МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



ГОРШКОВ АЛЕКСЕЙ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИЛИПАНИЯ ДЛЯ ВИХРЕВОЙ ФУНКЦИИ В УРАВНЕНИЯХ ГИДРОДИНАМИКИ

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена на кафедре Общих проблем управления Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

НАУЧНЫЙ КОНСУЛЬТАНТ — **Фурсиков Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Общих проблем управления механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
(специальность 01.01.02)

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:
Ситник Сергей Михайлович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования Института инженерных и цифровых технологий Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
(специальность 01.01.02)

Чеботарев Александр Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор департамента математического и компьютерного моделирования Института математики и компьютерных технологий Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Дальневосточный федеральный университет»
(специальность 01.01.02)

Чепыжов Владимир Викторович — доктор физико-математических наук, и.о. главного научного сотрудника, и.о. заведующего Лабораторией № 1 им. М.С. Пинскера Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук
(специальность 05.13.17)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский университет "МЭИ".

Защита состоится 17 октября 2024 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета 24.1.167.02 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: г. Москва, ул. Губкина, д.8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте https://mi-ras.ru/dis/ref24/gorshkov/dis.pdf

Автореферат разослан _____ июня 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.02
кандидат физико-математических наук



Теретёнков А.Е.

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Тема диссертации относится к теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В диссертации исследуется краевая задача гидродинамики для класса решений с бесконечной энергией, описываемая вихревым уравнением, и заданная во внешности ограниченной области.

Изучается движение тела во внешнем потоке с условием прилипания на границе, динамика которого описывается вихревым уравнением. И главной темой исследования является построение граничного условия прилипания в вихревой форме и доказательство разрешимости.

Нелинейные уравнения гидродинамики, выписанные относительно функций *скорость-давление* могут сводиться к системам *скорость-ротор* или системам *ток-ротор*. Если поле скоростей выражается интегральным оператором через завихренность(ротор), то уравнения, написанные в терминах одной завихренности становятся интегро-дифференциальными.

Для баротропной среды оператор ротора устраняет наиболее сложную функцию - давление. Для двумерных и трехмерных систем Навье-Стокса динамика завихренности включает меньшее число уравнений и неизвестных, чем в формулировке "скорость-давление". В этом заключается преимущество вихревых уравнений. Напротив, сложность такого подхода заключается в постановке краевого условия (например, условия прилипания) в терминах одной завихренности. Система может не иметь граничного условия - как, например, задача Коши во всем пространстве для вихревого уравнения. Тогда оператор ротора значительно упрощает соответствующую задачу с начальным условием, исследовавшуюся Гига, Камбэ[1], Галлэйем, Уэйном[2]. Но в случае начально-краевой задачи с заданной областью, краевое условие Дирихле по прежнему остается сложным интегральным соотношением.

В работах Квартапэлли и Уальс-Гриза[3] выведены проекционные условия на вихревую функцию, заключающиеся в ортогональности ротора пространству гармонических функций. Соленоидальное двумерное векторное поле $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ представляется как орто-градиент

$$\mathbf{v} = \nabla^{\perp}\psi$$

функции тока ψ, где $\nabla^{\perp}_{\mathbf{x}} = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$.

Условие прилипания $\mathbf{v} = 0$ на границе области Ω влечет нулевые граничные условия на функцию тока:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}} = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

[1]Giga Y., Kambe T. Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation. Comm. Math. Phys. 1988; 117(4), pp. 549-568.

[2]Gallay Th., Wayne C.E. Invariant manifolds and the long-time asymptotics od the Navies-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$. Arch. Ration. Mech. Anal. 2002; 163:3, pp. 209-258.

[3]Quartapelle L., Valz-Gris, F. Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1981; 1(2), pp. 129–144.

и для ограниченных областей из соотношения

$$\Delta\psi = \operatorname{curl}\mathbf{v}$$

согласно формуле Грина следует ортогональность $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ гармоническим функциям (здесь $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к границе области). Это и есть условие прилипания, выраженное в терминах только вихревой функции. При этом это условие не является краевым, а наоборот, распределенным по всей области. В диссертации показывается, что принцип ортогональности может быть распространен на внешние области и течения с бесконечной энергией (с некоторыми изменениями), из которых затем получаются граничные условия на функцию ротора.

Одним из наиболее распространенных подходов к решению вихревого уравнения является именно система *ток-ротор*. Система Навье-Стокса вместо давления обретает новую неизвестную функцию и дополнительное уравнение, повышающее порядок системы. Суть построения граничного условия для вихревой функции заключается в локальной дискретизации соотношений между завихренностью и током на границе области. Поэтому такие условия относят к локальным. Первые разностные соотношения такого рода были получены Томом[4] в 1933 году, и были усовершенствованы с помощью аппроксимаций более высокого порядка в моделях Вудса, Фромма, и др. Этому подходу посвящены работы Ву[5], Андерсона[6], Уэйнана[7], Захаренкова[8].

Для того, чтобы по ротору можно было однозначно восстановить соленоидальное векторное поле, требуется исследовать *задачу дивергенция-ротор* (в англоязычной литературе она называется *div-curl problem*).

Для 2D и 3D областей с граничным условием на тангенциальную и нормальную компоненту скорости div-curl задача изучалась в работах Аумути, Александера[9], Кирхарта, Шульца[10]. Для внешних 3D областей асимптотические свойства решений получены в статье Нойдерта, Вольфа фон Уаля[11].

С условием непротекания разрешимость краевой задачи дивергенция-ротор

[4]Thom A. The flow past circular cylinders at low speeds. Proc. Roy. Soc. London Sect. 1933; A 141, pp. 651-669.

[5]Wu J. C. Hybrid procedures for computing general viscous flows. Numer. and Phys. Aspects of Aerodynamic Flows, New York (1982).

[6]Anderson, C. Vorticity boundary conditions and boundary vorticity generation for two-dimensional viscous incompressible flows, J. Comp. Phys. 80 (1989).

[7]Weinan E., Jian-Guo Liu. Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes. Journal of Comp. Phys. 124:368-382 (1996).

[8]Zakharenkov M. N. Formulation of boundary conditions for vorticity in viscous incompressible flow problems. Comput. Math. Math. Phys. 50:6:1085–1092 (2010).

[9]Auchmuty G., Alexander J. L2 Well-Posedness of Planar Div-Curl Systems. Archive for footnote Mechanics and Analysis. 2001; 160:91-134. doi: 10.1007/s002050100156.

[10]Kirchhart M., Schulz E. Div–curl problems and H^1-regular stream functions in 3D Lipschitz domains. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021; doi: 10.1002/mma.7414.

[11]Neudert M., Wolf von Wahl. Asymptotic behaviour of the div-curl problem in exterior domains. Advances in Differential Equations. 2001; 6(11):1347-1376. doi: 10.57262/ade/1357139964.

исследовалась в работах Ифтими, Филхо, Ньюзенвайга[12], Лакава[13]. Для задачи Коши $L_p - L_q$- и L_∞- оценки задачи дивергенция-ротор получены Галлай, Уэйном[14].

В диссертации доказывается однозначная разрешимость задачи дивергенция-ротор для внешних областей с условием прилипания на границе, и заданным внешним потоком на бесконечности. При этом получены энергетические оценки в L_2 и H_1.

Течения с бесконечной энергией во внешних областях с заданным потоком на бесконечности

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v}_\infty, \ |\mathbf{x}| \to \infty$$

были предметом исследования многих математиков. Эти задачи называются *задачами обтекания*. Для линеаризованных уравнений классическими работами в этой области являются исследования Стокса, Бассета, Ламба. Стоксом рассматривалось медленное течение линеаризованных уравнений без конвективной части. Уравнение с добавленным слагаемым переноса исследовал Ламб[15]. Для цилиндра Русановым[16] получены оценки убывания по времени нестационарного решения. Также для цилиндра с помощью функции тока задача исследовалась Гумеровым[17].

Для тел произвольной формы задача обтекания исследовалась Ладыженской[18], Финном[19], Солонниковым, Маремонти[20], Миакавой [21], Галди, Шибатой, Хейвудом[22], Абе[23].

Отличительной особенностью таких задач является отсутствие квадратич-

[12]Iftimie D., Lopes Filho M. C., Nussenzveig Lopes H. J. Confinement of vorticity in two dimensional ideal incompressible exterior flow. Quart. Appl. Math. 2007; 65, pp. 499-521.

[13]Lacave. C. Two-dimensional incompressible ideal ow around a thin obstacle tending to a curve. Annales Inst. H. Poincare Analyse Non Lineaire. 2009; 26, pp. 1121-1148.

[14]Gallay Th., Wayne C.E. Invariant manifolds and the long-time asymptotics od the Navies-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$. Arch. Ration. Mech. Anal. 2002; 163:3, pp. 209-258.

[15]Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 6. edition. 1932.

[16]Русанов Б.В. Медленное неустановившееся обтекание кругового цилиндра вязкой жидкостью. Вест. Ленингр. ун-та, сер. матем., физики и химии. 1955; № 2, 155. - с. 81 - 106.

[17]Гумеров Н. А. Обтекание цилиндра неустановившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1983; 2, с. 79–83.

[18]Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука 1970(2-е изд.).

[19]Finn R. On the Exterior Stationary Problem for the Navier-Stokes Equations, and Associated Perturbation Problems, Arch. Rational Mech. Anal. 1965; 19, pp. 363–406.

[20]Маремонти П., Солонников В. А. Об оценке решений системы Стокса во внешних областях. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 9. 1990; Зап. научн. сем. ЛОМИ, 180, Изд-во Наука, Ленинград. отд., Л., с. 105–120.

[21]Miyakawa T. On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain. Hiroshima Math. J. 1982; 12, pp. 115-140.

[22]Galdi, G., Heywood, J., Shibata, Y. On the Global Existence and Convergence to Steady State of Navier-Stokes Flow Past an Obstacle that is Started from Rest. Arch Rational Mech Anal. 1997; 138, pp. 307–318.

[23]Abe K. Global well-posedness of the Two-Dimensional Exterior Navier–Stokes Equations for non-decaying data. Arch. Rational Mech. Anal. 227:69–104 (2018).

ной интегрируемости величины $\mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty$ при сохранении конечности интеграла Дирихле. Финн[24] доказал бесконечность кинетической энергии потока $\mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty$ для стационарного решения ввиду наличия протяженной теневой зоны за обтекаемым телом. Также бесконечную энергию имеет разность между нестационарным и стационарным потоком с фиксированным условием на бесконечности.

Бесконечность энергии потока связана еще с одним фактором. Как отмечалось в работах Ладыженской, Финна, корректность задач обтекания обусловлена скоростью и типом стремления скорости к $\mathbf{v}_\infty$. Поток может иметь ненулевую циркуляцию на бесконечности, и наличие этой циркуляции порождает бесконечность L_2 нормы. Исключение циркуляционной части потока позволяет получить конечность этой нормы для нестационарных течений.

В задаче обтекания условие ортогональности, соответствующее условию прилипания, видоизменяется ввиду бесконечности области. В диссертации выводится новое *условие ортогональности* для внешних областей с набегающим потоком. В дальнейшем это условие ортогональности превращается в граничное условие для ротора. Это граничное условие образует спектральную задачу, в которой спектр состоит из непрерывной части и одного точечного значения. Эта задача порождает вырожденное преобразование Фурье, с помощью которого ставится и решается соответствующая граничная задача для уравнения вихря.

Для цилиндра находится явное решение задачи обтекания в вихревой форме. В явной форме граничное условие находится и для произвольных плоских областей. Для нелинейных уравнений также находится граничное условие для вихревой функции(функции ротора) *как псевдо-управление*, и доказывается разрешимость соответствующих задач. Решение задачи обтекания находится с помощью вырожденного интегрального преобразования типа Фурье.

Преобразования типа Фурье могут быть ассоциированы со спектральной задачей с симметрическим дифференциальным оператором A. Эта задача была предметом исследования большого количества математиков. Отметим лишь классические работы Гельфанда, Левитана[25], Титчмарша[26]. Обычные и *обобщенные* (по Гельфанду) собственные функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$A\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda) \tag{1}$$

с тем или иным краевым условием.

Обобщенные собственные функции порождают преобразование Фурье вида

$$F[f](\lambda)=\int\varphi(x,\lambda)f(x)dx. \tag{2}$$

[24]Finn R. An energy theorem for viscous fluid motions. Arch. Rational Mech. Anal. 1960; 6, pp. 371–381.

[25]Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951; 15:4, 309–360

[26]Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.1, М.: Изд. иностр. лит-ры, 1960.

Большинство известных преобразований Фурье, связанных с уравнениями математической физики, имеют тривиальное ядро, и для них выполняются формулы обращения, и, как следствие, равенство Парсеваля. Иными словами, система *обобщенных собственных функций* (т.е. не принадлежащих фазовому пространству), входящих в определение интегрального преобразования, является полной.

Однако, в ряде случаев дифференциальный оператор помимо непрерывной части спектра, которая и определяет это преобразование, может содержать набор *обыкновенных собственных функций* $\{e_k\}$, и равенство Парсеваля приобретает вид

$$\|f\|^2 = \|F[f]\|^2 + \sum_k (f, e_k)^2, \tag{3}$$

где $\{e_k\}$ становятся элементами ядра преобразования F, которое мы будем называть *вырожденным*.

Функции $\{\varphi(x,\lambda)\}$ вместе с $\{e_k(x)\}$ образуют *полную ортонормированную систему функций* в L_2. Когда система обобщенных собственных функций полна, а спектр состоит только из непрерывной части, то для $\varphi(x,\lambda)$ понятие ортогональности определяется через $\delta-$ функцию как

$$(\varphi(\cdot,\lambda), \varphi(\cdot,\zeta)) = \delta(\lambda - \zeta).$$

Но в случае, когда спектр содержит еще и собственные значения $\{e_k\}$, полнота обобщенных собственных функций утрачивается.

Ортогональность $\varphi(x,\lambda)$ и e_k определяется через действие

$$\langle \varphi(\cdot,\lambda), e_k \rangle = \int \varphi(s,\lambda) e_k(s) ds = 0.$$

Действие $\langle \varphi(\cdot,\lambda), e_k \rangle$ является преобразованием Фурье $F[e_k]$ и условие ортогональности уже содержит условие вырожденности преобразования Фурье. Иными словами, полная ортонормированная система обобщенных и обычных собственных функций порождает вырожденное преобразование Фурье, если набор обычных собственных функций не пуст.

В бесконечных областях вырожденное преобразование Фурье порождается оператором Лапласа с третьим краевым условием. Однако, например, в уравнении теплопроводности граничное условие третьего типа с $a > 0$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - af \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

порождающее смешанное спектральное разложение, относится к *нефизическим*, и, как правило, в уравнениях математической физики не рассматривается. В этом случае оператор Лапласа $A = \Delta$ будет иметь непрерывный спектр $\mathbb{R}_-$ и, дополнительно, одно или два собственных значения.

Решение приобретает экспоненциально растущую компоненту, отвечающую положительному собственному значению, которое для диссипативных структур не соответствует реальным диффузионным процессам. Поэтому данные

краевые условия имеют физический смысл только когда $a < 0$. И одним из результатов диссертации является применение вырожденного преобразования Вебера с $a > 0$ к физической задаче, связанной с уравнением гидродинамики.

Преобразование Вебера нашло широкое применение в уравнениях математической физики - оптики, диффузии, теплопроводности. Обобщенное преобразование Вебера исследовалось Гольдштейном[27], Титчмаршем, Сиривастaвом[28], Малитцем[29], Гриффитсом. В случае вырожденного преобразования Вебера корректная формула обращения получена Назимом[30] только для индекса $k > 1$. Однако возникающее в решаемых задачах гидродинамики вырожденное преобразование Вебера требует исследования для всех индексов $k \in \mathbb{R}$.

Целью диссертации является построение граничных условий прилипания для нелинейных задач гидродинамики, выписанных в вихревой форме и доказательство их разрешимости.

В ходе проведенного исследования ставились вспомогательные задачи, которые имеют самостоятельный интерес - решение вихревой системы Стокса, доказательство формулы обращения Вебера в вырожденном случае, L_2 оценки решений задачи *дивергенция-ротор* (*div-curl problem*), вывод условий ортогональности для внешних областей.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать вырожденное преобразование Вебера с граничным условием третьего типа - формулы обращения, равенство Парсеваля.
2. Решить внешнюю задачу дивергенция-ротор с условием прилипания во внешности диска.
3. На основе условия ортогональности построить инвариантное многообразие, граничное условие прилипания и найти явное решение линейной задачи Стокса обтекания для внешности диска в терминах вихревой функции.
4. Решить задачу дивергенция-ротор с условием прилипания во внешней области.
5. На основе условия ортогональности построить инвариантное многообразие и граничное условие прилипания для линейной задачи Стокса, заданной во внешности ограниченной области в $\mathbb{R}^2$.
6. Получить L_2-оценки решения задачи дивергенция-ротор.

[27] Goldstein S. Some two-dimensional diffusion problems with circular symmetry. Proc. London Math.Soc. 1932; 34(2):51-88.

[28] Sirivastav R.P. A pair of dual integral equations involving Bessel functions of the first and the second kind. Proc. Edinb. Math. Soc. 1964; 14(2): 149–158.

[29] Malits P. On a Certain Class of Integral Equations Associated with Hankel Transforms, Acta Appl. Math. 2007; 98:135-152.

[30] Nasim C. Associated Weber integral transforms of arbitrary order, Ind. J. Pure & Appl. Math. 1989; 20:11: 126-1138.

7. Построить граничное условие прилипания для нелинейной системы Навье-Стокса в вихревой форме (уравнение Гельмгольца).

8. Доказать разрешимость уравнения Гельмгольца с заданным граничным условием.

9. Доказать стабилизируемость решений систем Стокса и Навье-Стокса при помощи граничного управления.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Вырожденные преобразования типа Фурье, порождаемые третьим краевым условием, находят свое применения в актуальных задачах математической физики.

2. Формула обращения преобразования Вебера становится верной после дополнения спектрального разложения функциями из ядра преобразования.

3. Нестационарная задача Стокса обтекания цилиндра с условием прилипания имеет явную формулу решения для вихревой функции. Решение получается методом Фурье с помощью соответствующих вырожденных интегральных преобразований.

4. Условие прилипания, как условие ортогональности ротора гармоническим функциям, в случае внешних областей в контексте задачи обтекания имеет существенные отличия от случая ограниченных областей. Тем не менее, в целом сам принцип ортогональности сохраняет свою актуальность.

5. Решение задачи дивергенция-ротор с условием прилипания допускает L_2 оценку для течений с нулевой циркуляцией на бесконечности. Условие ортогональности является как необходимым, так и достаточным для разрешимости этой задачи.

6. Для линейных задач обтекания во внешних областях возможно построение граничного условия прилипания для вихревой функции без вовлечения дополнительных функций.

7. Граничное условие прилипания для вихревой функции можно построить для нелинейной системы Навье-Стокса. Это граничное условие играет роль псевдо-управления.

8. С помощью граничного условия можно стабилизировать вихревое решение со степенной скоростью.

Научная новизна:

1. Получена формула обращения для вырожденного преобразования Вебера.

2. Найдено применение вырожденных преобразований типа Фурье в гидродинамике.

3. С помощью вырожденного преобразования Вебера решена система Стокса в вихревой форме для цилиндра с набегающим потоком на бесконечности и получены оценки соответствующей разрешающей полугруппы.
4. Найдено новое обоснование парадокса Стокса в терминах ядра оператора Лапласа.
5. Доказана разрешимость задачи дивергенция-ротор с условием прилипания.
6. Получены L_2-оценки задачи дивергенция-ротор для безциркуляционного векторного поля через вихревую функцию с нулевым средним.
7. Построено граничное условие прилипания для вихревой функции системы Стокса без использования дополнительных функций.
8. Построено граничное условие прилипания для вихревой функции системы Навье-Стокса без использования дополнительных функций (тока, скорости, и т.д.) и исследована однозначная разрешимость полученного уравнения.
9. Найдено граничное условие как для вихревой функции, так и для векторного поля, что вихревое решение систем Стокса и Навье-Стокса стабилизируется со степенной скоростью.

Методы исследования: одним из методов решения линейных уравнений гидродинамики является метод Фурье, задействующий как непрерывный, так и точечный спектр, с применением вырожденных интегральных преобразований.

Сам метод Фурье базируется на преобразовании Вебера. Для вывода формулы обращения преобразования Вебера рассматривается начально-краевая задача для уравнения диффузии с граничным условием третьего типа, которая с помощью преобразования Лапласа, сводится к эллиптическому уравнению. Преобразование Лапласа является ветвящейся функцией, аналитичной в плоскости с разрезом вдоль спектра оператора Лапласа. Более того, эта функция содержит вычет в нуле, которому соответствует собственная функция из ядра преобразования. Применяя обратное преобразование Лапласа получается корректная формула обращения для преобразования Вебера.

Преобразование Вебера служит важнейшим инструментом решения задачи Стокса для внешности диска. Это же преобразование применяется при исследовании разрешимости системы Навье-Стокса.

Исследование систем Стокса и Навье-Стокса во внешних областях проводится методами комплексного анализа с применением отображения Римана. Нелинейные уравнения исследуются методом возмущения линейных задач с применением теоремы о неподвижной точке на основе полученных оценок линейной полугруппы.

Научная и практическая значимость исследования носит теоретический характер, но при этом может иметь прикладное значение. Решение уравнений гидродинамики в вихревой форме позволяет снизить вычислительные

затраты на решение задач обтекания и получать численные решения при значительно меньших вычислительных ресурсах. Результаты исследования могут найти применение в вычислительной гидродинамике. Также результаты диссертации могут быть применены в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов и аспирантов.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается их строгим математическим выводом и представлением полных доказательств формулируемых результатов. Также вычислительные эксперименты подтверждают ряд полученных в диссертации результатов. Часть результатов по интегральным преобразованиям находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами, дополняя, и исправляя их.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях:

1. "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV", г. Воронеж, 2024,
2. "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2024", ВГУ, г. Воронеж, 2024,
3. "Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения", МФТИ, г. Москва, 2023,
4. "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения", ЮФУ, г. Ростов-на-Дону, 2023,
5. "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ", МФТИ, г. Долгопрудный, 2019,
6. "Спектральная теория и дифференциальные уравнения, посвященная 100-летию со дня рождения Б.М.Левитана", МГУ, г. Москва, 2014,

и семинарах:

1. Семинар по дифференциальным уравнениям под руководством д.ф.-м.н., профессора Ю. А. Дубинского, д.ф.-м.н., профессора А. А. Амосова на кафедре Математического моделирования МЭИ(ТУ), г. Москва, 2024 г.,
2. Семинар "Асимптотические методы в математической физике" под руководством д.ф.-м.н., профессора С.Ю.Доброхотова, ИПМех РАН г. Москва, 2024 г.,
3. Семинар "Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения" под руководством проф. А.В.Фурсикова, проф. В.М.Тихомирова, член-корр. РАН М.И Зеликина, член-корр. РАН В.Ю. Протасова, МГУ, г. Москва, 2018, 2021, 2022, 2023 гг.,
4. Семинар "Оптимальное управление и динамические системы" под руководством д.ф.- м.н. С. М. Асеева, д.ф.-м.н. Ю. С. Ильяшенко, д.ф.-м.н. Л. В. Локуциевского, д.ф.-м.н., профессора М. С. Никольского, МИАН, г. Москва, 2023 г.,

5. Семинар "Вычислительная математика, математическая физика, управление" под руководством проф.Г.М. Кобелькова, проф.А.В. Фурсикова, ИВМ, г. Москва, 2015 г.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены автором лично.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях [1]-[11], 10 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 — в тезисах докладов [12] [13] [14].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 226 страниц с 23 рисунками. Список литературы содержит 118 наименований.

В первой главе диссертации выводится вырожденное преобразование Вебера, включая равенства Планшереля-Парсеваля и доказывается справедливость формул обращения в пространстве $L_1 \cap L_2$.

Пусть в L_2 задан симметрический дифференциальный оператор A, действующий на функциях, определенных для $x \in G \subset \mathbb{R}$, где G - измеримое множество. Предположим, что спектр $\sigma(A)$ состоит из непрерывной части $E \subset \mathbb{R}$, и не более чем счетного набора собственных значений конечной кратности $\{\lambda_k\}$ с собственными функциями $\{e_k\}$. Функции $\varphi(x, \lambda)$ будут являться обобщенными собственными функциями, удовлетворяющими (1), и задающими преобразование Фурье (2). Обратное преобразование Фурье будет иметь вид:

$$F^*[\hat{f}](x) = \int_E \varphi(x, \zeta)\hat{f}(\zeta)d\rho(\zeta),$$

где $\rho(\lambda)$ - спектральная функция. Преобразование $F[f]$ принадлежит пространству $L_2(E, \rho(\lambda))$ квадратично-интегрируемых функций с весом $\rho(\lambda)$.

Определение 1. *Функции $\varphi(x, \lambda)$ назовем ортонормированными, обозначая как $\langle \varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \zeta) \rangle = \delta(\lambda - \zeta)$, если*

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G \varphi(x, \lambda) \left(\int_E \varphi(x, \zeta)\hat{f}(\zeta)d\rho(\zeta) \right) dx \tag{4}$$

для любой функции $\hat{f}(\lambda)$ вида $\hat{f}(\lambda) = F[f(\cdot)](\lambda)$, $f(x) \in L_2$.

Равенство в этом определении следует из формального применения δ-функции $\delta(\lambda - \zeta)$ к $\hat{f}(\lambda)$. Формула (4) есть формула обращения $\hat{f} = F[F^*[\hat{f}]]$ для обратного преобразования Фурье, и она будет выполняться для функций $\hat{f}$ из образа F. А формула обращения для прямого преобразования $f = F^*[F[f]]$ будет выполняться для $f \in \ker^{\perp} F$.

Определение 2. *Будем говорить, что $\{\{\varphi(\cdot, \lambda)\}, \{e_k\}\}$ является полной ортонормированной системой собственных функций оператора A, если $\langle \varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \zeta) \rangle = \delta(\lambda - \zeta)$, $\langle \varphi(\cdot, \lambda), e_k \rangle_{L_2} = 0$, $(e_k, e_j)_{L_2} = \delta_{k,j}$ для любых $\lambda, \zeta \in E$ и собственных функций e_k, e_j, и выполняется равенство Парсеваля (3).*

В этом определении $(\varphi(\cdot,\lambda),e_k)_{L_2}$ рассматривается не как скалярное произведение, а действие

$$\langle\varphi(\cdot,\lambda),e_k\rangle_{L_2}=\int_G\varphi(x,\lambda)e_k(x)dx.$$

Поскольку $e_k(x)$ принадлежит L_2, то интеграл выше существует при почти всех λ.

Определение 3. *Преобразование F, даваемое формулой (2), называется вырожденным, если существует $f\neq 0$ такая, что $F[f]=0$.*

Преобразование Вебера $W_{k,k\pm1}[\cdot]$ основано на обобщенных собственных функциях оператора Лапласа, разложенного в ряд Фурье по углу:

$$\Delta_k f_k(r)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_k}{dr}\right)-\frac{k^2}{r^2}f_k(r),$$

с краевым условием

$$r_0\frac{\partial w(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0}\pm kw(t,r_0)=0. \tag{5}$$

Оно определяется как

$$W_{k,k\pm1}[f](\lambda)=\int_{r_0}^{\infty}\frac{J_k(\lambda s)Y_{k\pm1}(\lambda r_0)-Y_k(\lambda s)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0)+Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}}f(s)s\,\mathrm{ds}$$

$$W_{k,k\pm1}^{-1}[\hat{f}](r)=\int_0^{\infty}\frac{J_k(\lambda r)Y_{k\pm1}(\lambda r_0)-Y_k(\lambda s)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0)+Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}}\hat{f}(\lambda)\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Здесь $r_0>0$ - фиксированный параметр, $k\in\mathbb{R}$, $J_k(r)$, $Y_k(r)$ - функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Преобразования, основанные на функциях Бесселя (преобразования Вебера, Ганкеля, и т.д.), содержат меру $r\,\mathrm{dr}$, и определяются для функций из $L_2(E;r)$, квадратично-интегрируемых с этой мерой.

Резольвента $R(\tau)=(\Delta_k-\tau I)^{-1}$ является ветвящейся функцией со скачком вдоль спектра $\mathbb{R}_-$. В случае нетривиального ядра в дополнение к непрерывной части спектра собственное значение $\tau=0$ будет обуславливать наличие слагаемого R_{-1}/τ в разложении в ряд Лорана $R(\tau)$ по τ. Оператор R_{-1} - это проектор, который выражается через коэффициенты Фурье, и проектирует на собственное подпространство $\ker(\Delta_k)$. Это подпространство является ядром преобразования $W_{k,k\pm1}$. Нетривиальное ядро в свою очередь порождает стационарное решение для уравнения диффузии.

Преобразование $W_{k,k+1}$ является вырожденным при $k<-1$, и $W_{k,k-1}$ при $k>1$. Соответствующие собственные функции из ядра преобразования - $1/r^k$ и r^k. Они же являются собственными функциями и оператора Δ_k с краевым условием (5):

$$\Delta_k[1/r^k]=0,\Delta_k[r^k]=0.$$

Для $k > 1$ функция $1/r^k$ принадлежит $\ker(\Delta_k) \subset L_2(r_0, \infty; r)$, и для $k < -1$ $r^k \in \ker(\Delta_k) \subset L_2(r_0, \infty; r)$. Обе функции $1/r^k$ и r^k являются стационарным решением эволюционного уравнения с генератором Δ_k. $1/r^k$ удовлетворяет граничному условию со знаком '+' в (5), в то время как r^k со знаком '-'. Поэтому эти функции должны лежать и в ядре $W_{k,k\pm1}$.

Формула обращения имеет вид

$$f = W_{k,k\pm1}^{-1}\left[W_{k,k\pm1}[f]\right] + (f, e_{0,k}^{\pm})e_{0,k}^{\pm},$$

где $e_{0,k}$ - соответствующая нормированная функция из ядра:

$$e_{0,k}^{+} = \begin{cases} c_k^{+} r^k, \ k < -1, \\ 0, \ k \geq -1, \end{cases}$$

$$e_{0,k}^{-} = \begin{cases} c_k^{-}/r^k, \ k > 1, \\ 0, \ k \leq 1, \end{cases}$$

и $c_k^{\pm}$ - нормировочные коэффициенты.

А вместе с обобщенными собственными функциями

$$\varphi_k^{\pm}(r, \lambda) = \frac{J_k(\lambda r)Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0) + Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}}$$

они образуют полную ортонормированную систему.

В первой главе доказана следующая

Теорема 4. *Для произвольного фиксированного $k \in \mathbb{R}$ система $\{\varphi_k^{+}(r, \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ вместе с $e_{0,k}^{+}$, а также система $\{\varphi_k^{-}(r, \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$, $e_{0,k}^{-}$ являются двумя полными ортонормированными системами в $L_2(r_0, \infty; r)$. Для $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0, \infty)$ $\cap$ $L_2(r_0, \infty)$, $r_0 > 0$ преобразования Вебера почти всюду удовлетворяют соотношениям*

$$f(r) = W_{k,k-1}^{-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right](r), k \leq 1,$$

$$f(r) = W_{k,k-1}^{-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right](r) + \frac{2(k-1)r_0^{2(k-1)}}{r^k}\int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1}f(s)\,\mathrm{d}s, k > 1,$$

$$f(r) = W_{k,k+1}^{-1}\left[W_{k,k+1}[f]\right](r), k \geq -1,$$

$$f(r) = W_{k,k+1}^{-1}\left[W_{k,k+1}[f]\right](r) - \frac{2(k+1)r^k}{r_0^{2(k+1)}}\int_{r_0}^{\infty} s^{k+1}f(s)\,\mathrm{d}s, k < -1,$$

и выполняется равенство Планшереля-Парсеваля:

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}, k \le 1,\\
\|f\|^2_{L_2(0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}\\
&\quad + 2(k-1)r_0^{2(k-1)}\left(f, 1/r^k\right)^2_{L_2(r_0,\infty;r)}, k > 1,\\
\|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} &= \|W_{k,k+1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}, k \ge -1,\\
\|f\|^2_{L_2(0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}\\
&\quad - \frac{2(k+1)}{r_0^{2(k+1)}}\left(f, r^k\right)^2_{L_2(r_0,\infty;r)}, k < -1.
\end{aligned}$$

Из этой теоремы непосредственно следует

Следствие 5 (*Неравенство Бесселя*)**.** *Для функции* $f(r)$, $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0,\infty) \cap L_2(r_0,\infty)$, $k \in \mathbb{R}$, $r_0 > 0$ *выполняется неравенство*

$$\|W_{k,k\pm1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;\lambda)} \le \|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)}.$$

Замечание. *В формулировке теоремы от требования* $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0,\infty)$ *можно отказаться, оставив только* $f(r)\sqrt{r} \in L_2(r_0,\infty)$. *По аналогии с классическими преобразованиями Фурье, равенство Планшереля-Парсеваля позволяет расширить оператор преобразования* $W_{k,k\pm1}$ *по непрерывности на* $L_2(r_0,\infty)$, *с одной лишь разницей, что интегралы Вебера могут перестать сходиться на множестве меры нуль.*

С помощью преобразований $W_{k,k\pm1}$ решается третья краевая задача для уравнения теплопроводности во внешности круга со специальным краевым условием. Для коэффициентов Фурье эта задача записывается системой

$$\begin{aligned}
&\partial_t w_k(t,r) - \Delta_k w_k(t,r) = 0,\\
&\left(r_0\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{s=r_0} \mp k\right)\Big|_{r=r_0} w(t,r) = 0,\\
&w(0,r) = w_{0,k}(r).
\end{aligned}$$

Тогда решение

$$w_k(t,r) = W^{-1}_{k,k\pm1}\left[e^{-\lambda^2 t}W_{k,k\pm1}[w_{0,k}(\cdot)]\right]$$

справедливо только для начального условия, ортогонального ядру этого преобразования. Для других начальных условий к формуле выше следует прибавлять стационарное решение уравнения теплопроводности вида

$$(w_{0,k}(\cdot), e^{\pm}_{0,k})e^{\pm}_{0,k}.$$

Преобразование $W_{k,k+1}$ для положительных значений k, при которых оно не вырождено, нашло применение в уравнениях математической физики -

теории пластичности и упругости[31], теории скважинных течений[32], и при решении осесимметричных уравнений гидродинамики[33].

Автором диссертации найдено применение именно вырожденного преобразования $W_{k,k-1}$. Из-за особой спектральной структуры, включающей точечный и непрерывный спектр, это преобразование представляет отдельный интерес. В диссертации с помощью этого преобразования решена классическая задача гидродинамики - нестационарная задача Стокса обтекания бесконечного цилиндра. И, следовательно, преобразование $W_{k,k-1}$, несмотря на специфичность граничного условия и нетривиальное ядро, является важным прикладным преобразованием.

Найдены правило дифференцирования и мультипликативное правило преобразования. В классическом преобразовании Фурье оператор дифференцирования переходит в оператор умножения на частоту. По аналогии с этим, дифференцирование $\frac{\partial}{\partial r}$ преобразования Вебера переходит в умножение на λ. И наоборот, умножение на λ переходит в дифференцирование, но в более общем смысле. А именно, не смотря на то, что функция f зависит только от r - дифференцирование включает не только $\frac{\partial}{\partial r}$, но и фиктивную производную по углу (т.е. производную по φ от функции $e^{ik\varphi}f(r)$).

Вторая глава диссертации посвящена решению внешней задачи для нестационарной системы Стокса, описывающей течение жидкости, обтекающей диск фиксированного радиуса при малых скоростях потока. Оказалось, что решение этой задачи также может быть найдено методом Фурье с помощью вырожденного преобразования Вебера. Как и решение уравнения теплопроводности, решение системы Стокса находится в три этапа - 1. интегральное преобразование начального условия, 2. умножение на диссипативную экспоненту $e^{-\lambda^2 t}$, 3. взятие обратного преобразования:

$$w(t,x) = F^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}F[w_0]\right].$$

Граничным условием для течения жидкости является условие прилипания, т.е. условие нулевой скорости на границе тела. Также допускается вращение диска, когда скорость жидкости приравнивается к скорости на границе диска.

Известным фактом является так называемый *парадокс Стокса*, заключающийся в отсутствии стационарного решения задачи в двумерном случае. Решению нестационарной задачи Стокса посвящен ряд работ. Радиально симметричное решение системы Стокса для кругового цилиндра было получено Гольдштейном. Однако оно не может быть применимо к задаче обтекания, поскольку в последней решение явно зависит от угловой переменной - закручивание потока над и под цилиндром происходит в противоположных на-

[31] Malits P. On a Certain Class of Integral Equations Associated with Hankel Transforms, Acta Appl. Math. 2007; 98:135-152.

[32] Kabala Z., Cassiani G. Well Hydraulics with the Weber–Goldstein Transforms. Transport in Porous Media. 1997; 29:225-246.

[33] Goldstein S. Some two-dimensional diffusion problems with circular symmetry. Proc. London Math.Soc. 1932; 34(2):51-88.

правлениях. Это решение находит применение в скважинных течениях, и в течениях с нулевой скоростью потока на бесконечности.

Решение нестационарной задачи Стокса в круге было получено Русановым[34], Ломбардо, Кафлишем, Саммартино[35]. Гумеровым через скалярную функцию тока получены частные решения задачи обтекания цилиндра.

В диссертации дается явное решение вихревой 2D задачи Стокса во внешности круга $B_{r_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}| > r_0\},\ r_0 > 0$ с помощью интегрального преобразования Вебера и приводятся оценки разрешающей полугруппы. Вихревое уравнение системы Стокса есть уравнение теплопроводности для функции $w(t, \mathbf{x}) = \operatorname{curl} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}_1} v_2 - \partial_{\mathbf{x}_2} v_1$:

$$\frac{\partial w(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w(t, \mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2). \tag{6}$$

Трудность вызывает граничное условие прилипания, которое для вихревой функции становится интегральным. Задачей дивергенция-ротор называется задача восстановления соленоидального векторного поля по вихревой функции. С условием прилипания эта задача имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \tag{7}$$
$$\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathrm{w}(\mathbf{x}), \tag{8}$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0,\ |\mathbf{x}| = r_0, \tag{9}$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty, \tag{10}$$

где $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0)$. Для её разрешимости требуется ряд дополнительных условий на вихревую функцию, схожих с условиями ортогональности в ограниченных областях.

Если заменить условие прилипания непротеканием внутрь цилиндра

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0,\ |\mathbf{x}| = r_0, \tag{11}$$

то задача будет иметь множественное решение. Вообще говоря, касательное векторное поле во внешности круга, восстанавливается по вихревой функции неоднозначно. Фактор-пространство

$$\mathcal{H}^1 = \operatorname{Ker} \operatorname{curl} / \operatorname{Im} \nabla = \left\{ \theta \frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

является одномерным, в основе которого содержится гармоническое поле - циркуляционное течение (здесь $\mathbf{x}^\perp = (-x_2, x_1)$).

В односвязных областях задача дивергенция-ротор имеет единственное решение с условием непротекания, но во внешности круга решение не единственно. Так, например, к любому решению $\mathbf{v}$ системы выше можно добавить

[34]Русанов Б.В. Медленное неустановившееся обтекание кругового цилиндра вязкой жидкостью. Докл. АН СССР. 1953; 89:6, с. 983-986.

[35]Lombardo M., Caflisch R., Sammartino M. Asymptotic analysis of the linearized Navier-Stokes equation on an exterior circular domain: Explicit solution and the zero viscosity limit. Comm. Part. Diff. Eq. 2007; 26(1,2), pp. 335-354.

поле $\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$ с любым коэффициентом, характеризующим направление и интесивность вращения. Это поле является безвихревым, удовлетворяющим условию непротекания (11). Для единственности восстановления соленоидального векторного поля по вихревой функции с условием непротекания во внешних областях необходимо зафиксировать циркуляцию векторного поля по любому замкнутому контуру, охватывающему область. Согласно формуле Стокса, значения циркуляций векторного поля отличаются на интеграл от ротора по ограниченному контурами множеству. Поэтому при заданной вихревой функции w фиксация циркуляции на одном из контуров автоматически означает фиксацию на другом. Для задач обтекания тел естественно предположить, что поток на бесконечности плоскопараллельный и безциркуляционный, зафикировав циркуляцию на бесконечности:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|\mathbf{x}|=R} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{12}$$

Задача дивергенция-ротор, дополненная (12), уже имеет единственное решение с условием непротекания. С условием прилипания она явно разрешается через интегральный оператор:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} w(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{v}_\infty, \tag{13}$$

но чтобы полученное векторное поле удовлетворяло условию прилипания, необходимо выполнение условий ортогональности.

Формула (13) представляет собой известный закон Био-Савара. В диссертации исследована разрешимость задачи (7)-(10). Первое требование на функцию ротора w получается непосредственно из формулы Стокса:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|\mathbf{x}|=R} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} - \oint_{|\mathbf{x}|=r_0} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_{B_{r_0}} w\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Интегрируя (6) по B_{r_0} из формулы Грина находится первое интегральное краевое условие для функции ротора:

$$\int_{S_{r_0}} \frac{\partial w(t,\mathbf{x})}{\partial n} dl = 0.$$

Это условие является условием Неймана для нулевого коэффициента Фурье.

$$\frac{\partial w_0(t,\mathbf{x})}{\partial r} = 0.$$

Согласно закону Био-Савара (13) условие прилипания на границе диска для $\mathbf{x}$, $|\mathbf{x}| = r_0$ дает интегральные соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} w(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{v}_\infty = 0.$$

Эти соотношения являются условием ортогональности w аналитическим функциям $\frac{1}{z^k}$ по аналогии с условием ортогональности в ограниченных областях[36].

В диссертации выведено это условие ортогональности в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{z^k} d\mathbf{x} = \begin{cases} 0, \ k \geq 0, \ k \neq 1, \\ iv_\infty, \ k = 1. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $z = x_1 + ix_2 = re^{i\varphi}$. То есть для внешних областей условие ортогональности нарушается на функциях вида $1/z$.

Уравнение (6) относительно коэффициентов Фурье w_k имеет вид

$$\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial t} - \Delta_k w_k = 0.$$

Тогда из (14)

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-|k|+1} w_k(r) dr \equiv const, \tag{15}$$

и, следовательно, условие прилипания влечет соотношения

$$\frac{d}{dt}\int_{r_0}^{\infty} r^{-|k|+1} w_k(t,r) dr = 0,$$

из которых получаются именно граничные условия на вихревую функцию:

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} \Delta_k w_k(t,r) dr = -r_0^{-|k|} \left(r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) \right) = 0.$$

Система Стокса в вихревой форме является уравнением теплопроводности с третьим краевым условием. Решение этой системы находится с помощью вырожденного преобразования Вебера $W_{k,k-1}$. Но, если начальное условие для векторного поля удовлетворяет условию прилипания, т.е. начальное и граничное условие являются согласованными, то ротор от начального условия удовлетворяет, в частности, (14). Соотношения (14) есть условие ортогональности начальной функции к функциям $r^{-|k|}$, т.е. к ядру преобразования Вебера:

$$w_k \perp \frac{1}{r^k}, k > 1. \tag{16}$$

Последнее соотношение есть условие обратимости преобразования Вебера, и оно на пространстве, ортогональном ядру, является невырожденным.

Система Стокса, заданная во внешности диска $B_{r_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \ |\mathbf{x}| > r_0\}$, $r_0 > 0$ с фиксированным горизонтальным потоком на бесконечности

[36] Quartapell L. Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations. Birkhauser, Boston, 1993.

$\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0) \in \mathbb{R}^2$ имеет вид:

$$\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} = \nabla p \tag{17}$$
$$\text{div } \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0 \tag{18}$$
$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \tag{19}$$
$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0, \ |\mathbf{x}| = r_0 \tag{20}$$
$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty, \ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{21}$$

Доказывается следующая

Теорема 6. *Пусть векторное поле* $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ *удовлетворяет (18), (20), (21), (12),* $\text{curl}\, \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0}) \cap L_2(B_{r_0})$. *Тогда решение* $w = \text{curl}\, \mathbf{v}$ *определяется с помощью коэффициентов Фурье:*

$$w_k(t, r) = W^{-1}_{|k|,|k|-1} \left[e^{-\lambda^2 t} W_{|k|,|k|-1} [w_k^0(\cdot)](\lambda) \right] (t, r). \tag{22}$$

Здесь используется $|k|$ в индексе преобразования, поскольку Δ_k включает в себя k^2 и инвариантно относительно замены k на $-k$. Исходное векторное поле находится по формуле (13).

Замечание. *Применение вырожденного преобразования Вебера позволило дать новое объяснение парадокса Стокса об отсутствии стационарного решения задачи. Действительно, если стационарное решение существует, то его вихревая функция* w_k *должна быть из ядра оператора* Δ_k. *Однако, условие прилипания есть именно условие ортогональности (16) вихревой функции ядру оператора* Δ_k. *А нулевая функция* w *решением задачи обтекания быть не может если* $\mathbf{v}_\infty \neq 0$.

Счетный набор соотношений (15) относительно коэффициентов Фурье w_k, обеспечивающий выполнения условия прилипания, задает множество M:

$$M = \left\{ w(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0}) \ \middle| \ \int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{z^k} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = const \right\},$$

где $z = x_1 + ix_2$, $z = re^{i\varphi}$. По сути M играет роль инвариантного многообразия, на котором постоянно должно оставаться решение в течении всего времени дабы сохранить условие прилипания на границе. В последующем это позволит построить граничное псевдо-управление для нелинейной системы Навье-Стокса.

В третьей главе результаты предыдущей главы расширяются на произвольную внешнюю область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, в которой строится краевое условие исключительно в терминах вихревой функции. Также в этой главе доказывается теорема однозначной разрешимости задачи дивергенция-ротор в L_2.

Исследуется разрешимость задачи дивергенция-ротор с условием прилипания (7)-(10) в произвольной односвязной внешней области и выводится модифицированный закон Био-Савара.

Задача восстановления векторного поля по ротору в ограниченных областях, внешних областях и для всего пространства была предметом множества исследований. С условием непротекания эта задача исследовалась многими математиками[37] [38]. Была получена оценка оператора Био-Савара для $\|\mathbf{v}\|_{L_\infty}$ поля скоростей $\mathbf{v}$ через нормы $\|w\|_{L_1}$ и $\|w\|_{L_\infty}$. Для задачи Коши $L_p - L_q$- и L_∞-оценки получены Галлэйем и Уэйном [39].

В диссертации получено решение внешней задачи дивергенция-ротор с условием прилипания. Из-за наличия циркуляционного течения вида $\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$, решение задачи может иметь *бесконечную кинетическую энергию*, т.е. не принадлежать L_2. Условие нулевого среднего от вихревой функции (и, следовательно, отсутствие циркуляции на бесконечности), является необходимым условием, чтобы решение имело конечную энергию (за вычетом скорости потока $\mathbf{v}_\infty$).

Задача дивергенция-ротор не всегда имеет решение. Для условия прилипания в диссертации выводится условие ортогональности ротора гармоническим функциям в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \frac{w(\mathbf{x})}{\Phi(z)^k}d\mathbf{x} = \begin{cases} 0, \ k \geq 0, \ k \neq 1, \\ iv_\infty, \ k = 1, \end{cases} \tag{23}$$

которое обеспечивает разрешимость задачи дивергенция-ротор. Здесь Φ - отображение Римана из Ω во внешность круга, являющееся тождественным на бесконечности:

$$\Phi(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Условие (23) порождает инвариантное аффинное многообразие M. И уже из инвариантности M относительно потока Стокса находится краевое граничное условие. Результаты этой главы подкрепляются примерами конкретных областей, получаемых отображением Жуковского (эллипс, аэропрофиль), и приведенными в Приложении диссертации.

В третьей главе доказывается следующая теорема:

Теорема 7. *Дана область $\Omega = \mathbb{R}^2\backslash\overline{G}$, G - ограниченная односвязная область с границей, которая задается гладкой жордановой кривой. Если $w(\cdot)(1 + |\mathbf{x}|^2)^{N/2} \in L_2(\Omega)$, $N > 1$ удовлетворяет (23), то тогда существует единственное решение задачи (7)-(10), (12), и для него справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|w(\mathbf{x})(1 + |\mathbf{x}|^2)^{N/2}\|_{L_2(\Omega)}.$$

С применением отображения Римана Φ в диссертации выводится граничное условие прилипания для ротора $w(\Phi^{-1}(\cdot))$, заданного уже во внешности

[37] Iftimie, D., Lopes Filho, M. C. Nussenzveig Lopes, H. J. Two dimensional incompressible ideal flow around a small obstacle. 2003; Comm. P.D.E. 28, pp. 349–379.

[38] Lacave. C. Two-dimensional incompressible ideal ow around a thin obstacle tending to a curve. Annales Inst. H. Poincare Analyse Non Lineaire. 2009; 26, pp. 1121-1148.

[39] Gallay Th., Wayne C.E. Invariant manifolds and the long-time asymptotics od the Navies-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$. Arch. Ration. Mech. Anal. 2002; 163:3:209-258.

круга, вида:

$$\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = 0.$$

В четвертой главе строится вихревое условие прилипания для системы Навье-Стокса

$$\begin{aligned}
&\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla w) = \nabla p,\\
&\text{div } \mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = 0,\\
&\mathbf{v}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\\
&\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = 0,\ |\mathbf{x}| = r_0,\\
&\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty.
\end{aligned}$$

Системы с ненулевым условием на бесконечности относят к системам с бесконечной энергией. Их решения как функции с конечным интегралом Дирихле были изучены Абэ, Маремонти [40] [41].

В четвертой главе предложен подход к построению граничного условия для завихренности как *псевдо-управление*. Для линейной системы Стокса это условие являлось нулевым граничным условием третьего типа - как во внешности круга, так и в произвольной области.

Здесь же граничное условие выступает в роли *псевдо-управления*. Поскольку условие прилипания порождает инвариантное многообразие M для w, то по-сути граничное условие становится граничным управлением $u(t)$, обязывающим решение оставаться на M. При этом в действительности никакого управляющего воздействия на систему не оказывается.

Если мы ограничим счетный набор соотношений в условии прилипания (23) только конечным набором для $k = 1, ..., N$, мы получим аффинное многообразие M_N конечной коразмерности:

$$M_N = \left\{ w(\mathbf{x}) \in L_1(\Omega) \,\Big|\, \int_\Omega \frac{w(\mathbf{x})}{\Phi(z)^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{cases} 0,\ k = 0,\dots,N,\ k \neq 1 \\ iv_\infty,\ k = 1 \end{cases} \right\}.$$

Принадлежность этому многообразию означает выполнение *приближенного условия прилипания.*

Граничное условие находится в терминах коэффициентов Фурье $w_k(t,r)$ завихренности $w(\Phi^{-1}(\mathbf{x}))$, и является уже ненулевым условием третьего типа:

$$\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = u_k(t). \tag{24}$$

Для получения приближенного условия прилипания ищется только конечный набор u_k для $|k| \leq N$, полагая $u_k(t) = 0$ для $|k| > N$. Далее, поскольку $w_{-k}(t,r) = \overline{w_k(t,r)}$, то $u_{-k}(t) = \overline{u_k(t)}$.

[40] Abe K. Global well-posedness of the Two-Dimensional Exterior Navier–Stokes Equations for non-decaying data. Arch. Rational Mech. Anal. 2018; 227:69–104.

[41] Maremonti P. On the Stokes problem in exterior domains: the maximum modulus theorems. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2014; 34:2135–2171.

Доказывается существование граничного управления такого вида, и локальная разрешимость краевой задачи. Вихревое уравнение, соответствующее системе Навье-Стокса, после отображения Римана Φ из области Ω во внешность единичного круга принимает следующий вид:

$$|(\Phi^{-1})'(z)|^2\partial_t w(t,\mathbf{x}) - \Delta w + \mathrm{Re}(\Phi^{-1})'(\mathbf{v},\nabla w) - \mathrm{Im}(\Phi^{-1})'(\mathbf{v}^\perp,\nabla w) = 0. \quad (25)$$

Пространство решений определяется как весовое пространство Соболева $W = \{f \in L_{2,N},\ \nabla f \in L_{2,N}\}$, где

$$L_{2,N}(\Omega) = \{f(\mathbf{x}) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(\Omega)} = \int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2(1+|\mathbf{x}|^2)^N \mathrm{d}\mathbf{x} < \infty\}.$$

В четвертой главе доказывается

Теорема 8. *Пусть для любых фиксированных $N > 0$, $T > 0$ существует решение $w_N(t,\mathbf{x}) \in C([0,T],W))$ вихревого уравнения (25) с условиями*

$$w(0,\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \quad (26)$$
$$w(t,\mathbf{x}) \to 0,\ |\mathbf{x}| \to \infty, \quad (27)$$

граничным условием (24), которое является локально-липшицевым по $u_k \in C[0,T]$, $k = -N,\dots,N$, $w_0(\mathbf{x}) \in W$. Тогда с некоторой $M > 0$ и произвольным начальным условием, удовлетворяющим $\|w_0(\cdot)\|_W \le M$ существует такая граничная функция $\vec{u}(t) = \{u_k(t)\}_{k=0}^N$, что $w_N(t,\cdot)$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{w_N(\mathbf{x})}{z^k}|\Phi^{-1\prime}(z)|^2 d\mathbf{x} = \begin{cases} 0,\ k = 0,\dots,N,\ k \ne 1 \\ iv_\infty,\ k = 1 \end{cases}$$

для всех $t \in [0,T]$.

Для круга доказывается теорема разрешимости системы Навье-Стокса в вихревой форме.

Теорема 9. *Для произвольного $L > 0$ существует $T = T(L) > 0$ что для всех $w_0 \in W$, $u_k \in C[0,T]$, $k = 0,\dots,N$, $\|w_0\| \le L$, $\|u_k(\cdot)\|_{C[0,T]} \le L$ начально-краевая задача для вихревого уравнения (25) с условиями (24), (26), (27) имеет единственное решение $w(t,\mathbf{x}) \in C([0,T],W)$, локально-липшицевое по краевым и начальным данным.*

В пятой главе решается задача стабилизации решения при помощи граничного управления. Но вместо условия прилипания ставится задача стабилизации ротора во внешней области к нулю со степенной скоростью.

Во внешних областях для нулевых граничных условий на бесконечности ($\mathbf{v}_\infty = 0$) Маремонти, Солонников[42] получили $L_p - L_q$ оценку стабилизации

[42] Маремонти П., Солонников В. А. Об оценке решений системы Стокса во внешних областях. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 9. 1990; Зап. научн. сем. ЛОМИ, 180, Изд-во Наука, Ленинград. отд., Л., с. 105–120.

поля скоростей и его градиента. Энергетические оценки для решения систем Стокса и Навье-Стокса во внешних областях с условием прилипания были получены Галди, Маремонти, Бошером, Миакавой. В работе Козоно и Огава[43] доказана однозначная разрешимость решения системы Навье-Сокса с нулевым граничным условием и начальным условием $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega) \cap L_q(\Omega), q \in (1,2)$ во внешней области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей. Была получена оценка при $t \to \infty$ для решения $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_p(\Omega)} = o\left(t^{1/p-1/q}\right),\ 2 \le p < \infty.$$

Для двумерной системы Стокса Дан и Шибата[44] получили $L_p - L_q$ оценку:

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_p(\Omega)} \le Ct^{1/p-1/q}\|\mathbf{v}_0(\cdot)\|_{L_q},\ 1 < q \le p < \infty.$$

Затем Мукминов[45] получил схожую оценку для решений задачи Коши системы Навье-Стокса в L_∞. Для функции ротора решения системы Навье-Стокса получена асимптотика вихревой функции и самого векторного поля Галлаем, Уэйном.

Целью пятой главы диссертации является получение бóльших скоростей стабилизации за счет граничного управления.

В контексте стабилизации внутренние и внешние задачи имеют существенные различия. Во-первых, экспоненциальная стабилизация, которая типична для ограниченных областей, во внешних областях меняется на степенную скорость сходимости. Во-вторых, спектр линеаризованной системы Навье-Стокса, на котором базируется исследование стабилизации, является дискретным в ограниченных областях, когда решение внешней задачи включает непрерывный спектр линеаризованного оператора. Когда неограниченная область является всей плоскостью, то оператор Лапласа с помощью пространственно-временного преобразования может быть преобразован в модифицированный оператор с дискретным спектром. Используя этот метод, Галлай и Уэйн[46] исследовали асимптотику решений системы Навье-Стокса. Было построено устойчивое инвариантное многообразие M, что решение задачи Коши для системы Навье-Стокса с начальными данными из M оставалось на нем для всех $t > 0$ и стремилось к нулю как $\frac{1}{t^k}$.

Метод устойчивых инвариантных многообразий является ключевым для исследования задач стабилизации. Решение исходной задачи продолжается на большую область, чтобы продолженное решение оказалось на инвариантном многообразии. Этим методом А.В. Фурсиковым[47] была исследована задача стабилизации уравнений гидродинамики в ограниченных областях.

[43] Kozono H., Ogawa T. Decay properties of strong solutions for the Navier-Stokes equations in two-dimensional unbounded domains. Arch. for Rat. Mech. and Analysis. 1993; 122:1:1-17.

[44] W. Dan and Y. Shibata. On the L_q -L_r estimates of the Stokes semigroup in a two-dimensional exterior domain, J. Math. Soc. Japan. 1999; 51:1, pp. 181-207.

[45] Mukminov F. Kh. On uniform stabilization of solutions of the exterior problem for the Navier–Stokes equations. Mat. Sb. 1994; 185:3:41–68.

[46] Gallay Th., Wayne C.E. Invariant manifolds and the long-time asymptotics od the Navies-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$. Arch. Ration. Mech. Anal. 2002; 163:3, pp. 209-258.

[47] Fursikov, A.V. Stabilizability of two-dimensional Navier-Stokes equation with help of boundary feedback control. J. Math. Fluid Mech. 2001; 3, pp. 259-301.

Также этим методом в работах автора [6]-[11] была исследована стабилизируемость различных эволюционных уравнений и систем в неограниченных областях. Для внешних областей был использован метод продолжения начальных данных до задачи Коши. Начальные условия продолжались со внешней области до всей плоскости $\mathbb{R}^2$ таким образом, чтобы продолженное начальное условие попало на M, что обеспечивало степенную стабилизацию решения к нулю.

В конечных областях старшие коэффициенты Фурье решения уравнения теплопроводности с нулевой правой частью при слагаемых вида $\exp(ikx)$ экспоненциально убывают как e^{-k^2t}. Поэтому в стабилизации нуждаются только младшие коэффициенты. И соответственно управление, стабилизирующее к нулю решение, является низкочастотным. Как показано в диссертации, это актуально для системы Стокса во внешних областях с заменой экспоненциальной стабилизации степенной.

Рассматривается задача граничного управления

$$\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \nabla p, \tag{28}$$

$$\text{div } \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0, \tag{29}$$

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \tag{30}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{31}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{32}$$

Для заданного фиксированного $k > 0$, требуется найти такое управление $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}))$, заданное на $\partial\Omega$, чтобы решение внешней задачи (28) - (32) стремилось к горизонтальному потоку при $t \to \infty$ как

$$\|\mathbf{v}(t, \cdot) - \mathbf{v}_\infty(\cdot)\|_{L_q(\Omega)} \le \frac{C}{t^k}, \tag{33}$$

где C зависит от $\mathbf{v}_0(\cdot), k$.

В качестве фазового пространства используется L_2 с экспоненциальным весом:

$$L_{2,e}(\Omega) = L_2(\Omega, e^{\frac{|\mathbf{x}|^2}{4}}) = \big\{ f(\mathbf{x}) \big| \|f\|^2_{L_{2,e}(\Omega)} = \int_\Omega |f(t, \mathbf{x})|^2 e^{\frac{|\mathbf{x}|^2}{4}} d\mathbf{x} < \infty \big\}.$$

Аффинное пространство решений определяется следующим образом:

$$\mathcal{J}^q(\Omega) = \{ \mathbf{v}(\cdot) = \big(v_1(\cdot), v_2(\cdot)\big),\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty \in \big(W^1_q(\Omega)\big)^2, \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \},$$

а пространство начальных данных задается с использованием весовых пространств:

$$V^0_q(\Omega) = \{ \mathbf{v}^0(\cdot) : \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_\infty \in \big(W^1_q(\Omega)\big)^2, \operatorname{curl} \mathbf{v}^0 \in L_{2,e}(\Omega), \\ \text{div } \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = 0 \},$$

где $q > 2$, W^1_q - пространство Соболева функций, которые вместе с производными первого порядка принадлежат L_q. Для граничных функций используется пространство Бесова $B^{1-1/q}_q(\partial\Omega)$.

Основным результатом пятой главы является следующая теорема.

Теорема 10. *Для некоторого* $\varepsilon > 0$ *и произвольного* $\mathbf{v}_0 \in V_q^0(\Omega)$, $q > 2$, *удовлетворяющего* $\|\operatorname{curl} \mathbf{v}_0\|_{L_{2,e}(\Omega)} < \varepsilon$, *заданного во внешней области* Ω *с гладкой границей, существует граничное управление* $\mathbf{u} = (u_1(t, \mathbf{x}'), u_2(t, \mathbf{x}')))$ $\in \big(L_\infty(\mathbb{R}_+; B_q^{1-1/q}(\partial\Omega))\big)^2$ *такое, что решение задачи (28) - (32)* $(\mathbf{v}, \nabla p) \in C\big(\mathbb{R}_+; \mathcal{J}^q(\Omega)\big) \times L_q(\Omega)$ *удовлетворяет условию стабилизации (33).*

Заключение

Итоги выполненного исследования доказали практическую значимость вырожденных преобразований типа Фурье, порождаемых третьей краевой задачей. Вырожденное преобразование Вебера доказало свою актуальность, найдя применение в решении задачи Стокса. Спектральная структура преобразования дала новую интерпретацию парадокса Стокса. Равенство Планшереля-Парсеваля дало новые оценки вихревой полугруппы Стокса, которые нашли применение в нелинейных задачах.

Также исследованием доказано, что принцип ортогональности является актуальным и для внешних областей и течений с бесконечной энергией. Проведенное исследование задачи Ходжа-Гельмгольца восстановления скорости по ротору показало применимость принципа ортогональности ротора гармоническим функциям и для внешних областей с ненулевым набегающим потоком. При этом в отсутствии циркуляции на бесконечности получаемое решение допускает оценки векторного поля в L_2.

Проведенное исследование показало возможность постановки в явной форме граничного условия для ротора без привлечения дополнительных функций (тока, скорости) в линейных плоских задачах гидродинамики. Дальнейшее исследование показало возможность нахождения аналогичного граничного условия в нелинейных задачах гидродинамики. Подход к граничному условию в нелинейных задачах как к *псевдо-управлению на инвариантное многообразие* показал свою эффективность в построении граничного условия.

Математическое моделирование показало реализуемость предложенного подхода решения граничной задачи для вихревого уравнения с уменьшением количества неизвестных разрешаемых функций с трех до одной функции вихря.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Дальнейшие исследования могут проходить в следующих направлениях:

1. Исследование вырожденных преобразований типа Фурье, порождаемых третьей краевой задачей для операторов Δ_k с потенциалом.
2. Исследование разрешимости задачи дивергенция-ротор в трехмерной внешней области с условием прилипания.
3. Вывод принципа ортогональности для вихревой функции в трехмерной внешней области.

Публикации автора по теме диссертации

1. Горшков А.В. Специальное преобразование Вебера с ненулевым ядром. Матем. заметки. 2023; 114:2 с. 212–228.
2. Gorshkov A.V. No-Slip Boundary Condition for Vorticity Equation in 2D Exterior Domain, J. of Math. Fluid Mech. 2023; 25:47.
3. Gorshkov A.V. Stable invariant manifolds with application to control problems, Mathematical Control and Related Fields(MCRF). 2022; 12:3, pp. 695-707.
4. Gorshkov A.V. Associated Weber-Orr Transform, Biot-Savart Law and Explicit Form of the Solution of 2D Stokes System in Exterior of the Disc. J. Math. Fluid Mech. 2019; 21:3.
5. Горшков А.В. Спектральное представление функции ротора внешней задачи Стокса в цилиндрических областях, Труды НИИСИ РАН. Математическое и компьютерное моделирование сложных систем: теоретические и прикладные аспекты. 2019; 9:2, с. 71-74.
6. Горшков А.В. Инвариантные многообразия для уравнения Бюргерса, заданного на полуоси, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018; 58:1 с. 95–107.
7. Gorshkov A.V. Boundary Stabilization of Stokes System in Exterior Domains, J. of Math. Fluid Mech. 2016; 18:4 : 679-697.
8. Горшков А.В. Стабилизация решения уравнения теплопроводности во внешности сферы с управлением на границе, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2016; 5, с. 3–14.
9. Gorshkov A.V. Stabilization of a Solution to the Heat Equation with Boundary Control in the Exterior of a Disc. J Math Sci. 2015; 210, pp. 635–647.
10. Gorshkov A.V. Stabilization of a Solution to the Heat Equation on the Half-Axis with Locally Distributed Control. J Math Sci. 2015; 205, pp. 190–198.
11. Горшков А.В. Стабилизация решения двумерной системы уравнений Навье–Стокса во внешности ограниченной области посредством управления с границы, Матем. сб. 2012; 203:9, с. 15–40.
12. Gorshkov A.V. Stabilization of 2D Navier-Stokes system in exterior of a bounded domain by means of boundary control. Book of abstracts "Differential Equations and Related Topics" dedicated to I.G.Petrovskii., Moscow, 2011; с. 49-50.
13. Горшков А.В. Задача Ходжа-Гельмгольца и условие прилипания во внешних областях. Материалы международной Воронежской зимней математической школы С.Г.Крейна, посвященной памяти В. П. Маслова, Воронеж, 2024; с. 80-82.
14. Горшков А.В. Задача Ходжа-Гельмгольца. Материалы международной Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV", Воронеж, 2024; с. 98-100.