{4}{\Delta_K K^4 \Delta_L L^4}\Big]. \tag{2.38}$$

Этот вклад должен быть связан с вкладом в аномальную размерность от диаграммы, которая графически получается разрезанием пропагатора суперполей материи в суперграфе, показанном на Рис. 2.5, и выглядит, как диаграмма, изображенная на Рис. 2.3. После вычисления выражения для этой диаграммы в импульсном представлении мы получаем

$$\Delta G = -4e_0^4 \int \frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{\xi_0^2}{K_K K^4 K_L L^4}. \tag{2.39}$$

Сравним теперь полученные вклады в β-функцию и аномальную размерность:

$$\Delta_{S5}\Big(\frac{\beta}{\alpha_0^2}\Big) = -\frac{N_f}{\pi}\frac{d}{d\ln\Lambda}\Delta G = \\ = \frac{4N_f e_0^4}{\pi}\frac{d}{d\ln\Lambda}\int \frac{d^4L}{(2\pi)^4}\frac{d^4K}{(2\pi)^4}\frac{\xi_0^2}{K_K K^4 K_L L^4}. \tag{2.40}$$

Это равенство означает, что NSVZ соотношение для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД (1.11) выполняется для трехпетлевого вклада в β-функцию от супердиаграммы, изображенной на Рис. 2.5, и соответствующего ему двухпетлевого вклада в аномальную размерность от диаграммы, представленной на Рис. 2.3.

Таким образом, равенство (2.40) подтвердило справедливость метода вычисления и позволило явно проверить новый алгоритм для нахождения вкладов в β-функцию, основанный на вычислении вакуумных суперграфов, для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД.

Данный результат в совокупности с аналогичными вкладами [108, 109, 110], вычисленными соавторами работы [81], позволил получить полный трехпетлевой вклад (см. Рис 2.4) в β-функцию для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД

$$\beta(\alpha_0) = \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi}\Big[1 + \frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_0^2}{\pi^2}\Big(- N_f \ln a - N_f - \frac{1}{2}\Big) + O(\alpha_0^3)\Big]. \qquad (2.41)$$

Полученный результат также согласуется с NSVZ соотношением для $\mathcal{N} = 1$ СКЭД (1.11) между трехпетлевой β-функцией и двухпетлевой аномальной размерностью, которая имеет вид [81]

$$\gamma(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_0^2}{\pi^2}\Big(N_f \ln a + N_f + \frac{1}{2}\Big) + O(\alpha_0^3). \qquad (2.42)$$

Соответствующие выражения для трехпетлевой β-функции и двухпетлевой аномальной размерности в терминах перенормированных констант связи в HD+MSL схеме, как было показано в параграфе 1.1, получаются заменой аргумента $\alpha_0 \to \alpha$ в вышеприведенных выражениях.

Глава 3

Конечность $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении

3.1 Постановка задачи

В данной главе рассматривается $\mathcal{N}=1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса с суперполями материи, регуляризованная высшими ковариантными производными. Действие для данной теории и ее квантование было подробно рассмотрено в параграфах 1.2 и 2.1. С помощью тождеств Славнова–Тейлора, с учетом перенормируемости рассматриваемой теории и соображений киральности, в работе [29] были получены общий вид и структура функции Грина с двумя внешними линиями духов Фаддеева–Попова и одной внешней линией квантового калибровочного суперполя

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{c}^{*A}_x\delta V^B_y\delta c^C_z} = -\frac{ie_0}{16}\,f^{ABC}\int\frac{d^4p\,d^4q}{(2\pi)^8}\Big(f(p,q)\partial^2\Pi_{1/2} - F_\mu(p,q)\cdot$$
$$\cdot(\gamma^\mu)_{\dot{a}}{}^b\bar{D}^{\dot{a}}D_b + F(p,q)\Big)_y\Big(D^2_x\delta^8_{xy}(q+p)\bar{D}^2_z\delta^8_{yz}(q)\Big), \tag{3.1}$$

где функции $F(p,q)$, $F_\mu(p,q)$ и $f(p,q)$ могут быть найдены с помощью явного вычисления диаграмм Фейнмана.

Вклад в эффективное действие, соответствующий функции Грина (3.1), будет иметь вид

$$\frac{ie_0}{4}\,f^{ABC}\int d^4\theta\,\frac{d^4p\,d^4q}{(2\pi)^8}\bar{c}^{*A}(\theta,p+q)\Big(f(p,q)\partial^2\Pi_{1/2}V^B(\theta,-p) + F_\mu(p,q)\cdot$$
$$\cdot(\gamma^\mu)_{\dot{a}}{}^b\bar{D}^{\dot{a}}D_bV^B(\theta,-p) + F(p,q)V^B(\theta,-p)c^C(\theta,-q)\Big). \tag{3.2}$$

В данной главе будут приведены результаты вычисления диаграмм, которые дают вклад в функцию $F(p,q)$ в двухпетлевом приближении. Данные диаграммы получаются при использовании внешней линии квантового калибровочного поля специального вида $V=\bar{D}^2\alpha$, поскольку в таком случае вклады, пропор-

циональные $F_\mu(p,q)$ и $f(p,q)$, зануляются, а выражение (3.2) принимает вид

$$\Delta\Gamma_{\bar{c}^+Vc}\Big|_{V=\bar{D}^2\alpha} = \frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4\theta \, \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{*A}(\theta, p+q) F(p,q) \bar{D}^2 \alpha^B(\theta, -p) c^C(\theta, -q). \tag{3.3}$$

Из выражения (3.2) также следует, что перенормировка функции $F(p,q)$ будет иметь вид [29]

$$F_R(p,q) = Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V F(p,q), \tag{3.4}$$

где Z_α, Z_c и Z_V — константы перенормировки заряда, духовых и квантового калибровочного суперполей соответственно.

Явные вычисления диаграмм, дающих вклад в $F(p,q)$ в двух петлях, позволят проверить теорему о неперенормировке $V\bar{c}c$ вершин [29] в двухпетлевом приближении, а именно соотношение

$$\frac{d}{d\ln\Lambda}\Big(Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V\Big) = 0. \tag{3.5}$$

Это соотношение означает, что в каждом порядке теории возмущений сумма расходящихся поправок к тройным духово-калибровочным вершинам должна равняться нулю. Ранее данное утверждение было проверено в однопетлевом приближении в работе [30].

Теорема (3.5) играет важную роль для доказательства NSVZ соотношения во всех порядках теории возмущений пертурбативными методами [25]. Действительно, как показано в работе [29], с помощью условия конечности тройных духово-калибровочных вершин (3.5) NSVZ соотношение (1.17) можно переписать в виде (1.19). Именно NSVZ соотношение нового вида (1.19) из первых принципов была выведено и доказано с помощью суммирования сингулярных вкладов во всех порядках теории возмущений.

Важно осуществить нетривиальную двухпетлевую проверку утверждения о конечности $V\bar{c}c$ вершин. Формально, можно было бы воспользоваться соотношением (3.5) и вычислить Z_c и Z_V в двухпетлевом приближении или соответствующие им аномальные размерности γ_c и γ_V. Двухпетлевая аномальная размерность γ_c была найдена в работе [79]. При этом данное вычисление показало, что уже в двухпетлевом приближении нужно учитывать нелинейную перенормировку квантового калибровочного суперполя V (1.35). Однако вычисление аномальной размерности γ_V является технически более сложной задачей, по-

тому что количество диаграмм Фейнмана, дающих в нее вклад, во много раз больше (речь идет о большом числе поддиаграмм).

В связи с этим, в качестве метода проверки конечности тройных духово-калибровочных вершин было выбрано прямое вычисление диаграмм Фейнмана, дающих вклад в функцию $F(p,q)$ в приближении нулевых внешних импульсов, перенормировка которой определяется формулой (3.4), что достаточно для проверки утверждения о неперенормировке $V\bar{c}c$ вершин (3.5). Данный подход позволил по итогу осуществить нетривиальную двухпетлевую проверку тройных духово-калибровочных вершин [82, 83].

3.2 Правила Фейнмана в пределе нулевых внешних импульсов

Для вычисления диаграмм, дающих вклад в функцию $F(p,q)$ в пределе нулевых внешних импульсов, необходимо построить выражения для калибровочных вершин, которые содержат одну внешнюю линию вида $V = \bar{D}^2\alpha$.

Если рассмотреть выражение для тройной калибровочной вершины (изображенной на Рис. 1.5), даваемое в общем виде формулой (1.83) и подставить вместо одного из квантовых калибровочных суперполей киральное суперполе $V = \bar{D}^2\alpha$, то выражение для вершины примет вид

$$\frac{ie_0}{16} f^{ABC} \int d^8x \left(\bar{D}^2\alpha^A D^a V^B R\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right) \bar{D}^2 D_a V^C + V^A D^a \bar{D}^2 \alpha^B R\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \bar{D}^2 D_a V^C \right) + \frac{ie_0}{128\Lambda^2} f^{ABC} \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sum_{j=0}^{n-1} \int d^8x \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)^j D^2 \bar{D}^2 D^a V^A \, \bar{D}^2\alpha^B \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right)^{n-1-j} \bar{D}^2 D_a V^C. \qquad (3.6)$$

Как показано в работе [82], интегрированием по частям и отбрасыванием слагаемых пропорциональных импульсу p_μ, соответствующему внешней линии, на которой находится киральное поле, выражение (3.6) в пределе $p_\mu \to 0$ сводится к

$$\frac{ie_0}{16} f^{ABC} \int d^8x \, \bar{D}^2\alpha^A D^a V^B \left(R\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{2\partial^2}{\Lambda^2} R'\left(\frac{\partial^2}{\Lambda^2}\right) \right) \bar{D}^2 D_a V^C. \qquad (3.7)$$

Интегрируя по частям теперь выражение (3.7), можно показать [82], что в нем появляется свертка антисимметричных структурных констант f^{ABC} с тензором, симметричным по индексам B и C, которая равна 0. Поэтому тройная калибровочная вершина с одной киральной внешней линией (см. Рис. 3.1) в пределе нулевого внешнего импульса оказывается равной нулю.

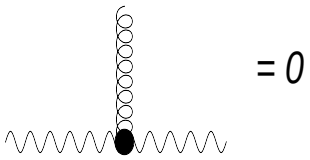


Рис. 3.1: Тройная калибровочная вершина с киральной линией $V = \bar{D}^2\alpha$ в пределе нулевого внешнего импульса оказывается равной 0.

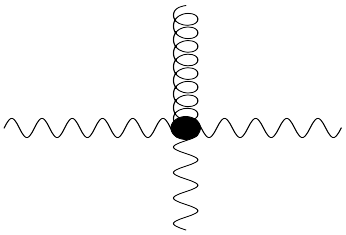


Рис. 3.2: Четверная калибровочная вершина с киральной линией $V = \bar{D}^2\alpha$ в пределе нулевого внешнего импульса.

Аналогично можно рассмотреть четверную калибровочную вершину, где одна из линий является внешней и киральной, то есть соответствует $V = \bar{D}^2\alpha$. Графически данная вершина представлена на Рис. 3.2. Тогда в пределе нулевого внешнего импульса эта вершина будет определяться выражением [83, 108]

$$\frac{1}{3e_0^2}\mathrm{tr}\int d^8x\,\bar{D}^2\alpha[V,[V,R(\partial^2/\Lambda^2)\partial^2\Pi_{1/2}V]] = \\ = \frac{e_0^2}{6}f^{ABC}f^{ADE}\int d^8x\,\bar{D}^2\alpha^B V^C V^D R(\partial^2/\Lambda^2)\left(\partial^2+\frac{D^2\bar{D}^2+\bar{D}^2D^2}{16}\right), \qquad (3.8)$$

где $\partial^2\Pi_{1/2}$ — поперечный проектор (1.53), а при переходе было использовано соотношение (1.54).

3.3 Двухпетлевой вклад в $V\bar{c}c$ вершины от диаграмм с петлей материи

В данной главе задача состоит в исследовании перенормировки $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении, поэтому нас будут интересовать диаграммы с

двумя петлями. В этом параграфе мы исследуем те из них, в которых имеется петля суперполей материи. Автором рассматривались диаграммы M1 и M2, изображенные на Рис. 3.3 и Рис. 3.4 соответственно. Ключевым общим свойством у данных диаграмм является наличие общей однопетлевой поддиаграммы, которая представлена на Рис. 3.5.

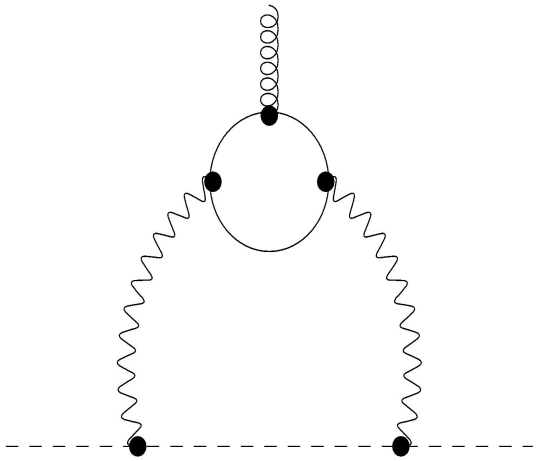


Рис. 3.3: Диаграмма M1

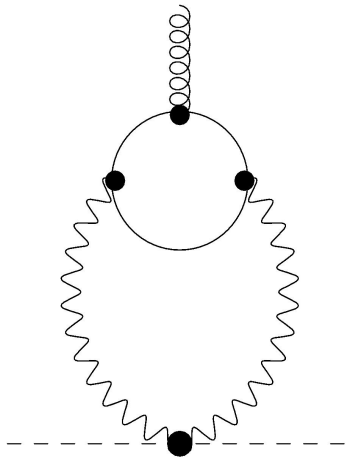


Рис. 3.4: Диаграмма M2

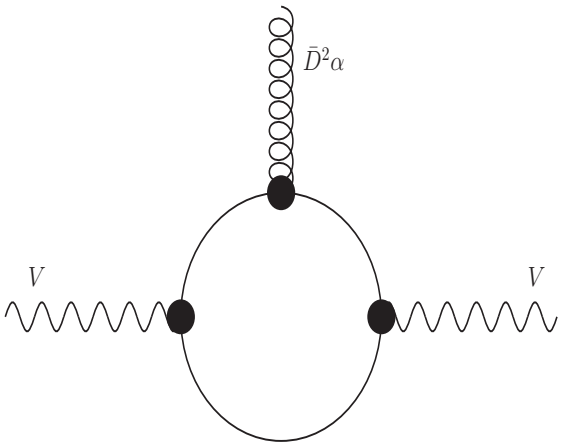


Рис. 3.5: Общая однопетлевая поддиаграмма в диаграммах M1 и M2

Если учесть остальные вклады с петлей материи [82] в двухпетлевую перенормировку $V\bar{c}c$ вершин, то диаграммы, которые будут содержать в качестве поддиаграмм другие вставки внешней линии поля $V = \bar{D}^2\alpha$ в однопетлевую часть поляризационного оператора с петлей материи, графически можно будет представить в виде суперграфов, изображенных на Рис. 3.6. Все вставки в однопетлевой поляризационный оператор с петлей материи приведены на Рис. 3.7.

Рассмотрим подробнее диаграмму на Рис. 3.5. Данный суперграф состоит из четырех поддиаграмм, изображенных на Рис. 3.8, которые возникают из-за

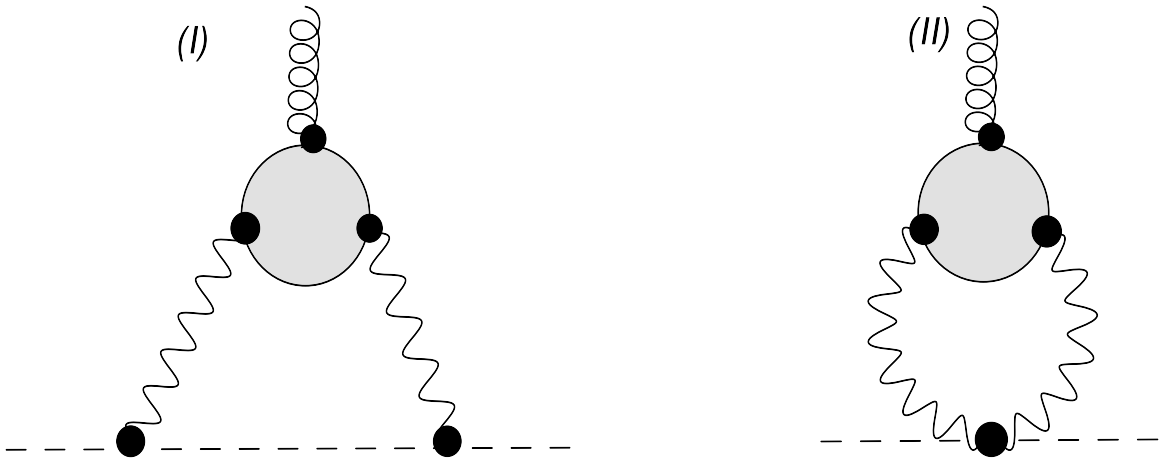


Рис. 3.6: Двухпетлевые диаграммы со всеми вставками в однопетлевой поляризационный оператор с петлей материи

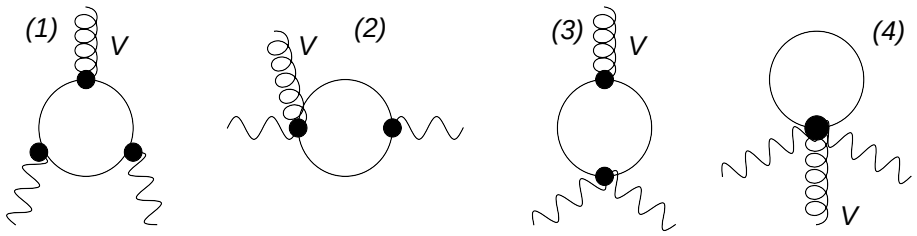


Рис. 3.7: Все вставки с киральной линией $V = \bar{D}^2\alpha$ в однопетлевой поляризационный оператор с петлей материи.

различных расстановок пропагаторов суперполей материи, форма которых совпадает с пропагаторами полей Паули–Вилларса, закодированными в формуле (2.3).

При этом можно показать, что сумма вкладов (в) и (г), изображенных на Рис. 3.8, равна 0. Действительно, эта сумма пропорциональна величине

$$\begin{aligned} &m^{ij}(T^A)_j{}^k(T^B)_k{}^l m^*_{ln}(T^C)_i{}^n + m^{ij}(T^A)_j{}^k m^*_{kn}(T^B)_m{}^n(T^C)_i{}^m = \\ &= m^{kj}(T^A)_j{}^i(T^B)_n{}^l m^*_{lk}(T^C)_i{}^n - m^2(T^A)_n{}^i(T^c)_i{}^m(T^B)_m{}^n = \\ &= m^2\mathrm{tr}(T^AT^CT^B) - m^2\mathrm{tr}(T^AT^CT^B) = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где m^{ij} — голые массы суперполей материи.

Отметим, что однопетлевые (под)расходимости от суперполей материи устраняются с помощью суперполей Паули–Вилларса. Процедура регуляризации подразумевает вычисление таких же выражений с точностью до замены $m \to M$ и вычитанию их из исходных. В связи с этим вклады аналогичные сумме (в)+(г), но от суперполей Паули–Вилларса также по сумме будут равны 0.

Для вычисления вклада от поддиаграммы на Рис. 3.5 остается вычислить

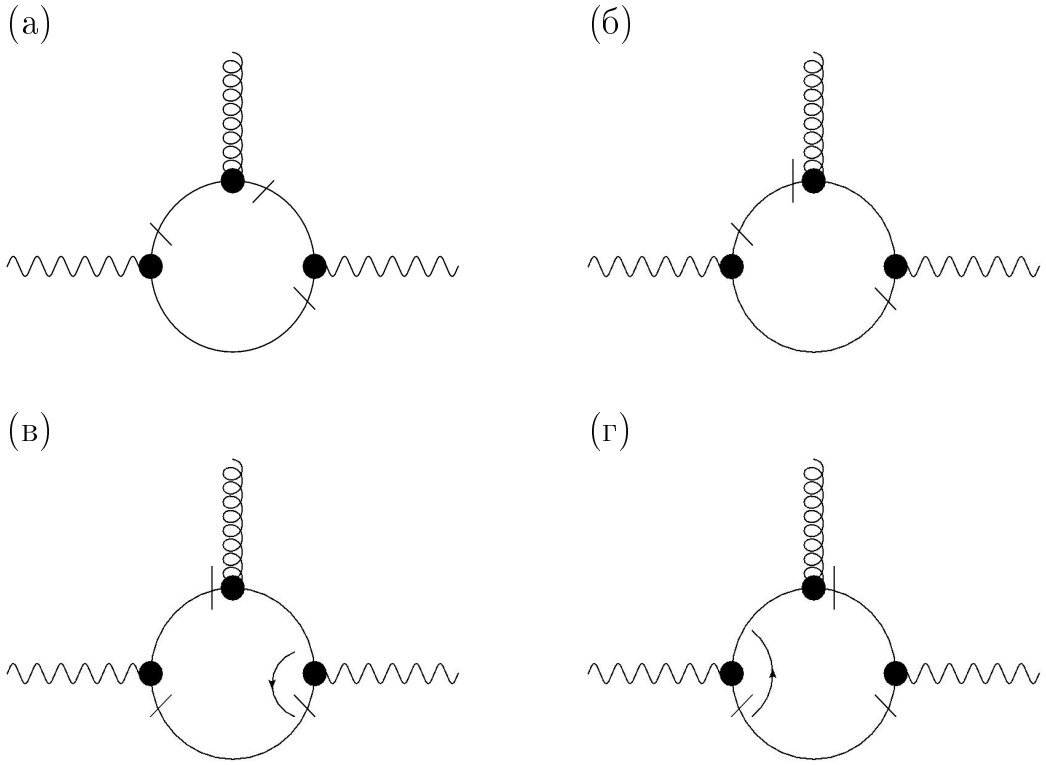


Рис. 3.8: Различные варианты расстановки пропагаторов в поддиаграмме, показанной на Рис. 3.5

сумму вкладов (а) + (б), изображенных на Рис. 3.8. Ранее мы отмечали, что выражение для тройной вершины, в которой сходятся две линии суперполей материи и одна линия квантового калибровочного суперполя (см. Рис. 2.1), содержит два слагаемых, которые приведены в формуле (2.1). Обозначим эти слагаемые здесь, как V_1 и V_2. В связи с этим сумма вкладов (а) + (б) будет состоять из нескольких слагаемых, результаты для которых мы приведем отдельно.

Конечность тройных духово-калибровочных вершин в данной работе исследуется в пределе нулевых внешних импульсов, поэтому результаты для поддиаграммы, изображенной на Рис. 3.5, будем рассматривать при условии, что внешний импульс для кирального калибровочного суперполя $\bar{D}^2\alpha$ является нулевым ($p \to 0$). В связи с этим для нижеприведенных вкладов интегрирование по этому импульсу d^4p также будем опускать.

Если в качестве выражений для тройных вершин, в которые входят внешние линии с суперполем V (см. Рис. 3.5), мы возьмем первое слагаемое V_1 в формуле (2.1), то соответствующий вклад в (а) + (б) в импульсном представлении будет

равен

$$\big((\text{а})+(\text{б})\big)(V_1,V_1)=-\frac{i}{32}\mathrm{Tr}_R\int d^4\theta_1 d^4\theta_2\ \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ V(q,\theta_1)V(-q,\theta_2)\cdot$$
$$\cdot\,\bar D^2\alpha_1\frac{\bar D_2^2D_1^2F_{k+q}}{(k+q)^2F_{k+q}^2-m^2}\delta^8_{12\,k+q}\ \frac{D_2^2\bar D_1^2F_k}{k^2F_k^2-m^2}\ \delta^8_{12\,k}\left[\frac{(k+q)^2F_{k+q}-k^2F_k}{(k+q)^2-k^2}\right]^2, \qquad (3.10)$$

где Tr_R обозначает след по генераторам представления R калибровочной группы G, а импульсы здесь (и в этом параграфе) лежат в пространстве Минковского.

Если для обеих тройных вершин мы возьмем второе слагаемое из формулы (2.1) V_2, это даст вклад в (а) + (б), который имеет вид

$$\big((\text{а})+(\text{б})\big)(V_2,V_2)=-\frac{i}{32}\mathrm{Tr}_R\int d^4\theta_1 d^4\theta_2\ \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ V(q,\theta_1)V(-q,\theta_2)\cdot$$
$$\cdot\,\bar D^2\alpha_2\left[\frac{F_{k+q}-F_k}{(k+q)^2-k^2}\right]^2\frac{D_2^2\bar D_1^2(k+q)^2F_{k+q}}{\big((k+q)^2F_{k+q}^2-m^2\big)}\ \delta^8_{12\,k+q}\ \frac{\bar D_2^2D_1^2k^2F_k}{\big(k^2F_k^2-m^2\big)}\ \delta^8_{12\,k}. \qquad (3.11)$$

Наконец, если мы рассмотрим смешанные вклады, когда в качестве выражения для тройных вершин берется V_1 и V_2, то получаем

$$\big((\text{а})+(\text{б})\big)(V_1,V_2)+\big((\text{а})+(\text{б})\big)(V_2,V_1)=-4\mathrm{Tr}_R\int d^4\theta\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ V(q,\theta)\cdot$$
$$\cdot\,V(-q,\theta)\bar D^2\alpha\int\frac{d^4k}{(2\pi)^2}\left[\frac{(k+q)^2F_{k+q}-k^2F_k}{(k+q)^2-k^2}\right]\left[\frac{F_{k+q}-F_k}{(k+q)^2-k^2}\right]\cdot$$
$$\cdot\,\frac{(k+q)^2F_{k+q}}{(k+q)^2F_{k+q}^2-m^2}\ \frac{k^2F_k}{k^2F_k^2-m^2}. \qquad (3.12)$$

Таким образом, мы получаем, что выражение для поддиаграммы, изобра-

женной на Рис. 3.5 будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
(1) = &-\frac{i}{32}\mathrm{Tr}_R \int d^4\theta_1 d^4\theta_2 \, \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, V(q,\theta_1)V(-q,\theta_2)\cdot \\
&\cdot \Bigg(\bar{D}^2\alpha_1 \frac{\bar{D}_2^2 D_1^2 F_{k+q}}{(k+q)^2F_{k+q}^2 - m^2}\delta^8_{12\,k+q} \, \frac{D_2^2\bar{D}_1^2 F_k}{k^2F_k^2 - m^2} \, \delta^8_{12\,k} \left[\frac{(k+q)^2F_{k+q} - k^2F_k}{(k+q)^2 - k^2}\right]^2 + \\
&+ \bar{D}^2\alpha_2 \left[\frac{F_{k+q} - F_k}{(k+q)^2 - k^2}\right]^2 \frac{D_2^2\bar{D}_1^2(k+q)^2F_{k+q}}{(k+q)^2F_{k+q}^2 - m^2} \, \delta^8_{12\,k+q} \, \frac{\bar{D}_2^2 D_1^2 k^2 F_k}{k^2F_k^2 - m^2} \, \delta^8_{12\,k} \Bigg) - \\
&- 4\mathrm{Tr}_R \int d^4\theta \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \, V(q,\theta)V(-q,\theta)\bar{D}^2\alpha \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{F_{k+q} - F_k}{(k+q)^2 - k^2}\right] \cdot \\
&\cdot \frac{k^2F_k}{k^2F_k^2 - m^2} \left[\frac{(k+q)^2F_{k+q} - k^2F_k}{(k+q)^2 - k^2}\right] \frac{(k+q)^2F_{k+q}}{(k+q)^2F_{k+q}^2 - m^2}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Также отметим, что однопетлевые (под)расходимости от суперполей материи устраняются с помощью регуляризации Паули–Вилларса. Для этого необходимо вычесть такие же выражения с точностью до замены $m \to M$ из исходных.

Поскольку выражение (3.13) нужно будет складывать с аналогичными вкладами от поддиаграмм, приведенных на Рис. 3.7, то оказывается, что полученное выражение для поддиаграммы (1) не требует взятия интегралов с суперпроизводными.

Дело в том, что при суммировании вклада (3.13) с аналогичными вставками кирального поля $V = \bar{D}^2\alpha$ в однопетлевой поляризационный оператор с петлей материи, изображенными на Рис. 3.7 и представленными в статье [82] и работах [108, 109], было показано, что сумма этих вкладов в рассматриваемую часть поляризационного оператора пропорциональна

$$
\begin{aligned}
&e_0^3 f^{ABC} T(R) \int d^4\theta \, \bar{D}^2\alpha^A(0,\theta) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}[\bar{D}_{\dot{a}}, D_b]V^B(q,\theta)V^C(-q,\theta)(\gamma^\mu)^{\dot{a}b} \times \\
&\times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(2k+q)_\mu}{(q+k)^2 - k^2}F_{q+k}F_k\Bigg(\frac{1}{k^2F_k^2 - m^2} - \frac{1}{k^2F_k^2 - M^2} - \\
&- \frac{1}{(q+k)^2F_{q+k}^2 - m^2} + \frac{1}{(q+k)^2F_{q+k}^2 - M^2}\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Рассмотрев слагаемые под интегралом d^4k и воспользовавшись заменой переменной интегрирования $k_\mu \to -k_\mu - q_\mu$, в работе [82] было показано, что данное выражение равняется 0.

Как следствие, диаграммы, изображенные на Рис. 3.3 и 3.4, не нужно считать отдельно. Двухпетлевые вклады со всеми однопетлевыми вставками в поляризационный оператор с петлей материи, представленными на Рис. 3.6, получаются равными 0 в пределе нулевого внешнего импульса, поскольку сумма всех диаграмм, показанных на Рис. 3.7, согласно формуле (3.14), оказывается равной 0.

Вышеприведенные результаты для супердиаграмм с петлей материи позволили доказать конечность двухпетлевых вкладов, пропорциональных $C_2T(R)$, в тройные духово-калибровочные вершин. Это подтвердило теорему о неперенормировке тройных вершин с двумя духовыми линиями и одной линией квантового калибровочного суперполя на двухпетлевом уровне [82].

Для окончательного доказательства конечности $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении необходимо исследовать вклады, пропорциональные C_2^2, которые будут рассмотрены далее.

3.4 Двухпетлевой вклад в $V\bar{c}c$ вершины, пропорциональный C_2^2

В данном параграфе будут рассмотрены супердиаграммы, которые дают двухпетлевой вклад в перенормировку тройных духово-калибровочных вершин и содержат петли духов Фаддеева–Попова и квантового калибровочного суперполя. Вклады от этих суперграфов необходимы для полной проверки конечности $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении.

Графически супердиаграммы, которые вычисляются в этом параграфе, получаются вставкой внешней линии с суперполем $\bar{D}^2\alpha$ в суперграфы, которые приведены на Рис. 1.8, 1.10 и 1.12. На внешних духовых линиях в получающихся супердиаграммах, как и ранее, находятся суперполя c и $\bar{c}^*$. Вычисления проводятся в общей ξ-калибровке и в пределе нулевых внешних импульсов.

Рассмотрим все супердиаграммы, которые получаются вставкой внешней киральной линии $V = \bar{D}^2\alpha$ в суперграф, изображенный на Рис. 1.8. В результате получается набор из двухпетлевых диаграмм с двумя внешними духовыми линиями и одной внешней линией кирального калибровочного суперполя. Эти суперграфы приведены на Рис. 3.9.

Отметим, что суперграф, который графически получается вставкой внеш-

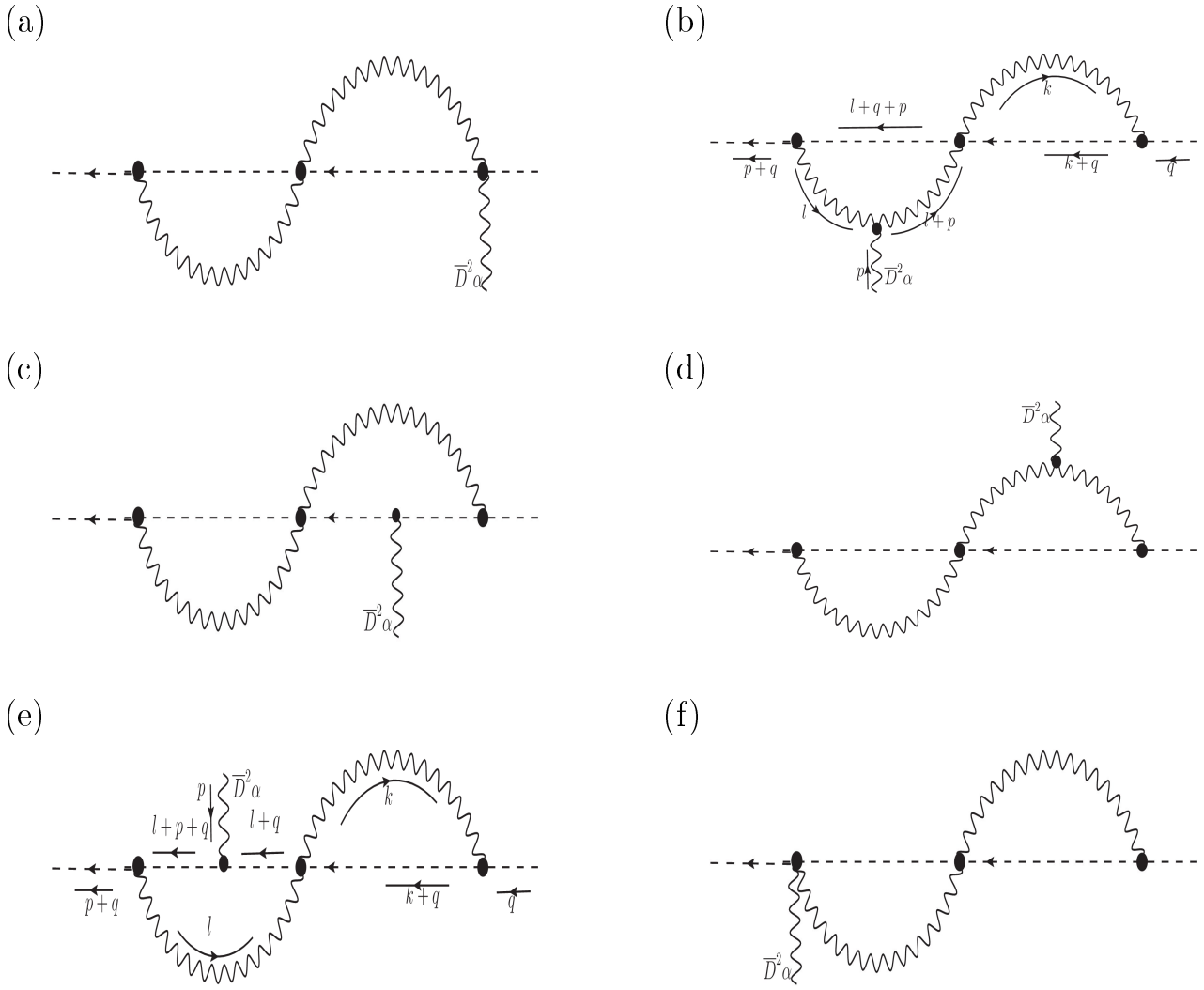


Рис. 3.9: Суперграфы, получающиеся добавлением внешней линии с суперполем $\bar{D}^2\alpha$ в диаграмму, показанную на Рис. 1.8

ней линии $\bar{D}^2\alpha$ в вершину с двумя калибровочными и двумя духовыми суперполями в диаграмме, изображенной на Рис. 1.8, отсутствует, поскольку получающаяся вершина равна 0 согласно формулам (1.76) и (1.77).

Супердиаграммы (b) и (d) содержат тройную калибровочную вершину с внешней линией $\bar{D}^2\alpha$ (см. Рис. 3.1) в пределе нулевого внешнего импульса. Как было показано ранее, данная вершина равняется нулю, благодаря чему вклады от суперграфов (b) и (d) также будут равны 0.

Рассмотрим супердиаграммы (a) и (c), изображенные на Рис. 3.9, учитывая вклады от различных расстановок духов на внутренних линиях для этих суперграфов. Тогда, принимая во внимание знаки для духовых пропагаторов, приведенных в формулах (1.73) и (1.74), и знаки для вершин типа $\bar{c}V^2c$, выражение для которых представлено в формуле (1.79), аналогично вычислению вклада от диаграммы 1 в параграфе 1.3 мы получаем, что данные супердиа-

граммы равны 0 по сумме духовых поддиаграмм.

Воспользовавшись стандартной техникой сведения выражений для супердиаграмм к импульсным интегралам и сложив вклады от различных расстановок духов на внутренних линиях, для суперграфов (e) и (f), изображенных на Рис. 3.9, получаем, что их вклад в пределе нулевых внешних импульсов в функцию $F(p,q)$, введенную ранее в формуле (3.2), будет иметь вид

$$\Delta_f F = -\frac{e_0^4}{4} C_2^2 \int \frac{d^4K d^4L}{(2\pi)^8} \frac{\xi_0^2}{K_K K_L L^4 K^4}, \tag{3.15}$$

$$\Delta_e F = \frac{e_0^4}{4} C_2^2 \int \frac{d^4K d^4L}{(2\pi)^8} \frac{\xi_0^2}{K_K K_L L^4 K^4}, \tag{3.16}$$

где импульсы K_μ и L_μ лежат в пространстве Евклида.

Таким образом, суммарный вклад от диаграмм, показанных на Рис. 3.9 в пределе нулевых внешних импульсов равен 0. Поэтому данные суперграфы не дают расходящихся вкладов в перенормировку тройных духово-калибровочных вершин в двухпетлевом приближении.

Теперь рассмотрим все суперграфы, которые получаются вставкой внешней линии с суперполем $\bar{D}^2\alpha$ в супердиаграмму, изображенную на Рис. 1.10. В результате получается набор из двухпетлевых диаграмм с двумя внешними духовым линиями и одной внешней линией $\bar{D}^2\alpha$. Эти суперграфы представлены на Рис. 3.10.

Вклад от супердиаграмм (H) и (I), изображенных на Рис. 3.10, будет равен нулю в пределе нулевых внешних импульсов, поскольку, как было показано в параграфе 3.2, в данном пределе тройная калибровочная вершина с внешней линией $\overline{D}^2\alpha$ равна 0.

Для суперграфа (A) на. Рис. 3.10 рассмотрим различные расстановки духов на внутренних линиях. Аналогично вычислению вклада от диаграммы 2 в параграфе 1.3 мы получаем, что из-за разницы в знаках между духовыми пропагаторами, определяемыми в формулах (1.73) и (1.74), и слагаемыми в вершинах типа $\bar{c}V^2c$, приведенными в формуле (1.79), суммарный результат от всех расстановок для данной супердиаграммы будет равен 0.

Вклад супердиаграммы (D), изображенной на Рис. 3.10, в функцию $F(p,q)$ пропорционален выражению из структурных констант, которое оказывается

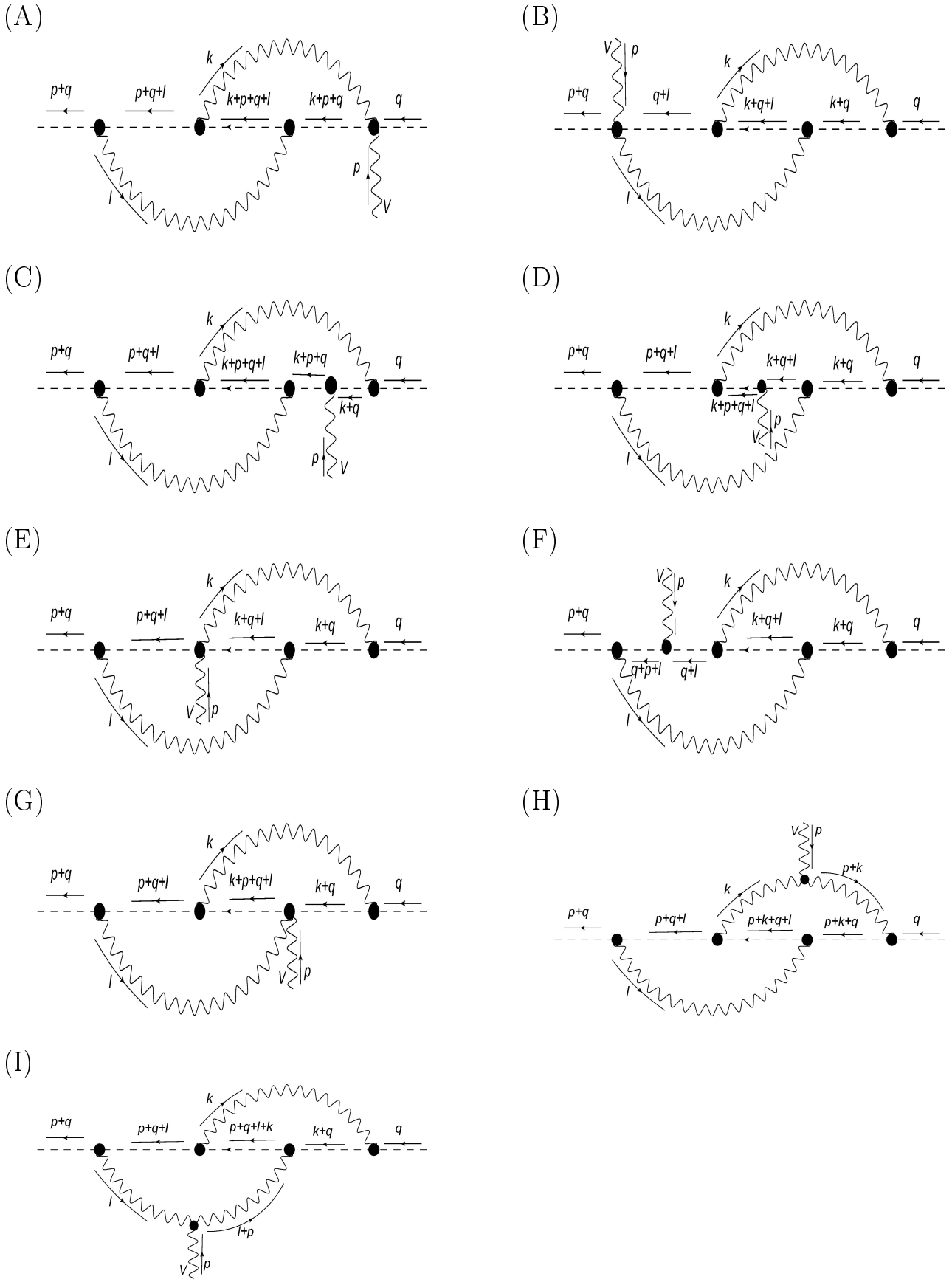


Рис. 3.10: Суперграфы, получающиеся добавлением внешней калибровочной линии с суперполем $V = \overline{D}^2\alpha$ в диаграмму, показанную на Рис. 1.10

равным нулю,

$$f^{QRA}\,\mathrm{Tr}\Big(T^A_{Adj}T^N_{Adj}T^R_{Adj}T^F_{Adj}\Big)=\frac{1}{4}C_2^2f^{QNF}-\frac{1}{4}C_2^2f^{QNF}=0, \tag{3.17}$$

где T^A_{Adj} — генераторы присоединенного представления, которые выражаются через структурные константы соотношением (1.39).

Обозначим $\Delta_X F$, где $X=B,E,G,J,F$, вклад в функцию $F(p,q)$, определенную в формуле (3.2), в пределе нулевых внешних импульсов от соответствующих диаграмм на Рис. 3.10. Тогда, используя стандартную технику сведения выражений для супердиаграмм к импульсным интегралам и суммируя вклады от различных расстановок духов на внутренних линиях, получаем, что

$$\Delta_B F=\frac{e_0^4}{8}C_2^2\int\frac{d^4Kd^4L}{(2\pi)^8}\frac{\xi_0^2}{K_KK_LL^4K^4}; \tag{3.18}$$

$$\Delta_E F=\frac{e_0^4}{24}C_2^2\int\frac{d^4Kd^4L}{(2\pi)^8}\frac{\xi_0^2}{K_KK_LL^2K^2}\cdot\left[-\frac{2}{K^2(K+L)^2}+\frac{1}{K^2L^2}\right]; \tag{3.19}$$

$$\Delta_G F=\frac{e_0^4}{24}C_2^2\int\frac{d^4Kd^4L}{(2\pi)^8}\frac{\xi_0^2}{K_KK_LL^4K^4}; \tag{3.20}$$

$$\Delta_J F=-\frac{e_0^4}{8}C_2^2\int\frac{d^4Kd^4L}{(2\pi)^8}\frac{\xi_0^2}{K_KK_LL^4K^4}; \tag{3.21}$$

$$\Delta_F F=-\frac{e_0^4}{8}C_2^2\int\frac{d^4Kd^4L}{(2\pi)^8}\frac{\xi_0^2}{K_KK_LL^4K^4}. \tag{3.22}$$

Таким образом, суммарный вклад от супердиаграмм, представленных на Рис. 3.10, в функцию $F(p,q)$ в пределе нулевых внешних импульсов принимает вид

$$\Delta_2 F=-\frac{e_0^4}{24}C_2^2\int\frac{d^4Kd^4L}{(2\pi)^8}\frac{\xi_0^2}{K_KK_LL^2K^2}\left[\frac{2}{K^2(K+L)^2}+\frac{1}{K^2L^2}\right]. \tag{3.23}$$

Наконец рассмотрим все суперграфы, которые получаются вставкой внешней линии $\bar{D}^2\alpha$ в супердиаграмму, изображенную на Рис. 1.12. В результате получается набор из двухпетлевых диаграмм с двумя внешними духовым линиями и одной внешней линией суперполя $\bar{D}^2\alpha$. Эти суперграфы приведены на Рис. 3.11.

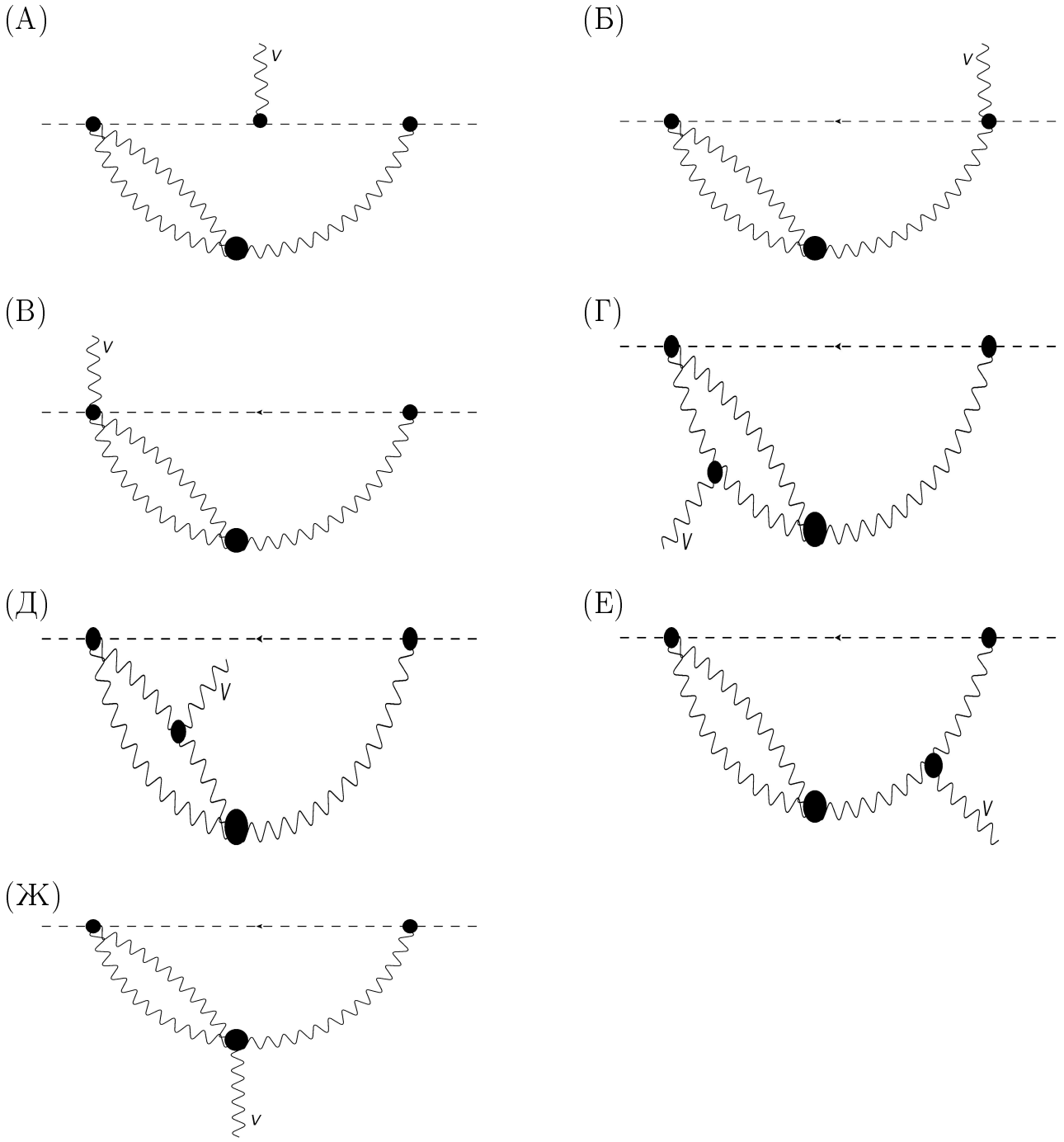


Рис. 3.11: Суперграфы, получающиеся добавлением внешней калибровочной линии $V = \overline{D}^2\alpha$ в диаграмму, приведенную на Рис. 1.12

Суперграфы (А) и (Б), изображенные на Рис. 3.11, дают нулевой вклад. Это доказывается аналогично тому, как это было сделано в параграфе 1.3, поскольк-

ку в них имеется структура, зануляющая диаграмму на Рис. 1.12, а именно петля квантового калибровочного суперполя, находящаяся между тройной калибровочной вершиной (1.83) и четверной духово-калибровочной вершиной с двумя духовыми и двумя калибровочными линиями (1.79). Эта структура оказывается равной 0 из-за наличия свертки симметричного и антисимметричного тензора, как это было подробно показано в (1.139).

Отметим, что супергграф (В) (см. Рис. 3.11) содержит вершину, в которой сходится три калибровочных суперполя и два духовых суперполя. В соответствии с формулами (1.76) и (1.77) данная вершина равна нулю, благодаря чему вклад от данной супердиаграммы также будет равен 0.

Вклады от супердиаграмм (Г), (Д) и (Е), представленных на Рис. 3.11, будут равны 0 в пределе нулевых внешних импульсов, поскольку данные супергграфы содержат тройную калибровочную вершину с внешней линией $\overline{D}^2\alpha$, которая, как было показано в параграфе 3.2, в рассматриваемом пределе равна 0.

Ненулевой вклад среди супергграфов на Рис. 3.11 даст только супердиаграмма (Ж). Используя стандартную технику вычисления супергграфов, вклад в функцию $F(p,q)$, заданную формулой (3.2), от данной супердиаграммы в пределе нулевых внешних импульсов будет иметь вид

$$\Delta_{\text{Ж}}F = \frac{e_0^4}{72}C_2^2\int\frac{d^4Kd^4L}{(2\pi)^8}\frac{\xi_0}{K_K K^2L^2}\Big[\Big(\frac{\xi_0}{K_L}+\frac{1}{R_L}\Big)\times$$
$$\times\frac{1}{K^2(K+L)^2}-\Big(\frac{\xi_0}{K_L}-\frac{1}{R_L}\Big)\frac{1}{L^2}\Big(\frac{1}{K^2}-\frac{1}{(K+L)^2}\Big)\Big]. \qquad (3.24)$$

В результате оказывается, что вклад от супергграфов, приведенных на Рис. 3.9, в двухпетлевую перенормировку тройных духово-калибровочных вершин в пределе нулевых внешних импульсов равен 0. Суммарный вклад от супердиаграмм, изображенных на Рис. 3.10, в функцию $F(p,q)$ в рассматриваемом пределе оказывается не равным нулю, и соответствующее итоговое выражение приводится в формуле (3.23). Супергграфы, приведенные на Рис. 3.11, дают вклад в двухпетлевую перенормировку $\bar{c}Vc$ вершин, который в пределе нулевых внешних импульсов приводится в формуле (3.24). Но как было показано в работе [83], при суммировании приведенных здесь вкладов с вкладами других диаграмм, вычисленных соавторами работы [83], итоговое выражение для двухпетлевого вклада в $V\bar{c}c$ вершины в пределе нулевого внешнего импульса оказывается равным 0, что подтверждает теорему о неперенормировке тройных

духово-калибровочных вершин явным двухпетлевым вычислением.

Глава 4

Условие редукции констант связи в $P = \frac{1}{3}Q$ суперсимметричных теориях

4.1 Мотивация и постановка задачи

Кроме хорошего ультрафиолетового поведения (конечности за рамками одной петли [19, 31]), $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные калибровочные теории также известны тем, что юкавские константы связи в них пропорциональны калибровочной константе связи. Как было показано в работе [111], при формулировке $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теорий в терминах $\mathcal{N} = 1$ суперполей существуют такая регуляризация и схема перенормировки, что отношение констант юкавского взаимодействия к калибровочной константе связи λ^{ijk}/e остается ренормгрупповым инвариантом во всех порядках теории возмущений. Это означает, что юкавские константы остаются пропорциональными калибровочной на квантовом уровне, то есть происходит редукция констант связи [112, 113, 114]. Эта тема является весьма интересной и важной с феноменологической точки зрения [78].

В связи с этим актуальной является задача построения других $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий, в которых выражение λ^{ijk}/e является ренормгрупповым инвариантом. Возможное решение данной задачи было предложено в работе [76], из которой следует, что подходящим кандидатом являются $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные теории, которые удовлетворяют так называемому условию $P = \frac{1}{3}Q$ [77],

$$\lambda^*_{imn}\lambda^{jmn} - 4\pi\alpha C(R)_i{}^j = \frac{2\pi\alpha}{3}Q\delta^j_i, \tag{4.1}$$

где

$$Q \equiv T(R) - 3C_2; \qquad \alpha \equiv e^2/4\pi, \tag{4.2}$$

а групповые операторы Казимира $T(R)$, $C(R)_i{}^j$, C_2 ранее были определены в формуле (1.18).

Если в рамках $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории наложена связь (4.1), то

в однопетлевом приближении [76] будет выполняться условие ренормгрупповой инвариантности

$$\frac{d}{d\ln\mu}\Big(\frac{\lambda^{ijk}}{e}\Big) = 0, \tag{4.3}$$

где μ — точка перенормировки. В определенной схеме перенормировки условие ренормгрупповой инвариантности (4.3) выполняется и в двухпетлевом приближении. Эта схема основана на регуляризации методом размерной редукции [115], дополненной модифицированным минимальным вычитанием [116], и в связи с этим называется $\overline{\rm DR}$ схемой.

Однако ренормгрупповая инвариантность отношения λ^{ijk}/e не выполняется в трехпетлевом приближении, и с помощью конечных перенормировок ее также невозможно восстановить [76]. По-видимому, это означает, что на теорию следует наложить еще какие-то ограничения, или это уравнение справедливо в некотором приближении [84]. В данной работе мы представим уравнение (4.3) в виде связи между ренормгрупповыми функциями квантовых суперполей γ_c, γ_V и $\big(\gamma_\phi\big)_i{}^j$, что позволит исследовать дополнительные условия справедливости ренормгрупповой инвариантности отношения λ^{ijk}/e в высших порядках теории возмущений.

4.2 Условие редукции констант связи и аномальные размерности квантовых суперполей

Поскольку суперпотенциал в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях не содержит расходимостей [10], то существует такой рецепт перенормировки, для которого

$$\lambda^{ijk} = \lambda_0^{mnp}\big(\sqrt{Z_\phi}\big)_m{}^i\big(\sqrt{Z_\phi}\big)_n{}^j\big(\sqrt{Z_\phi}\big)_p{}^k, \tag{4.4}$$

где λ_0^{ijk} и λ^{ijk} – голые и перенормированные юкавские константы связи соответственно, а определение констант перенормировки суперполей материи $(Z_\phi)_i{}^j$ приведено в формуле (1.13).

Отметим, что определенные константы перенормировки также связаны между собой в силу теоремы о конечности тройных духово-калибровочных вершин,

выведенной в [29]. Ранее эта теорема была подробно рассмотрена в Главе 3, а ее математическая формулировка приведена в соотношении (3.5). Из него следует, что соответствующие константы перенормировки можно выбрать так, что

$$Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V = 1, \tag{4.5}$$

где Z_α, Z_c и Z_V определены в формуле (1.13).

Подставляя соотношения (4.4) и (4.5) в уравнение (4.3), мы получаем условие [84]

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\lambda_0^{mnp}}{e_0} \frac{d}{d\ln\mu} \Big(\frac{1}{\sqrt{Z_\alpha}} \big(\sqrt{Z_\phi}\big)_m{}^i \big(\sqrt{Z_\phi}\big)_n{}^j \big(\sqrt{Z_\phi}\big)_p{}^k \Big) = \\ &= \frac{\lambda_0^{mnp}}{e_0} \frac{d}{d\ln\mu} \Big(Z_c^{-1} Z_V^{-1} \big(\sqrt{Z_\phi}\big)_m{}^i \big(\sqrt{Z_\phi}\big)_n{}^j \big(\sqrt{Z_\phi}\big)_p{}^k \Big), \end{aligned} \tag{4.6}$$

которое, очевидно, выполняется, если

$$\frac{d}{d\ln\mu} \Big((Z_c)^{-2/3} (Z_V)^{-2/3} \big(Z_\phi\big)_i{}^j \Big) = 0. \tag{4.7}$$

Отсюда следует, что аномальные размерности квантовых суперполей удовлетворяют уравнению [84]

$$2\big(\gamma_c + \gamma_V\big)\, \delta_i^j = 3\big(\gamma_\phi\big)_i{}^j. \tag{4.8}$$

Предполагается, что данное соотношение является точным, поскольку оно следует из теорем о непернормировке (4.4) и (4.5), и следовательно должно выполняться во всех порядках теории возмущений. Однопетлевые выражения для аномальных размерностей γ_c, γ_V и $\big(\gamma_\phi\big)_i{}^j$ можно найти, например, в [30]

$$\begin{aligned} &\gamma_c^{(1)} = -\frac{\alpha C_2 (1-\xi)}{6\pi}; \qquad \gamma_V^{(1)} = \frac{\alpha C_2 (1-\xi)}{6\pi} + \frac{Q\alpha}{4\pi}; \\ &\big(\gamma_\phi^{(1)}\big)_i{}^j = -\frac{\alpha}{\pi} C(R)_i{}^j + \frac{1}{4\pi^2} \lambda^*_{imn} \lambda^{jmn} = \frac{Q\alpha}{6\pi} \delta_i^j, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где в последнем равенстве учтено условие $P = \frac{1}{3} Q$ (4.1). Отсюда мы видим, что соотношение (4.8) действительно выполняется в однопетлевом приближении [84].

4.3 Точные соотношения для $P = \frac{1}{3}Q$ теорий

В работе [76] было показано, что условие (4.3) приводит к точному соотношению для аномальной размерности суперполей материи. Далее мы продемонстрируем вывод этого соотношения из уравнения (4.8). Из теоремы о конечности тройных духово-калибровочных вершин (4.5) следует [29]

$$\beta = 2\alpha(\gamma_c + \gamma_V). \tag{4.10}$$

Из условия (4.8), накладывающего связь на аномальные размерности, и следствия из теоремы о конечности $V\bar{c}c$ вершин (4.10) мы получаем соотношение

$$\big(\gamma_\phi\big)_i{}^j = \frac{\beta}{3\alpha}\,\delta_i^j, \tag{4.11}$$

которое впервые было выведено в [76] непосредственно из условия ренормгрупповой инвариантности (4.3).

Из NSVZ соотношения (1.21) и уравнения (4.11) можно получить точные выражения [76] для β-функции и для аномальной размерности $(\gamma_\phi)_i{}^j$ для суперсимметричных теорий, удовлетворяющих условию $P = \frac{1}{3}Q$ (4.1),

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2 Q}{2\pi(1 + \alpha Q/6\pi)}; \qquad (\gamma_\phi)_i{}^j(\alpha) = \frac{\alpha Q}{6\pi(1 + \alpha Q/6\pi)}\delta_i^j \equiv \gamma_\phi \delta_i^j. \tag{4.12}$$

Отметим, что ренормгрупповые функции теперь зависят только от калибровочной константы связи и не зависят от юкавских констант связи. Структура выражений в формуле (4.12) похожа на точную NSVZ β-функцию (1.21). Однако в доказательстве NSVZ соотношения, осуществленном с помощью пертурбативных методов в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричых калибровочных теориях [25, 28], естественным образом возникает другая форма NSVZ соотношения (1.20), которая не содержит знаменателя, зависящего от калибровочной константы связи.

В связи с этим возможный вывод точного соотношения для аномальной размерности суперполей материи в формуле (4.12) вероятно можно осуществить похожим образом. Поэтому разумно переписать второе уравнение в (4.12) без неудобного знаменателя. Для этого представим его в виде [84]

$$\gamma_\phi(\alpha) = \frac{\alpha Q}{6\pi}\Big(1 - \gamma_\phi(\alpha)\Big), \tag{4.13}$$

связывающем аномальную размерность суперполей материи в некоторой петле с ее значением в предыдущей. С помощью уравнения (4.8) это уравнение можно эквивалентно переписать [84] как соотношение

$$\gamma_\phi(\alpha) = \frac{\alpha Q}{6\pi}\Big(1 - \frac{2}{3}(\gamma_c + \gamma_V)\Big) \tag{4.14}$$

между аномальной размерностью γ_ϕ в петле $L+1$ и аномальными размерностями духов Фаддеева–Попова γ_c и квантового калибровочного суперполя γ_V в петле L.

Кроме того, можно написать и более общее выражение [84]

$$\gamma_\phi(\alpha) = \frac{\alpha Q}{6\pi}\Big(1 - \frac{2}{3}x\,(\gamma_c(\alpha) + \gamma_V(\alpha)) - (1-x)\gamma_\phi(\alpha)\Big), \tag{4.15}$$

где x – произвольное действительное число. Для $x = 0$ и $x = 1$ это выражение соответствует соотношениям (4.13) и (4.14) соответственно.

Новая форма NSVZ β-функции (1.20) с помощью теоремы о непернормировке (4.5), условия (4.8) и формулы (4.11) приводит к новому соотношению между аномальными размерностями квантовых суперполей

$$\gamma_\phi(\alpha) = \frac{\alpha}{6\pi}\Big(Q + 2C_2(\gamma_c(\alpha) + \gamma_V(\alpha)) - T(R)\gamma_\phi(\alpha)\Big). \tag{4.16}$$

Заметим, что из этого уравнения после подстановки условия (4.8) можно получить найденные ранее соотношения (4.13), (4.14) и (4.15). Но вопрос о том, какое уравнение для $\gamma_\phi(\alpha)$ естественным образом возникает при (много)петлевых вычислениях, остается открытым, как и справедливость искомого соотношения в высших порядках теории возмущений.

4.4 Справедливость условия редукции констант связи в высших порядках

В параграфе 4.2 было проверено, что условие (4.8) выполняется на однопетлевом уровне. Справедливость этого условия в более высоких порядках теории возмущений мы обсудим в этом параграфе.

Двухпетлевые аномальные размерности γ_c и $(\gamma_\phi)_i{}^j$ для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных калибровочных теорий, регуляризованных высшими ковариантными производными, были вычислены в работах [79] и [117] соответственно. Однако двухпетлевое выражение для аномальной размерности квантового калибровочного суперполя γ_V явными вычислениями не находилось для данных теорий. Все же его можно построить, используя результаты работ [82, 83] (существенный вклад в которые внес автор диссертации, а соответствующие результаты приведены в Главе 3), где показано, что $V\bar{c}c$ вершины для рассматриваемых теорий конечны в двухпетлевом приближении.

Из вышесказанного следует, что в двух петлях формула (4.10) справедлива для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых констант связи. Следовательно из формулы (4.10) можно найти двухпетлевое выражение для γ_V, определенной в терминах голых констант связи. Соответствующее значение γ_V, определенной в терминах перенормированных констант связи, может быть найдено с помощью алгоритма, описанного, например, в [118]. Ренормгрупповые функции, определяемые в терминах перенормированных констант связи, зависят от конечных констант, которые задают перенормировочное предписание. В низшем приближении конечные константы определяются формулами [84]

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0 = \alpha - \frac{\alpha^2}{2\pi}\left[3C_2\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu}+b_{11}\Big) - T(R)\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu}+b_{12}\Big)\right] + \ldots;\\
&\alpha_0\xi_0 = \alpha\xi + \frac{\alpha^2 C_2}{3\pi}\Big(\xi(\xi-1)\ln\frac{\Lambda}{\mu}+x_1\Big) + \ldots;\\
&y_0 = y + \frac{\alpha}{90\pi}\Big((2+3\xi)\ln\frac{\Lambda}{\mu}+k_1\Big) + \ldots;\\
&\big(Z_\phi\big)_i{}^j = \delta_i^j + \frac{\alpha}{\pi}C(R)_i{}^j\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu}+g_{11}\Big) - \frac{1}{4\pi^2}\lambda^*_{imn}\lambda^{jmn}\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu}+g_{12}\Big) + \ldots;\\
&\ln Z_c = -\frac{\alpha C_2(\xi-1)}{6\pi}\ln\frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\alpha C_2}{\pi}h_1 + \ldots;\\
&\ln Z_V = \frac{\alpha}{\pi}\Big\{C_2\Big(\frac{3}{4}\ln\frac{\Lambda}{\mu} + \frac{1}{6}(\xi-1)\ln\frac{\Lambda}{\mu} + \frac{3}{4}v_1\Big) -\\
&-\frac{1}{4}T(R)\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu}+v_2\Big)\Big\} + \ldots,
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

где y – (первый) параметр нелинейной перенормировки квантового калибровоч-

ного суперполя (1.35), а многоточия обозначают члены более высокого порядка теории возмущений. Выражения для $\ln Z_c$ и $\ln Z_V$ приведены для калибровки $y = 0$. Тогда (при $y = 0$) двухпетлевые вклады в аномальные размерности квантовых суперполей для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий с условием $P = \frac{1}{3}Q$ могут быть записаны как [84]

$$\gamma_c^{(2)} = \frac{\alpha^2}{\pi^2}\Big\{\frac{C_2 Q}{12} - \frac{1}{24}(C_2)^2\big(\xi^2-1\big) + \frac{1}{72}(C_2)^2\Big(4x_1 - (\xi-1)k_1\Big) - \\ -\frac{1}{4}(C_2)^2\Big(\ln a_\varphi - b_{11}\Big) + \frac{1}{12}C_2 T(R)\Big(\ln a - b_{12}\Big) + \frac{C_2 Q}{2}h_1\Big\}; \tag{4.18}$$

$$\gamma_V^{(2)} = \frac{\alpha^2}{\pi^2}\Big\{ -\frac{Q^2}{24} - \frac{C_2 Q}{12} + \frac{1}{24}(C_2)^2\big(\xi^2-1\big) - \frac{1}{72}(C_2)^2\Big(4x_1 - (\xi-1)k_1\Big) + \\ +\frac{1}{4}(C_2)^2\Big(\ln a_\varphi - b_{11}\Big) - \frac{1}{12}C_2 T(R)\Big(\ln a - b_{12}\Big) + \frac{1}{8}Q\Big(-3C_2(b_{11}-v_1) + \\ +T(R)(b_{12}-v_2)\Big)\Big\}; \tag{4.19}$$

$$\big(\gamma_\phi^{(2)}\big)_i^{\ j} = -\frac{\alpha^2 Q^2}{36\pi^2}\delta_i^j + \left(\frac{\alpha^2 Q}{12\pi^2}C(R)_i^{\ j} + \frac{\alpha^2}{2\pi^2}\big[C(R)^2\big]_i^{\ j} + \frac{\alpha}{4\pi^3}\lambda^*_{imn}\lambda^{jml}C(R)_l^{\ n}\right)\times \\ \times\Big(B - A - 2g_{11} + 2g_{12}\Big) - \frac{3\alpha^2}{2\pi^2}C_2 C(R)_i^{\ j}\Big(\ln a_\varphi + \frac{1}{2}(1+A) - b_{11} + g_{11}\Big) + \\ +\frac{\alpha^2}{2\pi^2}T(R)C(R)_i^{\ j}\times\Big(\ln a + \frac{1}{2}(1+A) - b_{12} + g_{11}\Big), \tag{4.20}$$

где

$$A \equiv \int\limits_0^\infty dx\ \ln x\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{R(x)}\Big); \qquad B \equiv \int\limits_0^\infty dx\ \ln x\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{F^2(x)}\Big); \qquad a \equiv \frac{M}{\Lambda}; \\ a_\varphi \equiv \frac{M_\varphi}{\Lambda} \tag{4.21}$$

являются параметрами регуляризации. Здесь $R(x)$ и $F(x)$ – функции регуляторы в калибровочной части действия и в слагаемом с полями материи соответственно, а M и M_φ – массы суперполей Паули–Вилларса. Отметим, что перенормировка параметра y очень важна (даже при выборе калибровки $y = 0$) для вычисления аномальных размерностей γ_c (см. [79]) и γ_V.

Подставляя выражения (4.18), (4.19) и (4.20) в условие (4.8) мы видим, что

в двухпетлевом приближении оно выполняется, если конечные константы удовлетворяют соотношениям [84]

$$\ln a_\varphi + \frac{1}{2}(1+A) - b_{11} + g_{11} = 0; \qquad \ln a + \frac{1}{2}(1+A) - b_{12} + g_{11} = 0;$$
$$B - A - 2g_{11} + 2g_{12} = 0; \qquad h_1 - \frac{3}{4}\big(b_{11} - v_1\big) = 0; \qquad b_{12} - v_2 = 0. \tag{4.22}$$

Поэтому существуют схемы вычитания, в которых условие (4.8) и формула (4.10), а следовательно, и соотношение (4.11) выполняются в двухпетлевом приближении. Если функция регулятор в члене с фиксацией калибровки такая же, как и в калибровочной части действия, $K(x) = R(x)$, то в калибровке Фейнмана $\xi = 1$, $y = 0$ значения конечных констант, соответствующие схеме $\overline{\mathrm{DR}}$, задаются выражениями [84, 117]

$$g_{11} = -\frac{1}{2} - \frac{A}{2}; \qquad g_{12} = -\frac{1}{2} - \frac{B}{2}; \qquad b_{11} = v_1 = \ln a_\varphi; \qquad b_{12} = v_2 = \ln a;$$
$$h_1 = 0. \tag{4.23}$$

Подставляя выражения (4.23) в соотношения (4.22), мы видим, что условие (4.8) выполняется в схеме $\overline{\mathrm{DR}}$ в двухпетлевом приближении (в калибровке $\xi = 1$, $y = 0$).



Рис. 4.1: Трехпетлевая непланарная супердиаграмма, вносящая вклад в аномальную размерность суперполей материи, задаваемая выражением (4.24).

При рассмотрении условия (4.8) в трехпетлевом приближении возникают некоторые существенные проблемы с его выполнением. Рассмотрим, например, супергграф, представленный на Рис. 4.1. Соответствующий вклад в трехпетлевую аномальную размерность $(\gamma_\phi)_i{}^j$ от данной супердиаграммы имеет вид [119]

$$(\Delta\gamma_\phi)_i{}^j = \frac{3\zeta(3)}{64\pi^6}\,\lambda^*_{ikl}\lambda^{kpq}\lambda^{lrs}\lambda^*_{mpr}\lambda^*_{nqs}\lambda^{jmn}. \tag{4.24}$$

Этот вклад не зависит от регуляризации и параметров схемы, если рецепт пе-

ренормировки удовлетворяет уравнению (4.4). Впервые это выражения было получено в схеме $\overline{\mathrm{DR}}$, но это вычисление возможно и в случае использования регуляризации высшими ковариантными производными, с помощь техники, описанной, например, в [118]. Подробно это вычисление приводится в приложении статьи [84], где демонстрируется, что результат не зависит от параметров регуляризации.

Упростить выражение (4.24) с помощью условия $P = \frac{1}{3}Q$ (4.1) нельзя, поэтому условие, накладываемое на аномальные размерности квантовых суперполей (4.8), не выполняется для всех групповых структур, если перенормировочное предписание удовлетворяет уравнению (4.4). В частности, условие (4.8) не выполняется в $\overline{\mathrm{DR}}$ схеме в трехпетлевом приближении. Тем не менее, в принципе, можно поглотить структуру (4.24) в конечное переопределение λ^{ijk}, но в полученной схеме перенормированные юкавские константы связи не удовлетворяют формуле (4.4) [84]. Однако, с помощью подобных конечных перенормировок нельзя избавиться от вкладов других супердиаграмм, пропорциональных $\zeta(3)$, а аномальную размерность $(\gamma_\phi)_i{}^j$ нельзя сделать пропорциональной δ_i^j [76]. Поэтому для достижения ренормгрупповой инвариантности отношения λ^{ijk}/e следует либо наложить какие-то дополнительные ограничения на юкавские константы связи (конечно, если это возможно), либо предположить, что условие (4.8) справедливо только для определенного класса супердиаграмм, например, для планарных суперграфов [84].

Заключение

Кратко суммируем результаты, полученные в диссертации.

Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными, была исследована двухпетлевая перенормировка духов Фаддеева–Попова. При этом был вычислен ряд суперграфов с двумя внешними линиями духовых суперполей. Учитывая различные возможные расстановки духов на внутренних линиях для каждой супердиаграммы, было показано, что рассматриваемые суперграфы дают нулевой вклад в аномальную размерность духов Фаддеева–Попова γ_c. С учетом других аналогичных вкладов, вычисленных соавторами совместной работы, данный результат позволил найти полный двухпетлевой вклад в аномальную размерность γ_c.

Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий, регуляризованных высшими ковариантными проивзодными, был вычислен определенный трехпетлевой вклад от духов Фаддеева–Попова в β-функцию с использованием нового алгоритма, основанного на вычислении вакуумных суперграфов. Для того чтобы найти вклад в β-функцию от супердиаграмм, получающихся добавлением двух линий фонового калибровочного суперполя всеми возможными способами к рассматриваемой трехпетлевой вакуумной супердиаграмме, с помощью нового алгоритма необходимо подействовать определенным дифференциальным оператором из двойных полных производных на модифицированное выражение для вакуумного суперграфа. Графически действие дифференциального оператора выражается в разрезании определенных пропагаторов. Это позволило сопоставить результаты вычислений рассматриваемых трехпетлевых вкладов от духов Фаддеева–Попова в β-функцию с соответствующими двухпетлевыми вкладами в аномальную размерность духовых полей γ_c. Для ренормгрупповых функций, определенных в терминах голых констант связи, было показано, что для данных вкладов выполняется NSVZ соотношение нового вида. Это подтвердило справедливость нового алгоритма для вычисления β-функции в суперсимметричных теориях. Полученный результат при суммировании с другими аналогичными вкладами также позволил найти полный вклад в трехпетлевую β-функцию от супердиаграмм с петлей духов и убедиться, что NSVZ соотношение нового вида выполняется и для суммарного результата.

Для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с полями материи, регуляризованной высшими ковариантными производными, был также вычислен определенный трехпетлевой вклад от суперполей материи в β-функцию, который в соответствии с новым алгоритмом получается из трехпетлевого непланарного вакуумного суперграфа с петлей материи. Данный вклад соотнесен с соответствующим двухпетлевым вкладом в аномальную размерность полей материи $\left(\gamma_\phi\right)_i{}^j$. Было показано, что результаты вычислений для рассматриваемых вкладов удовлетворяют NSVZ соотношению нового вида, связывающему в данном случае β-функцию в трех петлях и аномальную размерность $\left(\gamma_\phi\right)_i{}^j$ в двух. Это подтвердило справедливость нового алгоритма для вычисления вкладов в β-функцию.

В $\mathcal{N}=1$ СКЭД, регуляризованной высшими производными, с использованием нового алгоритма был вычислен трехпетлевой вклад в β-функцию, определенную в терминах голых констант связи, от суперграфа графически идентичного диаграмме из предыдущего пункта и соответствующий двухпетлевой вклад в аномальную размерность. Было проверено, что данные вклады связаны с помощью NSVZ соотношения для $\mathcal{N}=1$ СКЭД, что подтвердило правильность нового алгоритма для вычисления β-функции. Суммирование полученных результатов с аналогичными вкладами от других диаграмм, вычисленных соавторами совместной статьи, позволило вычислить полную трехпетлевую β-функцию и убедиться, что NSVZ соотношение выполняется и для нее.

В $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной калибровочной теории с суперполями материи, регуляризованной высшими ковариантными производными, были исследованы определенные двухпетлевые суперграфы, содержащие петлю материи и дающие вклад в тройную духово-калибровочную вершину. Была вычислена общая для данных суперграфов однопетлевая поддиаграмма, которая получается одним из возможных способов добавления внешней киральной калибровочной линии в поляризационный оператор с петлей материи. Суммарный результат вычисленного вклада от рассматриваемой поддиаграммы с остальными вариантами добавления внешней линии в поляризационный оператор, вычисленными соавторами совместной публикации, в пределе нулевого внешнего импульса оказался равным 0. Поэтому итоговый вклад от двухпетлевых супердиаграмм с петлей материи, дающих вклад в $V\bar{c}c$ вершины и содержащих в качестве поддиаграмм суперграфы описанного выше типа, также оказался равным нулю. Это позво-

лило явными вычислениями подтвердить конечность двухпетлевых вкладов с петлей материи в тройные духово-калибровочные вершины.

Для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными, был вычислен ряд суперграфов с петлями духов и калибровочных суперполей, дающих вклад в двухпетлевую перенормировку тройных духово-калибровочных вершин. Было показано, что вклад от некоторых суперграфов в пределе нулевого внешнего импульса оказывается равным нулю. Полученные ненулевые вклады при суммировании с другими аналогичными вкладами, вычисленными соавторами совместной статьи, по итогу сократились, и суммарный результат в рассматриваемом пределе оказался равным нулю. Это подтвердило конечность $V\bar{c}c$ вершин в двухпетлевом приближении.

Было показано, что ренормгрупповая инвариантность отношения λ^{ijk}/e в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях, удовлетворяющих условию $P = \frac{1}{3}Q$, приводит к соотношению, связывающему аномальные размерности квантовых суперполей γ_c, γ_V и $(\gamma_\phi)_i{}^j$ в каждом порядке теории возмущений. В предположении, что при определенных условиях это соотношение справедливо, точная формула для аномальной размерности $(\gamma_\phi)_i{}^j$ была записана в новой форме, которая не содержит знаменателя, зависящего от калибровочной константы связи, и напоминает новое NSVZ соотношение. Данная форма может возникнуть при доказательстве точного выражения для $(\gamma_\phi)_i{}^j$ в рассматриваемых теориях пертурбативными методами. В однопетлевом приближении соотношение между γ_c, γ_V и $(\gamma_\phi)_i{}^j$ было проверено явным вычислением. Для проверки этого соотношения в двухпетлевом приближении сперва из конечности тройных $V\bar{c}c$ вершин была найдена двухпетлевая аномальная размерность γ_V. Далее было показано, что соотношение между аномальными размерностями действительно справедливо в двух петлях для определенного класса перенормировочных предписаний, включающего $\overline{\text{DR}}$ схему. Однако, как оказалось, в трехпетлевом приближении это соотношение в общем случае не выполняется, поскольку не существует перенормировочных предписаний, в которых аномальная размерность $(\gamma_\phi)_i{}^j$ пропорциональна δ_i^j. В связи с этим было высказано предположение, что необходимо либо наложить дополнительные ограничения на юкавские константы связи, либо предположить, что полученное соотношение между аномальными размерностями справедливо для планарных суперграфов при определенном

перенормировочном предписании.

Литература

[1] West P. C. Introduction to supersymmetry and supergravity. // Singapore: World Scientific, 1990. — 440 p.

[2] Weinberg S. The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry. // New York, USA: Cambridge University Press, 2005. — 442 p.

[3] Mohapatra R. N. Unification And Supersymmetry. The Frontiers Of Quark - Lepton Physics : The Frontiers Of Quark-lepton Physics. // New York, USA: Springer, 1986. — 421 p.

[4] Raby S. Supersymmetric Grand Unified Theories: From Quarks to Strings via SUSY GUTs. // Lect. Notes Phys. — 2017.— Vol. 939. — P. 1–308.

[5] Amaldi U., de Boer W., Furstenau H. Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP. // Phys. Lett. B. — 1991. — Vol. 260. — P. 447–455.

[6] Ellis J. R., Kelley S., Nanopoulos D. V. Probing the desert using gauge coupling unification. // Phys. Lett. B. — 1991. — Vol. 260. — P. 131–137.

[7] Workman R. L. and others. Review of Particle Physics. // PTEP. — 2022. — P. 083C01.

[8] Ellis J., Evans J. L., Nagata N., Olive K. A., Velasco-Sevilla L. Supersymmetric proton decay revisited. // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Vol. 80. — P. 332.

[9] Lazarides G., Rehman M. U., Shafi Q. Proton decay in supersymmetric $SU(4)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R$. // JHEP. — 2020. — Vol. 10. — P. 085.

[10] Grisaru M. T., Siegel W., Rocek M. Improved Methods for Supergraphs. // Nucl. Phys. B. — 1979. — Vol. 159. — P. 429.

[11] Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 229. — P. 381.

[12] Jones D. R. T. More on the Axial Anomaly in Supersymmetric Yang-Mills Theory. // Phys. Lett. B. — 1983. — Vol.123. — P. 45–46.

[13] Shifman M. A.,Vainshtein A. I., Zakharov V. I. Exact Gell-mann-low Function In Supersymmetric Electrodynamics. // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 166. — P. 334.

[14] Maldacena J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. // Adv. Theor. Math. Phys. — 1998. — Vol. 2. — P. 231–252.

[15] Sohnius M. F., West P. C. Conformal Invariance in N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory. // Phys. Lett. B. — 1981. — Vol. 100. — P. 245.

[16] Mandelstam S. Light Cone Superspace and the Ultraviolet Finiteness of the N=4 Model. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 213. — P. 149.

[17] Grisaru M. T., Siegel W. Supergraphity. 2. Manifestly Covariant Rules and Higher Loop Finiteness. // Nucl. Phys. B. — 1982. — Vol. 201. — P. 292.

[18] Brink L., Lindgren O., Nilsson B. E. W. N=4 Yang-Mills Theory on the Light Cone. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 212. — P. 401.

[19] Howe P. S., Stelle K. S., Townsend P. K. Miraculous Ultraviolet Cancellations in Supersymmetry Made Manifest. // Nucl. Phys. B. — 1984. — Vol. 236. — P. 125–166.

[20] Moch S., Vermaseren J. A. M., Vogt, A. The Quark form-factor at higher orders. // JHEP. — 2005. — Vol. 08. — P. 049.

[21] Kovtun P., Son D. T., Starinets A. O. Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics. // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94. — P. 111601.

[22] Policastro G., Son D. T., Starinets A. O. The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma. // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87. — P. 081601.

[23] Novikov V. A., Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. The beta function in supersymmetric gauge theories. Instantons versus traditional approach. // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 166. — P. 329–333.

[24] Shifman M. A., Vainshtein A. I. Solution of the Anomaly Puzzle in SUSY Gauge Theories and the Wilson Operator Expansion. // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 277. — P. 456.

[25] Stepanyantz K. The all-loop perturbative derivation of the NSVZ β-function and the NSVZ scheme in the non-Abelian case by summing singular contributions. // Eur. Phys. J. C. — 2020. — Vol. 80. — P. 911.

[26] Степаньянц, К. В. Точная β-функция $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий и регуляризация высшими ковариантными производными: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.02 / Степаньянц Константин Викторович. — М. 2021. — 317 с.

[27] Stepanyantz K. V. The β-function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher covariant derivatives as an integral of double total derivatives. // JHEP. — 2019. — Vol. 10. — P. 011.

[28] Stepanyantz K. V. The NSVZ β-function for theories regularized by higher covariant derivatives: the all-loop sum of matter and ghost singularities. // JHEP. — 2020. — Vol. 01. — P. 192.

[29] Stepanyantz K. V. Non-renormalization of the $V\bar{c}c$-vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories. // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 909. — P. 316–335.

[30] Aleshin S. S., Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop divergences in non-Abelian supersymmetric theories regularized by BRST-invariant version of the higher derivative regularization. // JHEP. — 2016. — Vol. 05. — P. 014.

[31] Buchbinder I. L., Stepanyantz K. V. The higher derivative regularization and quantum corrections in N=2 supersymmetric theories. // Nucl. Phys. B. — 2014. — Vol. 883. — P. 20–44.

[32] Buchbinder I. L., Pletnev, N. G., Stepanyantz, K. V. Manifestly N = 2 supersymmetric regularization for N = 2 supersymmetric field theories. // Phys. Lett. B. — 2015. — Vol. 751. — P. 434–441.

[33] Galperin A., Ivanov E., Kalitsyn S., Ogievetsky V., Sokatchev E. Unconstrained N=2 Matter, Yang-Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace. // Class. Quant. Grav. — 1984. — Vol. 1. — P. 469-498. [erratum: Class. Quant. Grav. — 1985 — Vol. 2. — P. 127.]

[34] Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Sokatchev E. S. Harmonic superspace. // Cambridge University Press, 2007. — 306 p.

[35] Shifman M., Stepanyantz K. Exact Adler Function in Supersymmetric QCD. // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114. — P. 051601.

[36] Shifman M., Stepanyantz K. V. Derivation of the exact expression for the D function in N=1 SQCD. // Phys. Rev. D. — 2015. — Vol. 91. — P. 105008.

[37] Grisaru M. T., Rocek M., Siegel W. Zero Three Loop beta Function in N=4 Superyang-Mills Theory. // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45. — P. 1063–1066.

[38] Avdeev L. V., Tarasov O. V., Vladimirov A. A. Vanishing Of The Three Loop Charge Renormalization Function In A Supersymmetric Gauge Theory. // Phys. Lett. B. — 1980. — Vol. 96. — P. 94.

[39] Soloshenko A. A., Stepanyantz K. V. Three loop beta function for N=1 supersymmetric electrodynamics, regularized by higher derivatives. // Theor. Math. Phys. — 2004. — Vol. 140. — P. 1264–1282.

[40] Smilga A. V., Vainshtein A. Background field calculations and nonrenormalization theorems in 4-D supersymmetric gauge theories and their low-dimensional descendants. // Nucl. Phys. B. — 2005. — Vol. 704. — P. 445–474.

[41] Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ β-function in N=1 SQED, regularized by higher derivatives, by direct summation of Feynman diagrams. // Nucl. Phys. B. — 2011. — Vol. 852. — P. 71–107.

[42] Stepanyantz K. V. The NSVZ β-function and the Schwinger-Dyson equations for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors, regularized by higher derivatives. // JHEP. — 2014. — Vol. 08. — P. 096.

[43] Pimenov A. B., Shevtsova E. S., Stepanyantz K. V. Calculation of two-loop beta-function for general N=1 supersymmetric Yang–Mills theory with the higher covariant derivative regularization. // Phys. Lett. B. — 2010. — Vol. 686. — P. 293–297.

[44] Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. New form of the NSVZ relation at the two-loop level. // Phys. Lett. B. — 2018. — Vol. 776. — P. 417–423.

[45] Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. Three-loop NSVZ relation for terms quartic in the Yukawa couplings with the higher covariant derivative regularization. // Nucl. Phys. B. — 2017. — Vol. 920. — P. 345–367.

[46] Kazantsev A. E., Shakhmanov V. Y., Stepanyantz K. V. New form of the exact NSVZ β-function: the three-loop verification for terms containing Yukawa couplings. // JHEP. — 2018. — Vol. 04. — P. 130.

[47] Шахманов, В. Ю. Структура петлевых интегралов в суперсимметричных калибровочных теориях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Шахманов Викентий Юрьевич. — М. 2018. — 101 с.

[48] Slavnov A. A. Invariant regularization of nonlinear chiral theories. // Nucl. Phys. B. — 1971. — Vol. 31. — P. 301.

[49] Славнов А. А. Инвариантная регуляризация калибровочных теорий. // ТМФ. — 1972. — Т. 13. — С. 174.

[50] Кривощеков В. К. Инвариантная регуляризация для суперсимметричных калибровочных теорий. // ТМФ. — 1978. — Т. 36. — С. 291.

[51] West P. C. Higher Derivative Regulation Of Supersymmetric Theories. // Nucl. Phys. B. — 1986. — Vol. 268. — P. 113.

[52] Stepanyantz K. V. Derivation of the exact NSVZ beta-function in N=1 SQED regularized by higher derivatives by summation of Feynman diagrams. // J. Phys. Conf. Ser. — 2012. — Vol. 343. — P. 012115.

[53] Jack I., Jones D. R. T., North C. G. N=1 supersymmetry and the three loop gauge Beta function. // Phys. Lett. B. — 1996. — Vol. 386. — P. 138–140.

[54] Jack I., Jones D. R. T., North C. G. Scheme dependence and the NSVZ Beta function. // Nucl. Phys. B. — 1997. — Vol. 486. — P. 479–499.

[55] Jack I., Jones D. R. T., Pickering A. The Connection between DRED and NSVZ. // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 435. — P. 61–66.

[56] Kataev A. L., Stepanyantz K. V. NSVZ scheme with the higher derivative regularization for $\mathcal{N} = 1$ SQED. // Nucl. Phys. B. — 2013. — Vol. 875. — P. 459–482.

[57] Kataev A. L., Stepanyantz K. V. Scheme independent consequence of the NSVZ relation for $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors. // Phys. Lett. B. — 2014. — Vol. 730. — P. 184–189.

[58] Goriachuk I. O., Kataev A. L., Stepanyantz K. V. A class of the NSVZ renormalization schemes for $\mathcal{N} = 1$ SQED. // Phys. Lett. B. — 2018. — Vol. 785. — P. 561–566.

[59] Kataev A. L., Kazantsev A. E., Stepanyantz K. V. On-shell renormalization scheme for $\mathcal{N} = 1$ SQED and the NSVZ relation. // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79. — P. 477.

[60] Hisano J., Shifman M. A. Exact results for soft supersymmetry breaking parameters in supersymmetric gauge theories. // Phys. Rev. D. — 1997. — Vol. 56. — P. 5475.

[61] Jack I., Jones D. R. T. The Gaugino Beta function. // Phys. Lett. B. — 1997. — Vol. 415. — P. 383.

[62] Kazakov D. I. Exploring softly broken SUSY theories via Grassmannian Taylor expansion. // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 449. — P. 201–206.

[63] Avdeev L. V., Kazakov D. I., Kondrashuk I. N. Renormalizations in softly broken SUSY gauge theories. // Nucl. Phys. B. — 1998. — Vol. 510. — P. 289–312.

[64] Kazakov D. I. Finiteness of soft terms in finite N=1 SUSY gauge theories. // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 421. — P. 211–216.

[65] Kondrashuk I. Renormalizations in softly broken N=1 theories: Slavnov-Taylor identities. // J. Phys. A. — 2000. — Vol. 33. — P. 6399–6412.

[66] Jack I., Jones D. R. T., Pickering A. The soft scalar mass beta function. // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol. 432. — P. 114–119.

[67] Kazakov D. I., Velizhanin V. N. Massive ghosts in softly broken SUSY gauge theories. // Phys. Lett. B. — 2000. — Vol. 485. — P. 393–402.

[68] Nartsev I. V., Stepanyantz K. V. Exact renormalization of the photino mass in softly broken $\mathcal{N} = 1$ SQED with N_f flavors regularized by higher derivatives. // JHEP. — 2017. — Vol. 04. — P. 047.

[69] Нарцев И. В., Степаньянц К. В. NSVZ-подобная схема для массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ СКЭД, регуляризованной высшими производными. // Письма в ЖЭТФ. — 2017. — Т. 105. — С. 57–61.

[70] Girardello L., Grisaru M. T. Soft Breaking of Supersymmetry. // Nucl. Phys. B. — 1982. — Vol. 194. — P. 65.

[71] Evans N. J., Hsu S. D. H.,Schwetz M. Exact results in softly broken supersymmetric models. // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 355. — P. 475–480.

[72] Evans N. J., Hsu S. D. H.,Schwetz M., Selipsky S. B. Exact results and soft breaking masses in supersymmetric gauge theory. // Nucl. Phys. B. — 1995. — Vol. 456. — P. 205–218.

[73] Yamada Y. Two loop renormalization group equations for soft SUSY breaking scalar interactions: Supergraph method. // Phys. Rev. D. — 1994. — Vol. 50. — P. 3537–3545.

[74] Dimopoulos S., Georgi H. Softly Broken Supersymmetry and SU(5). // Nucl. Phys. B. — 1981. — Vol. 193. — P. 150–162.

[75] Chung D. J. H., Everett L. L., Kane G. L., King S. F., Lykken J. D., Wang L. T. The Soft supersymmetry breaking Lagrangian: Theory and applications.// Phys. Rept. — 2005. — Vol. 407. — P. 1–203.

[76] Jack I., Jones D. R. T., North C. G. N=1 supersymmetry and the three loop anomalous dimension for the chiral superfield. // Nucl. Phys. B. — 1996. — Vol. 473. — P. 308–322.

[77] Jack I., Jones D. R. T. Renormalization group invariance and universal soft supersymmetry breaking. // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 349. — P. 294–299.

[78] Heinemeyer S., Mondragón M., Tracas N., Zoupanos G. Reduction of Couplings and its application in Particle Physics. // Phys. Rept. — 2019. — Vol. 814. — P. 1–43.

[79] Kazantsev A. E., Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. Two-loop renormalization of the Faddeev-Popov ghosts in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives. // JHEP. — 2018. — Vol. 1806. — P. 020.

[80] Kuzmichev M. D., Meshcheriakov N. P., Novgorodtsev S. V., Shirokov I. E., Stepanyantz K. V. Three-loop contribution of the Faddeev–Popov ghosts to the β -function of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories and the NSVZ relation. // Eur. Phys. J. C. — 2019. — Vol. 79. — P. 809.

[81] Aleshin S. S. and others. Three-loop verification of a new algorithm for the calculation of a β-function in supersymmetric theories regularized by higher derivatives for the case of $\mathcal{N} = 1$ SQED. // Nucl. Phys. B. — 2020. — Vol. 956. — P. 115020.

[82] Kuzmichev M., Meshcheriakov N., Novgorodtsev S., Shirokov I., Stepanyantz K. Finiteness of the two-loop matter contribution to the triple gauge-ghost vertices in N=1 supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives. // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 104. — P. 025008.

[83] Kuzmichev M., Meshcheriakov N., Novgorodtsev S., Shatalova V., Shirokov I., Stepanyantz K. Finiteness of the triple gauge-ghost vertices in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories: the two-loop verification. // Eur. Phys. J. C. — 2022. — Vol. 82. — P. 69.

[84] Kuzmichev M., Stepanyantz K. A condition for the reduction of couplings in the $P = \frac{1}{3}Q$ supersymmetric theories. // Phys. Lett. B. — 2023. — Vol. 844. — P. 138094.

[85] Горячук И. О., Катаев А. Л. Точная β-функция в абелевых и неабелевых $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных моделях и ее аналогия с β-функцией КХД в C-схеме. // Письма в ЖЭТФ. — 2020. — Т. 111. — С. 789–793.

[86] Славнов А. А. Перенормировка суперсимметричных калибровочных теорий. 1. Квантовая электродинамика. // ТМФ. — 1976. — Т. 23. — С. 3–10.

[87] Slavnov A. A. Renormalization of Supersymmetric Gauge Theories. 2. Nonabelian Case. // Nucl. Phys. B. — 1975. — Vol. 97. — P. 155–164.

[88] Ferrara S., Piguet O. Perturbation Theory and Renormalization of Supersymmetric Yang-Mills Theories. // Nucl. Phys. B. — 1975. — Vol. 93. — P. 261–302.

[89] Piguet O., Rouet A. Supersymmetric BPHZ Renormalization. 2. Supersymmetric Extension of Pure Yang-Mills Model. // Nucl. Phys. B. — 1976. — Vol. 108. — P. 265–274.

[90] Piguet O., Sibold K. Renormalization of $N = 1$ Supersymmetrical Yang-Mills Theories. 2. The Radiative Corrections. // Nucl. Phys. B. — 1982. — Vol. 197. — P. 272.

[91] Казанцев, А. Е. Многопетлевые вычисления и точные результаты в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Казанцев Александр Евгеньевич. — М. 2018. — 113 с.

[92] Sohnius M. F. Introducing Supersymmetry. // Phys. Rept. — 1985. — Vol. 128. — P. 39–204.

[93] Bertlmann R. A. Anomalies in quantum field theory. // Oxford, UK: Oxford University Press, 1996. — 566 p.

[94] Ohshima Y., Okuyama K., Suzuki H., Yasuta H. Remark on the consistent gauge anomaly in supersymmetric theories. // Phys. Lett. B. — 1999. — Vol. 457. — P. 291–298.

[95] DeWitt B. S. Dynamical theory of groups and fields. // Conf. Proc. C. — 1964. — Vol. 630701. — P. 585–820.

[96] Abbott L. F. The Background Field Method Beyond One Loop. // Nucl. Phys. B. — 1981. — Vol. 185. — P. 189–203.

[97] Gates S. J., Grisaru M. T., Rocek M., Siegel W. Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. // Front. Phys. — 1983. — Vol. 58. — P. 1–548.

[98] Piguet O., Sibold K. Renormalization of $N = 1$ Supersymmetrical Yang-Mills Theories. 1. The Classical Theory. // Nucl. Phys. B. — 1982. — Vol. 197. — P. 257.

[99] Тютин И. В. Перенормировка суперкалибровочных теорий с нерасширенной суперсимметрией. // Ядерная Физика. — 1983. — Т. 37. — С. 761.

[100] Juer J. W., Storey D. Nonlinear Renormalization in Superfield Gauge Theories. // Phys. Lett. — 1982. — Vol. 119B. — P. 125.

[101] Juer J. W., Storey D. One Loop Renormalization of Superfield Yang-Mills Theories. // Nucl. Phys. B. — 1983. — Vol. 216. — P. 185.

[102] Nielsen N. K. Ghost Counting in Supergravity. // Nucl. Phys. B. — 1978. — Vol. 140. — P. 499–509.

[103] Kallosh R. E. Modified Feynman Rules in Supergravity. // Nucl. Phys. B. — 1978. — Vol. 141. — P. 141–152.

[104] Алешин, С. С. Квантовые поправки в суперсимметричных теориях при использовании различных регуляризаций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Алешин Сергей Сергеевич. — М. 2017. — 116 с.

[105] Faddeev L. D., Slavnov A. A. Gauge Fields. Introduction To Quantum Theory. // Front. Phys. — 1980. — Vol. 50. — P. 1–232.

[106] Славнов А. А. Регуляризация Паули–Вилларса для неабелевых калибровочных групп. // ТМФ. — 1977. — Т. 33. — С. 210–217.

[107] Kazantsev A. E., Skoptsov M. B., Stepanyantz K. V. One-loop polarization operator of the quantum gauge superfield for $\mathcal{N} = 1$ SYM regularized by higher derivatives. // Mod. Phys. Lett. A. — 2017. — Vol. 32. — P. 1750194.

[108] Мещеряков Н. П. Теоремы о неперенормировке в N=1 суперсимметричных теориях Янга–Миллса: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 1.3.3. / Мещеряков Николай Павлович. — М. 2022. — 135 с.

[109] Широков И. Е. Автоматизация вычислений квантовых поправок в суперсимметричных теориях: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 1.3.3. / Широков Илья Евгеньевич. — М. 2022. — 111 с.

[110] Шаталова В. В. Особенности перенормировки теорий, регуляризованных высшими производными: научно-квалификационная работа / кафедра теоретической физики, Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова.– 2021.

[111] Aleshin S., Stepanyantz K. Quantum properties of gauge theories with extended supersymmetry formulated in N=1 superspace. // Phys. Rev. D. — 2023. — Vol. 107. — P. 105006.

[112] Zimmermann W. Reduction in the Number of Coupling Parameters. // Commun. Math. Phys. — 1985. — Vol. 97. — P. 211.

[113] Oehme R., Zimmermann W. Relation Between Effective Couplings for Asymptotically Free Models. // Commun. Math. Phys. — 1985. — Vol. 97. — P. 569.

[114] Kubo J., Sibold K., Zimmermann W. Higgs and Top Mass from Reduction of Couplings. // Nucl. Phys. B. — 1985. — Vol. 259. — P. 331–350.

[115] Siegel W. Supersymmetric Dimensional Regularization via Dimensional Reduction. // Phys. Lett. B. — 1979. — Vol. 84. — P. 193–196.

[116] Bardeen W. A., Buras A. J., Duke D. W., Muta T. Deep Inelastic Scattering Beyond the Leading Order in Asymptotically Free Gauge Theories. // Phys. Rev. D. — 1978. — Vol. 18. — P. 3998.

[117] Kazantsev A., Stepanyantz K. Two-loop renormalization of the matter superfields and finiteness of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories regularized by higher derivatives. // JHEP. — 2020. — Vol. 06. — P. 108.

[118] Shirokov I., Stepanyantz K. The three-loop anomalous dimension and the four-loop β-function for $\mathcal{N} = 1$ SQED regularized by higher derivatives. // JHEP. — 2022. — Vol. 04. — P. 108.

[119] Parkes A. J. Three Loop Finiteness Conditions in $N = 1$ Superyang-mills. // Phys. Lett. B. — 1985. — Vol. 156. — P. 73–79.