ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Горшкова Алексея Вячеславовича "Граничное условие прилипания для вихревой функции в уравнениях гидродинамики"
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика

Интегральные преобразования, основанные на цилиндрических функциях, играют большую роль в решении многих классов задач математической физики. В круговых областях эти преобразования нашли применение при изучении процессов нагрева, диффузионных процессов, в механике сплошной среды. Тема исследования преобразований Вебера остается актуальной и по сей день. Здесь можно отметить недавнюю работу С.Якубовича, посвященную задаче Вебера-Титчмарша, работы Бушле, Куртца, Шлеммера, Зайнера, в которой исследуется интеграл Неймана-Вебера.

Значительное число результатов в диссертации основано на использовании теории операторов преобразования. В настоящее время теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегро-дифференцирования, теории обратных задач и задач рассеяния, теории оптимального управления и динамических систем. Необходимость теории операторов преобразования доказана большими числом ее приложений. Особую роль методы операторов преобразования играют в теории дифференциальных уравнений различных типов. С их помощью были доказаны многие фундаментальные результаты для различных классов дифференциальных уравнений. Операторы преобразования определяют обобщенные преобразования Фурье, исследованию которых посвящены работы Гельфанда, Левитана, Марченко и других.

Немаловажную роль играют граничные условия, которые связаны с ядрами интегральных преобразований. Если классическое преобразование Вебера удовлетворяет нулевому условию Дирихле, то модифицированные ядра служат цели решения различных других краевых задач (Неймана, Робэна). В первой половине прошлого века Титчмарш и Гольдштейн обобщили определение интеграла Вебера, которое уже допускало решение уравнений математической физики с краевыми условиями Неймана и третьей краевой задачи. В вышеупомянутой работе Бушле и других авторов

преобразование Неймана-Вебера исследовалось для комплексных индексов функций Бесселя и применялось при решении задачи Неймана.

Тема диссертации Горшкова А.В. посвящена исследованию преобразования Вебера с третьим краевым условием в вырожденном случае, когда ядро преобразования является нетривиальным. Автор диссертации расширил область применения этого преобразования на нестационарные задачи гидродинамики. Методом интегрального преобразования Вебера получено интегральное представление аналитического решения нестационарной задачи Стокса, описывающей течение вязкой среды вокруг кругового цилиндра.

В первой главе исследовано уравнение k-го коэффициента решения уравнения теплопроводности (В-параболическое уравнение по терминологии И.А.Киприянова) с однородным краевым условием, а также рассмотрен случай неоднородного смешанного краевого условия
Само краевое условие зависит от некоторого индекса и подобрано таким образом, что несмотря на положительный знак при функции в этом условии, дифференциальный оператор Бесселя является диссипативным, не допускающим экспоненциально-растущих решений, что типично для третьей краевой задачи. Поэтому исследованное в диссертации краевое условие является специальным интегральным граничным условием для уравнения теплопроводности, обеспечивающим диссипацию энергии.

В этой главе также выведены правила дифференцирования и мультипликативные свойства для преобразования Вебера, когда дифференцирование при преобразовании Вебера переходит в умножение на частоту, порождая новые типы преобразований. Преобразование Вебера выводится через решение краевой задачи для В-уравнения. Решение В-уравнения находится через преобразование Лапласа. Оно сводит В-уравнение к эллиптическому дифференциальному уравнению, содержащему оператор Бесселя. Исследован точечный и непрерывный спектр оператора, образующего эллиптического уравнения. Полученный результат является важным в теории спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя.

В главе 2 дается приложение преобразования Вебера к решению задачи обтекания кругового цилиндра. Осесимметричное нестационарное решение задачи с применением преобразования Вебера с граничным условием Неймана было получено Гольдштейном. В этой главе получено обобщение этой формулы.

Условие ортогональности заданной функции ядру преобразования Вебера по сути является условием ортогональности определённой функции двух аргументов, заданной во внешности круга, множеству аналитических

функций. Во второй главе доказывается, что это условие ортогональности по существу для рассматриваемой задачи есть условие прилипания течения к кругу. Решив краевую задачу для уравнения теплопроводности, соискатель получил точное решение задачи обтекания круга.

Также во второй главе исследована третья краевая задача для эволюционного уравнения с оператором Бесселя на полуоси (B-параболическое) в весовых пространствах, когда его решение содержит дополнительное слагаемое, отвечающие точечному спектру. Дифференциальные уравнения и системы с операторами Бесселя в весовых пространствах активно исследовались И. А. Киприяновым и В. В. Катраховым и их учениками. Особенностью постановки решаемой в диссертации задачи является наличие, помимо диссипативной части, стационарного решения в B-уравнении, и полное отсутствие экспоненциально-растущего решения. Решение найдено в весовых пространствах. Получена формула решения и найдены оценки градиента решения в L2, которое убывает по времени как $t^{-1/2}$

В главе 3 определено и изучено множество аналитических функций, ортогональность которому обеспечивает выполнение условия прилипания вихревой функции в области, которая является дополнением к односвязной гладкой области. Найдено необходимое условие для корректности внешней задачи дивергенция-ротор с условием прилипания, доказана теорема существования и единственности и выведена оценка L2-нормы векторного поля через его ротор.

В четвертой главе с помощью оценок линейных B-параболических уравнений исследуется нелинейное уравнение Гельмгольца. Оно рассматривается как возмущение линейной полугруппы. При этом доказывается разрешимость этой задачи с неоднородным краевым условием третьего типа, и также доказывается существование неоднородного граничного условия, с которым решение удовлетворяет условию прилипания.

Пятая глава посвящена решению задачи стабилизации системы Навье-Стокса с граничным управлением. Оценивается норма в Lq разности скорости течения и заданной скорости на бесконечности. Скорость стабилизации к нулю этой нормы при правильном выборе граничного управления является степенной. Линейная задача стабилизации исследуется с помощью сингулярных уравнений, содержащих оператор Бесселя. Методом исследования стабилизации является преобразование Ганкеля. Задача стабилизации B-уравнений, содержащих оператор Бесселя, и свойства самих преобразований Фурье-Бесселя исследовалась А.Б.Муравником, и в пространствах Банаха А.В.Глушаком. Автор диссертации с применением интегральных преобразований получил результаты о степенной

стабилизации с введением управления в граничную задачу. И далее линейная задача стабилизации была расширена на нелинейную задачу.

Структура диссертации: диссертация содержит введение, пять глав, заключение, список литературы и Приложение. Объём диссертации - 226 страниц.

Несмотря на общий качественные уровень работы, приведём ряд замечаний по диссертации:

1. В первой главе в параграфе 1.3 на с.45 дается определение вырожденного преобразования Фурье, понятие полноты собственных функций и проводятся рассуждения для обычной задачи Штурма-Лиувилля. При этом в диссертации рассматривается весовой дифференциальный оператор для задачи Штурма-Лиувилля с оператором Бесселя. Логичнее было бы проводить дальнейшие рассуждения именно для этого оператора.
2. Автор при исследовании линейных эволюционных уравнений, ссылается на них как на уравнения для коэффициентов Фурье уравнения теплопроводности. Их можно относить к типам эволюционных уравнений с оператором Бесселя, или B-параболическим уравнениям.
3. Во второй главе на с. 84 неравенство Бесселя для преобразования $W_{k+1,k-1}$ приведено без доказательства, которое, возможно, следовало бы привести.
4. В третьей главе на с. 115 используется другое обозначение для весового пространства L_2 нежели в остальных частях диссертации.
5. В пятой главе исследуется стабилизация вектора скорости только в норме L_q с $q>2$, хотя в предыдущих главах утверждалось, что возможна оценка решения в L_2.

Приведённые замечания не снижают общей положительной оценки работы.

Заключение

Диссертация представляет серьезное и полное исследование актуальной темы. Она является самостоятельно выполненной научной работой, в которой впервые решены важные задачи. Сами результаты, как и методы их получения, найдут применения в теории дифференциальных уравнений и математической физики, в том числе результаты, полученные в диссертации автором, по теории интегральных преобразований и специальных функций. Текст автореферата полностью отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации изложены в 11 статьях, опубликованных в ведущих отечественных и зарубежных журналах, 10 из которых входят в перечень изданий, рекомендованных ВАК .

Таким образом, можно сделать вывод, что диссертация Горшкова Алексея Вячеславовича удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК РФ к докторским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 – "Дифференциальные уравнения и математическая физика".

Официальный оппонент

Ситник Сергей Михайлович - доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования Института инженерных и цифровых технологий Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (специальность 01.01.02).

25 сентября 2024 г.

Личную подпись удостоверяю
Специалист отдела кадрового обеспечения Департамента организационного развития и кадровой политики
«25» 09 2024 г.