МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ГОРШКОВ АЛЕКСЕЙ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИЛИПАНИЯ ДЛЯ ВИХРЕВОЙ ФУНКЦИИ В УРАВНЕНИЯХ ГИДРОДИНАМИКИ

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н, проф.
Фурсиков А.В.

Москва – 2023

Оглавление

Введение 5
Глава 1. Вырожденные преобразования Вебера $W_{k,k\pm1}[\cdot]$ 37
1.1 Пример вырожденного преобразования 37
1.2 Классическое преобразование Вебера $W_{k,k}[\cdot]$ 41
1.3 Определение вырожденного преобразования в общем случае . 45
1.4 Определение вырожденного преобразования Вебера $W_{k,k\pm1}$. . 50
1.4.1 Основные свойства преобразования Вебера 51
1.4.2 Вывод преобразования Вебера через решение начально-краевой задачи 55
1.4.3 Сильная непрерывность полугруппы 64
1.4.4 Доказательство формулы обращения 66
1.5 Правила дифференцирования и мультипликативные свойства вырожденных преобразований Вебера 67
1.6 Применение интегралов Вебера для оценки полугрупп эволюционных уравнений 69
1.6.1 Оценка полугруппы для уравнения теплопроводности во внешности диска 70
Глава 2. Решение задачи Стокса во внешности диска 72
2.1 Постановка задачи и основной результат 72
2.2 Закон Био-Савара в полярных координатах 75
2.2.1 Условие прилипания в вихревой форме 78
2.3 Вывод граничного условия и решение задачи Стокса. 80
2.4 Оценка полугруппы потока Стокса 83
2.5 Решение задачи Стокса при движении вращающегося диска, и при его неравномерном движении 86
2.5.1 Условие непротекания 86

2.5.2 Условие прилипания при вращении диска 89
2.5.3 Неравномерное движение вращающегося диска 90
Глава 3. Разрешимость задачи дивергенция-ротор. Вихревое граничное условие для потока Стокса во внешней плоской области 94
3.1 Гармонические поля 94
3.2 Задача дивергенция-ротор во внешней области и интегральное условие прилипания 98
3.2.1 Оценки решения задачи дивергенция-ротор для внешности диска 100
3.2.2 Задача дивергенция-ротор во внешности односвязной области 106
3.2.3 Инвариантные аффинные многообразия и условие прилипания 113
3.3 Вихревое граничное условие для потока Стокса во внешних областях 116
3.3.1 Вывод граничного условия 118
3.4 Интегральный закон Био-Савара 120
3.5 Оценки решения задачи дивергенция-ротор с условием непротекания 124
3.5.1 Задача дивергенция-ротор во внешности круга 125
3.5.2 Задача дивергенция-ротор во внешней односвязной области 130
Глава 4. Вихревое граничное условие для системы Навье-Стокса во внешней плоской области 133
4.1 Вихревое псевдограничное условие 133
4.1.1 Вихревое псевдограничное условие во внешности диска 134
4.1.2 Вихревое псевдограничное условие во внешней области 136

4.2 Граничное условие во внешней области 138
4.3 Разрешимость линеаризованной системы Озеена в вихревой форме со специальным граничным условием 142
4.4 Разрешимость нелинейной системы Навье-Стокса в вихревой форме со специальным граничным условием 147
Глава 5. Стабилизация вихревых решений при помощи граничного управления 155
5.1 Стабилизация решения системы Стокса во внешней области . 155
5.1.1 Постановка задачи 155
5.1.2 Преобразование Ганкеля 156
5.1.3 Стабилизация вихревой функции 158
5.1.4 Стабилизации скорости во внешности круга 168
5.1.5 Стабилизация скорости во внешней области. Завершение доказательства теоремы 5.1.1 169
5.2 Стабилизация решения системы Навье-Стокса во внешней области 171
5.2.1 Постановка задачи стабилизации 171
5.2.2 Локальная теорема существования решения задачи Коши 173
5.2.3 Инвариантные подпространства и многообразия 178
5.2.4 Стабилизация решения. Граничное управление 185
Заключение 190
Литература 194
Приложение 205

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Тема диссертации относится к теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В диссертации исследуется краевая задача гидродинамики для класса решений с бесконечной энергией, описываемая вихревым уравнением, и заданная во внешности ограниченной области.

Изучается движение тела во внешнем потоке с условием прилипания на границе, динамика которого описывается вихревым уравнением. И главной темой исследования является построение граничного условия прилипания в вихревой форме и доказательство разрешимости.

Нелинейные уравнения гидродинамики, выписанные относительно функций *скорость-давление* могут сводиться к системам *скорость-ротор* или системам *ток-ротор*. Если поле скоростей выражается интегральным оператором через завихренность(ротор), то уравнения, написанные в терминах одной завихренности становятся интегро-дифференциальными.

Для баротропной среды оператор ротора устраняет наиболее сложную функцию - давление. Для двумерных и трехмерных систем Навье-Стокса динамика завихренности включает меньшее число уравнений и неизвестных, чем в формулировке "скорость-давление". В этом заключается преимущество вихревых уравнений. Напротив, сложность такого подхода заключается в постановке краевого условия (например, условия прилипания) в терминах одной завихренности.

Система может не иметь граничного условия - как, например, задача Коши во всем пространстве для вихревого уравнения. Тогда оператор ротора значительно упрощает соответствующую задачу с начальным условием, исследовавшуюся Гига, Камбэ [73], Галлэйем, Уэйном [71]. Но в случае

начально-краевой задачи с заданной областью, краевое условие прилипания для ротора по прежнему остается сложным интегральным соотношением.

В работах Квартапэлли и Уальс-Гриза [102] [103] для ограниченных односвязных областей были выведены проекционные условия на вихревую функцию, заключающиеся в ортогональности ротора пространству гармонических функций. В односвязной области соленоидальное двумерное векторное поле $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ представляется как орто-градиент

$$\mathbf{v} = \nabla^{\perp}\psi$$

функции тока ψ, где $\nabla^{\perp}_{\mathbf{x}} = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$.

Условие прилипания $\mathbf{v} = 0$ на границе области Ω влечет нулевые граничные условия на функцию тока:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}} = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

и для ограниченных областей из соотношения

$$\Delta\psi = \operatorname{curl}\mathbf{v}$$

согласно формуле Грина следует ортогональность $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ гармоническим функциям. Это и есть условие прилипания, выраженное в терминах только вихревой функции. При этом это условие не является краевым, а наоборот, распределенным по всей области. В диссертации показывается, что *принцип ортогональности* может быть распространен на внешние области и течения с бесконечной энергией (с некоторыми изменениями).

Одним из наиболее распространенных подходов к решению вихревого уравнения является именно система *ток-ротор*. Система Навье-Стокса вместо давления обретает новую неизвестную функцию тока и дополнительное уравнение, повышающее порядок системы. В этой системе токзавихренность условие прилипания становится граничным условием для функции тока. Суть построения граничного условия для вихревой функ-

ции заключается в локальной дискретизации соотношений между завихренностью и током на границе области. Поэтому такие условия относят к локальным. Первые разностные соотношения такого рода были получены Томом [109] в 1933 году, и были усовершенствованы с помощью аппроксимаций более высокого порядка в моделях Вудса, Фромма, и др. Этому подходу посвящено множество работ [114] [48] [112] [107]. В работе Захаренкова [116] было изучено параметрическое граничное условие, включающее завихренность и функцию тока. Некоторые новые результаты по граничным условиям Неймана и Дирихле для завихренности на твердых стенках были приведены в [100].

Для того, чтобы по ротору можно было однозначно восстановить соленоидальное векторное поле, требуется исследовать *задачу дивергенция-ротор* (в англоязычной литературе она называется *div-curl problem*).

Задача восстановления векторного поля по ротору в ограниченных областях, внешних областях и для всего пространства была предметом множества исследований. С условием непротекания эта задача была исследована в [81] [82] [87] [88]. Была получена оценка оператора Био-Савара $\|\mathbf{v}\|_{L_\infty}$ поля скоростей $\mathbf{v}$ через нормы $\|w\|_{L_1}$ и $\|w\|_{L_\infty}$. Для задачи Коши $L_p - L_q$- и L_∞-оценки получены в [71] [72]. В ограниченных областях оценки в L_2 решения приводятся в [56].

Для 2D и 3D областей с граничным условием на тангенциальную и нормальную компоненту скорости div-curl задача также изучалась в [49] [50] [84]. Для внешних 3D областей асимптотические свойства решений получены в [98]. С граничным условием Неймана внешняя div-curl задача была исследована в [61].

В диссертации доказывается однозначная разрешимость задачи дивергенция-ротор для внешних областей с условием прилипания на границе, и заданным внешним потоком на бесконечности. При этом получены энергетические оценки в L_2 и H_1.

Течения с бесконечной энергией во внешних областях с заданным потоком на бесконечности

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v}_\infty, \ |\mathbf{x}| \to \infty$$

были предметом исследования многих математиков. Эти задачи называются *задачами обтекания*. Для линеаризованных уравнений классическими работами в этой области являются работы Стокса [106], Бассета [51], Ламба [89]. Стоксом [106] рассматривалось медленное течение линеаризованных уравнений без конвективной части. Уравнение с добавленным слагаемым переноса исследовал Ламб [89]. Для цилиндра и шара Русановым [39] [40] [41] получены оценки убывания по времени нестационарного решения. Для цилиндра с помощью функции тока задача исследовалась Гумеровым [28].

Для тел произвольной формы задача обтекания исследовалась Ладыженской [31], Финном [63] [64], Солонниковым, Маремонти [35], Миакавой [37], Галди, Шибатой, Хейвудом [68] [78] [79], Абе [47].

Отличительной особенностью таких задач является отсутствие квадратичной интегрируемости величины $\mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty$ при сохранении конечности интеграла Дирихле. В работе [63] Финн доказал бесконечность кинетической энергии потока $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$ для стационарного решения ввиду наличия протяженной теневой зоны за обтекаемым телом. Также бесконечную энергию имеет разность между нестационарным и стационарным потоком с фиксированным условием на бесконечности [64]. Бесконечность энергии потока связана еще с одним фактором. Как отмечалось в работах Ладыженской, Финна, корректность задач обтекания обусловлена типом стремления скорости к $\mathbf{v}_\infty$. Поток может иметь ненулевую циркуляцию на бесконечности, и наличие этой циркуляции порождает бесконечность L_2 нормы. Исключение циркуляционной части потока позволяет получить конечность этой нормы для нестационарных течений.

В задаче обтекания условие ортогональности, соответствующее условию прилипания, видоизменяется ввиду бесконечности области. В диссертации выводится новое *условие ортогональности* для внешних областей с набегающим потоком. В дальнейшем это условие ортогональности превращается в граничное условие для ротора. Это граничное условие порождает спектральную задачу, в которой спектр состоит из непрерывной части и одного точечного значения. Эта задача порождает вырожденное преобразование Фурье, с помощью которого ставится и решается соответствующая граничная задача для уравнения вихря.

Для цилиндра находится явное решение задачи обтекания в вихревой форме. В явной форме граничное условие находится и для произвольных плоских областей. Для нелинейных уравнений также находится граничное условие для вихревой функции(функции ротора) *как псевдо-управление*, и доказывается разрешимость соответствующих задач. Решение задачи обтекания находится с помощью вырожденного интегрального преобразования типа Фурье.

Преобразования типа Фурье могут быть ассоциированы со спектральной задачей с симметрическим дифференциальным оператором A. Эта задача была предметом исследования большого количества математиков. Отметим лишь классические работы Левитана [33] [34], Гельфанда [7], Титчмарша [43]. Обычные и *обобщенные* (по Гельфанду [8]) собственные функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$A\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$$

с тем или иным краевым условием.

Обобщенные собственные функции порождают преобразование Фурье вида

$$F[f] = \int \varphi(x,\lambda) f(x) dx.$$

Большинство известных преобразований Фурье, связанных с уравнениями математической физики, имеют тривиальное ядро, и для них выполняются формулы обращения, и, как следствие, равенство Парсеваля. Иными словами, система *обобщенных собственных функций* (т.е. не принадлежащих фазовому пространству), входящих в определение интегрального преобразования, является полной.

Однако, в ряде случаев дифференциальный оператор помимо непрерывной части спектра, которая и определяет это преобразование, может содержать набор *обыкновенных собственных функций* $\{e_k\}$, и равенство Парсеваля приобретает вид

$$\|f\|^2 = \|F[f]\|^2 + \sum_k (f, e_k)^2, \tag{0.0.1}$$

где $\{e_k\}$ становятся элементами ядра преобразования F, которое мы будем называть *вырожденным*.

Замечание. Точечный спектр может делить непрерывный спектр на части; или может являться его граничной точкой. В преобразовании, которое исследуется в диссертации, точечный спектр будет принадлежать границе непрерывного спектра. Непрерывный спектр будет являться открытым множеством, а точечное значение замыкать его.

Функции $\{\varphi(x, \lambda)\}$ вместе с $\{e_k(x)\}$ образуют *полную ортонормированную систему функций* в L_2. Понятие ортогональности и полноты системы обобщенных и классических собственных функций требует строгого определения, поскольку $\varphi(x, \lambda)$ не принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$ и для них скалярное произведение не определено. Когда система обобщенных собственных функций полна, а спектр состоит только из непрерывной части, то для $\varphi(x, \lambda)$ понятие ортогональности определяется через $\delta-$ функцию следующим образом (см. [7]):

$$(\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \zeta)) = \delta(\lambda - \zeta).$$

Это определение содержит одновременно свойство ортогональности и полноты. В математической физике данные системы функций встречаются, например, при разложении волновой функции микрочастицы по ортонормированной системе собственных функций оператора импульса (см. [36])

Но в случае, когда спектр содержит еще и собственные значения $\{e_k\}$, то это определение требует уточнения, поскольку полнота обобщенных собственных функций утрачивается.

Ортогональность $\varphi(x,\lambda)$ и e_k определяется через действие

$$\langle \varphi(\cdot,\lambda), e_k\rangle = \int \varphi(s,\lambda)e_k(s)ds = 0.$$

Действие $\langle \varphi(\cdot,\lambda), e_k\rangle$ является преобразованием Фурье $F[e_k]$ и условие ортогональности уже содержит условие вырожденности преобразования Фурье.

Замечание. Полная ортонормированная система обобщенных и обычных собственных функций порождает вырожденное преобразование Фурье, если набор обычных собственных функций не пуст.

Что касается приложений, то разложение волновой функции одновременно по непрерывному и точечному спектру применяется в квантовой механике [36], когда непрерывный спектр оператора Шредингера дополняется точечными значениями "потенциальных ям".

Вырожденное преобразование Фурье порождает оператор Лапласа в бесконечных областях с третьим краевым условием. Однако, например, в уравнении теплопроводности граничное условие третьего типа с $a > 0$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - af\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

порождающее смешанное спектральное разложение, относится к *нефизическим*, и, как правило, в дифференциальных уравнениях не рассматривается (здесь $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к границе области). В этом случае оператор Лапласа $A = \Delta$ будет иметь непрерывный спектр $\mathbb{R}_-$ и, дополнительно, одно или два собственных значения.

Решение приобретает экспоненциально растущую компоненту, отвечающую положительному собственному значению, которое для диссипативных структур не соответствует реальным диффузионным процессам. Это справедливо как для одномерных, так и для многомерных областей.

Поэтому данные краевые условия имеют физический смысл только когда $a < 0$, и случай $a > 0$ в задачах математической физики почти не встречается. И одним из результатов диссертации является вывод формулы обращения вырожденного преобразования Вебера для смешанной краевой задачи, *и его применение к реальной физической задаче*, связанной с уравнением гидродинамики.

Обобщенное преобразование Вебера определяется для индексов $k, l \in \mathbb{R}$ как

$$W_{k,l}[f](\lambda) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s)Y_l(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s)J_l(\lambda r_0)}{\sqrt{J_l^2(\lambda r_0) + Y_l^2(\lambda r_0)}} f(s)s\,\mathrm{d}s,$$
$$W_{k,l}^{-1}[\hat{f}](r) = \int_{0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda r)Y_l(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r)J_l(\lambda r_0)}{\sqrt{J_l^2(\lambda r_0) + Y_l^2(\lambda r_0)}} \hat{f}(\lambda)\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Здесь $r_0 > 0$ - фиксированный параметр, $k \in \mathbb{R}$, $J_k(r)$, $Y_k(r)$ - функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Классическое преобразования Вебера $W_{k,k}$ со времени первой публикации [111] в 1873 году определялось для функций с ограниченной вариацией. Позднее, в статье [110], опубликованной в 1923 году, Титчмарш доказал формулу обращения

$$\frac{f(r-0) + f(r+0)}{2} = W_{k,k}^{-1}\left[W_{k,k}[f]\right](r). \tag{0.0.2}$$

Свойства преобразования были предметом многих дальнейших исследований, в которых уже не требовалась ограниченность вариации и преобразование исследовалось в пространствах интегрируемых функций. Титчмарш позднее в книге [43] представил формулу обращения для квадратично-интегрируемых функций. Пример данного преобразования также был рассмотрен в книге Наймарка [38]. Результаты дальнейших исследований этого

преобразования отражены в работах [113] [59] [4] [115]. Обобщение определения этого преобразования для распределений было сделано в работе [101], а в [54] был рассмотрен случай комплексных индексов k.

Это преобразование нашло широкое применение в уравнениях математической физики - оптики, диффузии, теплопроводности. В работе Гольдштейна [74] исследовалась теплопроводность во внешности кругового цилиндра; в книге Дэвиса [59] это преобразование применялось в исследовании теплопроводности бесконечной плиты. Также оно упоминается в книге Озисика по теплопроводности [99].

Позднее определение преобразований Вебера было обобщено на случай различных индексов $k, l \in \mathbb{R}$. И вот в этих преобразованиях формула обратимости нарушается ввиду наличия нетривиального ядра. И если классическое преобразование Вебера может быть ассоциировано с задачей Дирихле, то эти преобразования находят применения в задачах Неймана и третьей краевой.

Начало этим исследованиям было положено в работе Гольдштейна [74] [75]. Также эти преобразования упоминаются в книге Титчмарша [43].

В статье [76] Гриффитс внес исправления в формулу обратимости, приведенную Титчмаршем в [43], и вывел обратное преобразование для обобщенных преобразований Вебера для положительных значений k. Для $l > k$ эти преобразования также изучались в работах Гольдштейна [74], Сиривастава [104], Краевского, Олесьяка [86], Малитца [92].

В работе [108] исследовалось краевое условие третьего типа и порождаемое интегральное преобразование в невырожденном случае. Это же преобразование в контексте соответствующей смешанной краевой задачи изучалось в работе [62].

Для случая $l < k$ помимо Грифитса, эти преобразования были исследованы Назимом [97]. Это важная работа, результат которой требует краткого описания. В ней было замечено, что для $l = k + 1$ формула об-

ращения нарушается и была найдена добавка для её корректировки. Но эта работа содержит одну важную ошибку. Добавка была дана в довольно сложной форме. Эта добавка для $k > 1$ после вычисления представленных интегралов на самом деле имеет простой вид одночленного ряда Фурье по одноточечному спектру как

$$(f, e_{0,k})e_{0,k},$$

где $e_{0,k}$ это функция $1/r^k$, умноженная на нормировочный коэффициент. Поскольку автор не использовал спектральный подход к исследованию разложения, то эта добавка им не была проинтерпретирована как коэффициент Фурье, умноженный на собственную функцию. И в этой формуле не было требования $k > 1$, т.к. для остальных значений параметра представленный интеграл просто является расходящимся.

Это еще раз доказывает, насколько спектральный подход к исследованию интегрального преобразования Вебера является более удобным и наглядным, где преобразование предстает как спектральное разложение по всем собственным функциям. Это в свою очередь делает актуальным задачу полного исследования вырожденного преобразования Вебера для всех значений k с помощью спектрального разложения оператора Лапласа по непрерывному и точечному спектру. Тогда формулы обращения становятся более прозрачными, если эти преобразования рассматривать в контексте соответствующей спектральной задачи.

Целью диссертации является построение граничных условий прилипания для нелинейных задач гидродинамики, выписанных в вихревой форме и доказательство их разрешимости.

В ходе проведенного исследования был получен ряд результатов, которые имеют самостоятельный интерес - явный вид решения вихревой системы Стокса, доказательство формулы обращения Вебера в вырожденном

случае, L_2-оценки решений внешней задачи *дивергенция-ротор* (в англоязычной литературе она встречается как *div-curl problem*).

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать вырожденное преобразование Вебера с граничным условием третьего типа - формулы обращения, равенство Парсеваля.
2. Решить внешнюю задачу *дивергенция-ротор* с условием прилипания во внешности диска.
3. Построить инвариантное многообразие, граничное условие прилипания и найти явное решение линейной задачи Стокса обтекания для внешности диска в терминах вихревой функции.
4. Решить задачу *дивергенция-ротор* с условием прилипания во внешней области.
5. Построить инвариантное многообразие и граничное условие прилипания для линейной задачи Стокса, заданной во внешности ограниченной области в $\mathbb{R}^2$.
6. Получить L_2-оценки решения задачи *дивергенция-ротор*.
7. Построить граничное условие прилипания для нелинейной системы Навье-Стокса в вихревой форме.
8. Доказать разрешимость нелинейной системы Навье-Стокса в вихревой форме с заданным граничным условием.
9. Доказать стабилизируемость решений системы Навье-Стокса в вихревой форме при помощи граничного управления.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Вырожденные преобразования типа Фурье, порождаемые третьим краевым условием, находят свое применения в актуальных задачах математической физики.

2. Формула обращения преобразования Вебера становится верной после дополнения спектрального разложения функциями из ядра преобразования.
3. Нестационарная задача Стокса обтекания цилиндра с условием прилипания имеет явную формулу решения для вихревой функции. Решение получается методом Фурье с помощью соответствующих вырожденных интегральных преобразований.
4. Условие прилипания как условие ортогональности ротора гармоническим функциям в случае внешних областей в контексте задачи обтекания имеет существенные отличия от случая ограниченных областей. Тем не менее в целом сам принцип ортогональности сохраняет свою актуальность.
5. Решение задачи *дивергенция-ротор* с условием прилипания допускает L_2 оценку для течений с нулевой циркуляцией на бесконечности (и, следовательно, нулевой средней завихренностью).
6. Для линейных задач обтекания во внешних областях возможно построение граничного условия прилипания для вихревой функции без вовлечения дополнительных функций.
7. Граничное условие прилипания для вихревой функции можно построить для нелинейной системы Навье-Стокса. Это граничное условие играет роль псевдо-управления.
8. С помощью граничного условия можно стабилизировать вихревое решение со степенной скоростью.

Научная новизна:

1. Получена формула обращения для вырожденного преобразования Вебера.
2. Найдено применение вырожденных преобразований типа Фурье в гидродинамике.

3. С помощью вырожденного преобразования Вебера решена система Стокса в вихревой форме для цилиндра с набегающим потоком на бесконечности.
4. Найдено новое обоснование парадокса Стокса в терминах ядра оператора Лапласа.
5. Доказана разрешимость задачи *дивергенция-ротор* с условием прилипания.
6. Получены L_2-оценки задачи *дивергенция-ротор* для безциркуляционного векторного поля через вихревую функцию с нулевым средним.
7. Построено граничное условие прилипания для вихревой функции системы Стокса без использования дополнительных функций.
8. Построено граничное условие прилипания для вихревой функции системы Навье-Стокса без использования дополнительных функций (тока, скорости, и т.д.) и исследована однозначная разрешимость полученного уравнения.
9. Найдено граничное условие для вихревой функции, что решение системы Навье-Стокса стабилизируется со степенной скоростью.

Методы исследования: Одним из методов исследования линейных уравнений гидродинамики является метод Фурье, задействующий как непрерывный, так и точечный спектр, с применением вырожденных интегральных преобразований.

Сам метод Фурье требует самостоятельного исследования. Он базируется на преобразовании Вебера. Для вывода формулы обращения преобразования Вебера рассматривается начально-краевая задача для уравнения диффузии с граничным условием Робина, которая с помощью преобразования Лапласа, сводится к эллиптическому уравнению. Преобразование Лапласа является ветвящейся функцией, аналитичной в плоскости с разрезом вдоль спектра оператора Лапласа. Более того, эта функция содержит вычет

в нуле, которому соответствует собственная функция из ядра преобразования. Применяя обратное преобразование Лапласа получается корректная формула обращения для преобразования Вебера.

Преобразование Вебера служит важнейшим инструментом решения задачи Стокса для внешности диска. Это же преобразование применяется при исследовании разрешимости системы Навье-Стокса.

Исследование систем Стокса и Навье-Стокса во внешних областях проводится методами комплексного анализа с применением отображения Римана. Нелинейные уравнения исследуются методом возмущения линейных задач с применением теоремы о неподвижной точке.

Научная и практическая значимость. Исследования носят теоретический характер, но при этом могут иметь и прикладное значение. За счет меньшего количества уравнений, решение уравнений гидродинамики в вихревой форме позволяет снизить вычислительные затраты на решение задач обтекания и получать численные решения при значительно меньших вычислительных ресурсах. Результаты исследования могут найти применение в вычислительной гидродинамике. Также результаты диссертации могут быть применены в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов и аспирантов.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается их строгим математическим выводом и представлением полных доказательств. Также вычислительные эксперименты подтверждают ряд полученных в диссертации результатов. Часть результатов по интегральным преобразованиям находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами, дополняя, и исправляя их.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях:

1. "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV", г. Воронеж, 2024,

2. "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2024", ВГУ, г. Воронеж, 2024,
3. "Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения", МФТИ, г. Москва, 2023,
4. "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения", ЮФУ, г. Ростов-на-Дону, 2023,
5. "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ", МФТИ, г. Долгопрудный, 2019,
6. "Спектральная теория и дифференциальные уравнения, посвященная 100-летию со дня рождения Б.М.Левитана", МГУ, г. Москва, 2014,

и семинарах:

1. Семинар по дифференциальным уравнениям под руководством Ю. А. Дубинского и А. А. Амосова на кафедре Математического моделирования МЭИ(ТУ), г. Москва, 2024 г.,
2. Семинар "Асимптотические методы в математической физике" под руководством д.ф.-м.н., профессора С.Ю.Доброхотова, ИПМех РАН г. Москва, 2024 г.,
3. Семинар "Задачи дифференциальных уравнений, анализа и управления: теория и приложения" под руководством проф. А.В.Фурсикова, проф. В.М.Тихомирова, член-корр. РАН М.И Зеликина, член-корр. РАН В.Ю.Протасова, МГУ, г. Москва, 2018, 2021, 2022, 2023 гг.,
4. Семинар "Оптимальное управление и динамические системы" под руководством д.ф.- м.н. С. М. Асеева, д.ф.-м.н. Ю. С. Ильяшенко, д.ф.-м.н. Л. В. Локуциевского, д.ф.-м.н., профессора М. С. Никольского, МИАН, г. Москва, 2023 г.,
5. Семинар "Вычислительная математика, математическая физика, управление" под руководством проф.Г.М. Кобелькова, проф.А.В. Фурсикова, ИВМ, г. Москва, 2015 г.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены автором лично.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях [9]- [19], 10 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [9], [10], [11], [12], [14], [15], [16], [17] , [18], [19], 3 — в тезисах докладов [25] [26] [27].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 226 страниц с 23 рисунками. Список литературы содержит 118 наименований.

В первой главе диссертации выводится вырожденное преобразование Вебера, включая равенства Планшереля-Парсеваля и доказывается справедливость формул обращения в пространстве $L_1 \cap L_2$.

Преобразование Вебера $W_{k,k\pm1}[\cdot]$ основано на обобщенных собственных функциях оператора Лапласа, разложенного в ряд Фурье по углу:

$$\Delta_k f_k(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_k}{dr}\right) - \frac{k^2}{r^2}f_k(r),$$

с краевым условием

$$r_0 \frac{\partial w(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} \pm k w(t,r_0) = 0. \tag{0.0.3}$$

Оно определяется как

$$W_{k,k\pm1}[f](\lambda) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s)Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0) + Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}} f(s)s\,\mathrm{d}s$$

$$W_{k,k\pm1}^{-1}[\hat{f}](r) = \int_{0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda r)Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0) + Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}} \hat{f}(\lambda)\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Здесь $r_0 > 0$ - фиксированный параметр, $k \in \mathbb{R}$, $J_k(r)$, $Y_k(r)$ - функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Преобразования, основанные на функциях Бесселя (преобразования Вебера, Ганкеля, и т.д.), содержат меру $r\,\mathrm{d}r$, и определяются для функций из $L_2(E;r)$, квадратично-интегрируемых с этой мерой.

В неограниченных областях с различными граничными условиями оператор Δ_k имеет непрерывный спектр $\sigma(\Delta_k) = \mathbb{R}_-$. Резольвента $R(\tau) = (\Delta_k - \tau I)^{-1}$ является ветвящейся функцией со скачком вдоль спектра в точке ветвления $\tau = 0$. В случае нетривиального ядра в дополнение к непрерывной части спектра собственное значение $\tau = 0$ будет обуславливать наличие слагаемого R_{-1}/τ в разложении в ряд Лорана $R(\tau)$ по τ. Оператор R_{-1} - это проектор, который выражается через коэффициенты Фурье, и проектирует на собственное подпространство $\ker(\Delta_k)$. Это подпространство является ядром преобразования $W_{k,k\pm1}$. Нетривиальное ядро в свою очередь порождает стационарное решение для уравнения диффузии.

Преобразование $W_{k,k+1}$ является вырожденным при $k < -1$, и $W_{k,k-1}$ при $k > 1$. Соответствующие собственные функции из ядра преобразования - $1/r^k$ и r^k. Они же являются собственными функциями и оператора Δ_k с краевым условием (0.0.3):

$$\Delta_k[1/r^k] = 0, \Delta_k[r^k] = 0.$$

Для $k > 1$ функция $1/r^k$ принадлежит $\ker(\Delta_k) \subset L_2(r_0, \infty; r)$, и для $k < -1$ $r^k \in \ker(\Delta_k) \subset L_2(r_0, \infty; r)$. Обе функции $1/r^k$ и r^k являются стационарным решением эволюционного уравнения с генератором Δ_k. $1/r^k$ удовлетворяет граничному условию со знаком '+' в (0.0.3), в то время как r^k со знаком '-'. Поэтому эти функции должны лежать и в ядре $W_{k,k\pm1}$.

Формула обращения имеет вид

$$f = W_{k,k\pm1}^{-1}\left[W_{k,k\pm1}[f]\right] + (f, e_{0,k}^{\pm})e_{0,k}^{\pm},$$

где $e_{0,k}$ - соответствующая нормированная функция из ядра:

$$e_{0,k}^{+} = \begin{cases} c_k^{+} r^k, \ k < -1, \\ 0, \ k \geq -1, \end{cases}$$

$$e_{0,k}^{-} = \begin{cases} c_k^{-} / r^k, \ k > 1, \\ 0, \ k \leq 1, \end{cases}$$

где $c_k^{\pm}$ - нормировочные коэффициенты.

А вместе с обобщенными собственными функциями

$$\varphi_k^{\pm}(r, \lambda) = \frac{J_k(\lambda r) Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r) J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0) + Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}}$$

они образуют полную ортонормированную систему.

В первой главе доказано, что для произвольного фиксированного $k \in \mathbb{R}$ система $\{\varphi_k^{+}(r, \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ вместе с $e_{0,k}^{+}$, а также система $\{\varphi_k^{-}(r, \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$, $e_{0,k}^{-}$ являются двумя полными ортонормированными системами в $L_2(r_0, \infty; r)$.

Для $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0, \infty) \cap L_2(r_0, \infty)$, $r_0 > 0$ выведена формула обращения преобразования Вебера:

$$f(r) = W_{k,k-1}^{-1} \left[W_{k,k-1}[f] \right](r), k \leq 1,$$

$$f(r) = W_{k,k-1}^{-1} \left[W_{k,k-1}[f] \right](r) + \frac{2(k-1) r_0^{2(k-1)}}{r^k} \int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1} f(s) \, \mathrm{d}s, k > 1,$$

$$f(r) = W_{k,k+1}^{-1} \left[W_{k,k+1}[f] \right](r), k \geq -1,$$

$$f(r) = W_{k,k+1}^{-1} \left[W_{k,k+1}[f] \right](r) - \frac{2(k+1) r^k}{r_0^{2(k+1)}} \int_{r_0}^{\infty} s^{k+1} f(s) \, \mathrm{d}s, k < -1,$$

и равенство Планшереля-Парсеваля:

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}, k \le 1,\\
\|f\|^2_{L_2(0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}\\
&\quad + 2(k-1)r_0^{2(k-1)}\left(f, 1/r^k\right)^2_{L_2(r_0,\infty;r)}, k > 1,\\
\|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} &= \|W_{k,k+1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}, k \ge -1,\\
\|f\|^2_{L_2(0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}\\
&\quad - \frac{2(k+1)}{r_0^{2(k+1)}}\left(f, r^k\right)^2_{L_2(r_0,\infty;r)}, k < -1.
\end{aligned}$$

Из этой теоремы непосредственно следует неравенство Бесселя

$$\|W_{k,k\pm1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;\lambda)} \le \|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)}.$$

С помощью преобразований $W_{k,k\pm1}$ решается третья краевая задача для уравнения теплопроводности во внешности круга со специальным краевым условием. Для коэффициентов Фурье эта задача записывается системой

$$\begin{aligned}
\partial_t w_k(t,r) - \Delta_k w_k(t,r) &= 0\\
\left(r_0 \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{s=r_0} \mp k\right)\Big|_{r=r_0} w(t,r) &= 0,\\
w(0,r) &= w_{0,k}(r).
\end{aligned}$$

Тогда решение

$$w_k(t,r) = W^{-1}_{k,k\pm1}\left[e^{-\lambda^2 t} W_{k,k\pm1}[w_{0,k}(\cdot)]\right]$$

справедливо только для начального условия, ортогонального ядру этого преобразования. Для других начальных условий к формуле выше следует прибавлять стационарное решение уравнения теплопроводности вида

$$(w_{0,k}(\cdot), e^{\pm}_{0,k}) e^{\pm}_{0,k}.$$

Преобразование $W_{k,k+1}$ для положительных значений k, при которых оно не вырождено, нашло применение в уравнениях математической физики - теории пластичности и упругости [92], теории скважинных течений [83], и при решении осесимметричных уравнений гидродинамики [74]. Невырожденные преобразования Вебера для третьего краевого условия применялись в исследованиях теплопроводности кругового цилиндра [52] и скважинной добычи из резервуара в пористой среде [118].

Автором диссертации найдено применение именно вырожденного преобразования $W_{k,k-1}$. Из-за особой спектральной структуры, включающей точечный и непрерывный спектр, это преобразование представляет отдельный интерес. В диссертации с помощью этого преобразования, именно как вырожденного, решена классическая задача гидродинамики - нестационарная задача Стокса обтекания бесконечного цилиндра. И, следовательно, преобразование $W_{k,k-1}$, несмотря на специфичность граничного условия и нетривиальное ядро, является важным прикладным преобразованием.

Найдены правило дифференцирования и мультипликативное свойство преобразования. В классическом преобразовании Фурье оператор дифференцирования переходит в оператор умножения на частоту. По аналогии с этим, дифференцирование $\frac{\partial}{\partial r}$ преобразования Вебера переходит в умножение на λ. И наоборот, умножение на λ переходит в дифференцирование, но в более общем смысле. А именно, не смотря на то, что функция f зависит только от r - дифференцирование включает не только $\frac{\partial}{\partial r}$, но и фиктивную производную по углу (т.е. производную по φ от функции $e^{ik\varphi}f(r)$).

Вторая глава диссертации посвящена решению внешней задачи для нестационарной системы Стокса, описывающей течение жидкости, обтекающей диск фиксированного радиуса при малых скоростях потока. Оказалось, что решение этой задачи также может быть найдено методом Фурье с помощью вырожденного преобразования Вебера. Как и решение уравне-

ния теплопроводности, решение системы Стокса находится в три этапа - 1. интегральное преобразование начального условия, 2. умножение на диссипативную экспоненту $e^{-\lambda^2 t}$, 3. взятие обратного преобразования:

$$w(t,x) = F^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}F[w_0]\right].$$

Граничным условием для течения жидкости является условие прилипания, т.е. условие нулевой скорости на границе тела. Также допускается вращение диска, когда скорость жидкости приравнивается к скорости на границе диска.

Известным фактом является так называемый *парадокс Стокса*, заключающийся в отсутствии стационарного решения задачи в двумерном случае [42] [5]. Решению нестационарной задачи Стокса посвящен ряд работ. Радиально симметричное решение системы Стокса для кругового цилиндра было получено Гольдштейном [74]. Однако оно не может быть применимо к задаче обтекания, поскольку в последней решение явно зависит от угловой переменной - закручивание потока над и под цилиндром происходит в противоположных направлениях. Это решение находит применение в скважинных течениях, и в течениях с нулевой скоростью потока на бесконечности.

Решение нестационарной задачи Стокса в круге было получено Русановым [39] [40], Ломбардо, Кафлишем, Сомартино [91]. Система Стокса выписывалась в полярных координатах. Сложность данного подхода заключается в том, что векторный оператор Лапласа в полярных координатах содержит дополнительные слагаемые помимо скалярной части оператора, содержащие как радиальные, так и угловые компоненты скорости. Более того, 2D система Стокса содержит три неизвестные функции - две компоненты скорости и давление. Поскольку граничное условие прилипания является условием Дирихле, то решение задачи производится с помощью классических преобразований Вебера $W_{k,k}$. Гумеровым в [28] через скалярную функцию тока получены частные решения задачи обтекания цилиндра. В размерно-

сти $n \geq 2$ Маремонти получил оценку полугруппы в L_∞, а Абэ [46] доказал аналитичность полугруппы Стокса. В локально-интегрируемых пространствах корректность нестационарной системы Стокса с ненулевым потоком на бесконечности была исследована Хейвудом [78] [79].

Система Стокса наследует свойство стабилизации от уравнения теплопроводности. Русановым была доказана оценка для $|\mathbf{x}| < R$ вида

$$|\mathbf{v}| \leq C\frac{\ln R}{\ln t},$$

из которой следует, что за счет условия прилипания, движение неравномерно останавливается во всей бесконечной области. В частности, предельный переход в при $t \to \infty$ приводит к решению, не согласующемуся с краевыми условиями.

В диссертации приводится явное решение 2D задачи Стокса во внешности круга $B_{r_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}| > r_0\},\ r_0 > 0$ с помощью интегрального преобразования Вебера. Вихревое уравнение системы Стокса есть уравнение теплопроводности для функции $w(t, \mathbf{x}) = \text{curl } \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}_1} v_2 - \partial_{\mathbf{x}_2} v_1$:

$$\frac{\partial w(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w(t, \mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2). \tag{0.0.4}$$

Трудность вызывает граничное условие прилипания, которое для вихревой функции становится интегральным. Задачей *дивергенция-ротор* называется задача восстановления соленоидального векторного поля по вихревой функции. С условием прилипания эллиптическая задача имеет вид

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \tag{0.0.5}$$

$$\text{curl } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \text{w}(\mathbf{x}), \tag{0.0.6}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0,\ |\mathbf{x}| = r_0, \tag{0.0.7}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{0.0.8}$$

Она вообще говоря не разрешима. Для её разрешимости требуется ряд дополнительных условий на вихревую функцию.

Если заменить условие прилипания непротеканием внутрь цилиндра

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0, \ |\mathbf{x}| = r_0, \tag{0.0.9}$$

то задача уже будет иметь решение, но не единственное. Вообще говоря, касательное векторное поле во внешности круга, восстанавливается по вихревой функции неоднозначно. Фактор-пространство

$$\mathcal{H}^1 = \operatorname{Ker} \operatorname{curl} / \operatorname{Im} \nabla = \left\{ \theta \frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

является одномерным, в основе которого содержится гармоническое поле - циркуляционное течение (здесь $\mathbf{x}^\perp = (-x_2, x_1)$).

В односвязных областях эта задача имеет единственное решение, но внешность круга не является таковой и содержит бесконечно удаленную точку. Так, например, к любому решению $\mathbf{v}$ системы выше можно добавить поле $\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$ с любым коэффициентом, характеризующим направление и интесивность вращения. Это поле является безвихревым, удовлетворяющим условию непротекания (0.0.9). И тогда мы получаем множественное решение задачи. Для единственности восстановления соленоидального векторного поля по вихревой функции с условием непротекания во внешних областях необходимо зафиксировать циркуляцию векторного поля по любому замкнутому контуру, охватывающему область. Согласно формуле Стокса, значения циркуляций векторного поля отличаются на интеграл от ротора по ограниченному контурами множеству. Поэтому при заданной вихревой функции w фиксация циркуляции на одном из контуров автоматически означает фиксацию на другом. Для задач обтекания тел естественно предположить, что поток на бесконечности плоскопараллельный и безциркуляционный, зафикировав циркуляцию на бесконечности:

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{|\mathbf{x}|=R} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{0.0.10}$$

Такая задача, дополненная (0.0.10), уже имеет единственное решение. Однако, усиливая условие непротекания прилипанием, задача обретает

единственность, но теряет существование. Она явно разрешается через интегральный оператор с ядром типа Кальдерона-Зигмунда [55] [105]:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}w(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{v}_{\infty}, \tag{0.0.11}$$

но чтобы полученное векторное поле удовлетворяло условию прилипания, необходимо выполнение условий ортогональности.

Само решение будет удовлетворять $L_p - L_q$ оценке:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\infty}\|_{L_q} \leq C\|w\|_{L_p} \tag{0.0.12}$$

где $1 < p < 2 < q < \infty$, $1/q = 1/p - 1/2$. Также возможно получение оценок на градиент векторного поля.

Формула (0.0.11) представляет собой известный закон Био-Савара. Изначально он предназначался для восстановления индукции магнитного поля, которое как известно также соленоидально, по заданной функции тока. Схожесть постановки задач электро- и гидро-динамики дала единую формулу [32] [77].

В диссертации исследована разрешимость задачи (0.0.5)-(0.0.8). Первое требование на функцию ротора w получается непосредственно из формулы Стокса:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{|\mathbf{x}|=R}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} - \oint_{|\mathbf{x}|=r_0}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \int_{B_{r_0}} w\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Интегрируя (0.0.4) получим

$$\int_{B_{r_0}}\frac{\partial w(t,\mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w = 0.$$

Тогда из формулы Грина находится первое интегральное краевое условие для функции ротора:

$$\int_{S_{r_0}}\frac{\partial w(t,\mathbf{x})}{\partial n}dl = 0.$$

Это условие является условием Неймана для нулевого коэффициента Фурье.

Согласно закону Био-Савара (0.0.11) условие прилипания на границе диска для $\mathbf{x},\ |\mathbf{x}| = r_0$ дает интегральные соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} w(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{v}_{\infty} = 0.$$

Это можно считать *континуальным* набором соотношений относительно w, поскольку $\mathbf{x}$ пробегает всю окружность. В диссертации показано, что континуальный набор условий на w можно заменить на счетный набор условий. Эти условия являются условием ортогональности w аналитическим функциям $\frac{1}{z^k}$ по аналогии с ограниченными областями, изучавшимися в [102] [103].

В диссертации выведено это условие ортогональности в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{z^k} d\mathbf{x} = \begin{cases} 0,\ k \geq 0,\ k \neq 1, \\ i\mathbf{v}_{\infty},\ k = 1. \end{cases} \tag{0.0.13}$$

Здесь $z = x_1 + ix_2 = re^{i\varphi}$. То есть для внешних областей условие ортогональности нарушается на функциях вида $1/z$.

Уравнение (0.0.4) относительно коэффициентов Фурье w_k имеет вид

$$\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial t} - \Delta_k w_k = 0.$$

Тогда из (0.0.13)

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-|k|+1} w_k(r) dr \equiv const, \tag{0.0.14}$$

и, следовательно, условие прилипания влечет соотношения

$$\frac{d}{dt}\int_{r_0}^{\infty} r^{-|k|+1} w_k(t,r) dr = 0,$$

из которых получаются именно граничные условия на вихревую функцию

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} \Delta_k w_k(t,r) dr = -r_0^{-|k|}\left(r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0)\right) = 0.$$

Система Стокса в вихревой форме является уравнением теплопроводности с третьим краевым условием. Решение этой системы находится с помощью вырожденного преобразования Вебера $W_{k,k-1}$. Но, если начальное условие для векторного поля удовлетворяет условию прилипания, т.е. начальное и граничное условие являются согласованными, то ротор от начального условия удовлетворяет, в частности, (0.0.13). Соотношения (0.0.13) есть условие ортогональности начальной функции к функциям $r^{-|k|}$, т.е. к ядру преобразования Вебера (напомним, что в $L_2(r_0;\infty;r)$ скалярное произведение определяется с мерой $r\,\mathrm{d}r$):

$$w_k \perp \frac{1}{r^k}, k > 1. \tag{0.0.15}$$

Последнее соотношение есть условие обратимости преобразования Вебера, и оно на пространстве, ортогональном ядру, является невырожденным.

Точное решение задачи Стокса нестационарного обтекания круга в терминах коэффициентов Фурье $w_k(t,r)$ функции ротора дается формулой

$$w_k(t,r) = W^{-1}_{|k|,|k|-1}\left[e^{-\lambda^2 t}W_{|k|,|k|-1}[w_k(0,r)]\right].$$

Здесь используется $|k|$ в индексе преобразования, поскольку Δ_k включает в себя k^2 и инвариантно относительно замены k на $-k$. Исходное векторное поле находится по формуле (0.0.11).

Замечание. Применение вырожденного преобразования Вебера позволило дать новое объяснение парадокса Стокса об отсутствии стационарного решения задачи. Действительно, если стационарное решение существует, то его вихревая функция w_k должна быть из ядра оператора Δ_k. Однако, условие прилипания есть именно условие ортогональности (0.0.15) вихревой функции ядру оператора Δ_k. А нулевая функция w решением задачи обтекания быть не может.

Счетный набор соотношений (0.0.14) относительно коэффициентов Фурье w_k, обеспечивающий выполнение условия прилипания, задает множество M:

$$M = \Big\{ w(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0}) \;\Big|\; \int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = const \Big\},$$

где $z = x_1 + ix_2$, $z = re^{i\varphi}$. По сути M играет роль инвариантного многообразия, на котором постоянно должно оставаться решение в течении всего времени дабы сохранить условие прилипания на границе. В последующем это позволит построить граничное псевдо-управление для нелинейной системы Навье-Стокса.

В третьей главе результаты предыдущей главы расширяются на произвольную внешнюю область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, в которой строится краевое условие исключительно в терминах вихревой функции.

В этом случае фактор-пространство ядра ротора по градиенту имеет вид

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \operatorname{Ker}\operatorname{curl}/\operatorname{Im}\nabla = \left\{ \theta \nabla^{\perp}_{\mathbf{x}} \ln|\Phi(\mathbf{x})|,\ \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

где Φ - отображением Римана области Ω в единичный круг B_1. Это пространство является одномерным, и в его основе находится безвихревое непотенциальное гармоническое поле, ядро которого порождает интегральное преобразование по типу закона Био-Савара. Это преобразование восстанавливает векторное поле по ротору с условием прилипания.

Для условия прилипания в диссертации выводится условие ортогональности ротора гармоническим функциям в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{\Phi(z)^k} d\mathbf{x} = \begin{cases} 0,\ k \geq 0,\ k \neq 1, \\ i\mathbf{v}_\infty,\ k = 1. \end{cases}$$

Оно порождает инвариантное аффинное многообразие M. И уже из инвариантности относительно потока Стокса находится краевое граничное

условие. Результаты этой главы подкрепляются примерами конкретных областей, получаемых отображением Жуковского (эллипс, аэропрофиль), и приведенными в Приложении.

С применением отображения Римана Φ в диссертации выводится граничное условие прилипания для ротора w, заданного уже во внешности круга, вида:

$$\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = 0. \qquad (0.0.16)$$

В этой главе также исследуется разрешимость задачи дивергенция-ротор с условием прилипания (0.0.5)-(0.0.8) в произвольной односвязной внешней области и выводится модифицированный закон Био-Савара. Из-за наличия циркуляционного течения вида $\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$, решение задачи может не принадлежать L_2. Условие нулевого среднего от вихревой функции (и, следовательно, отсутствие циркуляции на бесконечности), является необходимым условием, чтобы решение имело конечную энергию (за вычетом скорости потока $\mathbf{v}_\infty$).

В диссертации доказывается, что если w удовлетворяет условию ортогональности, то тогда существует единственное решение задачи дивергенция-ротор с условием прилипания, удовлетворяющее оценке

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(\Omega)} \le C \|w\|_{L_{2,N}(\Omega)}.$$

Здесь $L_{2,N}(\Omega)$ - весовое пространство:

$$L_{2,N}(\Omega) = \{f(\mathbf{x}) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(\Omega)} = \int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2 (1+|\mathbf{x}|^2)^N \mathrm{d}\mathbf{x} < \infty\}.$$

В четвертой главе строится вихревое условие прилипания для системы Навье-Стокса

$$\begin{aligned}
&\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla w) = \nabla p,\\
&\text{div } \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0,\\
&\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\\
&\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0,\ |\mathbf{x}| = r_0,\\
&\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty.
\end{aligned}$$

Системы с ненулевым условием на бесконечности относят к системам с бесконечной энергией. Эти решения как функции с конечным интегралом Дирихле были изучены в [47] [35]. Для задачи Коши глобальное существование и асимптотика решения при $t \to \infty$ были установлены в [71] [72] [117] [70].

В четвертой главе предложен подход к построению граничного условия для завихренности как *псевдо-управление*. Для линейной системы Стокса это условие являлось нулевым граничным условием третьего типа - как во внешности круга, так и в произвольной внешней области.

Здесь же граничное условие выступает в роли *псевдо-управления*. Поскольку условие прилипания порождает инвариантное многообразие M для w, то по-сути граничное условие становится граничным управлением $u(t)$, обязывающим решение оставаться на M. При этом в действительности никакого управляющего воздействия на систему не оказывается.

Граничное условие находится в терминах коэффициентов Фурье завихренности $w_k(t, r)$, и является уже ненулевым условием третьего типа:

$$\frac{\partial w_k(t, r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t, r_0) = u_k(t). \qquad (0.0.17)$$

Доказывается существование граничного управления, и локальная разрешимость краевой задачи.

В пятой главе во внешней области решается задача стабилизации решения вихревого уравнения к нулю со степенной скоростью при помощи граничного управления.

Во внешних областях для нулевых граничных условий на бесконечности ($\mathbf{v}_\infty = 0$) в [35] [94] Маремонти, Солонников получили $L_p - L_q$ оценку стабилизации поля скоростей и его градиента. Энергетические оценки стабилизации решения систем Стокса и Навье-Стокса во внешних областях с условием прилипания были получены Галди, Маремонти [69], Бошером, Миакавой [53]. В работе Козоно и Огава [85] доказана однозначная разрешимость решения системы Навье-Сокса с нулевым граничным условием и начальным условием $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega) \cap L_q(\Omega), q \in (1,2)$ во внешней двумерной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей. Была получена оценка при $t \to \infty$ для решения $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_p(\Omega)} = o\left(t^{1/p-1/q}\right),\ 2 \le p < \infty.$$

Для двумерной системы Стокса Дан и Шибата в [57] [58] получили $L_p - L_q$ оценку:

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_p(\Omega)} \le Ct^{1/p-1/q}\|\mathbf{v}_0(\cdot)\|_{L_q},\ 1 < q \le p < \infty.$$

Затем Мукминов в [96] получил схожую оценку для решений задачи Коши системы Навье-Стокса в L_∞. Для системы Навье-Стокса получена асимптотика вихревой функции и самого векторного поля Галлаем, Уэйном в работах [71] [72].

Целью этой главы является получение бóльших скоростей стабилизации за счет граничного управления.

В контексте стабилизации внутренние и внешние задачи имеют существенные различия. Во-первых, экспоненциальная стабилизация, которая типична для ограниченных областей, во внешних областях меняется на степенную скорость сходимости. Во-вторых, спектр линеаризованной системы Навье-Стокса, на котором базируется исследование стабилизации, яв-

ляется дискретным в ограниченных областях. А внешняя задача содержит уже непрерывный спектр линеаризованного оператора. Когда неограниченная область является всей плоскостью, то оператор Лапласа с помощью пространственно-временного преобразования может быть преобразован в модифицированный оператор с дискретным спектром. Используя этот метод, Галлай и Уэйн в работах [71], [72] исследовали асимптотику решений системы Навье-Стокса. Было построено устойчивое инвариантное многообразие M, что решение задачи Коши для системы Навье-Стокса с начальными данными из M оставалось на нем для всех $t > 0$ и стремилось к нулю как $\frac{1}{t^k}$.

Метод устойчивых инвариантных многообразий является ключевым для исследования задач стабилизации. Решение исходной задачи продолжается на большую область, чтобы продолженное решение оказалось на инвариантном многообразии. Этим методом А.В. Фурсиковым [45] [65] [66] были исследованы параболические задачи и задачи гидродинамики в ограниченных областях.

Также этим методом в работах автора [19] [20] [21] [23] [24] была исследована стабилизируемость различных эволюционных уравнений и систем в неограниченных областях. Для внешних областей был использован метод продолжения начальных данных до задачи Коши. Начальные условия продолжались со внешней области до всей плоскости $\mathbb{R}^2$ таким образом, чтобы продолженное начальное условие попало на M, что обеспечивало степенную стабилизацию решения к нулю.

В конечных областях старшие коэффициенты Фурье решения уравнения теплопроводности с нулевой правой частью при слагаемых вида $\exp(ikx)$ экспоненциально убывают как e^{-k^2t}. Поэтому в стабилизации нуждаются только младшие коэффициенты. И соответственно управление, стабилизирующее к нулю решение, является низкочастотным. Как показано

в диссертации, это актуально для системы Стокса во внешних областях с заменой экспоненциальной стабилизации степенной.

Глава 1. ВЫРОЖДЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕБЕРА $W_{k,k\pm1}[\cdot]$

1.1 Пример вырожденного преобразования

Синус-преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(\lambda s) f(s) ds$$

основывается на собственных функциях оператора

$$A = d^2/dx^2$$

в $L_2(0,\infty)$ с условием Дирихле

$$f(0) = 0.$$

Спектр оператора является непрерывным и заполняет всю отрицательную полуось: $\sigma_c = (-\infty, 0]$. Это преобразование не является вырожденным, и формула обращения имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\lambda x) \left(\int_0^\infty \sin(\lambda s) f(s) ds \right) d\lambda, \tag{1.1.1}$$

т.е. синус-преобразование Фурье обратно самому себе.

Функции $\varphi(x,\lambda) = \sin(\lambda x)$ являются *обобщенными собственными функциями* (т.е. не принадлежащими основному пространству $L_2(0,\infty)$, где задан оператор с соответствующей областью определения, а принадлежащими дооснащенному гильбертову пространству [8]):

$$\partial_{xx}\varphi(x,\lambda) = -\lambda^2 \varphi(x,\lambda).$$

Аналогично, тот же оператор с условием Неймана порождает косинус-преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(\lambda s) f(s) ds$$

с формулой обращения:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(\lambda x) \left(\int_0^\infty \cos(\lambda s) f(s) ds \right) d\lambda.$$

Это преобразование также обратно самому себе и для этих преобразований мы имеем формулу обращения

$$f = F\left[F[f]\right]. \tag{1.1.2}$$

Данные преобразования позволяют в частности решать краевые задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой.

Например, решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} &\partial_t w(t,x) - \partial_{xx} w(t,x) = 0, x \in \mathbb{R}_+ \\ &w(t,0) = 0 \\ &w(0,x) = w_0(x) \end{aligned}$$

дается формулой

$$w(t,x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 t} \left(\int_0^\infty \sin(\lambda s) w_0(s)\, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\lambda\,. \tag{1.1.3}$$

Действительно, $\sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 t}$ является решением уравнения теплопроводности. Соответственно и формула выше также ему удовлетворяет. Очевидно, выполняется и нулевое краевое условие Дирихле. Также, из формулы обращения (1.1.1) следует выполнение и начального условия краевой задачи, хотя предельный переход при $t \to 0$ в формуле решения (1.1.3) требует обоснования.

Аналогично, решением краевой задачи Неймана

$$\begin{aligned} &\partial_t w(t,x) - \partial_{xx} w(t,x) = 0, x \in \mathbb{R}_+ \\ &\partial_x w(t,0) = 0 \\ &w(0,x) = w_0(x) \end{aligned}$$

служит формула

$$w(t,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\lambda x) e^{-\lambda^2 t}\left(\int_0^\infty \cos(\lambda s) w_0(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\lambda$$

Все эти формулы для решений уравнения теплопроводности могут быть записаны и посредством свертки с фундаментальным решением. По сути, представленное решение выражается через спектральное разложение по собственным функциям оператора $A = d^2/dx^2$ в $L_2(0,\infty)$ в соответствии с методом Фурье решения уравнений с частными производными. С применением преобразования Фурье F эти формулы имеют следующую запись:

$$w(t,x) = F\left[e^{-\lambda^2 t} F[w_0]\right].$$

Но преобразование Фурье от произведения функций равняется свертке их прообразов, связанных с этим преобразованием. Следовательно

$$w(t,x) = G(t,x) * w_0,$$

где

$$G(t,x) = F\left[e^{-\lambda^2 t}\right].$$

Для классического преобразования Фурье

$$G(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Однако оператор $A = d^2/dx^2$ с условием третьего типа

$$f'(0) + af(0) = 0$$

с $a > 0$, помимо обобщенных собственных функций, уже содержит обычную собственную функцию e^{-ax} с собственным значением a^2. Его спектр состоит из непрерывной части $\sigma_c = (-\infty, 0]$ и собственного значения $\lambda = a^2$. Порождаемое оператором преобразование Фурье уже будет иметь нетривиальное ядро, содержащее эту функцию (см., например, [110]).

Для $a = 1$ обобщенными собственными функциями оператора Лапласа на полуоси с граничным условием третьего типа будут функции

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\lambda \cos(\lambda x) - \sin(\lambda x)}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

Эти функции порождают преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\lambda \cos(\lambda s) - \sin(\lambda s)}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} f(s) ds.$$

Для этого преобразования формула обращения (1.1.2) перестает быть верной, поскольку это преобразование обладает нетривиальным ядром. Точнее, формула обращения имеет место, но только для функций, ортогональных его ядру.

Функция

$$e_0(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}$$

принадлежит пространству $L_2(0, \infty)$ и является собственной функцией. Формула обращения принимает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) \left(\int_0^\infty \varphi(s, \lambda) f(s) ds \right) d\lambda + e_0(e_0, f),$$

и равенство Парсеваля дополняется одним слагаемым

$$\|f\|^2_{L_2(0,\infty)} = \|\hat{f}\|^2_{L_2(0,\infty)} + (e_0, f)^2.$$

Данное преобразование решает третью краевую задачу для уравнения теплопроводности. Например, при $a = 1$ решение задачи

$$\begin{aligned} &\partial_t w(t, x) - \partial_{xx} w(t, x) = 0, x \in \mathbb{R}_+ \\ &\partial_x w(t, 0) + w(t, 0) = 0 \\ &w(0, x) = w_0(x) \end{aligned}$$

дается формулой

$$w(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) e^{-\lambda^2 t} \left(\int_0^\infty \varphi(s, \lambda) w_0(s) \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\lambda + \tag{1.1.4}$$

$$e^t e_0(e_0, w_0). \tag{1.1.5}$$

1.2 Классическое преобразование Вебера $W_{k,k}[\cdot]$

Важным семейством операторов, порождающих вырожденное преобразование, являются операторы

$$\Delta_k = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{k^2}{r^2},\ k \in \mathbb{R}.$$

Для целых k эти операторы есть коэффициенты Фурье оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

при разложении в ряд Фурье по угловой переменной в полярных координатах.

Также как тригонометрические преобразования Фурье ассоциируются со спектральной задачей для оператора Лапласа на полуоси, то и преобразования, которые упоминаются ниже, могут быть ассоциированы со спектральными задачами для оператора Лапласа в неограниченных цилиндрических и сферических областях (например внешность круга, кругового цилиндра, многомерной сферы). Поэтому в этих преобразованиях присутствует положительный параметр r_0, который имеет геометрический смысл радиуса, и эти преобразования являются двупараметрическими с параметрами k и r_0.

Эти операторы с условиями Дирихле и Неймана порождают невырожденные интегральные преобразования. Спектр состоит только из непрерывной части и охватывают всю отрицательную полупрямую, включая начало координат: $\sigma_c = (-\infty, 0]$. Однако со смешанным граничным условием

$$r_0 \frac{\partial w(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} \pm k w(t, r_0) = 0 \tag{1.2.1}$$

помимо непрерывного спектра $\sigma_c = (-\infty, 0)$ оператор Δ_k имеет еще и собственное значение $\lambda = 0$ из ядра Δ_k. Формальными собственными функциями из ядра являются функции $1/r^{\pm k}$:

$$\Delta_k[1/r^k] = 0, \Delta_k[r^k] = 0.$$

Соответственно они порождают стационарное решение для уравнения теплопроводности. Таким образом, непрерывный спектр замыкается точечным собственным значением в нуле.

Однако не при всех k функции $1/r^{\pm k}$ принадлежат фазовому пространству, где задан оператор Δ_k. И соответственно, не всегда являются собственными функциями. Поэтому порождаемое преобразование Фурье будет не всегда вырожденным, а лишь тогда, когда точечный спектр не пуст (и состоит из одного нулевого собственного значения).

Оператор Δ_k рассматривается в пространстве $L_2(r_0, \infty; r)$ квадратично интегрируемых функций с весом r, в котором он является симметрическим (а, также, самосопряженным при определенном задании области определения).

Для $k > 1$ функция $1/r^k$ принадлежит $\ker(\Delta_k) \subset L_2(r_0, \infty; r)$, и для $k < -1$ $r^k \in \ker(\Delta_k) \subset L_2(r_0, \infty; r)$. Обе функции $1/r^k$ и r^k удовлетворяют третьему краевому условию (1.2.1). $1/r^k$ удовлетворяет условию со знаком '$+$' в краевом условии, а r^k со знаком '-'.

Следовательно, при определенных значениях k ($k > 1$ или $k < -1$) они также порождают вырожденное преобразование, являющееся обобщением классического интегрального преобразования Вебера.

И вот эти преобразования, именно как вырожденные, нашли применение в уравнениях математической физики. С их помощью автором было получено решение задачи Стокса во внешности круга (см. [12]). Последнее оправдывает интерес к таким преобразованием не только с точки зрения теории функций, но и как имеющих важное прикладное значение.

В диссертации исследуется *вырожденное преобразование Вебера*, которое сопряжено с краевой задачей с граничным условием смешанного типа. Для него в работе исследуются формулы обращения и равенство Планшереля-Парсеваля вида (0.0.1).

Преобразования, основанные на функциях Бесселя (преобразования Вебера, Ганкеля, и т.д.), содержат меру $r\,\mathrm{dr}$, и определяются для функций из $L_2(E;r)$, квадратично-интегрируемых с этой мерой.

Прямое и обратное преобразования $W_{k,k}[\cdot]$ определяются как с прямым и обратным преобразованием

$$W_{k,k}[f](\lambda) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s)Y_k(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s)J_k(\lambda r_0)}{\sqrt{J_k^2(\lambda r_0) + Y_k^2(\lambda r_0)}} f(s)s\,\mathrm{ds}, \tag{1.2.2}$$

$$W_{k,k}^{-1}[\hat{f}](r) = \int_{0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda r)Y_k(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r)J_k(\lambda r_0)}{\sqrt{J_k^2(\lambda r_0) + Y_k^2(\lambda r_0)}} \hat{f}(\lambda)\lambda\,\mathrm{d}\lambda, \tag{1.2.3}$$

где $r_0 > 0$ - фиксированный параметр, $k \in \mathbb{R}$, $J_k(r)$, $Y_k(r)$ - функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Так, например, точное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности во внешности круга $B_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| > r_0\}$ с нулевым краевым условием Дирихле

$$\begin{aligned} \partial_t w(t,x) - \Delta w(t,x) &= 0 \\ w(t,x) &= 0, x \in \partial B_{r_0} \\ w(0,x) &= w_0(x) \end{aligned}$$

находится в полярных координатах в виде ряда Фурье по углу

$$w(t,r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} w_k(t,r)$$

с коэффициентами Фурье, задаваемыми формулой

$$w_k(t,r) = W_{k,k}^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t} W_{k,k}[w_{0,k}(\cdot)]\right],$$

где $w_{0,k}(\cdot)$ - коэффициенты Фурье начального условия.

Действительно, здесь также из формулы обращения следует выполнение начального условия $w(0,x) = w_0(x)$. Очевидно выполняется и граничное условие.

Уравнение теплопроводности в полярных координатах для коэффициентов Фурье имеет вид

$$\partial_t w_k(t,r) - \Delta w_k(t,r) = 0.$$

Функции Бесселя первого и второго рода J_k, Y_k являются решениями уравнения Бесселя

$$\Delta_k f = -f.$$

Они являются формальными собственными функциями оператора Δ_k. По аналогии с синусами и косинусами, которые являются собственными функциями одномерного Лапласиана

$$\partial_{xx} \sin(\lambda x) = -\lambda^2 \sin(\lambda x),$$
$$\partial_{xx} \cos(\lambda x) = -\lambda^2 \cos(\lambda x),$$

для них выполняются соотношения

$$\Delta_k J_k(\lambda r) = -\lambda^2 J_k(\lambda r),$$
$$\Delta_k Y_k(\lambda r) = -\lambda^2 Y_k(\lambda r).$$

Поэтому такой же формальной собственной функцией является и

$$\varphi_k(r,\lambda) = \frac{J_k(\lambda r)Y_k(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r)J_k(\lambda r_0)}{\sqrt{J_k^2(\lambda r_0) + Y_k^2(\lambda r_0)}},$$

которая есть линейная комбинацией функций Бесселя. Эта обобщенная собственная функция определяет ядро интегрального преобразования Вебера.

Поэтому

$$\Delta_k \varphi_k(r,\lambda) = -\lambda^2 \varphi_k(r,\lambda),$$

и, следовательно, $e^{-\lambda^2 t}\varphi_k(r,\lambda)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности. И эта функция удовлетворяет нулевому граничному условию Дирихле.

Позднее определение преобразований Вебера было обобщено на случай различных индексов $k, l \in \mathbb{R}$:

$$W_{k,l}[f](\lambda) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s)Y_l(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s)J_l(\lambda r_0)}{\sqrt{J_l^2(\lambda r_0) + Y_l^2(\lambda r_0)}} f(s)s\,\mathrm{d}s,$$
$$W_{k,l}^{-1}[\hat{f}](r) = \int_{0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda r)Y_l(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r)J_l(\lambda r_0)}{\sqrt{J_l^2(\lambda r_0) + Y_l^2(\lambda r_0)}} \hat{f}(\lambda)\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

1.3 Определение вырожденного преобразования в общем случае

В этом разделе мы дадим определение вырожденного преобразования в общем случае.

Пусть оператор $Af(x) = f'' - q(x)f$, определенный на полуоси $x \in (0, \infty)$, имеет спектр $\sigma(A)$, который состоит из непрерывной части $E \subset \mathbb{R}$, и не более чем счетного набора собственных значений конечной кратности $\{\lambda_k\}$ с собственными функциями $\{e_k\}$. Как известно([110] [33] [34]), если $q(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$, то найдутся обобщенные собственные функции $\varphi(x, \lambda)$, задающие преобразование Фурье

$$F[f] = \int_0^{\infty} \varphi(x, \lambda)f(x)dx, \tag{1.3.1}$$

где

$$A\varphi(x, \lambda) = \lambda\varphi(x, \lambda).$$

При этом существует спектральная функция $\rho(\lambda)$ и $F[f]$ принадлежит пространству $L_2\left(E, \rho(\lambda)\right)$ квадратично-интегрируемых функций с весом $\rho(\lambda)$.

Обратное преобразование Фурье будет иметь вид:

$$F^*[\hat{f}] = \int_E \varphi(x, \zeta)\hat{f}(\zeta)d\rho(\zeta)$$

Определение 1.3.1. Функции $\varphi(x, \lambda)$ назовем ортонормированными, обозначая как $\langle\varphi(\cdot, \lambda), \varphi(\cdot, \zeta)\rangle = \delta(\lambda - \zeta)$, если

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} \varphi(x, \lambda) \left(\int_E \varphi(x, \zeta)\hat{f}(\zeta)d\rho(\zeta) \right) dx \tag{1.3.2}$$

для любой функции $\hat{f}(\lambda)$ вида $\hat{f}(\lambda) = F[f(\cdot)](\lambda)$, $f(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$.

Равенство в этом определении следует из формального применения δ-функции $\delta(\lambda-\zeta)$ к $\hat{f}(\lambda)$. Формула (1.3.2) есть формула обращения $\hat{f} = F[F^*[\hat{f}]]$ для обратного преобразования Фурье, и она будет выполняться для функций $\hat{f}$ из образа F. А формула обращения для прямого преобразования $f = F^*[F[f]]$ будет выполняться для $f \in \ker^{\perp} F$.

Определение 1.3.2. Будем говорить, что $\{\{\varphi(\cdot,\lambda)\},\{e_k\}\}$ является полной ортонормированной системой собственных функций оператора A, если $\langle\varphi(\cdot,\lambda),\varphi(\cdot,\zeta)\rangle = \delta(\lambda-\zeta)$, $\langle\varphi(\cdot,\lambda),e_k\rangle_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0$, $(e_k,e_j)_{L_2(\mathbb{R}_+)} = \delta_{k,j}$ для любых $\lambda,\zeta \in E$ и собственных функций e_k, e_j, и выполняется равенство Парсеваля (0.0.1).

Замечание. В этом определении $(\varphi(\cdot,\lambda),e_k)_{L_2(\mathbb{R}_+)}$ рассматривается не как скалярное произведение, а действие

$$\langle\varphi(\cdot,\lambda),e_k\rangle_{L_2(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty \varphi(x,\lambda)e_k(x)dx.$$

Поскольку $e_k(x)$ принадлежит L_2, то интеграл выше существует при почти всех λ.

Определение 1.3.3. Преобразование F, даваемое формулой (1.3.1), называется вырожденным, если существует $f \neq 0$ такая, что $F[f] = 0$.

Лемма 1.3.4. *Пусть оператор A является генератором сильно-непрерывной в $L_2(0,\infty)$ полугруппы e^{tA}; его спектр вещественен, ограничен сверху, состоит из непрерывной части, и не более чем счетного набора собственных значений $\{e_k\}$, а резольвента удовлетворяет оценке $\|R(A,\lambda)\| \le C/\lambda$ с некоторой $C > 0$. Тогда система его собственных функций образует полную ортонормированную систему и справедлива формула обращения*

$$f(x) = \int_E \varphi(x,\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(s,\lambda)f(s)ds\right)f(x)d\rho(\lambda) + \sum_k (f,e_k)e_k. \qquad (1.3.3)$$

При этом, если точечный спектр не пуст, то преобразование F, даваемое формулой (1.3.1), является вырожденным.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу в $L_2(\mathbb{R}_+)$:

$$\partial_t y(t,x) - Ay = 0, y(0,x) = f(x).$$

Используя оценку на резольвенту $R(A,\lambda)$ в формулировке теоремы, решение $y(t,x) = e^{tA}$ этого уравнения можно задать формулой

$$y(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t} R(A,\lambda) f(x) d\lambda,$$

где контур γ охватывает вещественный спектр оператора A. В случае неограниченного спектра γ является границей сектора $S_{a,\theta} = \{\lambda \in \mathbb{C},\ |arg(\lambda - a)| > \theta\}$ с некоторыми $a > 0$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Резольвента имеет разрыв вдоль множества E, а точки λ_k являются её полюсами. Интеграл

$$P_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda - \lambda_k| = \varepsilon} R(A,\lambda) d\lambda$$

при достаточно малом ε является конечномерным проектором на собственное подпространство E_k(см. [30]). И тогда решение принимает следующий вид:

$$y(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_E e^{\lambda t}\left(R(A,\lambda - i\cdot 0) - R(A,\lambda + i\cdot 0)\right) f(x) d\lambda + \sum_k e^{\lambda_k t}(f,e_k)e_k.$$

Согласно [43] интеграл в последнем равенстве задает семейство операторов проецирования на обобщенное собственное подпространство, и может быть выражен через собственные функции $\varphi(x,\lambda)$, давая итоговую формулу для решения $y(t,x)$:

$$y(t,x) = \int_E e^{\lambda t}\varphi(x,\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(s,\lambda) f(s) ds\right) f(x) d\rho(\lambda) + \sum_k e^{\lambda_k t}(f,e_k)e_k. \tag{1.3.4}$$

Докажем формулу обращения (1.3.3). Отсюда будет следовать также и полнота собственных функций. Поскольку A является генератором сильно-непрерывной полугруппы e^{tA}, то $y(t,\cdot) \to f(x)$ сильно при $t \to 0$. Если множество непрерывного спектра E является ограниченным, то допустим предельный переход при $t \to 0$ под знаком интеграла в (1.3.4) и формула обращения доказана. Если же E не ограничено, то мы должны обосновать законность предельного перехода при $t \to 0$. Достаточно доказать возможность предельного перехода только лишь в интегральной части равенства (1.3.4). Докажем слабую сходимость при $t \to 0$:

$$y(t,x) \rightharpoonup \int_E \varphi(x,\lambda) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s,\lambda) f(s) ds \right) f(x) d\rho(\lambda) + \sum_k (f, e_k) e_k.$$

Возьмем произвольную $g \in C_0^\infty(r_0, \infty)$. Тогда $\hat{g}(\lambda) = F[g(\cdot)](\lambda)$ будет быстро убывать по λ. Справедливо следующее

Предложение 1.3.5. *Для произвольной $g \in C_0^\infty(r_0,\infty)$ верно $\lambda \hat{g}(\lambda) \in L_2(E, \rho(\lambda))$.*

Доказательство. Поскольку $A\varphi = \lambda\varphi$, то

$$\hat{g}(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(x,\lambda) g(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty A[\varphi(x,\lambda)] g(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \varphi(x,\lambda) A[g(x)] dx.$$

Т.к. $A[g(x)] \in L_2(\mathbb{R}_+)$, то $\int_0^\infty \varphi(x,\lambda) A[g(x)] dx \in L_2(E, \rho(\lambda))$ и Предложение доказано. □

Обозначим через F^* сопряженное преобразование:

$$F^*[\hat{g}(\cdot)](x) = \int_E \varphi(x,\lambda) \hat{g}(\lambda) d\rho(\lambda).$$

Тогда

$$\left(F^*\left[e^{\lambda t} F[f]\right], g(\cdot)\right)_{L_2(\mathbb{R}_+)} = \left(e^{\lambda t} F[f], F[g]\right)_{L_2(E,\rho(\lambda))} = \left(e^{\lambda t} \hat{f}(\lambda), \hat{g}(\lambda)\right)_{L_2(E,\rho(\lambda))},$$

где $\hat{f}(\lambda) = F[f](\lambda)$, $\hat{g}(\lambda) = F[g](\lambda)$.

С учетом доказанного выше предложения остатки интегралов

$$\int_{-\infty}^{L}\left|e^{\lambda t}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\right|d\rho(\lambda)=\int_{-\infty}^{L}\left|e^{\lambda t}\frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda}\hat{g}(\lambda)\lambda\right|d\rho(\lambda)\leq\frac{1}{|L|}\|\hat{f}(\lambda)\|\|\hat{g}(\lambda)\lambda\|$$

сходятся к нулю равномерно по t при $L\to-\infty$. Следовательно мы доказали правомерность перехода при $t\to 0$:

$$\left(e^{\lambda t}\hat{f}(\lambda),\hat{g}(\lambda)\right)_{L_2(E,\rho(\lambda))}\to\left(\hat{f}(\lambda),\hat{g}(\lambda)\right)_{L_2(E,\rho(\lambda))}.$$

Из единственности слабого предела с учетом $y(t,\cdot)\to f(\cdot)$ почти всюду выполнена формула обращения

$$f(\cdot)=F^*\left[F[f]\right]+\sum_k(f,e_k)e_k.$$

Докажем, что $e_k\in Ker(F)$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)e_k(x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty A[\varphi(x,\lambda)]e_k(x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)Ae_k(x)dx\\=\frac{\lambda_k}{\lambda}\int_0^\infty\varphi(x,\lambda)e_k(x)dx,\end{aligned}$$

откуда $F[e_k]=0$.

Условие ортогональности (1.3.2) следует из формулы обращения, если к последней применить преобразование F:

$$\hat{f}=F\left[F^*\hat{f}\right].$$

Равенство Парсеваля (0.0.1) следует в свою очередь из формулы обращения (1.3.3), теоремы Фубини и ортонормированности системы собственных функций:

$$(f,g)=\left(F^*\left[Ff\right],g\right)=\left(Ff,Fg\right).$$

Теорема доказана полностью. □

1.4 Определение вырожденного преобразования Вебера $W_{k,k\pm1}$.

Преобразования $W_{k,k\pm1}[\cdot]$ для $k \in \mathbb{R}$, $r_0 > 0$ определяются как

$$W_{k,k\pm1}[f](\lambda) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s)Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0) + Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}} f(s)s\,\mathrm{d}s\,. \qquad (1.4.1)$$

Определим обратное преобразование Вебера:

$$W_{k,k\pm1}^{-1}[\hat{f}](r) = \int_{0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda r)Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0) + Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}} \hat{f}(\lambda)\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,. \qquad (1.4.2)$$

Далее будет показано, что $\ker(W_{k,k\pm1}^{-1}) \neq \{0\}$ и равенство Планшереля дополнится слагаемым из ядра согласно (0.0.1).

Мы выведем формулу обращения для $W_{k,k\pm1}[\cdot]$. Преобразование Фурье основывается на обобщенных собственных функциях оператора Лапласа Δ, заданных в неограниченной области. Оператор Δ является генератором сильно непрерывной полугруппы, которая является решением начально-краевой задачи для некоторого дифференциального уравнения. Например, с помощью преобразования $W_{k,k\pm1}[\cdot]$ решается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности во внешней части круга радиуса $r_0 > 0$ с условием Робина на его границе.

Для функций из $E \subset \mathbb{R}_+$ вместе с обычным пространством интегрируемых функций $L_1(E)$, $L_2(E)$ будем использовать пространство $L_2(E;r)$, $L_2(E;\lambda)$ квадратично интегрируемых функций с мерой $r\,\mathrm{d}r$, $\lambda\,\mathrm{d}\lambda$, снабженное нормой

$$\|f\|_{L_2(E;r)}^2 = \int\limits_E |f(r)|^2 r\,\mathrm{d}r,$$

$$\|f\|_{L_2(E;\lambda)}^2 = \int\limits_E |f(\lambda)|^2 \lambda\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

1.4.1 Основные свойства преобразования Вебера

Мы снабдим Δ_k таким граничным условием третьего типа, что ядро Δ_k станет ненулевым. Резольвента $R(\tau) = (\Delta_k - \tau I)^{-1}$ представляет собой ветвящуюся функцию с разрывом вдоль непрерывного спектра $\sigma_c(\Delta_k) = \mathbb{R}_-$. Собственное значение $\tau = 0$ будет генерировать дополнительное слагаемое R_{-1}/τ в разложении $R(\tau)$, где R_{-1} - проектор на собственное подпространство $\ker(\Delta_k)$. Это подпространство в сочетании с функциями из непрерывной части спектра $\sigma_c(\Delta_k)$ составляют полную систему в $L_2(r_0, \infty; r)$.

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 1.4.1. *Для $\lambda > 1$ с некоторым $C = C(k, r_0)$ справедливо*

$$|W_{k,k\pm1}[f](\lambda)| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|f\sqrt{r}\|_{L_1(0,\infty)}.$$

Доказательство. Из неравенства

$$\frac{\max\left(|J_k(\lambda r_0)|, |Y_k(\lambda r_0|)\right)}{\sqrt{J_k(\lambda r_0)^2 + Y_k(\lambda r_0)^2}} \leq 1 \tag{1.4.3}$$

и следующего асимптотического представления функций Бесселя с большим аргументом (см. Бейтман, Эрдейи [3])

$$J_k(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos\left(z - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{(4k^2-1)(4k^2-9)}{8z} \sin\left(z - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \tag{1.4.4}$$
$$+ \mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|^2} \right),$$

$$Y_k(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin\left(z - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{(4k^2-1)(4k^2-9)}{8z} \cos\left(z - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \tag{1.4.5}$$
$$+ \mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|^2} \right),$$

с некоторым $C > 0$ будем иметь

$$\left|\int_{r_0}^{\infty} J_k(\lambda s) f(s) s \, \mathrm{ds}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{r_0}^{\infty} J_k(\lambda s)\sqrt{\lambda s} f(s)\sqrt{s} \, \mathrm{ds}\right| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|f\sqrt{r}\|_{L_1(0,\infty)},$$
$$\left|\int_{r_0}^{\infty} Y_k(\lambda s) f(s) s \, \mathrm{ds}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{r_0}^{\infty} Y_k(\lambda s)\sqrt{\lambda s} f(s)\sqrt{s} \, \mathrm{ds}\right| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \|f\sqrt{r}\|_{L_1(0,\infty)},$$

и

$$\left|\int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s) Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_{k\pm1}(\lambda s) J_k(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k\pm1}^2(\lambda r_0) + Y_{k\pm1}^2(\lambda r_0)}} f(s) s \, \mathrm{ds}\right| \leq \frac{2C}{\sqrt{\lambda}} \|f\sqrt{r}\|_{L_1(0,\infty)}.$$

□

Через преобразование $W_{k,k}[\cdot]$ решается уравнения теплопроводности с нулевым условием Дирихле, а через $W_{k,k\pm1}[\cdot]$ - то же уравнение

$$\frac{\partial w(t,r)}{\partial t} - \Delta_k w(t,r) = 0, \tag{1.4.6}$$

но с условием третьего типа

$$r_0 \frac{\partial w(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} \mp k w(t,r_0) = 0, k \in \mathbb{R}. \tag{1.4.7}$$

Снабдим краевую задачу начальным условием

$$w(0,r) = f(r). \tag{1.4.8}$$

Ввиду

$$\Delta_k J_k(\lambda r) = -\lambda^2 J_k(\lambda r),$$
$$\Delta_k Y_k(\lambda r) = -\lambda^2 Y_k(\lambda r),$$

если бы была верна формула обращения (0.0.2) то решение (1.4.6), (1.4.7), (1.4.8) давалось бы формулой

$$w(t,\cdot) = W_{k,k\pm1}^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t} W_{k,k\pm1}[f]\right].$$

Но так как

$$\Delta_k[1/r^k] = 0, \Delta_k[r^k] = 0,$$

то для $k > 1$ функция $1/r^k$ принадлежит $\ker(\Delta_k) \subset L_2(r_0, \infty; r)$, и для $k < -1$ $r^k \in \ker(\Delta_k) \subset L_2(r_0, \infty; r)$. Обе функции $1/r^k$ и r^k являются стационарным решением (1.4.6). $1/r^k$ удовлетворяет граничному условию со знаком '+' в (1.4.7), в то время как r^k со знаком '-'. Поэтому эти функции должны лежать и в ядре $W_{k,k\pm1}$, что и доказывается в следующей лемме.

Лемма 1.4.2. *Для $k > 1$ $1/r^k \in \ker(W_{k,k-1}) \subset L_2(r_0, \infty; r)$, и для $k < -1$ $r^k \in \ker(W_{k,k+1}) \subset L_2(r_0, \infty; r)$.*

Доказательство. Для $k > 1$ $1/r^k \in L_2(r_0, \infty; r)$, и для $k < -1$ $r^k \in L_2(r_0, \infty; r)$. Из соотношений (см. [3])

$$\int s^{-k+1} J_k(s) ds = s^{-k+1} J_{k-1}(s),$$
$$\int s^{-k+1} Y_k(s) ds = s^{-k+1} Y_{k-1}(s),$$
$$\int s^{k+1} J_k(s) ds = s^{k+1} J_{k+1}(s),$$
$$\int s^{k+1} Y_k(s) ds = s^{k+1} Y_{k+1}(s)$$

следует

$$W_{k,k-1}[1/r^k](\lambda) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s) Y_{k-1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s) J_{k-1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0) + Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}} \left(1/s^k\right) s \, \mathrm{ds} = 0, k > 1,$$

$$W_{k,k+1}[r^k](\lambda) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{J_k(\lambda s) Y_{k+1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda s) J_{k+1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k+1}^2(\lambda r_0) + Y_{k+1}^2(\lambda r_0)}} \left(s^k\right) s \, \mathrm{ds} = 0, k < -1.$$

□

Поэтому формула обращения для преобразования Вебера имеет вид

$$f = W_{k,k\pm1}^{-1} \left[W_{k,k\pm1}[f] \right] + (f, e_{0,k}^{\pm}) e_{0,k}^{\pm},$$

где $e_{0,k}$ - соответствующая нормированная функция из ядра:

$$e^+_{0,k} = \begin{cases} c^+_k r^k, \ k < -1, \\ 0, \ k \geq -1, \end{cases}$$

$$e^-_{0,k} = \begin{cases} c^-_k / r^k, \ k > 1, \\ 0, \ k \leq 1, \end{cases}$$

где $c^\pm_k$ - нормировочные коэффициенты.

А вместе с обобщенными собственными функциями

$$\varphi^\pm_k(r,\lambda) = \frac{J_k(\lambda r)Y_{k\pm1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r)J_{k\pm1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J^2_{k\pm1}(\lambda r_0) + Y^2_{k\pm1}(\lambda r_0)}}$$

они образуют полную ортонормированную систему.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема. Она включает в себя формулы обращения и равенство Планшереля-Парсеваля (0.0.1).

Теорема 1.4.3. *Для произвольного фиксированного $k \in \mathbb{R}$ система $\{\varphi^+_k(r,\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ вместе с $e^+_{0,k}$, а также система $\{\varphi^-_k(r,\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $e^-_{0,k}$ являются двумя полными ортонормированными системами. Для $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0,\infty) \cap L_2(r_0,\infty)$, $r_0 > 0$ преобразования Вебера почти всюду удовлетворяют соотношениям*

$$f(r) = W^{-1}_{k,k-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right](r), k \leq 1,$$

$$f(r) = W^{-1}_{k,k-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right](r) + \frac{2(k-1)r_0^{2(k-1)}}{r^k}\int_{r_0}^\infty s^{-k+1}f(s)\,\mathrm{ds}, k > 1,$$

$$f(r) = W^{-1}_{k,k+1}\left[W_{k,k+1}[f]\right](r), k \geq -1,$$

$$f(r) = W^{-1}_{k,k+1}\left[W_{k,k+1}[f]\right](r) - \frac{2(k+1)r^k}{r_0^{2(k+1)}}\int_{r_0}^\infty s^{k+1}f(s)\,\mathrm{ds}, k < -1,$$

и выполняется равенство Планшереля-Парсеваля:

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}, k \le 1,\\
\|f\|^2_{L_2(0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}\\
&\quad + 2(k-1)r_0^{2(k-1)}\left(f, 1/r^k\right)^2_{L_2(r_0,\infty;r)}, k > 1,\\
\|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} &= \|W_{k,k+1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}, k \ge -1,\\
\|f\|^2_{L_2(0,\infty;r)} &= \|W_{k,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;r)}\\
&\quad - \frac{2(k+1)}{r_0^{2(k+1)}}\left(f, r^k\right)^2_{L_2(r_0,\infty;r)}, k < -1.
\end{aligned}$$

Из этой теоремы непосредственно следует

Следствие 1.4.4 (*Неравенство Бесселя*). *Для функции* $f(r)$, $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0,\infty) \cap L_2(r_0,\infty)$, $k \in \mathbb{R}$, $r_0 > 0$ *выполняется неравенство*

$$\|W_{k,k\pm1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;\lambda)} \le \|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)}. \tag{1.4.9}$$

Замечание. В формулировке теоремы от требования $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0,\infty)$ можно отказаться, оставив только $f(r)\sqrt{r} \in L_2(r_0,\infty)$. По аналогии с классическими преобразованиями Фурье, равенство Планшереля-Парсеваля позволяет раширить оператор преобразования $W_{k,k\pm1}$ по непрерывности на $L_2(r_0,\infty)$, с одной лишь разницей, что интегралы Вебера могут перестать сходиться на множестве меры нуль.

1.4.2 Вывод преобразования Вебера через решение начально-краевой задачи

Мы докажем формулы обращения из Теоремы 1.4.3 решая начально-краевую задачу с начальной функцией $f(r)$. Ввиду симметричности $W_{k,k-1}$, $W_{k,k+1}$ дальнейшие рассуждения будут проводиться для $W_{k,k-1}$ с граничным условием

$$r_0\frac{\partial w(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + kw(t,r_0) = 0, k \in \mathbb{R}. \tag{1.4.10}$$

Задача (1.4.6), (1.4.8), (1.4.10) будет решаться путем сведения к эллиптическому уравнению с параметром $\tau \in \mathbb{C}$. Метод решения параболических задач сведением их к эллиптическим подробно описан в работе Аграновича, Вишика [1].

Преобразование Лапласа

$$\hat{\omega}(\tau, r) = \int_0^\infty e^{-\tau t} w(t, r) d\tau$$

сводит (1.4.6) к

$$\Delta_k \hat{\omega} - \tau \hat{\omega} = -f(r), \tag{1.4.11}$$

которое запишем как

$$\frac{\partial^2 \hat{\omega}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial r} - \Big(\frac{k^2}{r^2} + \tau\Big)\hat{\omega} = -f(r). \tag{1.4.12}$$

Частное решение дается формулой

$$\hat{w}_p(\tau, r) = K_k(\sqrt{\tau} r) \int_{r_0}^r f(s) I_k(\sqrt{\tau} s) s ds + I_k(\sqrt{\tau} r) \int_r^\infty f(s) K_k(\sqrt{\tau} s) s ds.$$

Оно может быть найдено из соотношений для Вронскиана

$$I_k(r)\frac{\partial K_k(r)}{\partial r} - K_k(r)\frac{\partial I_k(r)}{\partial r} = -r^{-1}.$$

Т.к.

$$\frac{\partial \hat{w}_p}{\partial r}(\tau, r_0) = \sqrt{\tau} I_k'(\sqrt{\tau} r_0) \int_{r_0}^\infty f(s) K_k(\sqrt{\tau} s) s ds,$$

то

$$r_0 \frac{\partial \hat{w}_p}{\partial r}(\tau, r_0) + k \hat{w}_p(\tau, r_0) = \sqrt{\tau} r_0 I_k'(\sqrt{\tau} r_0) \int_{r_0}^\infty f(s) K_k(\sqrt{\tau} s) s ds$$
$$+ k I_k(\sqrt{\tau} r_0) \int_{r_0}^\infty f(s) K_k(\sqrt{\tau} s) s ds.$$

Из правил дифференцирования функций Бесселя

$$I_{k-1}(r) = \frac{k}{r} I_k(r) + \frac{dI_k}{dr}(r)$$

будем иметь

$$\sqrt{\tau}r_0 I_k'(\sqrt{\tau}r_0) + kI_k(\sqrt{\tau}r_0) = \sqrt{\tau}r_0 I_{k-1}(\sqrt{\tau}r_0)$$

и

$$r_0\frac{\partial\hat{w}_p}{\partial r}(\tau, r_0) + k\hat{w}_p(\tau, r_0) = r_0\sqrt{\tau}I_{k-1}(\sqrt{\tau}r_0)\int_{r_0}^{\infty} f(s)K_k(\sqrt{\tau}s)sds.$$

Из

$$K_{k-1}(r) = -\frac{k}{r}K_k(r) - \frac{dK_k}{dr}(r)$$

следует

$$r_0\frac{\partial K_k(\sqrt{\tau}r)}{\partial r}(\sqrt{\tau}r_0) + kK_k(\sqrt{\tau}r_0) = -r_0\sqrt{\tau}K_{k-1}(\sqrt{\tau}r_0).$$

И затем, после исключения экспоненциально растущей функции $I_k(\sqrt{\tau}r)$, общее решение (1.4.12) находится как

$$\begin{aligned}\hat{\omega}(\tau, r) = {} & \frac{K_k(\sqrt{\tau}r)I_{k-1}(\sqrt{\tau}r_0)}{K_{k-1}(\sqrt{\tau}r_0)}\int_{r_0}^{\infty} f(s)K_k(\sqrt{\tau}s)sds \\ & + K_k(\sqrt{\tau}r)\int_{r_0}^{r} f(s)I_k(\sqrt{\tau}s)sds + I_k(\sqrt{\tau}r)\int_{r}^{\infty} f(s)K_k(\sqrt{\tau}s)sds.\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Решение $w(t, x)$ уравнения теплопроводности находится из обратного преобразования Лапласа

$$w(t, r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\eta} e^{\tau t}\hat{\omega}(\tau, r)d\tau,$$

где $\Gamma_\eta = \{\tau \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\tau = \eta\}$, $\eta > 0$ - произвольное фиксированное число.

Поскольку $\sqrt{\tau}$ в (1.4.13) является ветвящейся функцией, то заменим контур интегрирования с Γ_η на $\Gamma^-_{-\eta,\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$ (см. Рис. 1.1), где $\Gamma^-_{-\eta,\varepsilon}$ определяется как

$$\begin{aligned}\Gamma^-_{-\eta,\varepsilon} = {} & (-\eta - i\infty, -\eta - i\varepsilon] \cup [-\eta - i\varepsilon, \varepsilon - i\varepsilon] \cup [\varepsilon - i\varepsilon, \varepsilon + i\varepsilon] \\ & \cup [\varepsilon + i\varepsilon, -\eta + i\varepsilon] \cup [-\eta + i\varepsilon, -\eta + i\infty).\end{aligned}$$

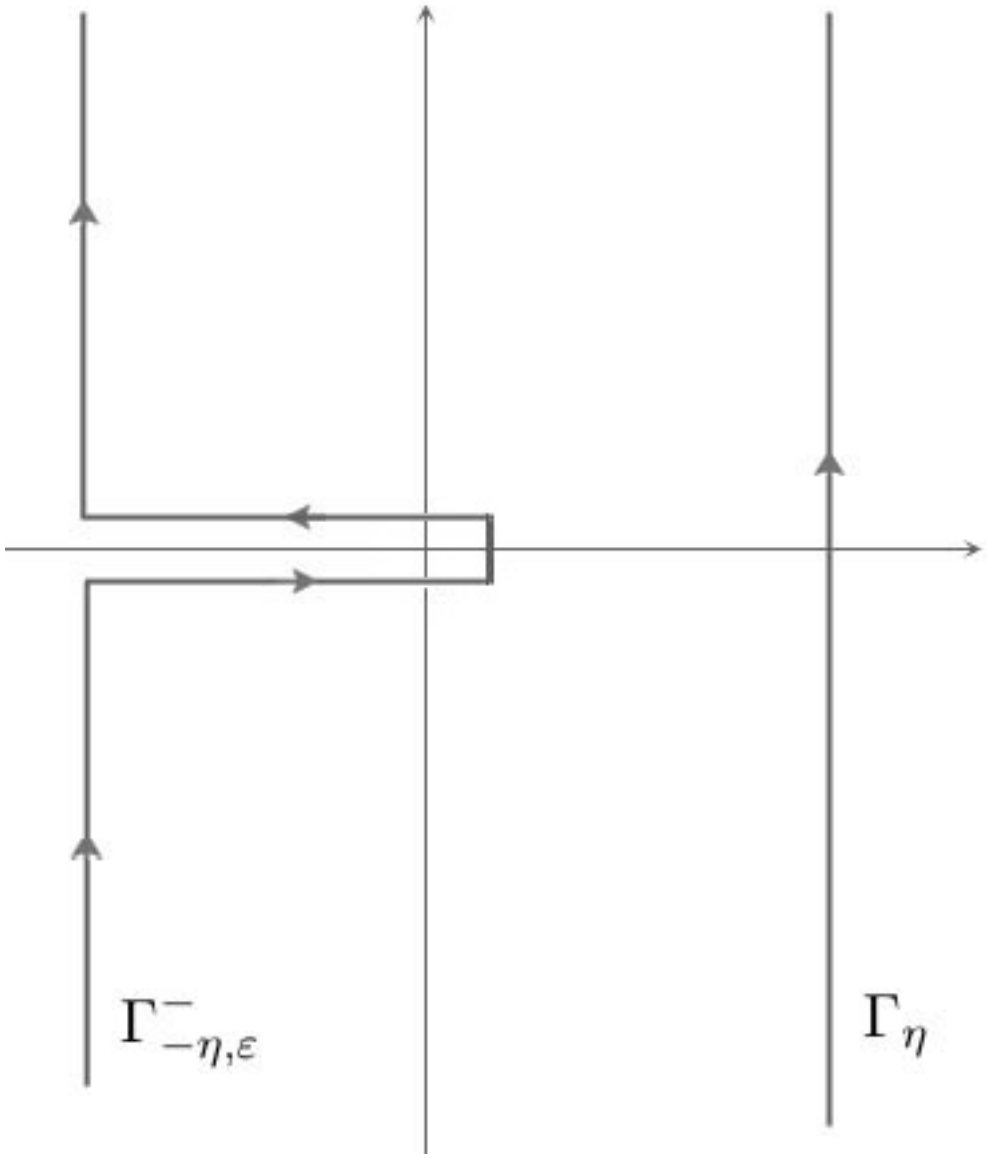


Рис. 1.1. Контуры интегрирования

Из (1.4.11) функция $\hat{\omega}(\tau, r)$ выражается через резольвенту $R(\tau) = (\Delta_k - \tau I)^{-1}$:

$$\hat{\omega} = -R(\tau)f(r).$$

Из Леммы 1.4.2, т.к. $1/r^k \in \ker(W_{k,k-1})$, то $R(\tau)$ имеет ненулевой вычет в $\tau = 0$ для $k > 1$. Он порождает конечномерный проектор на собственное подпространство согласно общей теории представлений операторов (см. [30]).

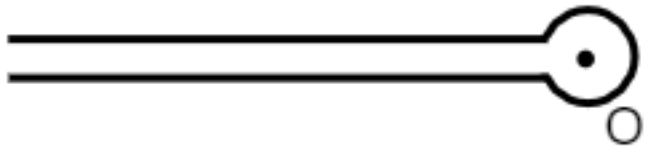


Рис. 1.2. Контур интегрирования вдоль $\mathbb{R}_-$

Переходя к пределу $\varepsilon \to 0$, $\eta \to \infty$ в $\Gamma^-_{-\eta,\varepsilon}$ и интегрируя по контуру как на Рис. 1.2 будем иметь равенство:

$$w(t,r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0} e^{\tau t}\hat{\omega}(\tau - i0, r)d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{-\infty} e^{\tau t}\hat{\omega}(\tau + i0, r)d\tau + \mathrm{res}_{\tau=0}[\hat{\omega}(\tau, r)],$$

где

$$\mathrm{res}_{\tau=0}\left[\hat{\omega}(\tau,r)\right] = \begin{cases} 0, k \le 1, \\ \lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\rho}\hat{\omega}(\tau,r)\,d\tau, k > 1. \end{cases}$$

Положим $\tau = -\lambda^2$. Тогда

$$w(t,r) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t}\left(w(-\lambda^2 - i0, r) - w_k(-\lambda^2 + i0, r)\right)\lambda \mathrm{d}\lambda + \mathrm{res}_{\tau=0}[\hat{\omega}(\tau,r)]. \quad (1.4.14)$$

$I_k, K_k, H_k^{(1)}, H_k^{(2)}, J_k$ удовлетвряют известным соотношениям (см. [3], [6]):

$$I_k(-i\lambda r) = e^{-\frac{\pi i k}{2}} J_k(\lambda r), \tag{1.4.15}$$

$$I_k(i\lambda r) = e^{-\frac{\pi i k}{2}} J_k(-\lambda r), \tag{1.4.16}$$

$$K_k(-i\lambda r) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi i k}{2}} H_k^{(1)}(\lambda r), \tag{1.4.17}$$

$$K_k(i\lambda r) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi i k}{2}} H_k^{(1)}(-\lambda r), \tag{1.4.18}$$

$$H_k^{(1)}(-\lambda r) = -e^{-\pi i k} H_k^{(2)}(\lambda r), \tag{1.4.19}$$

$$J_k(-\lambda r) = e^{\pi i k} J_k(\lambda r). \tag{1.4.20}$$

Здесь $H_k^{(1)}$, $H_k^{(2)}$ - функции Ганкеля:

$$H_k^{(1)}(\lambda r) = J_k(\lambda r) + iY_k(\lambda r),$$
$$H_k^{(2)}(\lambda r) = J_k(\lambda r) - iY_k(\lambda r).$$

Мы представим $\hat{\omega}(\tau, r)$ в (1.4.13) как

$$\hat{\omega}(\tau, r) = G_{k,1}(\tau, r) + G_{k,2}(\tau, r),$$

где $G_{k,1}(\tau, r)$, $G_{k,2}(\tau, r)$ определяются как

$$G_{k,1}(\tau, r) = \frac{K_k(\sqrt{\tau} r) I_{k-1}(\sqrt{\tau} r_0)}{K_{k-1}(\sqrt{\tau} r_0)} \int_{r_0}^{\infty} f(s) K_k(\sqrt{\tau} s) s ds,$$
$$G_{k,2}(\tau, r) = K_k(\sqrt{\tau} r) \int_{r_0}^{r} f(s) I_k(\sqrt{\tau} s) s ds$$
$$+ I_k(\sqrt{\tau} r) \int_{r}^{\infty} f(s) K_k(\sqrt{\tau} s) s ds.$$

С помощью (1.4.15)-(1.4.20) будем иметь

$$
\begin{aligned}
&G_{k,1}(-\lambda^2 - i0, r) - G_{k,1}(-\lambda^2 + i0, r) = \\
&= \int_{r_0}^{\infty} \Big(\frac{K_k(-i\lambda r) I_{k-1}(-i\lambda r_0) K_k(-i\lambda s)}{K_{k-1}(-i\lambda r_0)} \\
&- \frac{K_k(i\lambda r) I_{k-1}(i\lambda r_0) K_k(i\lambda s)}{K_{k-1}(i\lambda r_0)} \Big) f(s) s ds \\
&= -\frac{\pi i}{2} \int_{r_0}^{\infty} \Big(\frac{H_k^{(1)}(\lambda r) J_{k-1}(\lambda r_0) H_k^{(1)}(\lambda s)}{H_{k-1}^{(1)}(\lambda r_0)} \\
&- \frac{H_k^{(1)}(-\lambda r) J_{k-1}(-\lambda r_0) H_k^{(1)}(-\lambda s)}{H_{k-1}^{(1)}(-\lambda r_0)} \Big) f(s) s ds \\
&= -\frac{\pi i}{2} \int_{r_0}^{\infty} \Big(\frac{H_k^{(1)}(\lambda r) J_{k-1}(\lambda r_0) H_k^{(1)}(\lambda s)}{H_{k-1}^{(1)}(\lambda r_0)} \\
&+ \frac{H_k^{(2)}(\lambda r) J_{k-1}(\lambda r_0) H_k^{(2)}(\lambda s)}{H_{k-1}^{(2)}(\lambda r_0)} \Big) f(s) s ds \\
&= -\frac{\pi i}{2} \int_{r_0}^{\infty} \Big(\frac{(J_k(\lambda r) + iY_k(\lambda r)) J_{k-1}(\lambda r_0) (J_k(\lambda s) + iY_k(\lambda s))}{J_{k-1}(\lambda r_0) + iY_{k-1}(\lambda r_0)} \\
&+ \frac{(J_k(\lambda r) - iY_k(\lambda r)) J_{k-1}(\lambda r_0) (J_k(\lambda s) - iY_k(\lambda s))}{J_{k-1}(\lambda r_0) - iY_{k-1}(\lambda r_0)} \Big) f(s) s ds.
\end{aligned}
$$

Здесь мы расширим одну лемму, которая была доказана автором в [15] для $k \in \mathbb{N}$ на случай произвольного $k \in \mathbb{R}$:

Лемма 1.4.5. *Для любых $k \in \mathbb{R}$, $r, s > 0$ модифицированные функции Бесселя I_k, K_k удовлетворяют соотношению:*

$$I_k(-ir) K_k(-is) - I_k(ir) K_k(is) = \pi i J_k(r) J_k(s).$$

Доказательство. Перемножая между собой следующие соотношения для функциий Бесселя, приведенные в [6]

$$
\begin{aligned}
I_k(-z) &= e^{i\pi k} I_k(z), \\
K_k(-z) &= e^{-i\pi k} K_k(z) - i\pi I_k(z),
\end{aligned}
$$

будем иметь

$$I_k(-ir) K_k(-is) - I_k(ir) K_k(is) = i\pi e^{i\pi k} I_k(-ir) I_k(-is).$$

Применяя (1.4.15), мы получаем утверждение леммы. □

Из леммы следует

$$G_{k,2}(-\lambda^2 - i0, r) - G_{k,2}(-\lambda^2 + i0, r) = \pi i \int_{r_0}^{\infty} J_k(\lambda r) J_k(\lambda s) f(s) s ds,$$

и

$$\begin{aligned}
&\hat{\omega}(-\lambda^2 - i0, r) - \hat{\omega}(-\lambda^2 + i0, r) \\
&= G_{k,1}(-\lambda^2 - i0, r) - G_{k,1}(-\lambda^2 + i0, r) \\
&+ G_{k,2}(-\lambda^2 - i0, r) - G_{k,2}(-\lambda^2 + i0, r) = -\frac{\pi i}{2} \int_{r_0}^{\infty} \Big(\\
&\frac{J_{k-1}(\lambda r_0)(J_k(\lambda r) + iY_k(\lambda r))(J_k(\lambda s) + iY_k(\lambda s))(J_{k-1}(\lambda r_0) - iY_{k-1}(\lambda r_0))}{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2} \\
&+ \frac{J_{k-1}(\lambda r_0)(J_k(\lambda r) - iY_k(\lambda r))(J_k(\lambda s) - iY_k(\lambda s))(J_{k-1}(\lambda r_0) + iY_{k-1}(\lambda r_0))}{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2} \\
&- 2\frac{J_k(\lambda r) J_k(\lambda s)(J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2)}{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2} \Big) f(s) s ds.
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки в предыдущей формуле, получим:

$$\begin{aligned}
&\hat{\omega}(-\lambda^2 - i0, r) - \hat{\omega}(-\lambda^2 + i0, r) \\
&\qquad = \pi i \int_{r_0}^{\infty} \frac{(J_{k-1}(\lambda r_0) Y_k(\lambda r) - Y_{k-1}(\lambda r_0) J_k(\lambda r))}{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2} \\
&\qquad\qquad \times (J_{k-1}(\lambda r_0) Y_k(\lambda s) - Y_{k-1}(\lambda r_0) J_k(\lambda s))\, f(s) s ds
\end{aligned}$$

Подставим полученное выражение для скачка $\hat{\omega}(-\lambda^2 - i0, r) - \hat{\omega}(-\lambda^2 + i0, r)$ в (1.4.14):

$$\begin{aligned}
w(t, r) = &\int_0^{\infty} \frac{(J_{k-1}(\lambda r_0) Y_k(\lambda r) - Y_{k-1}(\lambda r_0) J_k(\lambda r))}{\sqrt{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2}} \\
&\times \left(\int_{r_0}^{\infty} \frac{(J_{k-1}(\lambda r_0) Y_k(\lambda s) - Y_{k-1}(\lambda r_0) J_k(\lambda s))}{\sqrt{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2}} f(s) s ds \right) e^{-\lambda^2 t} \lambda \mathrm{d}\lambda \\
&+ \mathrm{res}_{\tau=0}[\hat{\omega}(\tau, r)].
\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Теперь мы найдем вычет $\hat{\omega}(\tau, r)$ в $\tau = 0$.

Лемма 1.4.6. *Вычет функции $\hat{\omega}(\tau, r)$, даваемой формулой (1.4.13), для $k > 1$ в $\tau = 0$ дается формулой:*

$$\mathrm{res}_{\tau=0}[\hat{\omega}(\tau, r)] = \frac{2(k-1)r_0^{2k-2}}{r^k} \int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1} f(s)\,\mathrm{ds}\,.$$

Доказательство. Для $k > 1$ из определения I_k, K_k следуют соотношения эквивалентности:

$$I_k(z) \sim \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$
$$K_k(z) \sim \frac{\Gamma(k)}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^k.$$

Тогда

$$G_{k,1}(\tau, r) \sim \frac{2(k-1)r_0^{2k-2}}{\tau r^k} \int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1} f(s)\,\mathrm{ds}$$

и

$$\mathrm{res}_{\tau=0}[G_{k,1}(\tau, r)] = \frac{2(k-1)r_0^{2k-2}}{r^k} \int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1} f(s)\,\mathrm{ds}\,.$$

Так как

$$K_k(\sqrt{\tau}r) I_k(\sqrt{\tau}s) \sim \frac{s}{2kr},$$

то вычет $G_{k,2}(\tau, r)$ равен нулю и

$$\mathrm{res}_{\tau=0}[\hat{\omega}(\tau, r)] = \mathrm{res}_{\tau=0}[\hat{G}_{k,1}(\tau, r)].$$

□

В итоге, из леммы (1.4.21) решение уравнения (1.4.6), дополненное краевым условием третьего типа (1.4.10) и начальной функцией $f(r)$ нахо-

дится как

$k \le 1$:

$$w(t,r) = \int_0^\infty \frac{(J_{k-1}(\lambda r_0)Y_k(\lambda r) - Y_{k-1}(\lambda r_0)J_k(\lambda r))}{\sqrt{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2}} \tag{1.4.22}$$
$$\times \left(\int_{r_0}^\infty \frac{(J_{k-1}(\lambda r_0)Y_k(\lambda s) - Y_{k-1}(\lambda r_0)J_k(\lambda s))}{\sqrt{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2}} f(s) s ds \right) e^{-\lambda^2 t} \lambda \mathrm{d}\lambda,$$

$k > 1$:

$$w(t,r) = \int_0^\infty \frac{(J_{k-1}(\lambda r_0)Y_k(\lambda r) - Y_{k-1}(\lambda r_0)J_k(\lambda r))}{\sqrt{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2}} \tag{1.4.23}$$
$$\times \left(\int_{r_0}^\infty \frac{(J_{k-1}(\lambda r_0)Y_k(\lambda s) - Y_{k-1}(\lambda r_0)J_k(\lambda s))}{\sqrt{J_{k-1}(\lambda r_0)^2 + Y_{k-1}(\lambda r_0)^2}} f(s) s ds \right) e^{-\lambda^2 t} \lambda \mathrm{d}\lambda$$
$$+ \frac{2(k-1) r_0^{2k-2}}{r^k} \int_{r_0}^\infty s^{-k+1} f(s)\, \mathrm{ds}$$

Внутренний интеграл в (1.4.22), (1.4.23) согласно Лемме 1.4.1 ограничен величиной $1/\sqrt{\lambda}$. Тогда внешний интеграл (1.4.22), (1.4.23), включающий $e^{-\lambda^2 t}$, сходится. Эти соотношения приводят к следующей теореме:

Теорема 1.4.7. *Пусть $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0, \infty)$, $r_0 > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда решение $w(t,r) \in C\left(\mathbb{R}_+; L_2(r_0, \infty; r)\right)$ задачи (1.4.6), (1.4.8),(1.4.10) дается формулой*

$k \le 1$:

$$w(t,r) = W_{k,k-1}^{-1} \left[e^{-\lambda^2 t} W_{k,k-1}[f] \right], \tag{1.4.24}$$

$k > 1$:

$$w(t,r) = W_{k,k-1}^{-1} \left[e^{-\lambda^2 t} W_{k,k-1}[f] \right] \tag{1.4.25}$$
$$+ \frac{2(k-1) r_0^{2k-2}}{r^k} \left(\frac{1}{r^k}, f \right)_{L_2(r_0,\infty;r)}.$$

1.4.3 Сильная непрерывность полугруппы

С краевым условием Дирихле оператор Δ_k является генератором сильно-непрерывной полугруппы в $L_2(r_0, \infty; r)$ для соответствующей

начально-краевой задачи. В самом деле, оператор Лапласа $\Delta = \partial^2_{x_1^2} + \partial^2_{x_2^2}$ порождает сильно-непрерывную полугруппу в $L_2(\{x \in \mathbb{R}^2, |x| \geq r_0\})$ (см. [29]). Тогда из соотношения $\Delta[f(r)e^{ik\varphi}] = e^{ik\varphi}\Delta_k f(r)$ оператор Δ_k также порождает в $L_2(r_0, \infty; r)$ C^0-полугруппу.

С помощью теоремы Люмера – Филлипса мы докажем сильную непрерывность полугруппы e^{Δ_k} с вырожденным граничным условием (1.4.10). Будет доказано, что положительные λ принадлежат резольвентному множеству, и, следовательно, не смотря на вырожденное краевое условие, оператор Лапласа сохраняет свойство диссипативности. Для более общих смешанных краевых условий оператор Лапласа во внешности круга теряет свойство диссипативности, и к точечному спектру добавляется еще одно, уже положительное значение, генерирующее экспоненциально-растущее по времени решение по аналогии с формулой (1.1.4).

Предложение 1.4.8. *Оператор Δ_k с краевым условием (1.4.10) является генератором сильно-непрерывной полугруппы в $L_2(r_0, \infty; r)$ со спектром в $\mathbb{R}_-$.*

Доказательство. Рассмотрим форму

$$(\Delta_k f, f) = \int_{r_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr} \right) - \frac{k^2}{r^2} f(r) \right) f(r) r dr.$$

После интегрирования по частям получим следующее выражение

$$(\Delta_k f, f) = -\int_{r_0}^{\infty} \left(\left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} f^2(r) \right) r dr - r_0 f(r_0) \frac{df}{dr}\bigg|_{r=r_0}.$$

Из условия (1.4.10) мы получаем функционал Больца, который имеет минимум в нуле:

$$(\Delta_k f, f) = -\int_{r_0}^{\infty} \left(\left(\frac{df}{dr} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} f^2(r) \right) r dr + k f^2(r_0) = \\ - \int_{r_0}^{\infty} \left(\frac{df}{dr} + \frac{k}{r} f(r) \right)^2 r dr \leq 0$$

Тем самым Δ_k является диссипативным оператором, и, согласно теореме Люмера – Филлипса, является генератором C^0-полугруппы. Предложение доказано.

□

1.4.4 Доказательство формулы обращения

Доказательство. Все что мы должны установить, это справедливость перехода $t \to 0$ в (1.4.24), (1.4.25). Пусть $w(t,r)$ решение (1.4.6), (1.4.10) с начальным условием $f(r)$. Как было доказано выше, оператор Δ_k порождает C^0-полугруппу в $L_2(r_0,\infty;r)$, и, следовательно, при $t \to 0$

$$\|w(t,\cdot) - f(\cdot)\| \to 0.$$

Для $k \le 1$ мы докажем слабую сходимость в $L_2(r_0,\infty;r)$:

$$w(t,\cdot) \rightharpoonup W_{k,k-1}^{-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right], t \to 0. \tag{1.4.26}$$

Слабую сходимость достаточно доказать для плотного семейства функций из $C_0^\infty(r_0,\infty)$. Из теоремы Фубини для $g(r) \in C_0^\infty(r_0,\infty)$ верно

$$\left(W_{k,k-1}^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}W_{k,k-1}[f]\right], g(\cdot)\right) = \left(e^{-\lambda^2 t}W_{k,k-1}[f], W_{k,k-1}[g]\right) = \left(e^{-\lambda^2 t}\hat{f}(\lambda), \hat{g}(\lambda)\right), \tag{1.4.27}$$

где $\hat{f}(\lambda) = W_{k,k-1}[f](\lambda)$, $\hat{g}(\lambda) = W_{k,k-1}[g](\lambda)$.

А из Леммы 1.4.1 следует

$$\left|\left(e^{-\lambda^2 t}\hat{f}(\lambda), \hat{g}(\lambda)\right)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)\lambda\,\mathrm{d}\lambda\right| \le C\|f\|_{L_1}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}|\hat{g}(\lambda)|\sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{1.4.28}$$

Так как $g(r)$ - гладкая функция с компактным носителем, то для любого $n > 0$ и достаточно большого λ выполняется:

$$\hat{g}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right),$$

и остатки интегралов в правой части (1.4.28) вида

$$\int_L^\infty \frac{e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^n}\,\mathrm{d}\lambda$$

сходятся равномерно по t к нулю при $L \to \infty$ (для фиксированного $n > 1$). Подынтегральная функция $e^{-\lambda^2 t}/\lambda^n$ сходится равномерно на любом компакте из $\mathbb{R}_+$. Следовательно, при переходе к пределу при $t \to 0$ в (1.4.27) мы получим (1.4.26).

Из единственности слабого предела вместе с $w(t,\cdot) \to f(\cdot)$ почти всюду выполнено

$$f(\cdot) = W_{k,k-1}^{-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right] \|.$$

Для $k > 1$ появится дополнительное не зависящее от t слагаемое в (1.4.25), и переход к пределу при $t \to 0$ также оправдан. Таким образом мы полностью вывели формулу обращения.

Наконец, равенство Парсеваля-Планшереля в Теореме 1.4.3 также следует из формулы обращения и теоремы Фубини.

Для $k \le 1$:

$$(f(\cdot), g(\cdot)) = \left(W_{k,k-1}^{-1}\left[W_{k,k-1}[f]\right], g(\cdot)\right) = (W_{k,k-1}[f](\cdot), W_{k,k-1}[g](\cdot)) = \left(\hat{f}(\cdot), \hat{g}(\cdot)\right),$$

и для $k > 1$:

$$(f(\cdot), g(\cdot)) = \left(\hat{f}(\cdot), \hat{g}(\cdot)\right) + 2(k-1) r_0^{2(k-1)} \int_{r_0}^\infty s^{-k+1} f(s)\,\mathrm{d}s \int_{r_0}^\infty s^{-k+1} g(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

□

1.5 Правила дифференцирования и мультипликативные свойства вырожденных преобразований Вебера

В классическом преобразовании Фурье оператор дифференцирования переходит в оператор умножения на частоту. По аналогии с этим, дифференцирование $\frac{\partial}{\partial r}$ интеграла $W_{k,k}^{-1}$ переходит в умножение на λ. Действительно,

из правил дифференцирования функций Бесселя

$$\frac{dJ_k}{dr}(r) = \frac{J_{k-1}(r) - J_{k+1}(r)}{2},$$
$$\frac{dY_k}{dr}(r) = \frac{Y_{k-1}(r) - Y_{k+1}(r)}{2}$$

следует следующее правило дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial r} W^{-1}_{k,k}[f] = \frac{1}{2}\left(W^{-1}_{k-1,k}[\lambda f] - W^{-1}_{k+1,k}[\lambda f]\right).$$

Тогда из неравенства Бесселя (1.4.9) следует

$$\left\| \frac{\partial}{\partial r} W^{-1}_{k,k}[f] \right\|_{L_2(r_0,\infty,r)} \le \|\lambda f(\lambda)\|_{L_2(0,\infty,\lambda)}. \tag{1.5.1}$$

И наоборот, умножение на λ переходит в дифференцирование, но в более общем смысле. А именно, не смотря на то, что функция f зависит только от r - дифференцирование включает не только $\frac{\partial}{\partial r}$, но и фиктивную производную по углу.

Верна следующая формула умножения:

$$\lambda W_{k,k}[f] = W_{k-1,k}[\frac{kf}{r}] + W_{k-1,k}[f'(\cdot)].$$

Поясним смысл фиктивной производной по углу. В полярных координатах с единичными векторами $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e}_\varphi$ двумерный градиент определяется как $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$ с координатами ∇_r, ∇_φ. Слагаемое $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ в терминах коэффициентов Фурье соответствует умножению на $\frac{k}{r}$, и тогда $\frac{kf}{r}$ становится производной по углу от функции $e^{ik\varphi}f(r)$.

Предыдущее равенство следует из свойств функций Бесселя J_k, Y_k:

$$\lambda J_k(\lambda r) = \frac{k-1}{r} J_{k-1}(\lambda r) - \lambda J'_{k-1}(\lambda r),$$
$$\lambda Y_k(\lambda r) = \frac{k-1}{r} Y_{k-1}(\lambda r) - \lambda Y'_{k-1}(\lambda r).$$

Равенства

$$\frac{k}{r} J_k(\lambda r) = \frac{\lambda}{2}\left(J_{k+1} + J_{k-1}\right),$$
$$\frac{k}{r} Y_k(\lambda r) = \frac{\lambda}{2}\left(Y_{k+1} + Y_{k-1}\right).$$

приводят к следующему правилу дифференцирования по углу:

$$\frac{k}{r}W_{k,k}^{-1}[f] = \frac{1}{2}\left(W_{k+1,k}^{-1}[\lambda f] + W_{k-1,k}^{-1}[\lambda f]\right).$$

Поэтому это тождество можно интерпретировать как переход угловой производной к умножению на λ при преобразовании Вебера . Тогда из неравенства Бесселя (1.4.9)

$$\left\|\frac{k}{r}W_{k,k}^{-1}[f]\right\|_{L_2(r_0,\infty,r)} \leq \|\lambda f(\lambda)\|_{L_2(0,\infty,\lambda)}. \tag{1.5.2}$$

1.6 Применение интегралов Вебера для оценки полугрупп эволюционных уравнений

Здесь мы приведем применение $W_{k,k\pm1}$ для оценки решений уравнения диффузии. Правила дифференцирования из предыдущего раздела позволяют находить оценки линейных полугрупп уравнения теплопроводности во внешности круга. Это в свою очередь позволяет доказывать локальное существование полулинейного уравнения теплопроводности используя теорему о неподвижной точке.

Пусть $S(t)$ - разрешающая полугруппа уравнения теплопроводности, заданного во внешней области $B_{r_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, |\mathbf{x}| > r_0\}, r_0 > 0$ с нулевым граничным условием. Через интеграл Вебера $S(t)$ задается как

$$S(t)w_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} w_k(t,r), \tag{1.6.1}$$

где

$$w_k(t,r) = W_{k,k}^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}W_{k,k}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\right](t,r),$$

и

$$w_0(r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} w_k^0(r).$$

1.6.1 Оценка полугруппы для уравнения теплопроводности во внешности диска

Следующее предложение не претендует на оригинальность и хорошо известно для более общих областей, но оно хорошо иллюстрирует применимость преобразований Вебера.

Предложение 1.6.1. *Для $t > 0$ полугруппа $S(t)$, даваемая (1.6.1), удовлетворяет*

$$\|S(t)w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \|w_0\|_{L_2(B_{r_0})},$$
$$\|\nabla S(t)w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \frac{1}{\sqrt{et}}\|w_0\|_{L_2(B_{r_0})}.$$

Доказательство. Первая оценка следует из равенства Планшереля (также как и из энерггетической оценки для уравнения теплопроводности):

$$\|w_k(t,r)\|_{L_2(r_0,\infty,r)} = \|e^{-\lambda^2 t}W_{k,k}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\|_{L_2(0,\infty,\lambda)} \le$$
$$\|W_{k,k}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\|_{L_2(0,\infty,\lambda)} = \|w_k^0(r)\|_{L_2(r_0,\infty,r)}.$$

Докажем вторую оценку. Используя неравенство

$$|\lambda e^{-\lambda^2 t}| \le \frac{1}{\sqrt{2et}}$$

и неравенство Бесселя (1.4.9) будем иметь

$$\left\|\frac{\partial}{\partial r}w_k(t,r)\right\|_{L_2(r_0,\infty,r)} \le \|\lambda e^{-\lambda^2 t}W_{k,k}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\|_{L_2(0,\infty,\lambda)} \le \frac{\|w_k^0(r)\|_{L_2(r_0,\infty,r)}}{\sqrt{2et}}$$

и

$$\|\nabla_r S(t)w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \frac{1}{\sqrt{2et}}\|w_0\|_{L_2(B_{r_0})}.$$

Из (1.5.2) в похожем ключе следует

$$\left\|\frac{k}{r}w_k(t,r)\right\|_{L_2(r_0,\infty,r)} \le \frac{\|w_k^0(r)\|_{L_2(r_0,\infty,r)}}{\sqrt{2et}}.$$

Тогда

$$\|\nabla_\varphi S(t)w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \leq \frac{\|w_0\|_{L_2(B_{r_0})}}{\sqrt{2et}}$$

и вторая оценка предложения доказана.

□

Замечание. Наличие интегрируемой особенности $\frac{1}{\sqrt{et}}$ играет очень важную роль при исследовании нелинейных задач. Записывая нелинейную задачу как возмущение линейной с помощью полученной полугруппы можно доказывать локальное по времени существование решений нелинейных задач. А при наличии априорных оценок продолжать локальное решение до глобального. Таким методом можно исследовать полулинейное уравнение теплопроводности с нелинейным стоком.

Глава 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТОКСА ВО ВНЕШНОСТИ ДИСКА

В данном разделе при помощи вырожденных интегральных преобразований будет получено решение нестационарной задачи Стокса течения вокруг диска с набегающим потоком на бесконечности.

2.1 Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим систему Стокса, заданную во внешности диска $B_{r_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}| > r_0\},\ r_0 > 0$ с фиксированным горизонтальным потоком на бесконечности $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} = \nabla p \tag{2.1.1}$$

$$\text{div } \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \tag{2.1.3}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0,\ |\mathbf{x}| = r_0 \tag{2.1.4}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{2.1.5}$$

Здесь $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = (v_1(t, \mathbf{x}), v_2(t, \mathbf{x}))$ - поле скоростей, $p(t, \mathbf{x})$ - давление.

Замечание. Постановка задачи допускает $\mathbf{v}_\infty = 0$ когда внешний поток просто отсутствует.

Два уравнения в (2.1.1) для векторного поля в представлении радиальной и тангенциальной составляющих $\mathbf{v}(t, r, \varphi) = (v_r, v_\varphi)$ имеют вид

$$\partial_t v_r - \Delta v_r + \frac{v_\varphi}{r^2} - 2\frac{\partial_\varphi v_r}{r^2} = \partial_r p,$$
$$\partial_t v_\varphi - \Delta v_\varphi + \frac{v_r}{r^2} + 2\frac{\partial_\varphi v_\varphi}{r^2} = \frac{\partial_\varphi p}{r}.$$

Сформулированная задача будет решаться для вихревой функции. В двумерном случае помимо сокращения количества уравнений и неизвестных функций, само уравнение имеет еще и более простой вид уравнения теплопроводности для скалярной функции.

Применяя оператор ротора $w(t,\mathbf{x}) = \operatorname{curl}\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}_1}v_2 - \partial_{\mathbf{x}_2}v_1$ получим задачу для вихревого уравнения:

$$\frac{\partial w(t,\mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w = 0, \tag{2.1.6}$$

$$w(0,\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) \tag{2.1.7}$$

$$\operatorname{curl}^{-1} w(t,\mathbf{x})\Big|_{|\mathbf{x}|=r_0} = 0, \tag{2.1.8}$$

$$w(t,\mathbf{x}) \to 0,\ |\mathbf{x}| \to \infty \tag{2.1.9}$$

с начальным условием $w_0(\mathbf{x}) = \operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$.

Последняя система будет основным объектом нашего исследования вместо (2.1.1)-(2.1.5).

Естественно предположить из физических соображений, что поток на бесконечности является плоскопараллельным с нулевой циркуляцией (хотя представляемый результат допускает и циркуляционные потоки):

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{|\mathbf{x}|=R}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{2.1.10}$$

Замечание. Если рассматривать *циркуляционные течения*, когда интеграл выше не равен нулю, то поле $\mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty$ не будет квадратично-интегрируемым и циркуляционное течение будет обладать *бесконечной кинетической энергией.*

Замечание. Для циркуляционных течений фиксируется уже ненулевое значение циркуляции на бесконечности, которое согласно формуле Стокса является инвариантом для потока Стокса.

Дальнейшие рассуждения будут проводиться в предположении нулевой циркуляции, которое согласно формуле Стокса и условию прилипания приводит к нулевому значению осредненной завихренности:

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{|\mathbf{x}|=R}\mathbf{v}(t,\mathbf{x})\cdot d\mathbf{l} = \int_{B_{r_0}}\operatorname{curl}\mathbf{v}(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$+\oint_{|\mathbf{x}|=r_0}\mathbf{v}(t,\mathbf{x})\cdot d\mathbf{l} = \int_{B_{r_0}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Мы будем использовать разложения Фурье по углу в полярных координатах r, φ:

$$\mathbf{v}(t,r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_k(t,r)e^{ik\varphi},$$
$$\mathbf{v}_0(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_k^0(r)e^{ik\varphi}$$
$$w(t,r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k(t,r)e^{ik\varphi},$$
$$w_0(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k^0(r)e^{ik\varphi}.$$

Здесь $\mathbf{v}(t,r,\varphi) = (v_r, v_\varphi)$, $\mathbf{v}_k(t,r) = (v_{r,k}, v_{\varphi,k}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{v}(t,r,\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi$, $\mathbf{v}_0(r,\varphi) = (v_r^0, v_\varphi^0)$, $\mathbf{v}_0^k(r) = (v_{r,k}^0, v_{\varphi,k}^0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{v}_0(r,\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi$ - представляют собой векторные поля, разложенные на радиальную и тангенциальную составляющие.

Основным результатом этой главы является следующая

Теорема 2.1.1. *Пусть векторное поле* $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ *удовлетворяет (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.10),* $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0}) \cap L_2(B_{r_0})$. *Тогда решение (2.1.6)-(2.1.9) определяется с помощью коэффициентов Фурье:*

$$w_k(t,r) = W_{|k|,|k|-1}^{-1}\left[e^{-\lambda^2 t}W_{|k|,|k|-1}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\right](t,r), \tag{2.1.11}$$

где $W_{|k|,|k|-1}$, $W_{|k|,|k|-1}^{-1}$ *вырожденные преобразования Вебера (1.4.1), (1.4.2).*

Замечание. Отметим, что $W_{|k|,|k|-1}$ является вырожденным, и формула (2.1.11) при $t = 0$ совпадает с начальным условием $w_k^0(\cdot)$, только если оно ортогональну ядру преобразования. Однако условие прилипания, как будет показано далее, будет обеспечивать ортогональность решения ядру.

Замечание. Также отметим, что явная формула решения не содержит таких параметров, как скорость потока $\mathbf{v}_\infty$, или скорость вращения цилиндра (это условие рассматривается в следующем разделе, когда условие прилипания

заменяется граничным условием скорости вращения). Дело в том, что постановка задачи требует согласованности начального и краевого условия. То есть, начальное условие для векторного поля должно собой представлять поток, равный на бесконечности $\mathbf{v}_\infty$, и равный нулю (для покоящегося диска), или заданной скорости вращения - на его границе. И эти параметры неявным образом входят в начальную вихревую функцию $w_0(t, \mathbf{x})$, которая является ротором $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$.

2.2 Закон Био-Савара в полярных координатах

Исследуем вопрос однозначного восстановления соленоидального векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ по функции ротора $w(\mathbf{x})$ с условием прилипания и заданным потоком на бесконечности. Система, соответствующая этой задаче является переопределенной, и решение существует при определенных ограничениях на $w(\mathbf{x})$. Поиск соленоидального поля по вихревой функции связан с разложением Гельмгольца, поэтому нередко эту задачу называют задачей гельмгольца.

Рассмотрим задачу Гельмгольца

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.2.1}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathrm{w}(\mathbf{x}) \tag{2.2.2}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \ |\mathbf{x}| = r_0 \tag{2.2.3}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty, \ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{2.2.4}$$

Перепишем (2.2.1),(2.2.2) в полярных координатах для коэффициентов Фурье $v_{r,k}$, $v_{\varphi,k}$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_{r,k}\right) + \frac{ik}{r} v_{\varphi,k} = 0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_{\varphi,k}\right) - \frac{ik}{r} v_{r,k} = w_k.$$

Базис пространства решений однородной системы с правой частью $w_k \equiv 0$ состоит из двух векторов:

$$\begin{pmatrix} v^1_{r,k} \\ v^1_{\varphi,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ir^{-k-1} \\ r^{-k-1} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} v^2_{r,k} \\ v^2_{\varphi,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ir^{k-1} \\ -r^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Горизонтальный поток $\mathbf{v}_\infty = (v_\infty, 0)$ в полярных координатах записывается как

$$v_\infty \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} = v_\infty \begin{pmatrix} e^{i\varphi}/2 + e^{-i\varphi}/2 \\ -e^{i\varphi}/2i + e^{-i\varphi}/2i \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $w \in L_1(B_{r_0})$. Тогда коэффициенты Фурье вихревой функции удовлетворяют

$$s^{-|k|+1} w_k(s) \in L_1(r_0, \infty), k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.5}$$

Тогда, в частности, при $k = 0$:

$$\int_{r_0}^{\infty} w_0(s) s \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi} \int_{B_{r_0}} w(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty.$$

Используя разложение $\mathbf{v}_\infty$ в ряд Фурье, решение задачи (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4) будет даваться формулами:

$k > 0$: (2.2.6)

$$v_{r,k}(r) = \frac{ir^{-k-1}}{2} \int_{r_0}^{r} s^{k+1} w_k(s) \,\mathrm{d}s + \frac{ir^{k-1}}{2} \int_{r}^{\infty} s^{-k+1} w_k(s) \,\mathrm{d}s + \frac{\delta_{k,1}}{2} v_\infty + \alpha_k i r^{-k-1},$$
$$v_{\varphi,k}(r) = \frac{r^{-k-1}}{2} \int_{r_0}^{r} s^{k+1} w_k(s) \,\mathrm{d}s - \frac{r^{k-1}}{2} \int_{r}^{\infty} s^{-k+1} w_k(s) \,\mathrm{d}s - \frac{\delta_{k,1}}{2i} v_\infty + \alpha_k r^{-k-1},$$

$k < 0$: (2.2.7)

$$v_{r,k} = -\frac{ir^{k-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{-k+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} - \frac{ir^{-k-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{k+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} + \frac{\delta_{k,-1}}{2}v_\infty + \alpha_k i r^{k-1},$$

$$v_{\varphi,k} = \frac{r^{k-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{-k+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} - \frac{r^{-k-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{k+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} + \frac{\delta_{k,-1}}{2i}v_\infty - \alpha_k r^{k-1},$$

$k = 0$: (2.2.8)

$$v_{r,0} = \frac{\alpha_0}{r},$$

$$v_{\varphi,0} = \frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} s w_0(s)\,\mathrm{ds} + \frac{\theta}{r},$$

где $\{\alpha_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, θ найдутся из граничного условия прилипания (2.2.3).

Выражение $\frac{\theta}{r}$ в последней формуле является представлением дискретного вихря

$$\sigma_\theta(\mathbf{x}) = \theta\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}, \tag{2.2.9}$$

где $\mathbf{x}^\perp = (-x_2, x_1)$, и θ определяет его интенсивность.

Замечание. Важно отметить, что если среднее значение ротора не равно нулю (т.е. не выполняется условие нулевой циркуляции на бесконечности), то слагаемое

$$\frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} s w_0(s)\,\mathrm{ds}$$

при $r \to \infty$ имеет асимптотику $\frac{1}{r}$ и соответствующее поле $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$ не принадлежит L_2 и имеет бесконечную кинетическую энергию. Это типично для бесконечных течений с циркуляцией на бесконечности. Напротив, если ротор w достаточно быстро убывает на бесконечности, и его среднее значение равно нулю, но энергия потока конечна. Условие нулевой средней завихренности (или, что тоже самое, нулевой циркуляции) есть необходимое условие конечности энергии.

2.2.1 Условие прилипания в вихревой форме

Из условия прилипания (2.2.3) имеем $v_{r,k}(r_0) = v_{\varphi,k}(r_0) = 0$. Ввиду (2.2.8) непосредственно следует $\alpha_0 = 0$, и $\theta = 0$. Для $k > 0$ из (2.2.6) следует

$$v_{r,k}(r_0) = \frac{ir_0^{k-1}}{2}\int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1}w_k(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\delta_{k,1}}{2}v_\infty + \alpha_k i r^{-k-1} = 0,$$
$$v_{\varphi,k}(r_0) = -\frac{r_0^{k-1}}{2}\int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1}w_k(s)\,\mathrm{d}s - \frac{\delta_{k,1}}{2i}v_\infty + \alpha_k r^{-k-1} = 0.$$

Тогда отсюда $\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Аналогичным способом из (2.2.7) имеем $\alpha_k = 0$ для $k \le 0$.

Следовательно, если решение задачи (2.2.1) - (2.2.4), с $w \in L_1(B_{r_0})$ существует, то оно будет даваться выражениями (2.2.6)-(2.2.8) с $\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\theta = 0$.

В предположении нулевой циркуляции (2.1.10) из формулы Стокса следует

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{|\mathbf{x}|=R}\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{l} = \int_{r_0}^{\infty} w_0(s)s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} w(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0,$$

и выражение в (2.2.8) представимо как

$$\frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} sw_0(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2r}\int_{r_0}^{r} sw_0(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2r}\int_{r}^{\infty} sw_0(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Окончательно, формулы выше, которые описывают закон Био-Савара для внешности круга, мы перепишем для $k \in \mathbb{Z}$ в следующем виде:

$$v_{r,k} = \mathrm{sign}(k)\frac{ir^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{d}s \qquad (2.2.10)$$
$$+\,\mathrm{sign}(k)\frac{ir^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\delta_{|k|,1}}{2}v_\infty,$$
$$v_{\varphi,k} = \frac{r^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{d}s \qquad (2.2.11)$$
$$-\frac{r^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{d}s - \mathrm{sign}(k)\frac{\delta_{|k|,1}}{2i}v_\infty,$$

где $\operatorname{sign}(k) = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \\ -1, & k < 0 \end{cases}$ - функция знака, $\delta_{|k|,1}$ - символ Кроннекера, v_∞ - скорость горизонтального потока на бесконечности.

В разделе 3.4 показано, что эти формулы имеют интегральное представление через ядро Био-Савара

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} w(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{v}_\infty, \tag{2.2.12}$$

где $\mathbf{x}^\perp = (-x_2, x_1)$. Поэтому формулы (2.2.10), (2.2.11) являются разложением в ряд Фурье сингулярного ядра Био-Савара.

Ядро оператора Био-Савара есть орто-градиент $\nabla^\perp_{\mathbf{x}} = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ функции Грина оператора Лапласа на плоскости

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Формулы (2.2.10), (2.2.11) вместе с (2.2.3) приводят к соотношениям на ротор векторного поля ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\, \mathrm{d}s = i v_\infty \delta_{|k|,1} \operatorname{sign}(k). \tag{2.2.13}$$

Эти соотношения являются аналогом условия ортогональности ротора гармоническим функциям в L_2 [102] [103]. Учитывая, что $z = re^{i\varphi}$, то последнее соотношение можно переписать как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \frac{w}{z^k} d\mathbf{x} = \begin{cases} 0, & k \geq 0,\ k \neq 1, \\ i\mathbf{v}_\infty, & k = 1. \end{cases}$$

Для внешних областей условие ортогональности нарушается на функциях вида $1/z$.

Теорема 2.2.1 (Закон Био-Савара в полярных координатах)**.** *Пусть* $w \in L_1(B_{r_0}) \cap L_2(B_{r_0})$ *и коэффициенты Фурье* $w_k(r)$ *удовлетворяют (2.2.13). То-*

гда существует единственное решение (2.2.1) - (2.2.4), даваемое (2.2.10), (2.2.11) с коэффициентами Фурье $v_{r,k}$, $v_{\varphi,k} \in L_\infty(r_0, \infty)$.

Доказательство. В самом деле, для $w \in L_1(B_{r_0})$ следует (2.2.5). Из (2.2.5), (2.2.13) следует (2.2.3). Формулы (2.2.10), (2.2.11) удовлетворяют (2.2.1), (2.2.2). Так как $\alpha_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\theta = 0$ в (2.2.6)-(2.2.8) определяются однозначно, то решение единственно.

В формулах (2.2.10), (2.2.11) имеем

$$\left| r^{-|k|-1} \int_{r_0}^{r} s^{|k|+1} w_k(s)\, \mathrm{ds} \right| = \frac{r^{-|k|-1}}{2\pi} \left| \int_{r_0}^{r} \int_0^{2\pi} s^{|k|} w(s,\varphi) e^{ik\varphi} d\mathbf{x} \right| \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{r_0}^{r} \int_0^{2\pi} |w(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \to 0,\ r \to \infty$$

и, аналогично,

$$\left| r^{|k|-1} \int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\, \mathrm{ds} \right| \to 0,\ r \to \infty.$$

Тогда $v_{r,k}$, $v_{\varphi,k}$ стремятся к коэффициентам Фурье $\mathbf{v}_\infty$ при $r \to \infty$.

□

2.3 Вывод граничного условия и решение задачи Стокса.

Теперь мы выведем граничное условие для завихренности вместо интегральных соотношений (2.2.13).

Задача (2.1.6), (2.1.7) в полярных координатах задается уравнением

$$\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial t} - \Delta_k w(t,r) = 0,\ w_k(0,r) = w_k^0(r), \tag{2.3.1}$$

где

$$\Delta_k w_k(t,r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} w_k(t,r) \right) - \frac{k^2}{r^2} w_k(t,r).$$

Дополним (2.3.1) смешанным граничным условием:

$$r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = 0,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.3.2}$$

Лемма 2.3.1. *Множество*

$$M = \{w \in L_1(B_{r_0}) \mid \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k^0(s)\,\mathrm{ds} = const,\ k = 0, 1, 2, \dots\}$$

является инвариантным относительно потока $e^{t\Delta}$ *с граничным условием (2.3.2).*

Доказательство. Условие $w \in L_1(B_{r_0})$ влечет $w_k^0(s) \in L_1(r_0, \infty, s^{-|k|+1}\,\mathrm{ds})$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(t,s)\,\mathrm{ds} = \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1}\Delta_k w_k(t,s)\,\mathrm{ds}\\
&= \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial}{\partial s}w_k(t,s)\right) - \frac{k^2}{s}w_k(t,s)\right)\mathrm{ds}\\
&= -r_0^{-|k|+1}\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|}\left(|k|\frac{\partial}{\partial s}w_k(t,s) - \frac{k^2}{s}w_k(t,s)\right)\mathrm{ds}\\
&= -r_0^{-|k|}\left(r_0\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0)\right) + \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|-1}\\
&\times \left(k^2 w_k(t,s) - k^2 w_k(t,s)\right)\mathrm{ds} = 0
\end{aligned}$$

□

Предложение 2.3.2. *Пусть начальное векторное поле* $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ *удовлетворяет (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.10),* $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0}) \cap L_2(B_{r_0})$*, его ряд Фурье вместе с рядом Фурье для ротора сходятся. Тогда коэффициенты* $w_k(t,r)$ *задачи (2.1.6)-(2.1.9) удовлетворяют краевому условию (2.3.2).*

Доказательство. Из $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0})$ следует $w_k^0(s) \in L_1(r_0, \infty, s^{-|k|+1}\,\mathrm{ds})$ для любых $k \in \mathbb{Z}$.

Множество M выше определяется моментными соотношениями

$$M = \{w \in L_1(B_{r_0}) \mid \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{w}{z^k} d\mathbf{x} = const,\ k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Как было доказано в предыдущей главе, уравнение теплопроводности с граничным условием (2.3.2) образует сильно-непрерывную полугруппу в

L_2. Поэтому для $w(t,\cdot) \in L_2$ и $k > 1$ интеграл $\int_{B_{r_0}} \frac{w}{z^k} d\mathbf{x}$ сходится. Докажем, что он сходится и при $k = 0, 1$.

При $k = 0$ нулевой коэффициент Фурье решения уравнения теплопроводности определяет радиально симметричное решение $w(t, \mathbf{x})$ уравнения теплопроводности с граничным условием Неймана

$$\frac{\partial w(t, \mathbf{x}')}{\partial n} = 0, \ |\mathbf{x}'| = r_0.$$

При $k = 1$ получаем уравнение теплопроводности со смешанным граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial n} + w(t, \mathbf{x}') = 0, \ |\mathbf{x}'| = r_0.$$

Из $L_p - L_q$ оценок для уравнения теплопроводности во внешних областях [60] с некоторой непрерывной $C(t) > 0$ для этих решений справедлива оценка

$$\|w_k(t,\cdot)\|_{L_1(r_0,\infty,r)} \leq C(t)\|w_k(0,\cdot)\|_{L_2(r_0,\infty,r)},$$

где $k = 0, 1$.

Следовательно

$$\lim_{R\to\infty} \int_{r_0<|\mathbf{x}|<R} w(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty,$$

и

$$\lim_{R\to\infty} \int_{r_0<|\mathbf{x}|<R} \frac{w(t, \mathbf{x})}{z} d\mathbf{x} < \infty.$$

Тогда моменты в определении M корректно определены, и из условия сохранения моментов из Леммы 2.3.1 следует выполнение граничного условия (2.3.2). □

Таким образом, задача (2.1.6)-(2.1.9) свелась к начально-краевой задаче (2.3.1), (2.1.7), (2.1.9) с краевым условием (2.3.2).

Теорема 2.3.3 (Явный вид решения задачи Стокса обтекания цилиндра внешним потоком)**.** *Пусть векторное поле* $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ *удовлетворяет (2.1.2),*

(2.1.4), (2.1.5), (2.1.10), $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0}) \cap L_2(B_{r_0})$, $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда решение* $w(t,\mathbf{x})$ *задачи (2.1.6)-(2.1.9) выражается через интеграл Вебера как*

$$w(t,r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} W^{-1}_{|k|,|k|-1}\left[e^{-\lambda^2 t} W_{|k|,|k|-1}[w_k(0,r)]\right]. \tag{2.3.3}$$

Доказательство. Из $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0})$ следует $w_0^0(r)r \in L_1(r_0,\infty)$ и условие (2.2.5). Более того, это условие (2.2.5) сохранеятся и для решения $w(t,\cdot)$, $t>0$. Из $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \in L_2(B_{r_0})$ следует, что $w_k^0(r)\sqrt{r} \in L_2(r_0,\infty)$. Из предложения 2.3.2 следует справедливость краевого условия третьего типа (2.3.2). Это условие связано с преобразованием Вебера $W_{k,k-1}$, которое является вырожденным. Но из (2.2.13) следует

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} = 0,\ |k| \geq 2.$$

В первой главе диссертации в теореме 1.4.3 доказано, что это равенство есть условие ортогональности ядру $W_{|k|,|k|-1}$. Поэтому, если начальное условие удовлетворяет условию прилипания (условие согласования начальных и краевых условий), то преобразование $W_{|k|,|k|-1}$ становится обратимым. Из замечания к теореме 1.4.3 о преобразовании Вебера интеграл $W_{|k|,|k|-1}[w_k(0,r)]$ определен почти всюду и решение задачи будет даваться формулой выше. □

Замечание. Мы получили явную формулу для вихревой функции w решения задачи Стокса. Само решение задачи Стокса в терминах векторного поля получается по закону Био-Савара (2.2.12).

2.4 Оценка полугруппы потока Стокса

Проведем оценку полугруппы $S(t)$, определяемой формулой (2.3.3). Коэффициенты Фурье потока задаются формулой

$$w_k(t,r) = W^{-1}_{|k|,|k|-1}\left[e^{-\lambda^2 t} W_{|k|,|k|-1}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\right](t,r).$$

Преобразование Вебера удовлетворяет неравенству Бесселя:

$$\|W_{k,l}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;\lambda)} \le \|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)}. \tag{2.4.1}$$

Из правил дифференцирования следует

$$\frac{\partial}{\partial r}W^{-1}_{k,k-1}[f] = \frac{1}{2}\left(W^{-1}_{k-1,k-1}[\lambda f] - W^{-1}_{k+1,k-1}[\lambda f]\right), \tag{2.4.2}$$

$$\frac{k}{r}W^{-1}_{k,k-1}[f] = \frac{1}{2}\left(W^{-1}_{k+1,k-1}[\lambda f] + W^{-1}_{k-1,k-1}[\lambda f]\right). \tag{2.4.3}$$

В полярных координатах с единичными векторами $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e}_\varphi$ градиент имеет вид $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ с полярными координатами ∇_r, ∇_φ. Множитель $\frac{k}{r}$ соответствует дифференцированию по φ функции $f(r)e^{ik\varphi}$.

Формула (2.4.3) включает преобразование Вебера $W^{-1}_{k+1,k-1}$ которое также обладает нетривиальным ядром и удовлетворяет неравенству Бесселя:

$$\|W^{-1}_{k+1,k-1}[f]\|^2_{L_2(0,\infty;\lambda)} \le \|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)}.$$

И наоборот, умножение на λ переходит в дифференцирование, но в более общем смысле, включающем не только $\frac{\partial}{\partial r}$ но также и угловую производную $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, выражаемую множителем $\frac{k}{r}$:

$$\lambda W_{k,k-1}[f] = W_{k-1,k-1}[\frac{kf}{r}] + W_{k-1,k-1}[f'(\cdot)]. \tag{2.4.4}$$

Формула (2.3.3) задает поток Стокса $S(t)$ задачи (2.1.6)-(2.1.9). Оценки полугруппы даются следующим предложением:

Предложение 2.4.1. *Для $t > 0$ полугруппа $S(t)$ удовлетворяет следующим оценкам:*

$$\|S(t)w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \|w_0\|_{L_2(B_{r_0})},$$

$$\|\nabla S(t)w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \frac{1}{\sqrt{et}}\|w_0\|_{L_2(B_{r_0})},$$

$$\|S(t)w_0\|_{H^1(B_{r_0})} \le \sqrt{3}\|w_0\|_{H^1(B_{r_0})}.$$

Доказательство. Из неравенства Бесселя имеем:

$$\|w_k(t,r)\|^2_{L_2(r_0,\infty,r)} \le \|e^{-\lambda^2 t} W_{|k|,|k|-1}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\|^2_{L_2(0,\infty,\lambda)}$$
$$\le \|W_{|k|,|k|-1}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\|^2_{L_2(0,\infty,\lambda)} \le \|w_k^0(r)\|_{L_2(r_0,\infty,r)}.$$

Суммируя по k, мы получаем первую оценку.

Зафиксируем $k \ge 0$. Тогда из оценки

$$|\lambda e^{-\lambda^2 t}| \le \frac{1}{\sqrt{2et}}$$

и неравенства Бесселя (2.4.1) из (2.4.2) буддем иметь

$$\left\|\frac{\partial}{\partial r} w_k(t,r)\right\|_{L_2(r_0,\infty,r)} \le \|\lambda e^{-\lambda^2 t} W_{k,k-1}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\|_{L_2(0,\infty,\lambda)}$$
$$\le \frac{\|w_k^0(r)\|_{L_2(r_0,\infty,r)}}{\sqrt{2et}}$$

и

$$\|\nabla_r S(t) w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \frac{1}{\sqrt{2et}} \|w_0\|_{L_2(B_{r_0})}.$$

Из (2.4.3) в схожем ключе следует

$$\left\|\frac{k}{r} w_k(t,r)\right\|_{L_2(r_0,\infty,r)} \le \frac{\|w_k^0(r)\|_{L_2(r_0,\infty,r)}}{\sqrt{2et}}.$$

Тогда получим

$$\|\nabla_\varphi S(t) w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \frac{1}{\sqrt{2et}} \|w_0\|_{L_2(B_{r_0})}$$

и вторая оценка этого утверждения доказана.

Теперь мы докажем последнее неравенство. Используя (2.4.2),(2.4.4) получим

$$\left\|\frac{\partial}{\partial r} w_k(t,r)\right\|_{L_2(r_0,\infty,r)} \le \|\lambda e^{-\lambda^2 t} W_{k,k-1}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\|_{L_2(0,\infty,\lambda)}$$
$$= \left\|e^{-\lambda^2 t} W_{k-1,k-1}[\frac{k w_k^0}{r} + \frac{\partial}{\partial r} w_k^0(\cdot)]\right\| \le \left\|\frac{k w_k^0}{r}\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial r} w_k^0(\cdot)\right\|$$

и, следовательно,

$$\|\nabla_r S(t)w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \sqrt{2}\|\nabla w_0\|_{L_2(B_{r_0})}. \tag{2.4.5}$$

Схожим путем из (2.4.3), (2.4.4) получим

$$\left\|\frac{k}{r}w_k(t,r)\right\|_{L_2(r_0,\infty,r)} \le \|\lambda e^{-\lambda^2 t}W_{k,k-1}[w_k^0(\cdot)](\lambda)\|_{L_2(0,\infty,\lambda)}$$
$$\le \left(\left\|\frac{kw_k^0}{r}\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial r}w_k^0(\cdot)\right\|\right)$$

и, окончательно,

$$\|\nabla_\varphi S(t)w_0\|_{L_2(B_{r_0})} \le \sqrt{2}\|\nabla w_0\|_{L_2(B_{r_0})}$$

вместе с (2.4.5) и первой оценкой предложения дает последнюю оценку.

□

Замечание. Наличие интегрируемой особенности $\frac{1}{\sqrt{et}}$ играет очень важную роль при исследовании нелинейных задач. Записывая нелинейную задачу как возмущение линейной с помощью полученной полугруппы можно доказывать локальное по времени существование решений нелинейных задач. А при наличии априорных оценок продолжать локальное решение до глобального. Таким методом будет в дальнейшем исследована система Навье-Стокса.

2.5 Решение задачи Стокса при движении вращающегося диска, и при его неравномерном движении

2.5.1 Условие непротекания

Здесь мы ослабим условие прилипания (2.2.3) условием непротекания

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{n}) = 0, \ |\mathbf{x}| = r_0, \tag{2.5.1}$$

где $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к границе. Найдем решение системы (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4) с условием (2.5.1). Тогда решение этой задачи уже не будет единственным и будет иметь одну степень свободы, связанную с циркулярностью потока.

Из (2.5.1) следует $v_{r,k}(r_0) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда из (2.2.6)-(2.2.8)

$$\alpha_k = -\frac{\operatorname{sign}(k) r_0^{2|k|}}{2} \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} - \frac{r_0^{|k|+1}\delta_{|k|,1}}{2i} v_\infty,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$\alpha_k = 0,\ k = 0.$$

В коэффициентах Фурье эта формула примет вид

$k > 0$:

$$v_{r,k}(r) = \frac{ir^{-k-1}}{2} \int_{r_0}^{r} s^{k+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} + \frac{ir^{k-1}}{2} \int_{r}^{\infty} s^{-k+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} + \frac{\delta_{k,1}}{2} v_\infty$$
$$- ir^{-k-1} \frac{\operatorname{sign}(k) r_0^{2|k|}}{2} \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} - ir^{-k-1} \frac{r_0^{|k|+1}\delta_{|k|,1}}{2i} v_\infty,$$
$$v_{\varphi,k}(r) = \frac{r^{-k-1}}{2} \int_{r_0}^{r} s^{k+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} - \frac{r^{k-1}}{2} \int_{r}^{\infty} s^{-k+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} - \frac{\delta_{k,1}}{2i} v_\infty$$
$$- r^{-k-1} \frac{\operatorname{sign}(k) r_0^{2|k|}}{2} \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} - r^{-k-1} \frac{r_0^{|k|+1}\delta_{|k|,1}}{2i} v_\infty,$$

$k < 0$:

$$v_{r,k} = -\frac{ir^{k-1}}{2} \int_{r_0}^{r} s^{-k+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} - \frac{ir^{-k-1}}{2} \int_{r}^{\infty} s^{k+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} + \frac{\delta_{k,-1}}{2} v_\infty$$
$$- ir^{k-1} \frac{\operatorname{sign}(k) r_0^{2|k|}}{2} \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} - ir^{k-1} \frac{r_0^{|k|+1}\delta_{|k|,1}}{2i} v_\infty,$$
$$v_{\varphi,k} = \frac{r^{k-1}}{2} \int_{r_0}^{r} s^{-k+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} - \frac{r^{-k-1}}{2} \int_{r}^{\infty} s^{k+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} + \frac{\delta_{k,-1}}{2i} v_\infty$$
$$+ r^{k-1} \frac{\operatorname{sign}(k) r_0^{2|k|}}{2} \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} + r^{k-1} \frac{r_0^{|k|+1}\delta_{|k|,1}}{2i} v_\infty,$$

$k = 0$:

$$v_{r,0} = 0,$$
$$v_{\varphi,0} = \frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} s w_0(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\theta}{r},$$

Более компактно для $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} v_{r,k} &= \operatorname{sign}(k)\frac{i r^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \operatorname{sign}(k)\frac{i r^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\delta_{|k|,1}}{2} v_\infty \\ &- i r^{-|k|-1}\frac{\operatorname{sign}(k) r_0^{2|k|}}{2}\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s - i r^{-|k|-1}\frac{r_0^{|k|+1}\delta_{|k|,1}}{2i} v_\infty \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

$$\begin{aligned} v_{\varphi,k} &= \frac{r^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s \\ &- \frac{r^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s - \operatorname{sign}(k)\frac{\delta_{|k|,1}}{2i} v_\infty \\ &- r^{-|k|-1}\frac{r_0^{2|k|}}{2}\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s - \operatorname{sign}(k) r^{-|k|-1}\frac{r_0^{|k|+1}\delta_{|k|,1}}{2i} v_\infty \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Интегральная запись этой формулы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y}^*)^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*|^2}\right) w(t,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \\ \theta\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2} + \nabla\Psi, \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

где $\mathbf{y}^* = r_0^2\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^2$, а ядро оператора есть орто-градиент $\nabla_{\mathbf{x}}^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ функции Грина оператора Лапласа во внешности круга

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*||\mathbf{y}|}.$$

$\nabla\Psi$ является потенциальным течением вокруг диска с условием непротекания (2.5.1), условием на бесконечности (2.1.5), и с потенциалом

$$\Psi(r,\varphi) = \mathbf{v}_\infty r\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\varphi.$$

Само поле дается формулами

$$V_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \mathbf{v}_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos\varphi, \tag{2.5.5}$$

$$V_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = -\mathbf{v}_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin\varphi. \tag{2.5.6}$$

Таким образом, система (2.2.1), (2.2.2), (2.5.1), (2.2.4) не является однозначно-разрешимой ввиду того, что $\theta \in \mathbb{R}$ в (2.2.8), которое определяет интенсивность циркуляции вокруг диска. Векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ восстанавливается по его ротору $w(\mathbf{x})$ с точностью до циркуляции поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ вокруг границы. В декартовых координатах это означает, что к любому решению (2.2.1), (2.2.2), (2.5.1), (2.2.4) $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ мы можем добавить дискретный вихрь (2.2.9) и $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + \sigma_\theta(\mathbf{x})$ также будет решением той же системы с любым $\theta \in \mathbb{R}$. Этот факт существенно отличает внешние неограниченные области от ограниченных односвязных, поскольку в первых векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ восстанавливается по своей завихренности $w(\mathbf{x})$ с точностью до циркуляции по границе.

Иными словами, фактор-пространство

$$\mathcal{H}^1 = \operatorname{Ker}\operatorname{curl}/\operatorname{Im}\nabla = \left\{\theta \frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

является одномерным.

2.5.2 Условие прилипания при вращении диска

Заменим условие (2.2.3) условием прилипания к вращаемуся диску. Тогда вектор скорости на границе будет касательным к границе тела. Поэтому это условие состоит из из условия непротекания на границе (2.5.1) и условия равенства скорости жидкости и тела на границе:

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{n}) = 0,\ |\mathbf{x}| = r_0, \tag{2.5.7}$$

$$\left(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{n}^\perp\right) = a,\ |\mathbf{x}| = r_0. \tag{2.5.8}$$

Здесь a - скорость вращения диска на его границе.

Тогда в формулах (2.2.6)-(2.2.8) $\alpha_0 = 0$, а $\theta = a \cdot r_0$.

Эти формулы вместе вместе с (2.5.7), (2.5.8) приводят к соотношениям на ротор векторного поля ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} = 0,\ |k| > 1$$
$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} = iv_\infty \operatorname{sign}(k),\ |k| = 1$$
$$\int_{r_0}^{\infty} s w_k(s)\,\mathrm{ds} = a.$$

Инвариантное множество будет задаваться следующими моментными соотношениями

$$M = \Big\{ w(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0}) \ \Big| \tag{2.5.9}$$
$$\int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{(x_1 + ix_2)^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0,\ k > 1, \tag{2.5.10}$$
$$\int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{(x_1 + ix_2)}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 2\pi i v_\infty, \tag{2.5.11}$$
$$\int_{B_{r_0}} w(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 2\pi i a \Big\}. \tag{2.5.12}$$

Это многообразие по-прежнему является инвариантным относительно потока $e^{t\Delta}$ при выполнении смешанного граничного условия (2.3.2). Поэтому формула (2.3.3) также задает решение для движущегося и вращающегося диска.

2.5.3 Неравномерное движение вращающегося диска

Предположим теперь, что $\mathbf{v}_\infty$ и a есть функции от t. Инвариантное многообразие задается также формулой (2.5.9). Тогда

$$\frac{d}{dt}\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(t,s)\,\mathrm{ds} = \int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} \Delta_k w_k(t,s)\,\mathrm{ds}$$
$$= -r_0^{-|k|}\left(r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) \right)$$

Отсюда получаем краевое условие

$$r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = u_k(t),$$

где

$$u_k(t) = \begin{cases} 0, \ |k| > 1 \\ -ir_0 \frac{dv_\infty}{dt} \operatorname{sign}(k), \ |k| = 1 \\ -ir_0 \frac{da}{dt}, \ k = 0 \end{cases}$$

Неравномерное движение вращающегося диска будет описываться задачей уравнением (2.1.6) с ненулевым граничным условием $u_k(t)$. Найдем решение этой задачи.

Поскольку $w_{-k}(t,r) = \overline{w_k(t,r)}$, и $u_{-k}(t) = \overline{u_k(t)}$, а оператор Δ_k и граничное условие зависят от $|k|$, то будем полагать $k \geq 0$.

Обозначим

$$R_{k,k-1}(\lambda, r) = \frac{J_k(\lambda r) Y_{k-1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r) J_{k-1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0) + Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}}.$$

Из свойств функций Бесселя

$$J_{k-1}(r) = \frac{k}{r} J_k(r) + J_k'(r),$$
$$Y_{k-1}(r) = \frac{k}{r} Y_k(r) + Y_k'(r)$$

следует

$$k R_{k,k-1}(\lambda, r_0) + \lambda r_0 R_{k,k-1}'(\lambda, r_0) = r_0 R_{k-1,k-1}(\lambda, r_0) = 0.$$

Также верно:

$$R_{k,k-1}(\lambda, r_0) = \frac{J_k(\lambda r_0) Y_{k-1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r_0) J_{k-1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0) + Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}} = \frac{2}{\pi r_0 \lambda}.$$

Справедливость этого соотношения приводится в книге Бейтмана, Эрдейи [3].

Применим преобразование $W_{k,k-1}$ к уравнению (2.1.6). Сначала мы выясним, как преобразование действует на оператор Лапласа. Используя интегрирование по частям, мы получим

$$
\begin{aligned}
W_{k,k-1}[\Delta_k w_k(t,r)] &= -r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r} \frac{R_{k,k-1}(\lambda,r)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda,r_0)+Y_{k-1}^2(\lambda,r_0)}}\Bigg|_{r_0}^{\infty} \\
&+ r_0 w_k(t,r) \frac{\lambda R'_{k,k-1}(\lambda,r)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0)+Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}}\Bigg|_{r_0}^{\infty} - \lambda^2 W_{k,k-1}[w_k(t,r)] \\
&= (u_k(t) - k w_k(t,r_0)) \frac{R_{k,k-1}(\lambda,r_0)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0)+Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}} \\
&- r_0 w_k(t,r_0) \frac{\lambda R'_{k,k-1}(\lambda,r)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0)+Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}} - \lambda^2 \hat{w}_k(t,\lambda) \\
&= -\frac{w_k(t,r_0)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0)+Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}} \left(k R_{k,k-1}(\lambda,r_0) + \lambda r_0 R'_{k,k-1}(\lambda,r_0)\right) \\
&- \lambda^2 \hat{w}_k(t,\lambda) + u_k(t) \frac{R_{k,k-1}(\lambda,r_0)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0)+Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}} \\
&= \frac{2u_k(t)}{\pi r_0 \lambda \sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0)+Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}} - \lambda^2 \hat{w}_k(t,\lambda).
\end{aligned}
$$

Уравнение (2.1.6) в терминах коэффициентов w_k после преобразования Вебера можно записать в виде

$$\partial \hat{w}_k(t,\lambda) + \lambda^2 \hat{w}_k(t,\lambda) + r_k(\lambda) u_k(t) = 0,$$

где $\hat{w}_k(t,\cdot) = W_{k,k-1}[w_k(t,\cdot)]$,

$$r_k(\lambda) = \frac{2}{\pi r_0 \lambda \sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0)+Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}}.$$

В итоге получаем формулу

$$\hat{w}_k(t,\lambda) = e^{-\lambda^2 t} \hat{w}_{0,k}(\lambda) + r_k(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2 (t-\tau)} u_k(\tau) d\tau.$$

Возьмем обратное преобразование $W^{-1}_{k,k-1}$, просуммируем по k, и получим окончательную формулу решения задачи:

$$w(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} W^{-1}_{|k|,|k|-1}\left[e^{-\lambda^2 t} W_{|k|,|k|-1}[w_k(0,r)]\right] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} W^{-1}_{|k|,|k|-1}\left[r_{|k|}(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} u_k(\tau)d\tau\right].$$

Глава 3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИВЕРГЕНЦИЯ-РОТОР. ВИХРЕВОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ПОТОКА СТОКСА ВО ВНЕШНЕЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе будет построено граничное условие для вихревой функции потока Стокса во внешней области. Будет решена задача Ходжа-Гельмгольца восстановления векторного поля скорости течения несжимаемой жидкости с граничным условием прилипания по ротору этого векторного поля. Решение будет найдено как через интегральное преобразование, так и через разложение в ряд Фурье. С помощью найденного решения будет построено граничное условие для вихревой функции.

Относительно рассматриваемой внешней области будем полагать, что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ является дополнением к ограниченной односвязной области G с границей, которая задается гладкой жордановой кривой.

Задачей дивергенция-ротор называется задача восстановления соленоидального векторного поля по роторной функции w:

$$\operatorname{div}\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \tag{3.0.1}$$

$$\operatorname{curl}\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}), \tag{3.0.2}$$

которая в зависимости от типа граничных условий может как иметь бесконечно много решений, так и не иметь вовсе.

3.1 Гармонические поля

Здесь мы приведем известные сведения о касательных гармонических полях, которые в дальнейшем будут распространены на векторные поля с условием прилипания. Поля во внешних областях с нулевым условием на бесконечности были описаны в работах [81] [82].

Рассмотрим комплекс де Рама

$$0 \to \Lambda^0(\Omega) \overset{\nabla}{\to} \Lambda^1(\Omega) \overset{\mathrm{curl}}{\to} \Lambda^2(\Omega),$$

где Λ^k - пространство k-форм.

Гармоническим полем назовем бездивергентное безвихревое поле, касательное к границе, и стремящееся к вектору $\mathbf{v}_\infty$ на бесконечности.

Для $\Omega = B_{r_0}$ бездивергентное поле восстанавливается по ротору согласно формуле (2.5.4) как

$$\mathbf{v} = G_1 * w + \theta \frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2} + \nabla\Psi,$$

где G_1 есть орто-градиент $\nabla^\perp_{\mathbf{x}} = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ функции Грина, $\nabla\Psi$ является соленоидальным потенциальным течением вокруг диска с условием непротекания, граничным условием на бесконечности $\mathbf{v}_\infty$, даваемым (2.5.5), (2.5.6).

Тогда фактор-пространство ядра ротора по градиенту совпадает с пространством гармонических полей, которые не являются потенциальными:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{curl}/\mathrm{Im}\,\nabla = \left\{ \theta \frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2},\ \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

и является одномерным:

$$\mathcal{H}^1(\Omega) \sim \mathbb{R}.$$

Для построения гармонического поля в произвольной внешней области с односвязной границей, мы воспользуемся отображением Римана Φ области Ω в единичный круг B_1:

$$\Phi : \Omega \to B_1$$

Функция Грина оператора Лапласа для плоских задач имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ - гармоническая функция, отвечающая тому, или иному граничному условию, и, следовательно,

$$\Delta_x G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Функция Грина для оператора Лапласа во внешней области с нулевым граничным условием имеет вид:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})|}{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})^*||\Phi(\mathbf{y})|}.$$

Она представима в виде суммы фундаментального решения и гармонической функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$:

$$\ln\frac{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})|}{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})^*||\Phi(\mathbf{y})|} = \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| + \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

и удовлетворяет граничному условию

$$G(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}) = 0,\ \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega.$$

Её орто-градиент

$$\nabla^{\perp}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} D\Phi^t \left(\frac{(\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y}))^{\perp}}{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})|^2} - \frac{(\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})^*)^{\perp}}{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})^*|^2} \right)$$

является оператором, с помощью которого решается задача дивергенция-ротор во внешней области. Здесь $D\Phi$ - это матрица Якоби, компоненты которой удовлетворяют соотношениям Коши-Римана:

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Phi'_{x_1} & \operatorname{Re}\Phi'_{x_2} \\ \operatorname{Im}\Phi'_{x_1} & \operatorname{Im}\Phi'_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Phi'_{x_1} & -\operatorname{Im}\Phi'_{x_1} \\ \operatorname{Im}\Phi'_{x_1} & \operatorname{Re}\Phi'_{x_1} \end{pmatrix},$$

а $D\Phi^t$ - транспонированная к ней матрица.

Эта формула связана с полем во внешности круга, задаваемым в (2.5.4), через ковариантное соотношение с матрицей $D\Phi^t$.

Построим гармоническое, т.е. непотенциальное безвихревое соленоидальное векторное поле во внешней области. Для этого рассмотрим еще одну функцию Грина:

$$G_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})|.$$

Она представима как

$$G_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}.$$

Последнее слагаемое в этой формуле есть гармоническая функция. Оно имеет устранимую особенность при $\mathbf{y}\to\mathbf{x}$:

$$\ln\frac{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \to \ln|\Phi'(\mathbf{x})|,\ \mathbf{y}\to\mathbf{x}.$$

При этом оно же является и гармонической функцией из определения логарифма:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

Рассмотрим её орто-градиент:

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi}D\Phi^t\frac{(\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y}))^\perp}{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})|^2} = \nabla^\perp_{\mathbf{x}}G_2(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Подставим $\mathbf{y}=0$. Полученное поле является гармоническим, представляющим фактор-пространство ядра ротора по градиенту:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\nabla^\perp_{\mathbf{x}}\ln|\Phi(\mathbf{x})| = \frac{1}{2\pi}D\Phi^t\frac{(\Phi(\mathbf{x}))^\perp}{|\Phi(\mathbf{x})|^2} = \nabla^\perp_{\mathbf{x}}G_2(\mathbf{x},0). \tag{3.1.1}$$

Действительно, орто-градиент ортогонален градиенту, и, следовательно, является соленоидальным:

$$(\nabla,\nabla^\perp_{\mathbf{x}}) = 0.$$

Ротор орто-градиента является оператором Лапласа, и из определения функции Грина получим

$$\operatorname{curl}\nabla^\perp_{\mathbf{x}} = \Delta = \delta(\mathbf{x}).$$

Во внешности области это поле является безвихревым.

Отображение Римана отображает Ω в единичный круг:

$$\Phi : \Omega \to B_1.$$

Тогда

$$\ln|\Phi(\mathbf{x})| = 0$$

на границе области.

Следовательно градиент $\nabla \ln|\Phi(\mathbf{x})|$ ортогонален границе области, а V как орто-градиент является касательным, и зануляется на бесконечности.

V связано с точечным вихрем $\frac{1}{2\pi}\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$ ковариантным соотношением через матрицу $D\Phi^t$. V есть фундаментальное решение ротора.

Пусть $\nabla\Psi$ - *поток Стокса*, т.е. соленоидальное потенциальное течение вокруг области с условием непротекания, и условием на бесконечности $\mathbf{v}_\infty$. Для внешности круга оно дается формулами (2.5.5), (2.5.6), а в общем случае строится с помощью конформного отображения.

Тогда решение (3.0.1), (3.0.2) дается формулой

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) * w + \theta V + \nabla\Psi.$$

Оно касательно к границе Ω и

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty.$$

Тогда фактор-пространство имеет вид

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \operatorname{Ker}\operatorname{curl}/\operatorname{Im}\nabla = \{\theta V,\ \theta \in \mathbb{R}\},$$

и является одномерным: $\mathcal{H}^1(M) \sim \mathbb{R}$.

3.2 Задача дивергенция-ротор во внешней области и интегральное условие прилипания

Рассмотрим задачу (3.0.1), (3.0.2) в Ω с граничными условиями:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{3.2.1}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty, \tag{3.2.2}$$

где $\mathbf{v}_\infty \in \mathbb{R}^2$ - фиксированная скорость на бесконечности.

Циркуляция определяет класс течений в фактор-пространстве ядра ротора по градиенту. Как и для круга - для произвольной внешней области уравнения (3.0.1), (3.0.2) с условием непротекания

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{n}) = 0, \ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{3.2.3}$$

и заданным потоком на бесконечности (3.2.2) имеют единственное решение при заданной циркуляции ($\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к границе). Условие (3.2.1) сильнее чем (3.2.3), что по аналогии со внешностью круга влечет дополнительные условия на $w(\mathbf{x})$. Они также выражаются с помощью моментных соотношений относительно завихренности. В предыдущей главе мы исследовали разрешимость задачи дивергенция-ротор во внешности круга и получили соответствующее граничное условие. Оказывается, очень схожие утверждения применимы к общей области. А граничное условие прилипания с применением отображения Римана фактически повторяет те же условия для круга.

Зафиксируем нулевую циркуляцию на бесконечности:

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|\mathbf{x}|=R} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0. \tag{3.2.4}$$

Нас будет интересовать представление решения задачи дивергенция-ротор в виде ряда. В предыдущей главе внешний поток $\mathbf{v}_\infty$ предполагался горизонтальным. Здесь мы будем рассматривать произвольный фиксированный поток. Взаимосвязь между декартовой и полярной системами координат для внешнего потока $\mathbf{v}_\infty = (v_1^\infty, v_2^\infty)$ задается формулами:

$$v_r^\infty = v_1^\infty \cos\varphi + v_2^\infty \sin\varphi,$$
$$v_\varphi^\infty = v_2^\infty \cos\varphi - v_1^\infty \sin\varphi.$$

Тогда его коэффициенты Фурье определяются как

$$v_{r,k}^{\infty} = \frac{\delta_{|k|,1}}{2}(v_1^{\infty} - ikv_2^{\infty}), \tag{3.2.5}$$

$$v_{\varphi,k}^{\infty} = \frac{\delta_{|k|,1}}{2}(v_2^{\infty} + ikv_1^{\infty}), \tag{3.2.6}$$

и, следовательно,

$$v_{\varphi,k}^{\infty} = \mathrm{sign}(k) i v_{r,k}^{\infty}. \tag{3.2.7}$$

Здесь $\delta_{|k|,1} = \begin{cases} 1, |k| = 1, \\ 0, |k| \neq 1. \end{cases}$

Все коэффициенты Фурье внешнего потока равны нулю, за исключением $k = \pm 1$. Для горизонтального потока $\mathbf{v}_{\infty} = (v_{\infty}, 0)$ они определяются как

$$v_{r,k}^{\infty} = \frac{\delta_{|k|,1}}{2} v_{\infty},$$
$$v_{\varphi,k}^{\infty} = ik\frac{\delta_{|k|,1}}{2} v_{\infty}.$$

3.2.1 Оценки решения задачи дивергенция-ротор для внешности диска

Решение самой задачи дивергенция-ротор для круга в виде ряда Фурье было получено в предыдущем разделе. Оно совпадает с формулой Био-Савара. Здесь будет продолжено исследование самой формулы Био-Савара, а также будут получены важные оценки, которые позволят провести исследование нелинейной системы Навье-Стокса в следующей главе. Помимо известных $L_p - L_q$ оценок решения, будут получены новые оценки, включающие L_2 норму.

Итак, решение задачи (3.0.1), (3.0.2), (3.2.1), (3.2.2) с условием нулевой циркуляции (3.2.4) в полярных координатах для внешности круга B_{r_0} зада-

ется с помощью коэффициентов Фурье следующей формулой для $k \in \mathbb{Z}$:

$$v_{r,k} = \operatorname{sign}(k)\frac{ir^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} + \operatorname{sign}(k)\frac{ir^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} + v_{r,k}^{\infty}, \tag{3.2.8}$$

$$v_{\varphi,k} = \frac{r^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} - \frac{r^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} + v_{\varphi,k}^{\infty}. \tag{3.2.9}$$

Тогда соотношения моментов для завихренности ($k \in \mathbb{Z}$) будут следующими:

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1}w_k(s)\,\mathrm{ds} = 2ikv_{r,k}^{\infty} = 2v_{\varphi,k}^{\infty}. \tag{3.2.10}$$

Из соотношений (3.2.5), (3.2.6) эти моменты не равны нулю, только если $|k| = 1$.

Формулы выше (3.2.8), (3.2.9) являются разложением в ряд формулы

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}w(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{v}_{\infty}. \tag{3.2.11}$$

Так как градиент $\nabla\mathbf{v}$ получается из w через интегральное преобразование с сингулярным ядром типа Зигмунда-Кальдерона [55] [105]

$$\nabla_{\mathbf{x}}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2},$$

то для $p > 1$

$$\|\nabla\mathbf{v}(\cdot)\|_{L_p} \le C\|w\|_{L_p}. \tag{3.2.12}$$

Далее, само ядро в (3.2.11) относится к ядрам типа Харди-Литтлвуда-Соболева [71] [105], и для $1 < p < 2 < q < \infty$, удовлетворяющих $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, справедлива следующая оценка с некоторой $C > 0$:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\infty}\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \le C\|w\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Но даже для $\mathbf{v}_\infty = 0$ оценка L_2 нормы самой функции $\|\mathbf{v}(\cdot)\|_{L_p}$ с $p = 2$ через ротор w вообще говоря не верна. Например, завихренные течения вида $\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$ имеют бесконечную кинетическую энергию.

Определим весовое пространство

$$L_{2,N}(\Omega) = \{f(\mathbf{x}) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(\Omega)} = \int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2(1+|\mathbf{x}|^2)^N \mathrm{d}\mathbf{x} < \infty\},$$

и его одномерный аналог

$$L_{2,N}(E;r) = \{f(r) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(E;r)} = \int_E |f(r)|^2(1+r^2)^N r dr < \infty\},\ E \subset \mathbb{R}.$$

Лемма 3.2.1. *Пусть*

$$\int_{B_{r_0}} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \tag{3.2.13}$$

Тогда с $N > 1$ верно

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{L_2(B_{r_0})} \le C\|w\|_{L_{2,N}(B_{r_0})}.$$

Доказательство. Оценим первое слагаемое в (3.2.8), (3.2.9) для $k \neq 0$:

$$\left| r^{-|k|-1} \int_{r_0}^r s^{|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s \right| = \left| r^{-|k|-1} \int_{r_0}^r \frac{s^{|k|+\frac{1}{2}}}{(1+s)^N} w_k(s)(1+s)^N \sqrt{s}\,\mathrm{d}s \right| \le$$
$$\left| r^{-|k|-1} \int_{r_0}^r s^{|k|+\frac{1}{2}-N} w_k(s)(1+s)^N \sqrt{s}\,\mathrm{d}s \right| \le$$
$$r^{-|k|-1} \sqrt{\int_{r_0}^r s^{|2k|+1-2N}\,\mathrm{d}s} \sqrt{\int_{r_0}^r w_k^2(s)(1+s^2)^N s\,\mathrm{d}s} \le$$
$$\frac{C}{\sqrt{|2|k|-2N+2|}} \|w_k(\cdot)\|_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)} \left(\frac{1}{r^N} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{r_0^N} \right).$$

Эта оценка позволяет оценить L_2 норму:

$$\int_{r_0}^\infty \left| r^{-|k|-1} \int_{r_0}^r s^{|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s \right|^2 r dr \le$$
$$\int_{r_0}^\infty \frac{C^2}{|2|k|-2N+2|} \|w_k(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)} \left(\frac{1}{r^N} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{r_0^N} \right)^2 r dr \le$$
$$\frac{C^2}{||k|-N+1|} \|w_k(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)} \left(\frac{r_0^{-2N+2}}{2N-2} + \frac{r_0^{2-2N}}{2k} \right).$$

Для $|k| = N - 1$:

$$\left| r^{-|k|-1} \int_{r_0}^{r} s^{|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} \right| = \left| r^{-|k|-1} \int_{r_0}^{r} \frac{s^{|k|+\frac{1}{2}}}{(1+s)^N} w_k(s)(1+s)^N \sqrt{s}\,\mathrm{ds} \right| \leq$$

$$\left| r^{-|k|-1} \int_{r_0}^{r} s^{|k|+\frac{1}{2}-N} w_k(s)(1+s)^N \sqrt{s}\,\mathrm{ds} \right| \leq$$

$$r^{-|k|-1} \sqrt{\int_{r_0}^{r} s^{-1}\,\mathrm{ds}} \|w_k(\cdot)\|_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)} \leq \frac{\sqrt{\ln r - \ln r_0}}{r^{|k|+1}} \|w_k(\cdot)\|_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)},$$

и последнее выражение также для $k \neq 0$ принадлежит $L_2(r_0, \infty; r)$.

Второе слагаемое в (3.2.8), (3.2.9) оценим аналогично:

$$\left| r^{|k|-1} \int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} \right| = \left| r^{|k|-1} \int_{r}^{\infty} \frac{s^{-|k|+\frac{1}{2}}}{(1+s)^N} w_k(s)(1+s)^N \sqrt{s}\,\mathrm{ds} \right| \leq$$

$$\left| r^{|k|-1} \int_{r}^{\infty} s^{-|k|+\frac{1}{2}-N} w_k(s)(1+s)^N \sqrt{s}\,\mathrm{ds} \right| \leq$$

$$r^{|k|-1} \sqrt{\int_{r}^{\infty} s^{-|2k|+1-2N}\,\mathrm{ds}} \sqrt{\int_{r}^{\infty} w_k^2(s)(1+s^2)^N s\,\mathrm{ds}} \leq$$

$$\frac{1}{r^N \sqrt{|2|k| + 2N - 2|}} \|w_k(\cdot)\|_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)}.$$

Это выражение также для $k \neq 0$ принадлежит $L_2(r_0, \infty; r)$.

Случай $k = 0$ требует отдельного рассмотрения. Из (2.2.8) с учетом условия прилипания верно:

$$v_{r,0} = 0,$$
$$v_{\varphi,0} = \frac{1}{r} \int_{r_0}^{r} s w_0(s)\,\mathrm{ds}\,.$$

Осталось оценить $v_{\varphi,0}$. Именно в этом слагаемом раскрывается требование равенства нулю среднего от ротора (3.2.13). Действительно, если

$$\frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} s w_0(s)\,\mathrm{ds} = \int_{B_{r_0}} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \neq 0,$$

то

$$v_{\varphi,0} = \frac{1}{r} \int_{r_0}^{r} s w_0(s)\,\mathrm{ds} \sim \frac{1}{r}$$

и $v_{\varphi,0}$ ведет себя на бесконечности как $\frac{1}{r}$, и, следовательно, не принадлежит $L_2(r_0,\infty;r)$. Когда угловая компонента есть $1/r$, то это течение в точности есть циркуляционное течение $\frac{\mathbf{x}^\perp}{|\mathbf{x}|^2}$.

Итак, по условию леммы

$$v_{\varphi,0}=\frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} sw_0(s)\,\mathrm{ds}=-\frac{1}{r}\int_{r}^{\infty} sw_0(s)\,\mathrm{ds},$$

и

$$|v_{\varphi,0}|=\left|\frac{1}{r}\int_{r}^{\infty} sw_0(s)\,\mathrm{ds}\right|\le$$
$$\left|r^{-1}\int_{r}^{\infty} s^{\frac{1}{2}-N}w_0(s)(1+s)^N\sqrt{s}\,\mathrm{ds}\right|\le$$
$$r^{-1}\sqrt{\int_{r}^{\infty} s^{1-2N}\,\mathrm{ds}}\sqrt{\int_{r}^{\infty} w_0^2(s)(1+s^2)^N s\,\mathrm{ds}}\le$$
$$\frac{1}{r^N\sqrt{2N-2}}\|w_0(\cdot)\|_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)}.$$

И поэтому $v_{\varphi,0}$ ввиду (3.2.13) стало принадлежать $L_2(r_0,\infty;r)$.

Тогда, суммируя по k, и пользуясь равенством Парсеваля для рядов Фурье, получим требуемое в лемме неравенство. Лемма доказана.

□

Неравенство (3.2.12) позволяет получить вместо L_2 оценку в H^1.

Следствие 3.2.2. *В условиях предыдущей леммы верна следующая оценка:*

$$\|\mathbf{v}(\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|_{H^1(B_{r_0})}\le C\|w\|_{L_{2,N}(B_{r_0})}. \tag{3.2.14}$$

Далее мы получим еще одну оценку для векторного поля. Но, в отличии от предыдущей леммы, мы не требуем равенства нулю среднего (3.2.13), и, соответственно, векторное поле может допускать вихревое движение на бесконечности, и обладать бесконечной кинетической энергией.

Лемма 3.2.3. *Пусть $w(\cdot)\in L_2(B_{r_0})$, коэффициенты Фурье при $k=-1,0,1$ принадлежат $L_1(r_0,\infty;r)$, $\mathbf{v}(\cdot)$ - решение (3.0.1), (3.0.2), (3.2.1), (3.2.2),*

(3.2.4). Тогда следующая оценка справедлива с некоторой $C > 0$:

$$\operatorname{vraisup}_{r\in[r_0,\infty)} \|\mathbf{v}(r,\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|^2_{H^{1/2}(S_r)} \le C\left(\|w(\cdot)\|^2_{L_2(B_{r_0})} + \sum_{k=-1,0,1} \|w_k(\cdot)\|^2_{L_1(r_0,\infty;r)}\right),$$

где $S_r = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}| = r\}$.

Доказательство. Оценим одну из сумм в (3.2.8), в то время как другие суммы могут быть оценены в аналогичном ключе:

Для $|k| > 1$:

$$\left| r^{|k|-1}\int_r^\infty s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds}\right|^2 \le \frac{\|w_k\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)}}{2|k|-2}. \tag{3.2.15}$$

Для $|k| = 1$:

$$\left|\int_r^\infty w_{\pm1}(s)\,\mathrm{ds}\right|^2 \le (1 + 1/r_0)\|w_{\pm1}\|^2_{L_1(r_0,\infty,r)}.$$

Для $k = 0$:

$$\left| r^{-1}\int_r^\infty s w_0(s)\,\mathrm{ds}\right|^2 \le r_0^{-1}\|w_0\|^2_{L_1(r_0,\infty;r)}.$$

Дробное дифференцирование порядка $\frac{1}{2}$ соответствует множителю $\sqrt{k}$ для коэффициентов Фурье. Суммируя по k, мы получаем требуемую оценку. □

Перепишем соотношение моментов на функцию завихренности $w(\mathbf{x})$ для $k \ge 0$ через комплексные переменные:

$$\int_{r_0}^\infty s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} = \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^\infty\int_0^{2\pi} s^{-k+1} w(s,\varphi) e^{-ik\varphi}\,\mathrm{ds}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 2ikv^\infty_{r,k},$$

где $z = x_1 + ix_2 = se^{i\varphi}$.

Для $k < 0$ мы имеем абсолютно те же соотношения моментов:

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_0^{2\pi} s^{k+1} w(s,\varphi) e^{-ik\varphi}\,\mathrm{d}s\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \overline{z^k} w(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 2ikv^{\infty}_{r,k}.$$

Последняя формула для $k < 0$ является просто комплексным сопряжением аналогичной формулы для $k > 0$ ввиду равенств

$$v^{\infty}_{r,k} = \overline{v^{\infty}_{r,-k}}, v^{\infty}_{\varphi,k} = \overline{v^{\infty}_{\varphi,-k}}.$$

Тогда условие прилипания порождает аффинное подпространство M, которое должно быть инвариантным относительно потока завихренности:

$$M = \left\{ w(\mathbf{x}) \in L_1(B_{r_0}) \;\middle|\; \int_{B_{r_0}} \frac{w(\mathbf{x})}{(x_1 + ix_2)^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 4\pi ikv^{\infty}_{r,k},\ k \in \mathbb{Z}_+ \right\}. \quad (3.2.16)$$

Из (3.2.5), (3.2.6) слеует, что когда внешний поток отсутствует ($\mathbf{v}_\infty = 0$), то все моментные соотношения в определении M должны быть нулевыми и M становится линейным подпространством.

Для коэффициентов Фурье инвариантность M означает, что для потока завихренности, который описывается функциями $w_k(t,\cdot)$ выполнено

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(t,s)\,\mathrm{d}s = const,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Для $w(\mathbf{x}) \in M$ решение (3.0.1), (3.0.2), (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) дается формулами (3.2.8), (3.2.9) где $v_{r,k}$, $v_{\varphi,k} \in L_\infty(r_0,\infty)$.

3.2.2 Задача дивергенция-ротор во внешности односвязной области

Дана область $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$, G - ограниченная односвязная область с границей, которая задается гладкой жордановой кривой. Тогда в [82] доказано, что существует отображение Римана Φ из Ω во внешность круга B_{r_0}

такое, что

$$\Phi(p) = p + O\left(\frac{1}{p}\right),$$

где $p = y_1 + iy_2 \in \mathbb{C}$.

При этом для $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ обратное преобразование $\Phi^{-1}(z) : B_{r_0} \to \Omega$ удовлетворяет

$$\Phi^{-1}(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Также будет справедливо следующее представление:

$$\left(\Phi^{-1}\right)'(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{3.2.17}$$

Итак, имеются две векторные переменные: $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in B_{r_0}$. Сделаем замену $\mathbf{y}$ на $\mathbf{x}$ в системе уравнений

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{y}) = 0, \tag{3.2.18}$$

$$\text{curl } \mathbf{v}(\mathbf{y}) = w(\mathbf{y}). \tag{3.2.19}$$

Пусть $\mathbf{v}(p)$ определяет векторное поле в Ω, где $p = y_1 + iy_2$. Учитывая, что векторное поле восстанавливается по ротору через ковариантный ортоградиент, определим векторное поле во внешности круга через ковариантное соотношение:

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = D\Phi^t \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(\mathbf{y})).$$

Здесь

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Phi'_{x_1} & \operatorname{Re}\Phi'_{x_2} \\ \operatorname{Im}\Phi'_{x_1} & \operatorname{Im}\Phi'_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Phi'_{x_1} & -\operatorname{Im}\Phi'_{x_1} \\ \operatorname{Im}\Phi'_{x_1} & \operatorname{Re}\Phi'_{x_1} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = D\Phi^{-1^t}\mathbf{v}(\Phi^{-1}(\mathbf{x})) = D\Phi^{-1^t}\mathbf{v}(\operatorname{Re}\Phi^{-1}(x_1+ix_2), \operatorname{Im}\Phi^{-1}(x_1+ix_2))$ определяет векторное поле в B_{r_0}. А $\hat{w}(\mathbf{x}) = w(\Phi(\mathbf{x}))$ задает вихревую функцию в B_{r_0}.

При ковариантной замене $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ система (3.2.18), (3.2.19) претерпит изменения.

Действительно, с помощью соотношений Коши–Римана

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2},$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = -\frac{\partial x_1}{\partial y_2}$$

будем иметь

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{v}(\mathbf{y}) = \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\\ = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)\\ -\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\operatorname{div}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) - \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\operatorname{curl}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}_{\mathbf{y}} \mathbf{v}(\mathbf{y}) = \frac{\partial v_2}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial y_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\\ = \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\operatorname{curl}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}) + \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\operatorname{div}_{\mathbf{x}} v(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Окончательно, система (3.2.18), (3.2.19) сводится к

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\operatorname{curl}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0,\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\operatorname{curl}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \hat{w}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial y_1}}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)^2}\hat{w}(\mathbf{x}),\\ \operatorname{curl}_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial x_1}{\partial y_1}}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right)^2}\hat{w}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Но комплексная производная $\Phi'(p)$ равняется

$$\Phi'(p) = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + i\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - i\frac{\partial x_1}{\partial y_2}.$$

Тогда

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}_{\mathbf{x}} + i \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathbf{x}} = \frac{\Phi'(p)}{|\Phi'(p)|^2} \hat{w}.$$

Найдем дивергенцию поля:

$$\hat{\mathbf{v}} = D\Phi^{-1^t} \mathbf{v}(\Phi^{-1}(\mathbf{x})). \tag{3.2.20}$$

Матрица Якоби и транспонированная к ней имеют вид:

$$D\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \; D\Phi^{-1^t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \end{pmatrix},$$

С другой стороны

$$D\Phi^{-1} = \frac{1}{|\Phi'|^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \end{pmatrix}, \; D\Phi^{-1^t} = \frac{1}{|\Phi'|^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & -\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \operatorname{curl}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \frac{1}{|\Phi'|^2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right) w = 0.$$

Найдем ротор $\hat{\mathbf{v}}$:

$$\operatorname{curl}_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \operatorname{curl}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \frac{1}{|\Phi'|^2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} - \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \right) = \left(\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right)^2 \right) \hat{w} = |\Phi^{-1'}|^2 \hat{w}.$$

Система (3.0.1), (3.0.2), (3.2.1), (3.2.2) при ковариантной замене с отображением Римана переходит в следующую систему, заданную в B_{r_0}:

$$\operatorname{div} \; \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \tag{3.2.21}$$

$$\operatorname{curl} \; \mathbf{v}(\mathbf{x}) = |\Phi^{-1'}|^2 \hat{w}(\mathbf{x}), \tag{3.2.22}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \; |\mathbf{x}| = r_0, \tag{3.2.23}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty, \; |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{3.2.24}$$

Обозначим

$$q_k(r) = [|\Phi^{-1}{}'(z)|^2 \hat{w}(\mathbf{x})]_k,$$

где индекс k означает k-й коэффициент Фурье и $z = re^{i\varphi} = x_1 + ix_2$.

Перепишем (3.2.21),(3.2.22) в полярных координатах в терминах коэффициентов Фурье $v_{r,k}$, $v_{\varphi,k}$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_{r,k}) + \frac{ik}{r}v_{\varphi,k} = 0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_{\varphi,k}) - \frac{ik}{r}v_{r,k} = q_k(r).$$

В предположении о нулевой циркуляции (3.2.4) из теоремы Стокса получаем

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{|\mathbf{x}|=R}\mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}}\hat{w}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}}\frac{\hat{w}(\mathbf{x})}{|\Phi'|^2}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{r_0}^{\infty}\left[\frac{\hat{w}(\mathbf{x})}{|\Phi'|^2}\right]_{k=0} s\,\mathrm{d}s = 0.$$

Решение приведенной выше системы является единственным. Существование решения как и в случае диска, будет обеспечено приводимыми ниже соотношениями моментов. Решение этой системы для $k \in \mathbb{Z}$ выводится аналогично (3.2.8), (3.2.9) и дается формулами:

$$\hat{v}_{r,k} = \mathrm{sign}(k)\frac{ir^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1}q_k\,\mathrm{d}s \qquad (3.2.25)$$
$$+\,\mathrm{sign}(k)\frac{ir^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1}q_k\,\mathrm{d}s + v^{\infty}_{r,k},$$
$$\hat{v}_{\varphi,k} = \frac{r^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1}q_k\,\mathrm{d}s$$
$$-\frac{r^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1}q_k\,\mathrm{d}s + v^{\infty}_{\varphi,k}. \qquad (3.2.26)$$

Формулы (3.2.25), (3.2.26) вместе с (3.2.1) приводят к соотношениям на завихренность ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1}q_k(s)\,\mathrm{d}s = 2ikv^{\infty}_{r,k} = 2v^{\infty}_{\varphi,k},$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}}\frac{\hat{w}(\Phi^{-1}(\mathbf{x}))}{z^k}|\Phi^{-1\prime}(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}=2ikv^{\infty}_{r,k}=2v^{\infty}_{\varphi,k}.$$

Эти моментные соотношения в Ω будут иметь вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{w(\mathbf{x})}{\Phi(z)^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x}=2ikv^{\infty}_{r,k}=2v^{\infty}_{\varphi,k}. \tag{3.2.27}$$

Для горизонтального потока со скоростью v_∞ получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{w(\mathbf{x})}{\Phi(z)^k}d\mathbf{x}=\begin{cases}0,\ k\geq 0,\ k\neq 1,\\ iv_\infty,\ k=1.\end{cases}$$

Формулы (3.2.25), (3.2.26) являются коэффициентами Фурье интегрального преобразования

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}|\Phi^{-1\prime}(\mathbf{y})|^2\hat{w}(\mathbf{y})d\mathbf{y}+\mathbf{v}_\infty. \tag{3.2.28}$$

Лемма 3.2.4. *Пусть $\hat{w}(\cdot)\in L_2(B_{r_0})$, коэффициенты Фурье при $k=-1,0,1$ принадлежат $L_1(r_0,\infty;r)$, $\hat{\mathbf{v}}(\cdot)$ дается формулой (3.2.28). Тогда справедлива следующая оценка с некоторой $C>0$:*

$$\mathrm{vraisup}_{r\in[r_0,\infty)}\|\hat{\mathbf{v}}(r,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|^2_{H^{1/2}(S_r)}\leq$$
$$C\left(\|\hat{w}(\cdot)\|^2_{L_2(B_{r_0})}+\sum_{k=-1,0,1}\|\hat{w}_k(\cdot)\|^2_{L_1(r_0,\infty;r)}\right),$$

где $S_r=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}|=r\}$.

Доказательство. Из леммы 3.2.3 имеем оценку

$$\mathrm{vraisup}_{r\in[r_0,\infty)}\|\hat{\mathbf{v}}(r,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|^2_{H^{1/2}(S_r)}\leq$$
$$C\left(\|\hat{w}(\cdot)|\Phi^{-1\prime}(\cdot)|^2\|^2_{L_2(B_{r_0})}+\sum_{k=-1,0,1}\|\hat{w}_k(\cdot)|\Phi^{-1\prime}(\cdot)|^2\|^2_{L_1(r_0,\infty;r)}\right).$$

Из свойства отображения Римана (3.2.17) получим требуемое. □

Возвращаясь к исходному полю с ковариантной заменой для $\mathbf{x} \in \Omega$ будем иметь

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} D\Phi^t(\mathbf{x}) \int_\Omega \frac{(\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}))^\perp}{|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})|^2} w(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \mathbf{v}_\infty. \tag{3.2.29}$$

Ядро этой формулы является орто-градиентом функции Грина

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})|.$$

Теорема 3.2.5 (Решение задачи дивергенция-ротор во внешней области)**.** *Пусть $w \in L_{2,N}(\Omega)$ с $N > 1$, и выполнены моментные соотношения (3.2.27). Тогда существует единственное решение* $\mathbf{v}$ *задачи (3.0.1), (3.0.2), (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4), даваемое (3.2.29) и удовлетворяещее оценке*

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(\Omega)} \le C \|w\|_{L_{2,N}(\Omega)}.$$

Доказательство. Единственность задачи следует из наличия условия прилипания. Из явного вида фактор-пространства $\mathcal{H}_1$ следует, что при фиксированной циркуляции решение задачи дивергенция-ротор с условием непротекания единственно. Тем более оно единственно с условием прилипания. Формула (3.2.29) как орто-градиент функции Грина, является решением задачи.

Докажем выполнение условия прилипания. Коэффициенты Фурье $v_{r,k}$, $v_{\varphi,k}$ в (3.2.25), (3.2.26) принадлежат $L_\infty(r_0, \infty)$. Подставим в формулы (3.2.25), (3.2.26) $r = r_0$. Для $z = se^{i\varphi} = x_1 + ix_2$

$$q_k(s) = [|\Phi^{-1\prime}(z)|^2 \hat{w}(\mathbf{x})]_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{r_0}^\infty s^{-|k|+1} q_k(s)\, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^\infty \int_0^{2\pi} s^{-|k|+1} |\Phi^{-1\prime}(z)|^2 \hat{w}(s,\varphi) e^{-ik\varphi}\, \mathrm{d}s\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B_{r_0}} |\Phi^{-1\prime}(z)|^2 \frac{\hat{w}(\mathbf{x})}{z^k}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \frac{w(\mathbf{x})}{(\Phi(z))^k}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 2ikv_{r,k}^\infty, \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

и условие прилипания выполнено.

Существование решения следует из его явного вида (3.2.25), (3.2.26). Поле $\hat{\mathbf{v}}$, связанное с $\mathbf{v}$ ковариантным соотношением (3.2.20), определяется формулой (3.2.28). По условию леммы из моментных соотношений среднее ротора равняется нулю:

$$\int_{\Omega} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

И, следовательно,

$$\int_{B_{r_0}} w(\Phi^{-1}(\mathbf{x}))|\Phi^{-1\prime}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда из (3.2.14) с учетом (3.2.17) с некоторыми C_1, C_2 верно

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(B_{r_0})} \leq C_1 \left\| w(\Phi^{-1}(\cdot))|\Phi^{-1\prime}(\cdot)|^2 \right\|_{L_{2,N}(B_{r_0})} \leq C_2 \|w(\cdot)\|_{L_{2,N}(\Omega)}.$$

Неравенство

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \|\hat{\mathbf{v}}(\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(B_{r_0})}$$

с некоторой $C_3 > 0$ завершает доказательство теоремы.

□

3.2.3 Инвариантные аффинные многообразия и условие прилипания

Рассмотрим течение вокруг области двумерного поля скоростей $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ с завихренностью $w(t, \mathbf{x}) = \operatorname{curl} \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$. Набор соотношений (3.2.27) является интегральной формой условия прилипания (3.2.1).

Следуя тем же путем, что и при исследовании течения вокруг диска, определим аффинное подпространство M через моменты завихренности, которые должны быть инвариантны относительно потока Стокса:

$$M = \Big\{ w(\mathbf{x}) \in L_1(\Omega) \;\Big|\; \int_{\Omega} \frac{w(\mathbf{x})}{(\Phi(x_1 + ix_2))^k} \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 4\pi i k v^{\infty}_{r,k},\ k \in \mathbb{Z}_+ \Big\}.$$

Эквивалентная запись M

$$M = \Big\{ w(\Phi^{-1}(\mathbf{x})) \in L_1(B_{r_0}) \;\Big|\; \int_{B_{r_0}} \frac{w(\Phi(\mathbf{x}))}{(x_1+ix_2)^k} |\Phi^{-1\prime}(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 4\pi i k v^{\infty}_{r,k},\ k \in \mathbb{Z}_+ \Big\}. \qquad (3.2.31)$$

Ввиду (3.2.5), (3.2.6) все моменты в определении M должны быть равны нулю, за исключением $k = 1$.

Предложение 3.2.6. *Задано начальное распределение скоростей* $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, *удовлетворяющее граничному условию (3.2.1), условию на бесконечности (3.2.2), нулевой циркуляции (3.2.4) такое, что* $w_0 = \operatorname{curl} \mathbf{v}_0(\cdot) \in L_1(B_{r_0})$, *и* $w(t,\cdot) = \operatorname{curl} \mathbf{v}(t,\cdot) \in L_1(B_{r_0})$ - *вихревая функция поля* $\mathbf{v}$. *Тогда* $w_0 \in M$, *и для сохранения условия прилипания аффинное подпространство* M *должно быть инвариантно относительно потока* $w(t,\cdot)$, *т.е. для любых* $t > 0$ *должно выполняться* $w(t,\cdot) \in M$.

Доказательство. Так как $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ удовлетворяет граничному условию (3.2.1), то из (3.2.25), (3.2.26), (3.2.30) следует $w(t,\cdot) \in M$. □

Если $\mathbf{v}_\infty = 0$, то тогда это аффинное многообразие M проходит через ноль и становится инвариантным подпространством. Если мы ограничим счетный набор соотношений в (3.2.31) только конечным набором $k = 1, ..., N$, мы получим аффинное многообразие M_N конечной коразмерности:

$$M_N = \Big\{ w(\mathbf{x}) \in L_1(\Omega) \;\Big|\; \int_{\Omega} \frac{w(\Phi(\mathbf{x}))}{(\Phi(x_1+ix_2))^k} | \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 4\pi i k v^{\infty}_{r,k}, k = 0, 1, \ldots, N \Big\}. \qquad (3.2.32)$$

Следующая лемма говорит о том, что поскольку многообразие M соответствует условию прилипания, то M_N является аппроксимацией этого граничного условия.

Лемма 3.2.7. *Пусть для любого фиксированного $t \in [0,T]$ $w_N(t,\cdot)$ равномерно ограничены в $H^1(\Omega)$ по N. Тогда векторное поле $\mathbf{v}^N(t,\cdot)$ даваемое (3.2.29) сходится слабо в $H^{1/2}(\partial\Omega)$ к нулю при $t \in [0,T]$ при $N \to \infty$.*

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $\Omega = B_{r_0}$. Общий случай доказывается аналогично с помощью отображения Римана. Тогда

$$v_{r,k}(t,r_0) = \operatorname{sign}(k)\frac{ir^{|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(t,s)\,\mathrm{d}s + v_{r,k}^{\infty},$$
$$v_{\varphi,k}(t,r_0) = \frac{r^{|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(t,s)\,\mathrm{d}s + v_{\varphi,k}^{\infty}.$$

Из $w(t,\cdot) \in M_N$ следует $v_{r,k}(t,r_0) = v_{\varphi,k}(t,r_0) = 0$ для $k = -N,\ldots,N$. Для $k > N$

$$\left|\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(t,s)\,\mathrm{d}s + v_{r,k}^{\infty}\right| = \left|\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(t,s)\,\mathrm{d}s\right|.$$

Тогда из (3.2.15)

$$\|\mathbf{v}^N(t,\cdot)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \le C\sum_{k=N+1}^{\infty} \|w_k^N(t,\cdot)\|^2_{L_2(r_0,\infty,rdr)}.$$

Для $w_N(t,\cdot) \in M_N$ коэффициенты Фурье $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_\varphi$ с индексами $k = -N,\ldots,N$ равняются нулю, что в свою очередь влечет слабую сходимость при $N \to \infty$

$$\mathbf{v}^N(t,\mathbf{x}') \rightharpoonup 0,\ \mathbf{x}' \in \partial\Omega \tag{3.2.33}$$

в $H^{1/2}(\partial\Omega)$. □

Замечание. Если $w_N(t,\cdot)$ равномерно ограничены в H^2, то можно доказать, что $\mathbf{v}(t,\mathbf{x}')$ слабо сходится в $H^{3/2}(\partial\Omega)$ к нулю. Из теоремы Реллиха–Кондрашова о компактном вложении соболевских пространств, следует сильная сходимость для любых фиксированных $t \in [0,T]$ при $N \to \infty$

$$\mathbf{v}^N(t,\mathbf{x}') \to 0,\ \mathbf{x}' \in \partial\Omega \tag{3.2.34}$$

в $L_2(\partial\Omega)$.

3.3 Вихревое граничное условие для потока Стокса во внешних областях

Опишем общий подход к получению вихревого граничного интегрального условия. Пусть внешний поток на бесконечности отсутствует, т.е. $\mathbf{v}_\infty = 0$.

Векторное поле $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ может быть получено из $w(t, \mathbf{x})$ посредством функции Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для оператора Лапласа Δ:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \int_\Omega \nabla_x^\perp G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y},$$

где $\nabla_x^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ и

$$\Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \tag{3.3.1}$$

В самом деле

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \int_\Omega (\nabla_x, \nabla_x^\perp) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} = 0,$$

и

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \int_\Omega \Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} = w.$$

Тогда условие прилипания дает следующее интегральное выражение

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}') = \int_\Omega \nabla_x^\perp G(\mathbf{x}', \mathbf{y}) w(t, \mathbf{y}) \, \mathrm{d}\mathbf{y} = 0, \ \mathbf{x}' \in \partial\Omega, \ \forall t > 0.$$

Замечание. Важно отметить, что граничные соотношения выше представляют собой *континуальный* набор для $\mathbf{x}' \in \partial\Omega$. В дальнейшем будет получен *счетный* набор ограничений для $k \in \mathbb{Z}$. Более того, счетный набор ограничений можно будет заменить *конечным*, получая приближенное (в различных нормах) условие равенства нулю скорости на границе тела.

Поле скоростей для системы Стокса удовлетворяет

$$\frac{\partial v(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \Delta v(t, \mathbf{x}) = \nabla p \tag{3.3.2}$$

и его вихревая функция описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial w(t,\mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w(t,\mathbf{x}) = 0. \tag{3.3.3}$$

Из условия прилипания следует равенство

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla_x^\perp G(\mathbf{x}',\mathbf{y}) w(t,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = 0,\ \mathbf{x}' \in \partial\Omega,\ \forall t > 0,$$

и, следовательно, соотношения

$$\int_\Omega \nabla_x^\perp G(\mathbf{x}',\mathbf{y}) w(t,\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = const,\ \mathbf{x}' \in \partial\Omega,\ \forall t > 0$$

определяют инвариантное многообразие для завихренности.

Умножим (3.3.3) на $\nabla_x^\perp G(\mathbf{x}',\mathbf{y})$ и проинтегрируем по области Ω, используя формулу Грина. Тогда с помощью (3.3.1) получается интегральное граничное условие

$$\int_{\partial\Omega}\left(\nabla_x^\perp G(\mathbf{x}',\mathbf{y})\frac{\partial w(t,\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - w(t,\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\nabla_x^\perp G(\mathbf{x}',\mathbf{y})\right)\mathrm{d}\mathbf{y} = 0,\ \forall \mathbf{x}' \in \partial\Omega,$$

где $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к границе. Это все еще интегральное условие, но уже сосредоточенное только на границе области $\partial\Omega$.

Для цилиндрических областей этот интеграл превращается в граничное условие на коэффициенты Фурье. Граничное условие для уравнения теплопроводности

$$r_0\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = 0,\ k \in \mathbb{Z} \tag{3.3.4}$$

с условием на бесконечности

$$w(t,\mathbf{x}) \to 0,\ |\mathbf{x}| \to \infty \tag{3.3.5}$$

превращают M в инвариантное многообразие и, следовательно, должно быть выполнено:

$$\frac{d}{dt}\int_{B_{r_0}} \frac{w(t,\mathbf{x})}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Действительно, для решений $w(t,\cdot)$ существование интеграла

$$\int_{B_{r_0}} \frac{w(t,\mathbf{x})}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

доказывается точно также, как для круга в Предложении 2.3.2.

Тогда для потока Стокса с граничным условием выше верно

$$\int_{B_{r_0}} \frac{\Delta w}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Это следует из аналитичности, и, соответственно, гармоничности функции $\frac{1}{z^k}$. Поэтому при интегрировании по частям по формуле Грина останутся только контурные интегралы вместо кратных:

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}} \frac{\Delta w}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{r_0}^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta w}{s^k e^{ik\varphi}} s\,ds\,d\varphi = 2\pi\int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1}\Delta_k w_k(t,s)\,ds\\ &= 2\pi\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial}{\partial s}w_k(t,s)\right) - \frac{k^2}{s}w_k(t,s)\right)\mathrm{ds}\\ &= -2\pi r_0^{-k}\left(r_0\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + k w_k(t,r_0)\right) = 0.\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Аналогичным образом, используя комплексное сопряжение моментных соотношений (3.2.16) мы получаем граничное условие для $k<0$:

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}} \Delta w\overline{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{r_0}^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta w}{s^{-k} e^{ik\varphi}} s\,ds\,d\varphi = 2\pi\int_{r_0}^{\infty} s^{k+1}\Delta_k w_k(s)\,ds\\ &= -2\pi r_0^{k}\left(r_0\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} - k w_k(t,r_0)\right) = 0.\end{aligned}$$

3.3.1 Вывод граничного условия

В этом разделе для двумерной системы Стокса будет получено граничное условие в терминах коэффициентов Фурье во внешних областях. Будет показано, что граничное условие смешанного типа (3.3.4) также подходит для внешних областей. Оно сохраняет моментные соотношения (3.2.27) под действием потока Стокса, и, таким образом, M, определенное в (3.2.31), является инвариантным аффинным подпространством.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$, *где* G *ограниченная односвязная область с гладкой границей и* Φ *- отображение Римана из* Ω *на внешность диска,* $\mathbf{v}_0$ *- начальное распределение скоростей, удовлетворяющее граничному условию (3.2.1) на внутренней границе, и на бесконечности (3.2.2), нулевой циркуляции (3.2.4),* $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0 \in L_1 \cap L_2$, *и* $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ *- решение (3.3.2), (3.0.1),(3.2.1),(3.2.2) с начальным условием* $\mathbf{v}_0$ *в* Ω. *Тогда* $w(t,\mathbf{x})$=$\operatorname{curl}\mathbf{v}(t,\Phi^{-1}(\mathbf{x}))$ *удовлетворяет (3.3.4).*

Доказательство. Сделаем замену переменных $p = y_1 + iy_2 \in \Omega$ на $z = x_1 + ix_2 \in B_{r_0}$ в уравнении (3.3.3) где $z = \Phi(p)$. Оператор Лапласа Δ переходит в $|\Phi'(p)|^2\Delta$, и само уравнение (3.3.3) принимает вид

$$\partial_t w(t,x) - |\Phi'(p)|^2\Delta w = 0.$$

Поделим на $|\Phi'(p)|^2$ и получим следующее уравнение, заданное в B_{r_0}:

$$|(\Phi^{-1})'(z)|^2\partial_t w(t,x) - \Delta w = 0.$$

Зафиксируем $k > 0$ и разделим это уравнение на $z^k = (x_1+ix_2)^k$. Проинтегрируем его по внешней стороне диска B_{r_0}. Из моментных соотношений (3.2.31) следует

$$\frac{d}{dt}\int_{B_{r_0}} \frac{|(\Phi^{-1})'(z)|^2}{z^k} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{B_{r_0}} \frac{\Delta w}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}} \frac{\Delta w}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{r_0}^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta w}{s^k e^{ik\varphi}} s\,ds\,d\varphi = 2\pi\int_{r_0}^{\infty} s^{-k+1}\Delta_k w_k(s)\,ds \\ &= -2\pi r_0^{-k}\left(r_0\frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + k w_k(t,r_0)\right) = 0.\end{aligned}$$

Учитывая $w_{-k}(t,r) = \overline{w_k(t,r)}$ получим (3.3.4) для $k < 0$.

□

3.4 Интегральный закон Био-Савара

Мы найдем интегральное представление формулы, схожей с законом Био-Савара, даваемой (3.2.25), (3.2.26). Эта формула и определяет векторное поле по функции ротора с условием прилипания в произвольной области.

Сначала рассмотрим закон Био-Савара для круга. Мы докажем, что формулы (3.2.8) - (3.2.9) задают тот же интеграл Био-Савара для задачи Коши, когда векторное поле продолжается нулем внутрь области.

Запишем интеграл Био-Савара

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} w(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{v}_\infty, \tag{3.4.1}$$

в полярных координатах для радиальной и угловой составляющих векторного поля.

Связь между векторными полями в декартовой и полярной системой координат дается формулами:

$$v_1 = v_r \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi,$$
$$v_2 = v_r \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi.$$

Возьмем два вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, имеющих полярные координаты (r, φ) и (s, φ') соответственно. Тогда

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi - s\cos\varphi', \\ r\sin\varphi - s\sin\varphi' \end{pmatrix}$$

и

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi + s\sin\varphi', \\ r\cos\varphi - s\cos\varphi' \end{pmatrix}$$

Учитывая

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos(\varphi - \varphi'),$$

выражение

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}$$

в полярном представлении будет иметь координаты

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} = \begin{pmatrix} \frac{s\sin(\varphi'-\varphi)}{r^2+s^2-2rs\cos(\varphi-\varphi')}, \\ \frac{r-s\cos(\varphi'-\varphi)}{r^2+s^2-2rs\cos(\varphi-\varphi')} \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулой для $|q|<1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k e^{ik\varphi} = \frac{1-q\cos\varphi+iq\cos\varphi}{1-2q\cos\varphi+q^2}.$$

Тогда с учетом

$$w_k(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} w_k(r,\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi$$

будут верны следующие соотношения:

Для $r<s$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} w_k(s)e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(\varphi-\varphi')}(1-\frac{r}{s}e^{-i(\varphi-\varphi')})w(s,\varphi')}{1-\frac{2r}{s}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{s}\right)^2}d\varphi'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(e^{i(\varphi-\varphi')}-\frac{r}{s})w(s,\varphi')}{1-\frac{2r}{s}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{s}\right)^2}d\varphi',\ r<s$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{s}{r}\right)^{k+1} w_k(s)e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-i(\varphi-\varphi')}(1-\frac{r}{s}e^{i(\varphi-\varphi')})w(s,\varphi')}{1-\frac{2r}{s}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{s}\right)^2}d\varphi'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(e^{-i(\varphi-\varphi')}-\frac{r}{s})w(s,\varphi')}{1-\frac{2r}{s}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{s}\right)^2}d\varphi',\ r<s$$

Для $s < r$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^{k+1} w_k(s) e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{s}{r}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(\varphi-\varphi')}(1 - \frac{s}{r} e^{-i(\varphi-\varphi')}) w(s,\varphi')}{1 - \frac{2s}{r}\cos(\varphi-\varphi') + \left(\frac{s}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{s}{r}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{i(\varphi-\varphi')} - \frac{s}{r}) w(s,\varphi')}{1 - \frac{2s}{r}\cos(\varphi-\varphi') + \left(\frac{s}{r}\right)^2}, \ s < r$$

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{k-1} w_k(s) e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{s}{r}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(\varphi-\varphi')}(1 - \frac{s}{r} e^{i(\varphi-\varphi')}) w(s,\varphi')}{1 - \frac{2s}{r}\cos(\varphi-\varphi') + \left(\frac{s}{r}\right)^2} d\varphi'$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{s}{r}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{-i(\varphi-\varphi')} - \frac{s}{r}) w(s,\varphi')}{1 - \frac{2s}{r}\cos(\varphi-\varphi') + \left(\frac{s}{r}\right)^2} d\varphi', \ s < r$$

Умножим (3.2.8) - (3.2.9) на $e^{ik\varphi}$ и просуммируем по k. Тогда, используя вышеполученные соотношения, получим для радиальной компоненты

$$v_r(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s^2 \sin(\varphi'-\varphi)}{r^2 + s^2 - 2rs\cos(\varphi-\varphi')} w(s,\varphi') d\varphi' ds + \mathbf{v}_r^{\infty}.$$

Радиальная компонента скорости в точности совпала с формулой (3.4.1). Далее аналогичным образом найдем тангенциальную компоненту $v_\varphi(r,\varphi)$.

Так как

$$\int_{B_{r_0}} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0,$$

то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{r} \int_{-\pi}^{\pi} s w(s,\varphi') d\varphi' ds = 0,$$

и

$$v_\varphi(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{s}{r}\right)^2\frac{(\cos(\varphi-\varphi')-\frac{s}{r})w(s,\varphi')}{1-\frac{2s}{r}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{s}{r}\right)^2}d\varphi' ds-$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{r}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\cos(\varphi-\varphi')-\frac{r}{s})w(s,\varphi')}{1-\frac{2r}{s}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{s}\right)^2}d\varphi' ds+\mathbf{v}_\varphi^\infty=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{s}{r}\right)^2\frac{(\cos(\varphi-\varphi')-\frac{s}{r})w(s,\varphi')}{1-\frac{2s}{r}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{s}{r}\right)^2}d\varphi' ds-$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{r}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\cos(\varphi-\varphi')-\frac{r}{s})w(s,\varphi')}{1-\frac{2r}{s}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{s}\right)^2}d\varphi' ds+\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{s}{r}w(s,\varphi')d\varphi' ds+\mathbf{v}_\varphi^\infty.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{s}{r}\right)^2\frac{(\cos(\varphi-\varphi')-\frac{s}{r})w(s,\varphi')}{1-\frac{2s}{r}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{s}{r}\right)^2}d\varphi' ds+\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{s}{r}w(s,\varphi')d\varphi' ds=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\frac{r}{s}-\cos(\varphi-\varphi'))w(s,\varphi')}{1-\frac{2r}{s}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{s}\right)^2}d\varphi' ds,$$

то

$$v_\varphi(r,\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(\cos(\varphi-\varphi')-\frac{r}{s})w(s,\varphi')}{1-\frac{2r}{s}\cos(\varphi-\varphi')+\left(\frac{r}{s}\right)^2}d\varphi' ds+\mathbf{v}_\varphi^\infty=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(rs-s\cos(\varphi-\varphi'))w(s,\varphi')}{r^2-2rs\cos(\varphi-\varphi')+s^2}d\varphi' ds+\mathbf{v}_\varphi^\infty.$$

Тангенциальная компонента скорости также совпала с формулой (3.4.1).

Проводя аналогичные вычисления, для внешней области из (3.2.25) - (3.2.26) получим

$$\hat{v}_r(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{s^2\sin(\varphi'-\varphi)}{r^2+s^2-2rs\cos(\varphi-\varphi')}|\Phi^{-1'}(se^{i\varphi'})|^2w(s,\varphi')d\varphi' ds$$

$$+\mathbf{v}_r^\infty.$$

$$\hat{v}_\varphi(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(rs - s\cos(\varphi-\varphi'))}{r^2 - 2rs\cos(\varphi-\varphi') + s^2}|\Phi^{-1\prime}(se^{i\varphi'})|^2 w(s,\varphi')d\varphi' ds$$

$$+ \mathbf{v}_\varphi^\infty.$$

Эти формулы представляют собой разложение в ряд Фурье векторного поля (3.2.28), (3.2.29).

3.5 Оценки решения задачи дивергенция-ротор с условием непротекания

Ослабим условие прилипания условием непротекания (3.2.3) и получим оценки решения задачи дивергенция-ротор (3.0.1), (3.0.2), (3.2.2), (3.2.4). Как было показано в разделе 3.1, при фиксированной циркуляции эта задача имеет единственное решение, которое представимо в виде суммы соленоидальных вихревого поля $G * w$, потенциального потока Стокса $\nabla\Psi$, и гармонического поля, которое является безвихревым и непотенциальным. Именно последнее поле, даваемое формулой (3.1.1), имеет бесконечную L_2-норму.

В этом разделе мы докажем, что если циркуляция на бесконечности равняется нулю, то $\mathbf{v}$ допускает L_2-оценку. При этом, в отсутствии условия прилипания, циркуляция вокруг границы тела может не быть нулевой.

Поле $\nabla\Psi(\mathbf{x})$ есть потенциальное безвихревое векторное поле, удовлетворяющее условию набегающего потока на бесконечности

$$\nabla\Psi(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty,$$

условию непротекания на границе области Ω:

$$(\nabla\Psi(\mathbf{x}), \mathbf{n}) = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

и условию нулевой циркуляции на бесконечности.

Такое векторное поле существует и является стационарным решением системы Стокса. Для внешности круга радиуса r_0 поле строится в явном виде по формулам (2.5.5), (2.5.6), а для внешней области оно строится при помощи отображения Римана (см. [42] [44]).

3.5.1 Задача дивергенция-ротор во внешности круга

Рассмотрим задачу в B_{r_0}:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \tag{3.5.1}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathrm{w}(\mathbf{x}), \tag{3.5.2}$$

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{n}) = 0, \ |\mathbf{x}| = r_0, \tag{3.5.3}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty, \ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{3.5.4}$$

При циркуляции

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|\mathbf{x}|=R} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{3.5.5}$$

течение $\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) - \nabla\Psi(\mathbf{x})$ будет иметь нулевую циркуляцию на бесконечности, и соленоидальное векторное поле $\mathbf{v}$ восстанавливается однозначно по ротору w по формуле

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) - \nabla\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} - \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y}^*)^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*|^2} \right) w(t,\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{3.5.6}$$

Здесь $\mathbf{y}^* = r_0^2\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^2$ - зеркальная точка относительно окружности S_{r_0}.

Ядро интегрального оператора в (3.5.6) есть орто-производная $\nabla^\perp_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ функции Грина

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*||\mathbf{y}|}. \tag{3.5.7}$$

В Предложении 3.2.1 приводилась L_2-оценка векторного поля для условия прилипания. Мы докажем аналогичное предложение для условия непротекания. Для условия прилипания равенство нулю среднего ротора

было эквивалентным нулевой циркуляции на бесконечности. С условием непротекания, среднее ротора уже равняется разности циркуляций на бесконечности и вокруг границы круга. Отсутствие среднеквадратичной интегрируемости обусловлено наличием циркуляции именно на бесконечности.

Лемма 3.5.1. *Решение* $\mathbf{v}$ *задачи (3.5.1)-(3.5.5) с* $w = \operatorname{curl}\mathbf{v} \in L_{2,N}$, $N > 1$ *существует, единственно, задается формулой (3.5.6) и удовлетворяет оценке:*

$$\|\mathbf{v}(\cdot) - \nabla\Psi(\cdot)\|_{L_2} \le C\|w\|_{L_{2,N}}.$$

Доказательство. Действительно, в силу (3.5.6) $\mathbf{v} - \nabla\Psi$ стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Так как функция Грина $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в (3.5.7) зануляется на S_{r_0}, то вектор $\nabla^{\perp}_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ касателен к S_{r_0} и $\mathbf{v}(t,\mathbf{x}')\cdot\mathbf{n} = 0, \mathbf{x}' \in S_{r_0}$.

Поскольку правая часть формулы (3.5.6) есть орто-производная функции Грина, то она ортогональна градиенту ∇, и следовательно $\mathbf{v} - \nabla\Psi$ соленоидально. Тем более соленоидально поле $\mathbf{v}$:

$$\operatorname{div}\ (\mathbf{v} - \nabla\Psi) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla^{\perp}_{\mathbf{x}} \int G(\mathbf{x},\mathbf{y}) w(t,\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0.$$

Уравнение (3.5.1) выполнено.

Далее, ротор от орто-производной функции Грина есть оператор Лапласа от функции Грина:

$$\operatorname{curl}\ (\mathbf{v} - \nabla\Psi) = \operatorname{curl}\ \mathbf{v} = \int \Delta G(\mathbf{x},\mathbf{y}) w(t,\mathbf{y}) d\mathbf{y} = w(t,\mathbf{x}).$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что $\nabla\Psi$ потенциально, и, следовательно, $\operatorname{curl}\nabla\Psi = 0$. Уравнение (3.5.2) выполнено.

Получим оценку решения в L_2. Согласно (2.5.2), (2.5.3) коэффициенты Фурье для $k \neq 0$ разложения $\mathbf{v}(\cdot) - \nabla\Psi(\cdot)$ даются формулами для

радиальной и тангенциальной составляющей

$$
\begin{aligned}
v_{r,k} - \hat{v}_{r,k} &= \operatorname{sign}(k)\frac{ir^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} \\
&+ \operatorname{sign}(k)\frac{ir^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} \\
&- ir^{-|k|-1}\frac{\operatorname{sign}(k) r_0^{2|k|}}{2}\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds}, \\
v_{\varphi,k} - \hat{v}_{\varphi,k} &= \frac{r^{-|k|-1}}{2}\int_{r_0}^{r} s^{|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} \\
&- \frac{r^{|k|-1}}{2}\int_{r}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds} \\
&- r^{-|k|-1}\frac{r_0^{2|k|}}{2}\int_{r_0}^{\infty} s^{-|k|+1} w_k(s)\,\mathrm{ds}\,.
\end{aligned}
$$

Оценка этих коэффициентов для $k \neq 0$ в пространстве $L_{2,N}$ производится в точности как в доказательстве Леммы 3.2.1.

Оценим коэффициенты Фурье радиальной и тангенциальной составляющей $\mathbf{v}(\cdot) - \nabla\Psi(\cdot)$ для $k = 0$, т.е. для угловых средних. Они находятся из системы

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r(v_{r,0} - \hat{v}_{r,0})\right) = 0, \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r(v_{\varphi,0} - \hat{v}_{\varphi,0})\right) = w_0.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$v_{r,0} = \hat{v}_{r,0} = const,$$

и из условия непротекания

$$v_{r,0} = \hat{v}_{r,0} = 0.$$

Из условия нулевой циркуляции на бесконечности согласно формуле Стокса среднее ротора равняется циркуляции вокруг границы области, взятой со знаком минус:

$$\int_{B_{r_0}} w(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -\oint_{\partial\Omega} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}.$$

Тогда

$$\int_{r_0}^{\infty} sw_0(s)\,\mathrm{d}s = -r_0 v_{\varphi,0}.$$

Поскольку $\nabla\Psi(\mathbf{x})$ - безвихревое поле, удовлетворяющее (3.5.5), то $\hat{v}_{\varphi,0} = 0$. Для тангенциальной компоненты

$$v_{\varphi,0} = \frac{1}{r}\int_{r_0}^{r} sw_0(s)\,\mathrm{d}s + \frac{\theta}{r}.$$

Отсюда

$$\theta = r_0 v_{\varphi,0} = -\int_{r_0}^{\infty} sw_0(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

и

$$v_{\varphi,0} = -\frac{1}{r}\int_{r}^{\infty} sw_0(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Тогда

$$|v_{\varphi,0}| = \left|\frac{1}{r}\int_{r}^{\infty} sw_0(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq$$
$$\left|r^{-1}\int_{r}^{\infty} s^{\frac{1}{2}-N} w_0(s)(1+s)^N\sqrt{s}\,\mathrm{d}s\right| \leq$$
$$r^{-1}\sqrt{\int_{r}^{\infty} s^{1-2N}\,\mathrm{d}s}\sqrt{\int_{r}^{\infty} w_0^2(s)(1+s^2)^N s\,\mathrm{d}s} \leq$$
$$\frac{1}{r^N\sqrt{2N-2}}\|w_0(\cdot)\|_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)}.$$

Завершается доказательство леммы применением равенства Парсеваля по аналогии с доказательством Леммы 3.2.1. □

Лемма 3.5.2. *Пусть дана функция $w \in L_{2,N}(B_{r_0})$, $N > 1$. Тогда векторное поле $\mathbf{v}$ даваемое (3.5.6) удовлетворяет оценке с некоторой $C > 0$:*

$$\|\mathbf{v} - \nabla\Psi\|_{H^1(B_{r_0})} \leq C\|w\|_{L_{2,N}(B_{r_0})}.$$

Доказательство. Оценка векторного поля $\mathbf{v} - \nabla\Psi$ в L_2 была получена в Лемме 3.5.1. Оценим градиент этого векторного поля.

Формула (3.5.6) включает в себя два интегральных преобразования. Первое это

$$K[w](t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} w(t,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

И для него требуемая оценка уже доказана согласно формуле (3.2.14).

Исследуем второй интегральный оператор

$$K^*[w](t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y}^*)^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*|^2} w(t,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Само $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ даваемое (3.5.6) может быть выписано в операторной форме следующим образом:

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) - \nabla\Psi(\mathbf{x}) = K[w](t,\mathbf{x}) - K^*[w](t,\mathbf{x}).$$

Чтобы оценить $K^*[w](t,\mathbf{x})$ мы разделим B_{r_0} на две подобласти: кольцо $B_{r_0,2r_0} = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ r_0 < |\mathbf{x}| < 2r_0\}$ и внешняя область $B_{2r_0} = \{\mathbf{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}| > 2r_0\}$:

$$\begin{aligned} K^*[w](t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{B_{r_0,2r_0}} + \int_{B_{2r_0}}\right) \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y}^*)^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*|^2} w(t,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \\ := I_1[w](t,\mathbf{x}) + I_2[w](t,\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Делая замену $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y}^*$ ввиду $\mathrm{d}\mathbf{y} = \frac{r_0^4}{|\mathbf{y}^*|^4}\mathrm{d}\mathbf{y}^*$ будем иметь

$$I_1[w](t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0/2,r_0}} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y}^*)^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*|^2} g(t,\mathbf{y}^*)\mathrm{d}\mathbf{y}^*,$$

где

$$g(t,\mathbf{y}^*) = \frac{w(t,\mathbf{y}(\mathbf{y}^*))}{|\mathbf{y}^*|^4}.$$

Ограниченность $B_{r_0/2,r_0}$ влечет справедливость неравенства

$$\|g(t,\cdot)\|_{L_{2,N}} \le C\|w(t,\cdot)\|_{L_{2,N}}$$

с некоторой $C > 0$, зависящей от r_0.

$I_1[w](t,\mathbf{x})$ становится интегральным преобразованием с классическим ядром Био-Савара. И тогда, снова используя неравенство (3.2.14), для $I_1[w](t,\mathbf{x})$ получим

$$\|I_1[w](t,\cdot)\|_{H^1(B_{r_0})} \le C\|w(t,\cdot)\|_{L_{2,N}(B_{r_0})}. \tag{3.5.8}$$

Наконец, мы оценим последнее слагаемое $I_2[w](t,\mathbf{x})$. Для $\mathbf{x} \in B_{r_0}$ и $\mathbf{y} \in B_{2r_0}$ следует $|\mathbf{y}^*| < r_0/2$, $|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*| \geq |\mathbf{x}| - r_0/2$ и $I_2[w](t,\mathbf{x})$ удовлетворяет неравенству

$$|I_2[w](t,\mathbf{x})| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|+1}\|w\|_{L_1(B_{2r_0})}, \mathbf{x} \in B_{r_0},$$

и, следовательно,

$$|\nabla I_2[w](t,\mathbf{x})| \leq \frac{C_R}{|\mathbf{x}|^2+1}\|w\|_{L_1(B_{2r_0})}, \mathbf{x} \in B_{r_0},$$
$$\|\nabla I_2[w](\cdot)\|_{L_2(B_{r_0})} \leq C\|w\|_{L_1(B_{2r_0})}. \tag{3.5.9}$$

В свою очередь с $N > 1$

$$\|w\|_{L_1(B_{2r_0})} \leq C(N)\|w(t,\cdot)\|_{L_{2,N}(B_{r_0})}.$$

Лемма доказана.

□

3.5.2 Задача дивергенция-ротор во внешней односвязной области

Во внешних областях задача дивергенция-ротор сводится к той же задаче во внешности диска с помощью отображения Римана.

Если $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ и $\nabla\Psi(\mathbf{x})$ имеют одинаковое граничное условие на бесконечности $\mathbf{v}_\infty$ и одинаковую нулевую циркуляцию, то зависимость векторного поля $\mathbf{v}$ от ротора w при преобразовании Римана Φ в Ω дается формулой:

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \left(\frac{(\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y}))^\perp}{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})|^2} - \frac{(\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})^*)^\perp}{|\Phi(\mathbf{x})-\Phi(\mathbf{y})^*|^2}\right) w(t,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \\ +\nabla\Psi(\mathbf{x}) \tag{3.5.10}$$

Мы будем использовать следующую лемму, которая была доказана в [81] для (B_{r_0} с $r_0 = 1$), и может быть легко распространена на случай B_{r_0} с произвольным $r_0 > 0$:

Лемма 3.5.3. *Существует конформное отображение $\Phi : \Omega \to B_{r_0}$ продолжающееся до непрерывного вплоть до границы, отображающее $\partial\Omega$ в S_{r_0}. Кроме того, существуют ограниченная голоморфная функция $h(z)$, что*

$$\Phi(z) = z + h(z).$$

Кроме того, существует постоянная $M > 0$ что $|h(z)| \leq M/|z|$, $|h'(z)| \leq M/|z|^2$. Если Φ рассматривать как веществennознаchное отображение из Ω в B_{r_0}, то $\|\Phi'\|_{L_\infty} \leq M$, $\|\Phi'^{-1}\|_{L_\infty} \leq M$, где Φ' является дифференциальным оператором соответствующего вещественного отображения Φ.

Теперь мы докажем теорему о разрешимости задачи дивергенция-ротор 3.5.2.

Теорема 3.5.4. *Пусть $\mathbf{v}$, w - векторное поле и завихренность, которые связаны законом Био-Савара (3.5.10), $w \in L_{2,N}(\Omega)$, $N > 1$. Тогда $\mathbf{v}$ есть решение задачи (3.5.1)-(3.5.4) и справедлива следующая оценка с некоторой $C > 0$*

$$\|\mathbf{v} - \nabla\Psi\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|w\|_{L_{2,N}(\Omega)}.$$

Доказательство. Действительно, в силу (3.5.10) $\mathbf{v} - \nabla\Psi$ стремится к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$.

Формула (3.5.10) есть орто-производная функции Грина оператора Лапласа для области Ω:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})|}{|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})^*||T(\mathbf{y})|}.$$

Функция Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ зануляется на границе области $\partial\Omega$, то вектор $\nabla^\perp_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ касателен к $\partial\Omega$ и $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}') \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{x}' \in \partial\Omega$.

Поскольку правая часть формулы (3.5.10) есть орто-производная функции Грина, то она ортогональна градиенту ∇, и следовательно $\mathbf{v} - \nabla\Psi$ соленоидально. Тем более соленоидально поле $\mathbf{v}$:

$$\text{div } (\mathbf{v} - \nabla\Psi) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla^\perp_{\mathbf{x}} \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0.$$

Уравнение (3.5.1) выполнено.

Далее, ротор от орто-производной функции Грина есть оператор Лапласа от функции Грина:

$$\text{curl } (\mathbf{v} - \nabla\Psi) = \text{curl } \mathbf{v} = \int \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = w(t, \mathbf{x}).$$

Уравнение (3.5.2) выполнено.

Обозначим $\tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \Phi^{-1}(\mathbf{x}))$, $\tilde{\nabla\Psi}(\mathbf{x}) = \nabla\Psi(\Phi^{-1}(\mathbf{x}))$, $\tilde{w}(t, \mathbf{x}) = w(t, \Phi^{-1}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{y})$. Тогда из (3.5.10) получим

$$\tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^\perp}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{z}^*)^\perp}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}^*|^2} \right) w(t, \Phi^{-1}(\mathbf{z})) \det(\Phi'^{-1}) \mathrm{d}\mathbf{z} + \tilde{\nabla\Psi}(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{z}^*$ - зеркальная точка к $\mathbf{z}$ по отношению к окружности S_{r_0}.

Из леммы 3.5.3 Φ' и Φ'^{-1} ограничены. Тогда из леммы 3.5.2 получим

$$\|\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\nabla\Psi}\|_{H^1(B_{r_0})} \leq C \|\tilde{w}\|_{L_{2,N}(B_{r_0})}.$$

Снова используя ограниченность Φ'^{-1} с некоторой $C > 0$ будут справедливы следующие неравенства:

$$\|\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\nabla\Psi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\nabla\Psi}\|_{H^1(B_{r_0})},$$
$$\|\tilde{w}\|_{L_{2,N}(B_{r_0})} \leq C \|w\|_{L_{2,N}(\Omega)}.$$

Эти неравенства завершают доказательство теоремы. □

Глава 4. ВИХРЕВОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА ВО ВНЕШНЕЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы Навье-Стокса, заданную во внешней области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, и описывающую течение тела в потоке:

$$\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \nabla p, \tag{4.0.1}$$

$$\text{div } \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0, \tag{4.0.2}$$

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \tag{4.0.3}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0, \ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{4.0.4}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty, \ |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{4.0.5}$$

Применение оператора ротора к системе Навье-Стокса приводит её к нелинейному вихревому уравнению, дополненному различными условиями:

$$\frac{\partial w(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w + (\mathbf{v}, \nabla w) = 0, \tag{4.0.6}$$

$$w(0, \mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \tag{4.0.7}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0, \tag{4.0.8}$$

$$w(t, \mathbf{x}) \to 0, \ |\mathbf{x}| \to \infty, \tag{4.0.9}$$

где $w(t, \mathbf{x}) = \text{curl } \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}_1} v_2 - \partial_{\mathbf{x}_2} v_1$, $w_0(\mathbf{x}) = \text{curl } \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ - ротор начального условия.

4.1 Вихревое псевдограничное условие

В этом разделе будут даны псевдограничные условия, в которых будет присутствовать как граничная часть условия, так и выражение, которое распределено по всей бесконечной области, но которое предполагается малым. Отбрасывание распределенной части будет приводить лишь к приближенному граничному условию.

4.1.1 Вихревое псевдограничное условие во внешности диска

В действительности здесь будет получено интегральное условие вместо граничного. Но его аппроксимация будет совпадать с граничным условием для системы Стокса (3.3.4).

В вихревом уравнении

$$\frac{\partial w(t,\mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w(t,\mathbf{x}) + (\mathbf{v}, \nabla w) = 0, \tag{4.1.1}$$

а именно в его инерциальном слагаемом $(\mathbf{v}, \nabla w)$, векторное поле $\mathbf{v}$ восстанавливается по w по закону Био-Савара (3.2.11). Поэтому уравнение является нелинейным и интегро-дифференциальным.

Обозначим

$$\mathbf{v}^{\mathbb{C}} = v_1 + iv_2,$$
$$\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} = v_1^\infty + iv_2^\infty.$$

Теорема 4.1.1. *Дано начальное поле скоростей* $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0 \in L_1(B_{r_0})$, *удовлетворяющее условию прилипания (4.0.4), условию на бесконечности (4.0.5), нулевой циркуляции (3.2.4), и* $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ *- решение (4.0.1)-(4.0.5) в* B_{r_0}. *Тогда* $w(t,\mathbf{x}) = \operatorname{curl}\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ *удовлетворяет*

$$r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = \begin{cases} \frac{|k| r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} (\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, & k \geq 0, \\ \frac{|k| r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \overline{(\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, & k < 0. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Доказательство. Зафиксируем $k > 0$ и разделим уравнение (4.1.1) на z^k. Затем проинтегрируем по внешности диска B_{r_0}. Из моментных соотношений (3.2.16) следует

$$\frac{d}{dt} \int_{B_{r_0}} \frac{w(t,\mathbf{x})}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Тогда

$$\int_{B_{r_0}} \frac{(\mathbf{v}, \nabla w)}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{B_{r_0}} (\mathbf{v}, \nabla z^{-k}) w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$= k\int_{B_{r_0}} \frac{v_1 + iv_2}{z^{k+1}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = k\int_{B_{r_0}} \frac{\mathbf{v}^{\mathbb{C}}}{z^{k+1}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

Из (3.2.16) следует

$$k\int_{B_{r_0}} \frac{\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}}}{z^{k+1}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

и

$$\int_{B_{r_0}} \frac{(\mathbf{v}, \nabla w)}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = k\int_{B_{r_0}} \frac{\mathbf{v}^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}}}{z^{k+1}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

С помощью (3.3.6) получим

$$\int_{B_{r_0}} \frac{\Delta w}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -2\pi r_0^{-k}\left(r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + k w_k(t,r_0)\right).$$

Тогда для $k \geq 0$

$$\left(r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + k w_k(t,r_0)\right) = \frac{k r_0^k}{2\pi}\int_{B_{r_0}} \frac{\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}^{\mathbb{C}}}{z^{k+1}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

Так как $w_{-k}(t,r) = \overline{w_k(t,r)}$, то (4.1.2) выполнено для всех $k < 0$. Теорема доказана.

□

Замечание. Если величина $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty\|$ мала в некоторой интегральной норме, что характерно для хорошо обтекаемого тела, то правая часть в (4.1.2) переходит в граничное условие (3.3.4). И (3.3.4) становится хорошей аппроксимацией граничного условия для нелинейного вихревого уравнения. Отсюда естественным образом вытекает задача граничного управления с неизвестной функцией $u_k(t)$:

$$r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = u_k(t),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{4.1.3}$$

где граничные функции становятся управлением с обратной связью $u_k(t)$, корректирующие нулевое граничное условие. Эти функции "принуждают"решение постоянно оставаться на инвариантном многообразии M с начала движения.

4.1.2 Вихревое псевдограничное условие во внешней области

В предыдущем подразделе мы нашли приближенное граничное условие для внешности диска. Здесь мы найдем приближенное граничное условие для произвольной области. Как и в случае линейного уравнения завихренности, мы будем использовать отображение Римана из Ω в B_{r_0}, и запишем уже нелинейное вихревое уравнение в B_{r_0}.

Делая замену переменных с $p = y_1 + iy_2 \in \Omega$ на $z = x_1 + ix_2 \in B_{r_0}$ в инерциальном слагаемом $(\mathbf{v}, \nabla w)$ получим:

$$(\mathbf{v}, \nabla w) = v_1 \frac{\partial w}{\partial y_1} + v_2 \frac{\partial w}{\partial y_2} = v_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \right)$$
$$+ v_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \right) = v_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} \operatorname{Re} \Phi'(p) + v_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} \operatorname{Im} \Phi'(p)$$
$$- v_2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \operatorname{Im} \Phi'(p) + v_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \operatorname{Re} \Phi'(p) = \operatorname{Re} \Phi'(p)(\mathbf{v}, \nabla w) + \operatorname{Im} \Phi'(p)(\mathbf{v}^\perp, \nabla w),$$

где $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$. Здесь мы использовали формулы комплексного дифференцирования для $\Phi'(p)$:

$$\Phi'(p) = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + i \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - i \frac{\partial x_1}{\partial y_2}.$$

Тогда вихревое уравнение (4.0.6), соответствующее системе Навье-Стокса, после отображения Римана сводится к уравнению

$$\partial_t w(t, \mathbf{x}) - |\Phi'(p)|^2 \Delta w + \operatorname{Re} \Phi'(p)(\mathbf{v}, \nabla w) + \operatorname{Im} \Phi'(p)(\mathbf{v}^\perp, \nabla w) = 0.$$

Разделив на $|\Phi'(p)|^2$ получим вихревое уравнение в B_{r_0}:

$$|(\Phi^{-1})'(z)|^2 \partial_t w(t, \mathbf{x}) - \Delta w + B(v, w) = 0, \tag{4.1.4}$$

где нелинейное слагаемое приобретает вид

$$B(v,w) = \mathrm{Re}(\Phi^{-1})'(\mathbf{v}, \nabla w) - \mathrm{Im}(\Phi^{-1})'(\mathbf{v}^{\perp}, \nabla w).$$

Снабдим это уравнение псевдо-граничным условием

$$r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t, r_0) = \begin{cases} \frac{|k| r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} (\mathbf{v}_{\infty}^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1} \overline{(\Phi^{-1})'} w(t,\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \ k \geq 0, \\ \frac{|k| r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \overline{(\mathbf{v}_{\infty}^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1}} (\Phi^{-1})' w(t,\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \ k < 0. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Дано начальное поле скоростей $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, $\operatorname{curl} \mathbf{v}_0 \in L_1(B_{r_0})$ удовлетворяющее условию прилипания, условию набегающего потока на бесконечности, нулевой циркуляции и $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ - решение (4.0.1)-(4.0.5) в B_{r_0}. Тогда для $w(t,\mathbf{x}) = \operatorname{curl} \mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ верна следующая

Теорема 4.1.2. *Пусть Ω, Φ будут как в Теореме 3.3.1, $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ - начальное поле скоростей, удовлетворяющее условию прилипания на границе (4.0.4), течения на бесконечности (4.0.5), нулевой циркуляции (3.2.4),* $\operatorname{curl} \mathbf{v}_0 \in L_1(\Omega)$ *, и $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ - решение задачи (4.0.1)-(4.0.5) в Ω. Тогда функция ротора $w(t,\cdot) = \operatorname{curl} \mathbf{v}(t, \Phi^{-1}(\cdot))$ удовлетворяет (4.1.5).*

Доказательство. Как и при доказательстве аналогичной теоремы для диска, для фиксированного значения $k > 0$ разделим вихревое уравнение на z^k, проинтегрируем его по B_{r_0}. При доказательстве теоремы 3.3.1 мы получили соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_{B_{r_0}} \frac{|(\Phi^{-1})'(z)|^2}{z^k} w(t,\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

и, соответственно,

$$\int_{B_{r_0}} \frac{\Delta w}{z^k}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = -2\pi r_0^{-k} \left(r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + k w_k(t, r_0) \right).$$

Из (3.2.21), (3.2.22)

$$\int_{B_{r_0}} \frac{\mathrm{Re}(\Phi^{-1})'}{z^k} w \operatorname{div} \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_{B_{r_0}} \frac{\mathrm{Im}(\Phi^{-1})'}{z^k} w \operatorname{curl} \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

Тогда, используя соотношения Коши-Римана, мы будем иметь

$$\int_{B_{r_0}} \frac{B(v,w)}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{B_{r_0}} \frac{\mathrm{Re}(\Phi^{-1})'}{z^k}(\mathbf{v},\nabla w) - \frac{\mathrm{Im}(\Phi^{-1})'}{z^k}(\mathbf{v}^\perp,\nabla w)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$= \int_{B_{r_0}} \left(-\frac{\mathrm{Re}(\Phi^{-1})'}{z^k} w \,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \frac{\mathrm{Im}(\Phi^{-1})'}{z^k} w \,\mathrm{curl}\,\mathbf{v}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$- \int_{B_{r_0}} w\left(\left(v,\nabla\frac{\mathrm{Re}(\Phi^{-1})'}{z^k}\right) - \left(v^\perp,\nabla\frac{\mathrm{Im}(\Phi^{-1})'}{z^k}\right)\right)\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$= k\int_{B_{r_0}} \frac{\overline{(\Phi^{-1})'}}{z^{k+1}}(v_1+iv_2)w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = k\int_{B_{r_0}} \frac{\overline{(\Phi^{-1})'}}{z^{k+1}}\mathbf{v}^{\mathbb{C}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,.$$

Из (3.2.31) следует

$$k\int_{B_{r_0}} \frac{\overline{(\Phi^{-1})'}}{z^{k+1}}\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0,$$

и

$$\int_{B_{r_0}} \frac{B(v,w)}{z^k}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = k\int_{B_{r_0}} \frac{\overline{(\Phi^{-1})'}}{z^{k+1}}(\mathbf{v}^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}})w(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

откуда следует (4.1.5) для всех $k \geq 0$.

Для $k < 0$ (4.1.5) следует из тождества $w_{-k}(t,r) = \overline{w_k(t,r)}$. Теорема доказана.

□

Суть теоремы заключается в том, что для системы Навье-Стокса, если $\|\mathbf{v}^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}}\|$ мало, что типично для хорошо обтекаемых объектов, то (3.3.4) является хорошим приближением граничного условия третьего типа. Тем не менее, для получения более точного граничного условия, требуется дополнительная корреция при помощи управления на границе (4.1.3), чтобы оставаться на инвариантном аффинном подпространстве M.

4.2 Граничное условие во внешней области

В этом разделе будет представлено граничное условие для нелинейной задачи. С помощью отображения Римана уравнение (4.0.6) заданное в Ω переходит в (4.1.4) для области B_{r_0}. Используя теорему о неподвижной точке,

мы выведем граничное условие для завихренности, которое обеспечивает попадание решения на инвариантное многообразие конечной коразмерности $w(t,\cdot) \in M_N$, заданное в (3.2.32).

Если многообразие M задает точное условие прилипания, то M_N при достаточно большом значении параметра N определяет приближенное в равномерной метрике условие прилипания. Но оно в свою очередь определяется конечным набором соотношений вместо счетного в определении M.

Скорость $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$, восстановленная из $w(t,\mathbf{x})$ по закону Био-Савара (3.2.11), будет решением системы Навье-Стокса с приближенным граничным условием, удовлетворяющим (3.2.33).

Зафиксируем параметр $N \in \mathbb{N}$, характеризующий точность приближения граничного условия. Снабдим вихревое уравнение (4.1.4) начальным условием и условием на бесконечности

$$w(0,\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \tag{4.2.1}$$

$$w(t,\mathbf{x}) \to 0,\ |\mathbf{x}| \to \infty, \tag{4.2.2}$$

граничным условием

$$r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + k w_k(t,r_0) = u_k(t),\ k = 0,1,\dots,N, \tag{4.2.3}$$

где $\vec{u}(t) = \{u_k(t)\}_{k=0}^N$ является конечным набором неизвестных граничных функций. Так как $w_{-k}(t,r) = \overline{w_k}(t,r)$ то для $k = -N, -N+1, \dots, -1$ выполнено:

$$r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} - k w_k(t,r_0) = \overline{u_k(t)}. \tag{4.2.4}$$

Для $|k| > N$ положим

$$r_0 \frac{\partial w_k(t,r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + |k| w_k(t,r_0) = 0. \tag{4.2.5}$$

Мы построим приближенное граничное условие для вихревого уравнения в предположении однозначной разрешимости (4.1.4), (4.2.1)-(4.2.5). Для диска теорема разрешимости доказывается в разделах 4.3, 4.4.

Для нелинейной задачи основным пространством решений будет пространство Соболева H^1. Для оценки векторного поля $\mathbf{v}(t,\cdot)$ по норме пространства $L_\infty(B_{r_0})$ по лемме 3.2.3, нам нужно дополнить пространство решений L_1 нормами коэффициентов Фурье w_{-1}, w_0, w_1. Итак, определим

$$W = \left\{ w \in H^1(B_{r_0}),\ w_{-1}, w_0, w_1 \in L_1(r_0, \infty; r) \right\}.$$

Теорема 4.2.1. *Пусть для любых фиксированных $N > 0$, $T > 0$ существует решение $w_N(t,\mathbf{x}) \in C([0,T], W))$ задачи (4.1.4), (4.2.1)-(4.2.5), которое является локально-липшицевым по $u_k \in C[0,T]$, $k = 0,\dots,N$, $w_0(\mathbf{x}) \in H^1(B_{r_0})$. Тогда с некоторой $M > 0$ и произвольным начальным условием, удовлетворяющим $\|w_0(\cdot)\|_{H^1} \le M$ существует такое граничное условие $\vec{u}(t) = \{u_k(t)\}_{k=0}^N$, что $w_N(t,\cdot) \in M_N$ для всех $t \in [0,T]$.*

Доказательство. Соотношения (4.1.5) могут быть записаны как

$$\vec{u}(t) = F(\vec{u}), \tag{4.2.6}$$

где отображение

$$F(\vec{u}) : (C[0,T])^{2N+1} \to (C[0,T])^{2N+1}$$

определяется как

$$F[\vec{u}(\cdot)] = \begin{cases} \frac{|k| r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} (\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1} \overline{(\Phi^{-1})'} w(t,\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x},\ k = 0,\dots,N \\ \frac{|k| r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \overline{(\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1}} (\Phi^{-1})' w(t,\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x},\ k = -N,\dots,-1. \end{cases}$$

Здесь $w(t,\mathbf{x})$ - решение задачи (4.1.4), (4.2.1)-(4.2.5) с граничным условием $\vec{u}(t)$, и, следовательно, является функцией от $\vec{u}(t)$.

Отображение F является корректно-определенным, т.к. $k/z^{|k|+1} \in L_2(B_{r_0})$ и в силу леммы 3.2.3 из

$$\left\| k(\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}^{\mathbb{C}}(t,\cdot)) z^{-|k|-1} \right\|_{L_2(B_{r_0})} \le C \|w(t,\mathbf{x})\|_W$$

следует

$$|F[\vec{u}(t)]| \le C\|w(t,\cdot)\|_W^2$$

с новой константой $C > 0$. Из $w(t,\mathbf{x}) \in C\left([0,T]; H^1(B_{r_0})\right)$ следует $F[\vec{u}(t)] \in (C[0,T])^{2N+1}$.

Зафиксируем $M > 0$ и возьмем $\vec{u}_1(\cdot)$, $\vec{u}_2(\cdot)$ из $(C[0,T])^{2N+1}$ с $\|\vec{u}_i\|_{L_\infty} < M$, $i = 1,2$. Пусть w_1, w_2 - соответствующие решения (4.1.4), (4.2.1)-(4.2.5) с $w_0(\mathbf{x})$ удовлетворяющей $\|w_0(\mathbf{x})\| \le M$.

$F = \{F_k\}_{k=-N}^{N}$ является сжимающим отображением по $\vec{u}$. В самом деле

$$\begin{aligned}
&|F_k[\vec{u}_1(\cdot)] - F_k[\vec{u}_2(\cdot)]| \le \\
&\quad \frac{|k| r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \Big| (\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}_1^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1} \overline{(\Phi^{-1})'} w_1(t,\mathbf{x}) - \\
&\quad (\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}_2^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1} \overline{(\Phi^{-1})'} w_2(t,\mathbf{x}) \Big| \, \mathrm{d}\mathbf{x} \le \\
&\quad \frac{r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} |k(\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}_1^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1} \overline{(\Phi^{-1})'} (w_1(t,\mathbf{x}) - w_2(t,\mathbf{x}))| \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \\
&\quad \frac{r_0^{|k|}}{2\pi} \int_{B_{r_0}} \Big| k(\mathbf{v}_2^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}_1^{\mathbb{C}}) z^{-|k|-1} \overline{(\Phi^{-1})'} w_2(t,\mathbf{x}) \Big| \, \mathrm{d}\mathbf{x} \, .
\end{aligned}$$

Из леммы 3.2.3 с некоторой $C > 0$

$$\left\| k\left(\mathbf{v}_1^{\mathbb{C}}(t,\cdot) - \mathbf{v}_2^{\mathbb{C}}(t,\cdot)\right) z^{-|k|-1} \right\|_{L_2(B_{r_0})} \le C\|w_1(t,\mathbf{x}) - w_2(t,\mathbf{x})\|_W$$

и

$$\|k(\mathbf{v}_\infty^{\mathbb{C}} - \mathbf{v}_1^{\mathbb{C}}(t,\cdot)) z^{-|k|-1}\|_{L_2(B_{r_0})} \le C\|w_1(t,\mathbf{x})\|_W.$$

Действительно, при $k = 0$ неравенство выше очевидно, а для $k > 0$ $z^{-|k|-1}$ является квадратично-интегрируемой.

Заметим, что в следствии липшицевой непрерывности w по $\vec{u}$ нормы $\|w_1(t,\mathbf{x})\|_W$, $\|w_2(t,\mathbf{x})\|_W$ являются сколь угодно малыми при малых $M > 0$. Тогда верна следующая оценка

$$|F[\vec{u}_1(\cdot)] - F[\vec{u}_2(\cdot)]| \le C(M)\|w_1(t,\cdot) - w_2(t,\cdot)\|_W$$

с $C(M) \to 0$ при $M \to 0$.

Поскольку с некоторой $L > 0$ верно

$$\|w_1 - w_2\|_{C([0,T],W))} \le L\|u_1 - u_2\|_{(C[0,T])^{2N+1}},$$

то для малых $M > 0$ окончательно будем иметь

$$\|F[\vec{u}_1(\cdot)] - F[\vec{u}_2(\cdot)]\|_{(C[0,T])^{2N+1}} \le K\|\vec{u}_1(\cdot) - \vec{u}_2(\cdot)\|_{(C[0,T])^{2N+1}}$$

с константой $K < 1$, и из теоремы о неподвижной точке следует, что существует решение задачи (4.2.6). Теорема доказана. □

Замечание. Если $w_0(\mathbf{x}) \in H^2(B_{r_0})$, то решение будет удовлетворять $w(t,\cdot) \in H^2(B_{r_0})$, и скорость на границе будет стремиться к нулю в $L_2(\partial\Omega)$ при $N \to \infty$ в соответствии с (3.2.34). Если мы еще повысим гладкость начального условия данных, то сможем получить равномерную сходимость скорости к нулю на границе.

Замечание. Определенное выше пространство W допускает циркуляционные течения с бесконечной энергией, когда среднее ротора отлично от нуля. Для безциркуляционных течений с конечной энергией в качестве пространства W можно было бы взять весовое пространство Соболева $\overset{\circ}{H}{}^{1,N}$ с $N > 1$:

$$\overset{\circ}{H}{}^{1,N} = \{f \in L_{2,N},\ \nabla f \in L_{2,N}, \int f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0\}.$$

4.3 Разрешимость линеаризованной системы Озеена в вихревой форме со специальным граничным условием

Для построения граничного условия в теореме 4.2.1 требуется разрешимость уравнений гидродинамики, и локальная липшицевость по начальным и краевым условиям. Сначала мы докажем разрешимость для линейной задачи.

Пусть во внешности круга B_{r_0} дано потенциальное течение $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ с условием прилипания на границе круга, и заданным потоком на бесконечности

$\mathbf{v}_\infty$. Линеаризация уравнений Навье-Стокса в окрестности заданного течения приводит к уравнению Озеена. В вихревой форме оно имеет вид

$$\frac{\partial w(t,\mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w + (\hat{\mathbf{v}}, \nabla w) = 0. \tag{4.3.1}$$

Дополним его начальным условием (4.2.1) и условием на бесконечности (4.2.2).

Снабдим задачу (4.3.1), (4.2.1), (4.2.2) граничным условием (4.2.3)-(4.2.5).

Для $k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$R_{k,k-1}(\lambda, r) = \frac{J_k(\lambda r)Y_{k-1}(\lambda r_0) - Y_k(\lambda r)J_{k-1}(\lambda r_0)}{\sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0) + Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}}.$$

Поскольку $w_{-k}(t,r) = \overline{w_k(t,r)}$, и $u_{-k}(t) = \overline{u_k(t)}$, Δ_k и граничное условие зависит от $|k|$, будем полагать $k \geq 0$. Для решения начально-краевой задачи применим интеграл Вебера $W_{k,k-1}$ к уравнению Озеена.

В главе 2 было исследовано действие интеграла Вебера на преобразование Лапласа, и была получена формула

$$W_{k,k-1}[\Delta_k w_k(t,r)] = \frac{2u_k(t)}{\pi r_0 \lambda \sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0) + Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}} - \lambda^2 \hat{w}_k(t,\lambda).$$

Тогда уравнение Гельмгольца (4.3.1) в терминах коэффициентов Фурье w_k после преобразования Вебера можно записать в виде

$$\partial \hat{w}_k(t,\lambda) + \lambda^2 \hat{w}_k(t,\lambda) + r_k(\lambda)u_k(t) + W_{k,k-1}[(\hat{\mathbf{v}}, \nabla w)]_k = 0$$

где $\hat{w}_k(t,\cdot) = W_{k,k-1}[w_k(t,\cdot)]$,

$$r_k(\lambda) = \frac{2}{\pi r_0 \lambda \sqrt{J_{k-1}^2(\lambda r_0) + Y_{k-1}^2(\lambda r_0)}}.$$

В итоге с помощью интегрального преобразования мы свели уравнение Гельмгольца к следующему интегральному соотношению

$$\hat{w}_k(t,\lambda) = e^{-\lambda^2 t}\hat{w}_{0,k}(\lambda) + r_k(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau + \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}W_{k,k-1}[(\hat{\mathbf{v}},\nabla w)]_k(\tau,\lambda)d\tau,$$

где $[(\hat{\mathbf{v}},\nabla w)]_k$ - k-й коэффициент Фурье выражения $(\hat{\mathbf{v}},\nabla w)$. Возьмем обратное преобразование $W_{k,k-1}$ и запишем решение через полугруппу Стокса $S(t)$, задающую поток Стокса в вихревой форме (задача (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5)):

$$w(t,\mathbf{x}) = S(t)w_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\varphi}W_{k,k-1}\left[r_k(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau\right] + \int_0^t (\nabla S(t-\tau),\hat{\mathbf{v}})\, w(\tau,\mathbf{x})d\tau. \quad (4.3.2)$$

Теорема 4.3.1 (разрешимость уравнения Озеена)**.** *Для заданного* $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \in L_\infty(B_{r_0})$ *удовлетворяющего условию прилипания (4.0.4),* $u_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, $k = 0,\dots,N$, $w_0(\mathbf{x}) \in L_2(B_{r_0})$, *задача (4.3.1), (4.2.1)-(4.2.5) имеет единственное глобальное по времени решение* $w(t,\mathbf{x}) \in C\left([0,\infty), L_2(B_{r_0})\right)$, *которое является локально-липшицевым по отношению к* $\{u_k\}_{k=1}^N$, $w_0(\mathbf{x})$.

Доказательство. Сначала нам нужно доказать локальную разрешимость уравнения (4.3.2). Зафиксируем $T > 0$. Для заданного $\hat{\mathbf{v}} \in L_\infty(B_{r_0})$, $u_k \in C[0,T]$, $k = 0,\dots,N$ рассмотрим отображение

$$F\left(w(\tau,\cdot)\right) = S(t)w_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\varphi}W_{k,k-1}\left[r_k(\lambda)\int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau\right] - \int_0^t (\nabla S(t-\tau),\hat{\mathbf{v}})\, w(\tau,\mathbf{x})d\tau.$$

Определим пространство

$$Q = C\left([0,T], L_2(B_{r_0})\right)$$

. Поскольку $r_k(\lambda) \sim 1/\sqrt{\lambda}$, то с некоторой $C > 0$

$$\|r_k(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau\|_{L_2(0,\infty,\lambda d\lambda)} \leq C \|u_k(\tau)\|_{C[0,T]}.$$

Положим

$$M = \|w_0(\cdot)\|_{L_2} + C \sum_{k=-N}^{N} \|u_k(\tau)\|_{C[0,T]}.$$

Из оценок полугруппы $S(t)$ в Предложении 2.4.1 получим

$$\|F(w(t,\cdot))\|_{L_2} \leq \|w_0(\cdot)\|_{L_2} + C \sum_{k=-N}^{N} \|u_k(\tau)\|_{C[0,T]} +$$

$$\int_0^t \|(\nabla S(t-\tau), \hat{\mathbf{v}}) w(\tau, \mathbf{x})\|_{L_2} d\tau \leq$$

$$M + \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L_\infty(B_{r_0})} \|w\|_Q \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{e(t-\tau)}} =$$

$$M + 2\sqrt{\frac{T}{e}} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L_\infty(B_{r_0})} \|w\|_Q.$$

Поэтому $F : Q \to Q$ является корректно-заданным и отображает Q на само себя. Теперь мы докажем, что F является сжимающим в Q. Действительно,

$$F(w_1(\tau,\cdot)) - F(w_2(\tau,\cdot)) = \int_0^t (\nabla S(t-\tau), \hat{\mathbf{v}}) (w_1(\tau,\mathbf{x}) - w_2(\tau,\mathbf{x})) d\tau$$

и

$$\|F(w_1(\tau,\cdot)) - F(w_2(\tau,\cdot))\|_Q \leq$$

$$\text{vraisup}_{t\in[0,T]} \int_0^t \|(\nabla S(t-\tau), \hat{\mathbf{v}}) (w_1(\tau,\mathbf{x}) - w_2(\tau,\mathbf{x}))\|_{L_2} d\tau \leq$$

$$2\sqrt{\frac{T}{e}} \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L_\infty([0,T]\times B_{r_0})} \|w_1 - w_2\|_Q.$$

Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке для малых T отображение F имеет неподвижную точку $w(t,\mathbf{x})$.

Докажем единственность. Если $w_1(t,\cdot)$, $w_2(t,\cdot)$ являются двумя решениями (4.3.1), (4.2.1)-(4.2.5), то их разница $w_1 - w_2$ является решением той

же задачи с нулевыми начальными и граничными условиями. Тогда константа M определенная выше равняется нулю и из леммы Гронуолла

$$\|w_1(t,\cdot) - w_2(t,\cdot)\|_{L_2} = 0.$$

Докажем липшицевость отображения. Пусть даны два решения $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ с начальными и граничными условиями $\{u_k^{(1)}(t)\}_{k=0}^N$, $w_0^{(1)}(\mathbf{x})$, $\{u_k^{(2)}(t)\}_{k=0}^N$, $w_0^{(2)}(\mathbf{x})$ соответственно. Оценим разность этих решений:

$$\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_Q \le \left\|S(t)\left(w_0^{(1)}(\cdot) - w_0^{(2)}(\cdot)\right)\right\|_Q +$$
$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\varphi} W_{k,k-1}\left[r_k(\lambda)\int_0^T e^{-\lambda^2(t-\tau)}\left(u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\right)(\tau)d\tau\right]\right\|_Q +$$
$$\left\|\int_0^t (\nabla S(t-\tau), \hat{\mathbf{v}})\,(w^{(1)} - w^{(2)})(\tau,\mathbf{x})d\tau\right\|_Q \le \left\|w_0^{(1)}(\mathbf{x}) - w_0^{(2)}\right\|_{L_2} +$$
$$C\sum_{k=-N}^{N}\|u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\|_{C[0,T]} + \int_0^T \left\|(\nabla S(t-\tau), \hat{\mathbf{v}})\,(w^{(1)} - w^{(2)})\right\|_{L_2} d\tau$$

Здесь мы воспользовались энергетической оценкой

$$\left\|S(t)\left(w_0^{(1)}(\cdot) - w_0^{(2)}(\cdot)\right)\right\|_Q \le \|w_0^{(1)}(\cdot) - w_0^{(2)}(\cdot)\|_{L_2}.$$

Оценки $\nabla S(t-\tau)S(t)$ в L_2 имеют интегрируемую особенность по t в нуле, и по аналогии с оценками выше можно показать, что

$$\int_0^T \left\|(\nabla S(t-\tau), \hat{\mathbf{v}})\,(w^{(1)} - w^{(2)})\right\|_{L_2} d\tau \le C(T)\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_Q,$$

причем $C(T) \to 0$ при $T \to 0$. И тогда при достаточно малом T

$$\frac{1}{2}\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_Q \le \|w_0^{(1)} - w_0^{(2)}\|_{L_2} + C\sum_{k=-N}^{N}\|u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\|_{C[0,T]}.$$

Докажем глобальность решения. Мы покажем, что $\|w(t,\cdot)\|_{L_2(B_{r_0})}$ не может неограниченно возрастать в течении конечного времени, и, следовательно, *росток решения* может продолжаться на всю временную ось. Так

как $F(w) = w$, то из оценок выше имеем

$$\|w(t,\cdot)\|_{L_2} \leq M + \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L_\infty(B_{r_0})} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{2e(t-\tau)}} \right) \|w(\tau,\cdot)\|_{L_2} d\tau$$

Тогда из леммы Гронуолла

$$\|w(t,\cdot)\|_{L_2} \leq M e^{2\sqrt{\frac{t}{e}}\|\hat{\mathbf{v}}(\cdot)\|_{L_\infty(B_{r_0})}}$$

и $\|w(t,\cdot)\|_{L_2}$ остается конечным в течении времени $t > 0$.

Теорема доказана полностью. □

4.4 Разрешимость нелинейной системы Навье-Стокса в вихревой форме со специальным граничным условием

Первой будет доказано существование решения вихревого уравнения в

$$W = \{w \in H^1(B_{r_0}), w_{-1}, w_0, w_1 \in L_1(r_0, \infty; r)\}.$$

В определении этого пространства не требуется нулевое среднее ротора, поэтому оно допускает циркуляционные течения с бесконечной энергией. В дальнейшем будет схематически показана возможность переноса схемы доказательства на случай безциркуляционных течений с конечной энергией.

Рассмотрим отображение

$$F\left(w(t,\cdot)\right) = S(t)w_0(\mathbf{x}) + \sum_{k=-N}^{N} e^{ik\varphi} W_{k,k-1} \left[r_k(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau \right] + \int_0^t S(t-\tau)(\mathbf{v}, \nabla w) d\tau, \tag{4.4.1}$$

связанное с краевой задачей для уравнения Гельмгольца (4.1.1). Ввиду леммы 3.2.3 F будет корректно-определенным в $Q = C\left([0,T], W)\right)$. Определим цилиндр $Z_{r_0,T} = [0,T] \times B_{r_0}$.

Теорема 4.4.1 (разрешимость уравнения Гельмгольца)**.** *Для произвольного* $L > 0$ *существует* $T = T(L) > 0$ *что для всех* $w_0 \in H^1(B_{r_0})$, $u_k \in C[0,T]$, $k = 0, \ldots, N$, $\|w_0\|_{H^1} \le L$, $\|u_k(\cdot)\|_{C[0,T]} \le L$ *задача (4.1.1), (4.2.1)-(4.2.5) имеет единственное решение* $w(t, \mathbf{x}) \in Q$, *локально-липшицевое по краевым и начальным данным.*

Доказательство. Сначала докажем, что $F\left(w(t,\cdot)\right) \in H^1(B_{r_0})$ для фиксированного $t \in [0,T]$. Из Предложения 2.4.1 $S(t)$ есть непрерывная полугруппа в $H^1(B_{r_0})$.

Докажем, что второе слагаемое в (4.4.1) принадлежит $H^1(B_{r_0})$. Для этого согласно правилам дифференцирования преобразования Вебера достаточно доказать, что

$$r_k(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau \in L_2(0, \infty, \lambda d\lambda)$$

и

$$\lambda r_k(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau \in L_2(0, \infty, \lambda d\lambda).$$

Поскольку $r_k(\lambda) \sim 1/\sqrt{\lambda}$, то

$$|\lambda r_k(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau| \le C \frac{\|u_k(\tau)\|_{C[0,T]}}{\lambda^{\frac{3}{2}}} (1 - e^{-\lambda^2 t}),$$

и, следовательно,

$$\|\lambda r_k(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau\|_{L_2(0,\infty,\lambda d\lambda)} \le C \|u_k(\tau)\|_{C[0,T]}.$$

Тогда

$$e^{ik\varphi} W_{k,k-1} \left[r_k(\lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau \right] \in H^1(B_{r_0}).$$

Используя оценки полугруппы Стокса из Предложения 2.4.1 получим

$$\|F\left(w(t,\cdot)\right)\|_{H^1(B_{r_0})} \leq \sqrt{3}\|w_0(\cdot)\|_{H^1(B_{r_0})} + C\sum_{k=-N}^{N}\|u_k(\tau)\|_{C[0,T]} +$$

$$\int_0^t \|S(t-\tau)\left(\mathbf{v}, \nabla w(\tau,\mathbf{x})\right)\|_{H^1(B_{r_0})}\, d\tau \leq$$

$$M + \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{e(t-\tau)}}\right)\|(\mathbf{v}, \nabla w(\tau,\mathbf{x}))\|_{H^1(B_{r_0})}\, d\tau$$

с

$$M = \sqrt{3}\|w_0(\cdot)\|_{H^1} + C\sum_{k=-N}^{N}\|u_k(\tau)\|_{C[0,T]}.$$

Далее воспользуемся следующим неравенством Соболева:

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{L_\infty(B_{r_0})} \leq C\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_4(B_{r_0})}\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_4(B_{r_0})}.$$

Из (3.2.12) следует

$$\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_4(B_{r_0})} \leq C\|w(t,\cdot)\|_{L_4(B_{r_0})}.$$

Тогда ввиду

$$\|w(t,\cdot)\|_{L_4(B_{r_0})} \leq C\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(B_{r_0})}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(B_{r_0})}$$

получим

$$\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_4(B_{r_0})} \leq C\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(B_{r_0})}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(B_{r_0})}.$$

Для любых r на круге $S_r = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}| = r\}$, $r \geq r_0$ выполнено:

$$\text{vraisup}_{r\in[r_0,\infty)}\|\mathbf{v}(t,\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{L_4(S_r)} \leq C\|\mathbf{v}(t,\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(S_r)}\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(S_r)}$$

Тогда из Леммы 3.2.3

$$\int_{B_{r_0}} |\mathbf{v}(t,\cdot) - \mathbf{v}_\infty|^4 d\mathbf{x} \leq$$

$$C\left(\|w(t,\cdot)\|^2_{L_2(B_{r_0})} + \sum_{k=-1,0,1}\|w_k(t,\cdot)\|^2_{L_1(r_0,\infty)}\right)\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|^2_{L_2(B_{r_0})}.$$

В итоге ввиду (3.2.12) получим

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|_{L_\infty(B_{r_0})}\le$$
$$C\left(\|w(t,\cdot)\|^2_{L_2(B_{r_0})}+\sum_{k=-1,0,1}\|w_k(t,\cdot)\|^2_{L_1(r_0,\infty)}\right)^{\frac{1}{8}}\times$$
$$\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(B_{r_0})}$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{v}\|_{L_\infty(Z_{r_0,T})}\le C\|w\|_Q. \tag{4.4.2}$$

Тогда с некоторой новой константой $C>0$

$$\left\|\int_0^t S(t-\tau)(\mathbf{v},\nabla w)d\tau\right\|_{H_1(B_{r_0})}\le$$
$$C\left(T+2\sqrt{\frac{T}{e}}\right)\|\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_\infty(Z_{r_0,T})}\|w(\tau,\mathbf{x})\|_{C\left([0,T],H^1(B_{r_0})\right)}$$

и $F\left(w(t,\cdot)\right)\in H^1(B_{r_0})$.

Теперь мы докажем, что первые коэффициенты Фурье с $k=-1,0,1$ функции $F\left(w(\tau,\cdot)\right)$ принадлежат $L_1(r_0,\infty;r)$.

Из (3.3.4) нулевой коэффициент полугруппы Стокса $[S(t)]_0$ генерирует радиально симметричное решение $w(t,\mathbf{x})$ для уравнения теплопроводности с граничным условием Неймана

$$\frac{\partial w(t,\mathbf{x}')}{\partial n}=0,\ |\mathbf{x}'|=r_0.$$

Коэффициенты полугруппы $[S(t)]_{\pm1}$ соответствуют решениям уравнения теплопроводности со смешанным граничным условием

$$\frac{\partial w}{\partial n}+w(t,\mathbf{x}')=0,\ |\mathbf{x}'|=r_0.$$

Из L_p-L_q оценок для уравнения теплопроводности [60] с некоторой непрерывной $C(t)>0$

$$\|[S(t)]_k f\|_{L_1(r_0,\infty,r)}\le C(t)\|f\|_{L_2(r_0,\infty,r)}$$

для $k = -1, 0, 1$.

Итак, мы получили, что $F : Q \to Q$ корректно определен и Q отображается на себя. Теперь мы докажем, что F является сжимающим в Q в некотором шаре $B = \{w \in Q \ |||w||_Q < L\}$.

Возьмем $w_1, w_2 \in B$ с соответствующими полями скоростей $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$:

$$
\begin{aligned}
&F\left(w_1(\tau,\cdot)\right) - F\left(w_2(\tau,\cdot)\right) = \\
&\int_0^t S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1, \nabla\left(w_1(\tau,\mathbf{x}) - w_2(\tau,\mathbf{x})\right)\right) d\tau + \\
&\int_0^t S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \nabla w_2(\tau,\mathbf{x})\right) d\tau.
\end{aligned}
$$

Тогда из (4.4.2) с константами C_1, C_2 получим

$$
\begin{aligned}
&\|F\left(w_1(\tau,\cdot)\right) - F\left(w_2(\tau,\cdot)\right)\|_{H^1} \leq \\
&\text{vraisup}_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1, \nabla\left(w_1(\tau,\mathbf{x}) - w_2(\tau,\mathbf{x})\right)\right)\|_{H^1} d\tau + \\
&\text{vraisup}_{t\in[0,T]} \int_0^t \|S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \nabla w_2(\tau,\mathbf{x})\right)\|_{H^1} d\tau \leq \\
&\left(T + 2\sqrt{\frac{T}{e}}\right)\left(\|\mathbf{v}_1\|_{L_\infty(Z_{r_0,T})}\|w_1 - w_2\|_Q + \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{L_\infty(Z_{r_0,T})}\|w_2\|_Q\right) \leq \\
&C_1\left(T + 2\sqrt{\frac{T}{e}}\right)\left(\|\mathbf{v}_1\|_{L_\infty(Z_{r_0,T})} + \|w_2\|_Q\right)\|w_1 - w_2\|_Q \leq \\
&C_2 L\left(T + 2\sqrt{\frac{T}{e}}\right)\|w_1 - w_2\|_Q. \qquad (4.4.3)
\end{aligned}
$$

Оценки коэффициентов Фурье для $k = -1, 0, 1$ можно провести аналогичным образом, используя $L_p - L_q$ неравенства. Итак, для любого $L > 0$ мы можем найти такое малое $T > 0$, что F становится сжимающим в Q. Тогда по теореме Банаха о неподвижной точке отображение F имеет неподвижную точку $w(t, \mathbf{x})$.

Докажем единственность. Пусть $w_1(t,\cdot)$, $w_2(t,\cdot)$ два решения нашей задачи. Их разница $w_1 - w_2$ является решением той же задачи с нулевыми

начальными и граничными условиями. Из оценок выше справедливо неравенство

$$\|w_1 - w_2\|_Q \le CL\left(T + 2\sqrt{\frac{T}{e}}\right)\|w_1 - w_2\|_Q.$$

Тогда при малых $T > 0$ получим $\|w_1 - w_2\|_Q = 0$, и, следовательно, *росток решения* единственен.

Докажем липшицевость отображения. Пусть даны два решения $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ с начальными и граничными условиями $\{u_k^{(1)}(t)\}_{k=0}^N$, $w_0^{(1)}(\mathbf{x})$, $\{u_k^{(2)}(t)\}_{k=0}^N$, $w_0^{(2)}(\mathbf{x})$ соответственно. Оценим разность этих решений. Используя энергетическую оценку

$$\left\|S(t)\left(w_0^{(1)}(\cdot) - w_0^{(2)}(\cdot)\right)\right\|_Q \le \left\|w_0^{(1)}(\cdot) - w_0^{(2)}(\cdot)\right\|_{H^1}$$

получим

$$\begin{aligned}
&\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_Q \le \left\|S(t)\left(w_0^{(1)}(\cdot) - w_0^{(2)}(\cdot)\right)\right\|_Q + \\
&\left\|\sum_{k=-N}^{N} e^{ik\varphi} W_{k,k-1}\left[r_k(\lambda)\int_0^T e^{-\lambda^2(t-\tau)}\left(u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\right)(\tau)d\tau\right]\right\|_Q + \\
&\left\|\int_0^t S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1, \nabla w^{(1)}\right)(\tau,\mathbf{x}) - S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_2, \nabla w^{(2)}\right)(\tau,\mathbf{x})d\tau\right\|_Q \le \\
&\left\|w_0^{(1)}(\mathbf{x}) - w_0^{(2)}\right\|_{H^1} + C\sum_{k=-N}^{N}\|u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\|_{C[0,T]} + \\
&\left\|\int_0^t S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1, \nabla(w^{(1)} - w^{(2)})\right)(\tau,\mathbf{x})d\tau\right\|_Q + \\
&\left\|\int_0^t S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \nabla w^{(2)}\right)(\tau,\mathbf{x})d\tau\right\|_Q \le \\
&\left\|w_0^{(1)}(\mathbf{x}) - w_0^{(2)}\right\|_{H^1} + C\sum_{k=-N}^{N}\|u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\|_{C[0,T]} + \\
&\int_0^T \left\|S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1, \nabla(w^{(1)} - w^{(2)})\right)(\tau,\mathbf{x})\right\|_{H^1} d\tau + \\
&\int_0^T \left\|S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \nabla w^{(2)}\right)(\tau,\mathbf{x})\right\|_{L_2} d\tau.
\end{aligned}$$

Из оценок (4.4.3) следует

$$\int_0^T \left\| S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1, \nabla(w^{(1)}-w^{(2)})\right)(\tau,\mathbf{x})\right\|_{H^1} d\tau \le C(T)\|w^{(1)}-w^{(2)}\|_Q,$$
$$\int_0^T \left\| S(t-\tau)\left(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2, \nabla w^{(2)}\right)(\tau,\mathbf{x})\right\|_{H^1} d\tau \le C(T)\|w^{(1)}-w^{(2)}\|_Q,$$

причем $C(T)\to 0$ при $T\to 0$. И тогда при достаточно малом T

$$\frac{1}{2}\|w^{(1)}-w^{(2)}\|_Q \le \|w_0^{(1)}-w_0^{(2)}\|_{H^1} + C\sum_{k=-N}^{N}\|u_k^{(1)}-u_k^{(2)}\|_{C[0,T]}.$$

Теорема доказана. □

Течения, у которых отсутствует циркуляция на бесконечности, имеют конечную энергию течения, и для них утверждение теоремы выше сохраняется, а само доказательство немного упрощается, поскольку исчезает необходимость в использовании L_1 норм. Вместо W можно использовать весовое пространство Соболева с $N>1$:

$$\mathring{H}^{1,N} = \{f\in L_{2,N},\ \nabla f\in L_{2,N}, \int f(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0\}.$$

При этом немного упрощается оценка $\mathbf{v}(t,\cdot)$ в $L_\infty(B_{r_0})$. Первая серия оценок остается в точности такой же:

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|_{L_\infty(B_{r_0})} \le C\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|^{\frac{1}{2}}_{L_4(B_{r_0})}\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_4(B_{r_0})},$$
$$\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_4(B_{r_0})} \le C\|w(t,\cdot)\|_{L_4(B_{r_0})},$$
$$\|w(t,\cdot)\|_{L_4(B_{r_0})} \le C\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(B_{r_0})}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(B_{r_0})},$$
$$\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_4(B_{r_0})} \le C\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(B_{r_0})}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(B_{r_0})}.$$

А L_4-норма векторного поля уже оценивается через L_2 нормы:

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|^4_{L_4(B_{r_0})} \le C\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|^2_{L_2(B_{r_0})}\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|^2_{L_2(B_{r_0})}.$$

Вложения $\mathring{H}^{1,N} \subset L_2(B_{r_0})$, $\mathring{H}^{1,N} \subset H^1(B_{r_0})$ непрерывны. В итоге получим оценку L_∞-нормы

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|_{L_\infty(B_{r_0})} \le$$
$$C_1\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(B_{r_0})}\|\nabla\mathbf{v}(t,\cdot)\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(B_{r_0})}\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(B_{r_0})}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(B_{r_0})} \le$$
$$C_2\|w\|^{\frac{1}{4}}_{\mathring{H}^{1,N}}\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(B_{r_0})}\|w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{4}}\|\nabla w(t,\cdot)\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(B_{r_0})} \le C_3\|w\|_{\mathring{H}^{1,N}}.$$

Из правил дифференцирования преобразования Вебера следует, что полугруппа $S(t)$ будет непрерывной в $\mathring{H}^{1,N}$. Отображение $F\left(w(t,\cdot)\right)$ для фиксированного t будет принадлежать $\mathring{H}^{1,N}$ и являться сжимающим в $Q = C\left([0,T],\mathring{H}^{1,N})\right)$. Отсюда следует разрешимость уравнения Гельмгольца в весовом пространстве Соболева $\mathring{H}^{1,N}$.

В итоге мы доказали следующую теорему:

Теорема 4.4.2 (разрешимость уравнения Гельмгольца)**.** *Для произвольного $L > 0$, $N > 1$ существует такое $T = T(L,N) > 0$, что для всех $w_0 \in \mathring{H}^{1,N}(B_{r_0})$, $u_k \in C[0,T]$, $k = 0,\dots,N$, $\|w_0\|_{\mathring{H}^{1,N}(B_{r_0})} \le L$, $\|u_k(\cdot)\|_{C[0,T]} \le L$ задача (4.1.1), (4.2.1)-(4.2.5) имеет единственное решение $w(t,\mathbf{x}) \in C\left([0,T]\times\mathring{H}^{1,N}(B_{r_0})\right)$.*

Глава 5. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Целью этого раздела является стабилизация решения системы Навье-Стокса к нулю с заданной степенной скоростью за счет управления на границе. Первичным объектом стабилизации будет функция ротора, удовлетворяющая вихревому уравнению. Из оценок решения задачи дивергенция-ротор это будет означать стабилизацию исходного векторного поля к горизонтальному течению $\mathbf{v}_\infty$.

5.1 Стабилизация решения системы Стокса во внешней области

5.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} = \nabla p, \tag{5.1.1}$$

$$\text{div } \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0, \tag{5.1.2}$$

$$\mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \tag{5.1.3}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{5.1.4}$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{v}_\infty,\ |\mathbf{x}| \to \infty, \tag{5.1.5}$$

где $\mathbf{u}$ - функция граничного управления.

Для течения фиксируется циркуляция стационарного потока

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|\mathbf{x}|=R} \mathbf{v}(t, \cdot) d\mathbf{l} = 0. \tag{5.1.6}$$

Для заданного фиксированного $k > 0$, требуется найти такое управление $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_1(t, \mathbf{x}), u_2(t, \mathbf{x}))$, заданное на $\partial\Omega$, чтобы решение внешней задачи (5.1.1) - (5.1.6) стремилось к горизонтальному потоку при $t \to \infty$

как

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty(\cdot)\|_{H^1(\Omega)}\le\frac{C}{t^k}, \tag{5.1.7}$$

где C зависит от $\mathbf{v}_0(\cdot), k$.

Определим аффинное пространство соленоидальных функций

$$\mathcal{J}(\Omega)=\{\mathbf{v}(\cdot)=\big(v_1(\cdot),v_2(\cdot)\big),\ \mathbf{v}-\mathbf{v}_\infty\in\big(H^1(\Omega)\big)^2\ :\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0\}.$$

След функций из $\mathcal{J}(\Omega)$ на границу $\partial\Omega$ принадлежит пространству Соболева с дробным показателем $H^{\frac{1}{2}}$.

Условие стабилизации (5.1.7) требует использования весовых пространств для начальных функций:

$$L_{2,N}(\Omega)=\{f(\mathbf{x}):\|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(\Omega)}=\int_\Omega|f(\mathbf{x})|^2(1+|\mathbf{x}|^2)^N\mathrm{d}\mathbf{x}<\infty\}.$$

Основным результатом по стабилизации линейной системы является следующая теорема.

Теорема 5.1.1. *Для произвольного $k>0$, и начальной функции $\mathbf{v}_0(\cdot)\in\mathcal{J}(\Omega)$, удовлетворяющей (5.1.5), (5.1.6), и такой, что* $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0\in L_{2,N}(\Omega)$, *$N\in\mathbb{N}$, $N\ge 2k+9/2$, существует решение $(\mathbf{u},\mathbf{v})\in C\big(\mathbb{R}_+;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\big)\times C\big(\mathbb{R}_+;\mathcal{J}(\Omega)\big)$ внешней задачи Дирихле (5.1.1)-(5.1.6), удовлетворяющее оценкам:*

$$\|\operatorname{curl}\mathbf{v}(t,\cdot)\|_{L_{2,2}(\Omega)}\le C\frac{\|\operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\cdot)\|_{L_{2,N}(\Omega)}}{t^k}, \tag{5.1.8}$$

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|_{H^1(\Omega)}\le C\frac{\|\operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\cdot)\|_{L_{2,N}(\Omega)}}{t^k}, \tag{5.1.9}$$

с некоторой $C=C(N,k)>0$.

5.1.2 Преобразование Ганкеля

Решим поставленную задачу для внешности диска радиуса r_0. С помощью преобразования Ганкеля мы сначала докажем стабилизируемость ротора векторного поля.

Преобразование Ганкеля определяется для $n \geq -\frac{1}{2}$ и $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0, \infty)$ как

$$H_n[f] = \int_0^\infty J_n(\lambda r) f(r) r dr.$$

Это невырожденное преобразование. Если дополнительно потребовать $f(r)\sqrt{r} \in L_2(r_0, \infty)$, то верна формула обращения, и оно, как и тригонометрическое преобразование Фурье, становится обратным самому себе:

$$f = H_n\left[H_n[f]\right],$$

или

$$f(r) = \int_0^\infty J_n(\lambda r) \left(\int_0^\infty J_n(\lambda s) f(s) ds \right) d\lambda.$$

Поскольку ввиду равенства Парсеваля преобразование Ганкеля является изометричным в $L_2(0, \infty; r)$

$$\int_0^\infty |H_n f(r)|^2 r \, \mathrm{d}r = \int_0^\infty |f(s)|^2 s \, \mathrm{d}s,$$

то аналогично другим преобразованиям, требование $f(r)\sqrt{r} \in L_1(r_0, \infty)$ можно опустить оставив только $f(r)\sqrt{r} \in L_2(r_0, \infty)$. При этом интеграл Ганкеля будет сходится не для всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, а с точностью до меры нуль.

Более того, для целых отрицательных индексов n преобразование Ганкеля также имеет смысл ввиду соотношения

$$J_{-n}(r) = (-1)^n J_n(r). \tag{5.1.10}$$

По аналогии с расмотренными в диссертации интегральными преобразованиями, данное преобразование позволяет найти решение уравнения теплопроводности методом Фурье. В отличии от преобразований Вебера, связанных с краевыми задачами, данное преобразование дает решение уравнения теплопроводности для задачи Коши на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача Коши для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \partial_t w(t, \mathbf{x}) - \Delta w(t, \mathbf{x}) &= 0 \\ w(0, \mathbf{x}) &= w_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

в полярных координатах представима рядом

$$w(t,r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} w_k(t,r).$$

В терминах коэффициентов Фурье она имеет вид

$$\partial_t w_k(t,r) - \Delta_k w_k(t,r) = 0$$
$$w(0,r) = w_0(r),$$

где $w_{0,k}(\cdot)$ - коэффицинеты Фурье начального условия.

Решение этой задачи записывается как

$$w_k(t,r) = H_n\left[e^{-\lambda^2 t} H_n[w_{0,k}(\cdot)]\right]. \tag{5.1.12}$$

Действительно, начальное условие выполняется согласно формуле обращения. Ввиду

$$\Delta_k J_k(\lambda r) = -\lambda^2 J_k(\lambda r)$$

функция $e^{-\lambda^2 t} J_k(\lambda r)$ есть решение уравнения теплопроводности. Следовательно, таковым решением будет и формула (5.1.12).

Формула (5.1.12) есть спектральное представления решения, и она совпадает с классической формулой свертки фундаментального решения с начальным условием.

5.1.3 Стабилизация вихревой функции

Дано начальное векторное поле $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$. Ему соответствует функция ротора $w_0(\mathbf{x})$. Мы разложим его в ряд Фурье по угловой переменной. Оказывается, если мы это начальное условие доопределим нулем внутрь диска:

$$w_0(\mathbf{x}) \equiv 0, \ |\mathbf{x}| < r_0,$$

и будем решать задачу Коши, то коэффициенты Фурье $w_k(t,r)$ начиная с какого-то индекса N уже будут стабилизироваться с нужной скоростью $\frac{1}{t^k}$,

или быстрее. Поэтому в стабилизации с граничным управлением нуждается только ограниченный набор коэффициентов $w_k(t,r)$ для $|k| \le N$.

Решение $w(t,\mathbf{x})$ с начальной функцией $w_0(\mathbf{x})$, сосредоточенной во внешности круга, мы дополним решением $g(t,\mathbf{x})$, с начальным условием, сосредоточенным внутри круга. При этом это начальное условие будет иметь конечный ряд Фурье. Это начальное условие будет выбрано таким образом, чтобы сумма решений $w(t,\mathbf{x})$ и $g(t,\mathbf{x})$ удовлетворяла условию стабилизации (5.1.7). Далее, полученное вихревое решение мы ограничим на внешность круга, а векторное поле $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ мы восстановим по формуле Био-Савара. Тогда искомое управление $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ будет находиться как ограничение векторного поля $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ на границу диска.

Зафиксируем параметр $N \in \mathbb{N}$, который будет определять скорость стабилизации $1/t^N$.

Решение w задачи Коши (5.1.11) с продолженным нулем внутрь B_{r_0} начальным условием w_0 дается формулой

$$w(t,r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^\infty J_n(\lambda r) \left(\int_{r_0}^\infty J_n(\lambda s) w_n^0(s) s \mathrm{d}s \right) \lambda e^{-\lambda^2 t} \mathrm{d}\lambda \quad (5.1.13)$$

Напомним, $L_2(r_0,\infty;r)$, $L_{2,N}(r_0,\infty;r)$ являются производными от $L_2(B_{r_0}), L_{2,N}(B_{r_0})$ при переходе к полярным координатам:

$$L_2(r_0,\infty;r) = \{f : \|f\|^2_{L_2(r_0,\infty;r)} = \int_{r_0}^\infty |f(r)|^2 r \,\mathrm{d}r < \infty\},$$
$$L_{2,N}(r_0,\infty;r) = \{f : \|f\|^2_{L_{2,N}(r_0,\infty;r)} = \int_{r_0}^\infty |f(r)|^2 (1+r^2)^N r \,\mathrm{d}r < \infty\}.$$

Разделим w на два слагаемых I_1 и I_2:

$$w(t,r,\varphi) = \Big(\sum_{|n|\le N} + \sum_{|n|\ge N+1} \Big) e^{in\varphi} \int_0^\infty J_n(\lambda r) \int_{r_0}^\infty w_n^0(s) J_n(\lambda s) s \mathrm{d}s e^{-\lambda^2 t} \lambda \mathrm{d}\lambda$$
$$:= I_1(t,r,\varphi) + I_2(t,r,\varphi). \quad (5.1.14)$$

Далее в леммах 5.1.5, 5.1.6 мы докажем что остаток ряда в (5.1.13) при $|n| > N$, а именно I_2, стабилизируется как $1/t^N$.

Замечание. Здесь прослеживается аналогия с конечными областями. В конечных областях старшие коэффициенты Фурье уравнения теплопроводности экспоненциально убывают как $e^{-k^2t}\sin kx, e^{-k^2t}\cos kx$. Поэтому в стабилизации нуждается только I_1, а I_2 стабилизируется без вмешательства управления. И вмешательство становится низкочастотным.

Но прежде мы установим некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 5.1.2. *Для $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и целого n, $|n| > N$ справедливо следующее неравенство с некоторой $C > 0$:*

$$\Big| \int_{r_0}^{\infty} J_n(\lambda s) w_n^0(s) s \mathrm{d}s \Big| \le C\lambda^{N+1} \|w_n^0(\cdot)\|_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)}.$$

Доказательство. Из-за соотношений (5.1.10) достаточно доказать лемму для $n > 0$. Мы будем использовать хорошо известное неравенство для функций Бесселя первого рода [6]:

$$|J_l(s)| \le \frac{1}{\Gamma(l+1)} \Big(\frac{s}{2}\Big)^l, \ l \in \mathbb{R}_+.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, легко доказать, что

$$\int_{r_0}^{\infty} |w_n^0(s)| s^{N+1} s \mathrm{d}s \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|w_n^0\|_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)}. \tag{5.1.15}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\int_{r_0}^{\infty} |w_n^0(s)| s^{N+1} s \mathrm{d}s \\
&= \int_{r_0}^{\infty} |w_n^0(s)| s^{N+1} (1+s^2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{s} \frac{\sqrt{s}}{(1+s^2)^{\frac{3}{4}}} \mathrm{d}s \\
&\le \Big(\int_{r_0}^{\infty} |w_n^0(s)|^2 s^{2N+2} (1+s^2)^{\frac{3}{2}} s \mathrm{d}s \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{r_0}^{\infty} \frac{s \mathrm{d}s}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}} \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2}} \|w_n^0(s)\|_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)}.
\end{aligned}$$

Тогда для $\lambda \le 1/r_0$ используя $|J_n(s)| \le 1$ будем иметь с некоторой $C_N > 0$:

$$\Big| \int_{r_0}^{\infty} J_n(\lambda s) w_n^0(s) s \mathrm{d}s \Big| \le \int_{r_0}^{1/\lambda} |J_n(\lambda s) w_n^0(s)| s \mathrm{d}s$$
$$+ \int_{1/\lambda}^{\infty} |J_n(\lambda s) w_n^0(s)| s \mathrm{d}s \le \int_{r_0}^{1/\lambda} \frac{\lambda^{N+1} s^{N+1} |w_n^0(s)|}{N! 2^N} s \mathrm{d}s$$
$$+ \int_{1/\lambda}^{\infty} \frac{s^{N+1} |w_n^0(s)|}{s^{N+1}} s \mathrm{d}s \le C_N \lambda^{N+1} \|w_n^0(\cdot)\|_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)}.$$

И для $\lambda > 1/r_0$:

$$\Big| \int_{r_0}^{\infty} J_n(\lambda s) w_n^0(s) s \mathrm{d}s \Big| \le \int_{r_0}^{\infty} \frac{s^{N+1} |w_n^0(s)|}{r_0^{N+1}} s \mathrm{d}s$$
$$\le C_N \lambda^{N+1} \|w_n^0(\cdot)\|_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)}.$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 5.1.3. *Для произвольных $a \ge 0$, $b \in \mathbb{R}$, $k \ge 0$, $N \in \mathbb{N}$, n, $|n| > N$, $t > 0$ справедлива следующая оценка:*

$$\left\| e^{-\lambda^2 t} \lambda^a t^b \int_0^{\infty} s^k J_n(\lambda s) w_n^0(s) \mathrm{d}s \right\|^2_{L_2(\lambda \, \mathrm{d}\lambda, 0, \infty)}$$
$$\le \frac{C_{a,N}}{t^{a+N-2b+2}} \|w_n^0(\cdot)\|_{L_{2,N+k+3/2}(r_0,\infty;r)}$$

с некоторой $C_{a,N}$, зависящей от a, N.

Доказательство. Действительно, используя лемму 5.1.2 будем иметь

$$t^{2b} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda^2 t} \lambda^{2a} \left(\int_0^{\infty} s^k J_n(\lambda s) w_n^0(s) \mathrm{d}s \right)^2 \lambda \, \mathrm{d}\lambda$$
$$\le C t^{2b} \|s^{k-1} w_n^0(s)\|^2_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)} \int_0^{\infty} e^{-2\lambda^2 t} \lambda^{2a+2N+3} \, \mathrm{d}\lambda$$
$$\le \frac{C_{a,N}}{t^{a+N-2b+2}} \|w_n^0(s)\|^2_{L_{2,N+k+3/2}(r_0,\infty;r)}.$$

Что и требовалось доказать. □

В дальнейших рассуждениях нам понадобятся оценки $H_n(r)$ в весовых пространствах. Для n-й компоненты оператора Лапласа Δ_n

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}$$

справедлива следующая лемма:

Лемма 5.1.4. *Для преобразований Ханкеля верно тождество*

$$\int_0^\infty |H_n f(r)|^2 r^5 \,\mathrm{d}r = \int_0^\infty |\Delta_n f(s)|^2 \, s \,\mathrm{d}s.$$

Доказательство. Утверждение этой леммы следует из изометричности преобразования Ханкеля и тождества

$$H_n \left[f(r) r^2 \right] = -\Delta_n H_n f(s).$$

Последнее тождество следует из уравнения Бесселя

$$\begin{aligned} \Delta_n H_n f(s) = \int_0^\infty f(r) \left(J_n^{''}(rs) r^2 + \frac{1}{r} J_n^{'}(rs) r - \frac{n^2}{r^2} J_n(rs) \right) r \,\mathrm{d}r \\ = -\int_0^\infty f(r) r^2 J_n(rs) r \,\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

Что и требовалось доказать. □

Это тождество является аналогом правил дифференцирования для преобразований Фурье.

Лемма 5.1.5. *Выражение $I_2(t, \mathbf{x})$, определенное в (5.1.14), удовлетворяет условию стабилизации с некоторой $C > 0$:*

$$\|I_2(t,\cdot)\|^2_{L_{2,2}(B_{r_0})} \le \frac{C \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^N}. \tag{5.1.17}$$

Доказательство. Обозначим через $I_2^n(t,r)$ коэффициенты Фурье $I_2(t,r,\varphi)$:

$$\begin{aligned} I_2(t,r,\varphi) &= \sum_{|n|\ge N+1} e^{in\varphi} \int_0^\infty J_n(\lambda r) \int_{r_0}^\infty J_n(\lambda s) w_n^0(s) s\mathrm{d}s \; e^{-\lambda^2 t} \lambda \mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{|n|\ge N+1} e^{in\varphi} I_2^n(t,r), \end{aligned}$$

где

$$I_2^n(t,r)=\int_0^\infty J_n(\lambda r)e^{-\lambda^2 t}\int_{r_0}^\infty J_n(\lambda s)w_n^0(s)s\mathrm{d}s\lambda\mathrm{d}\lambda.$$

Используя изометричность преобразования Ханкеля из Леммы 5.1.2 будем иметь

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^\infty |I_2^n(t,r)|^2 r\,\mathrm{d}r &\le \left\|e^{-\lambda^2 t}\int_{r_0}^\infty J_n(\lambda s)w_n^0(s)s\mathrm{d}s\right\|^2_{L_2(\lambda\,\mathrm{d}\lambda,0,\infty)}\\ &\le \int_0^\infty \lambda^{2N+3}e^{-2\lambda^2 t}\mathrm{d}\lambda\|w_n^0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+5/2}(\lambda d\lambda,r_0,\infty)}\\ &\le \frac{C\|w_n^0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)}}{t^{N+2}}.\end{aligned}$$

Затем, используя формулу для производной функции Бесселя [6]

$$J_n'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z)\right),\ n\neq 0,\\ J_1(z),\ n=0,\end{cases}$$

получим аналогичную оценку для $n\neq 0$:

$$\begin{aligned}&\int_{r_0}^\infty |I_2^n(t,r)|^2 r^5\,\mathrm{d}r\\ &=\left\|\Delta_n\left[e^{-\lambda^2 t}\int_{r_0}^\infty J_n(\lambda s)w_n^0(s)s\mathrm{d}s\right]\right\|^2_{L_2(\lambda\,\mathrm{d}\lambda,0,\infty)}=\left\|e^{-\lambda^2 t}\right.\\ &\times\left.\int_{r_0}^\infty\left((4\lambda^2t^2+s^2-4t)J_n(\lambda s)-4\lambda t s J_n^{'}(\lambda s)\right)w_n^0(s)s\mathrm{d}s\right\|^2_{L_2(\lambda\,\mathrm{d}\lambda,0,\infty)}\\ &\le\frac{C}{t^N}\|w_n^0(s)\|^2_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)}+\frac{C}{t^{N+2}}\|w_n^0(s)\|^2_{L_{2,N+9/2}(r_0,\infty;r)}\\ &+\frac{C}{t^N}\|w_n^0(s)\|^2_{L_{2,N+5/2}(r_0,\infty;r)}+\frac{C}{t^{N+1}}\|w_n^0(s)\|^2_{L_{2,N+3/2}(r_0,\infty;r)}\\ &+\frac{C}{t^{N+3}}\|w_n^0(s)\|^2_{L_{2,N+7/2}(r_0,\infty;r)}\le\frac{C_1\|w_n^0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(r_0,\infty;r)}}{t^N}.\end{aligned}$$

И, наконец, справедлива следующая оценка:

$$\int_{r_0}^\infty |I_2^n(t,r)|^2(1+r^2)^2 r\,\mathrm{d}r\le\frac{C\|w_n^0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(r_0,\infty;r)}}{t^N}.$$

Суммируя последнее неравенство по n, мы получаем (5.1.17). Лемма доказана. □

Теперь мы стабилизируем I_1 в (5.1.14), выраженное через коэффициенты $I_1^n(t,r)$:

$$I_1(t,r,\varphi) = \sum_{|n|\le N} e^{in\varphi} \int_0^\infty J_n(\lambda r) \int_{r_0}^\infty J_n(\lambda s) w_n^0(s) s\mathrm{d}s \; e^{-\lambda^2 t} \lambda \mathrm{d}\lambda$$
$$= \sum_{|n|\le N} e^{in\varphi} I_1^n(t,r).$$

Для стабилизации I_1 добавим к решению задачи Коши w решение той же задачи $g(t,r,\varphi)$ с начальной функцией $g_0(r,\varphi)$, сосредоточенной в нуле, следующего вида:

$$g_0(r,\varphi) = \begin{cases} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\varphi} p_n^0(r), \ |\mathbf{x}| < r_0 \\ 0, \ |\mathbf{x}| \ge r_0. \end{cases}$$

Здесь

$$p_n^0(r) = \sum_{k=0}^{M} c_{kn} r^{2k},$$

$M = M(n,N)$, и коэффициенты $\{c_{kn}\}$ будут определены ниже. Вместо разрывной начальной функции g_0 можно использовать более гладкую функцию с носителем в круге. Однако мы ограничимся негладкой функцией. Решение той же задачи Коши с этой начальной функцией будет даваться формулой

$$g(t,r,\varphi) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\varphi} \sum_{k=0}^{M} c_{kn} \int_0^\infty J_n(\lambda r) \left(\int_0^{r_0} J_n(\lambda s) s^{2k} s\mathrm{d}s \right) \lambda e^{-\lambda^2 t} \mathrm{d}\lambda. \tag{5.1.18}$$

Лемма 5.1.6. *Для произвольного фиксированного $N \in \mathbb{N}$, n, $|n| \le N$ существует набор многочленов $P_n^{D_n}(\tau)$ степени не более $D_n = \left[\frac{N-|n|}{2}\right]$, и константа $C = C(N) > 0$ такая, что $I_1(t,r,\varphi)$ с $h_n(\tau) = P_n^N(\tau)$ удовлетворяет условию стабилизации*

$$\|I_1(t,\cdot)\|^2_{L_{2,2}(B_{r_0})} \le \frac{C\|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^N}. \tag{5.1.19}$$

Доказательство. Используя определение функции Бесселя первого рода

$$J_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+n+1)} \Big(\frac{r}{2}\Big)^{2m+n},$$

с применением формулы Тейлора, мы получим

$$\int_{r_0}^{\infty} w_n^0(s) J_n(\lambda s) s\mathrm{d}s = \sum_{m=0}^{D_n} \frac{(-1)^m \int_{r_0}^{\infty} w_n^0(s) s^{2m+|n|} s\mathrm{d}s}{m!\,\Gamma(m+|n|+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m+|n|} + \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} \int_{r_0}^{\infty} w_n^0(s) s^{N+1} J_n^{(N+1)}(\theta_{\lambda s}\lambda s) s\mathrm{d}s,\ 0 < \theta_{\lambda s} < 1, \quad (5.1.20)$$

и

$$\int_{r_0}^{\infty} p_n^0(s) J_n(\lambda s) s\mathrm{d}s = \sum_{m=0}^{D_n} \sum_{k=0}^{M} c_{kn} \frac{(-1)^m \int_{r_0}^{\infty} s^{2m+2k+|n|} s\mathrm{d}s}{m!\,\Gamma(m+|n|+1)} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m+|n|} + \frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} \int_{r_0}^{\infty} p_n^0(s) s^{N+1} J_n^{(N+1)}(\theta_{\lambda s}\lambda s) s\mathrm{d}s. \quad (5.1.21)$$

Наша цель - подобрать $\{c_{kn}\}$ так, чтобы слагаемые в выражениях (5.1.20), (5.1.21) при $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m+|n|}$ оказались противоположных знаков, и, следовательно, чтобы суммы по m в этих выражениях сократились.

Имеем систему уравнений для $k, m = 0, \ldots, M$:

$$\sum_{k=0}^{M} c_{kn} \int_{r_0}^{\infty} s^{2m+2k+|n|} s\mathrm{d}s = -\int_{r_0}^{\infty} w_n^0(s) s^{2m+|n|} s\mathrm{d}s.$$

В матричной форме она имеет вид

$$A_n \vec{c}_n = \vec{b}_n,$$

где

$$A_n = \{\alpha_{km}^{(n)}\}_{k,m=0}^{M},\ \alpha_{km}^{(n)} = \int_{r_0}^{\infty} s^{2m+2k+|n|} s\mathrm{d}s,$$

$$\vec{b}_n = \{b_{km}^{(n)}\}_{k,m=0}^{M},\ b_{km}^{(n)} = \int_{r_0}^{\infty} w_n^0(s) s^{2m+|n|} s\mathrm{d}s,$$

$$\vec{c}_n = \{c_{kn}\}_{k=0}^{M}.$$

Возьмем вектор $\vec{\xi} = \{\xi_k\}_{k=0}^{M}$ и рассмотрим квадратичную форму $(A\vec{\xi}, \vec{\xi})$, для которой будет выполнено

$$(A_n\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \int_{r_0}^{\infty} \sum_{m=0}^{D_n} \sum_{k=0}^{M} \xi_k \xi_m s^{2m+2k+|n|} s\mathrm{d}s = \sum_{m=0} \left(\xi_k \int_{r_0}^{\infty} s^{2k+|n|/2} s\mathrm{d}s \right)^2.$$

Тогда $(A_n\vec{\xi}, \vec{\xi}) \geq 0$, и, ввиду линейной независимости функций $\{s^{2k+|n|/2}\}$, равенство достигается только на нулевом векторе $\vec{\xi}$. Следовательно $\det A_n \neq 0$ и система уравнений имеет решение.

Тогда

$$\vec{c}_n = A_n^{-1}\vec{b}_n$$

и

$$\|\vec{c}_n\| \leq \|w_0(\cdot)\|_{L_{2,N+5/2}(B_{r_0})}.$$

Тогда с учетом (5.1.15) получим оценку

$$\begin{aligned} &\Big| \int_{r_0}^{\infty} w_n^0(s) J_n(\lambda s) s\mathrm{d}s - \int_{r_0}^{\infty} p_n^0(s) J_n(\lambda s) s\mathrm{d}s \Big| \leq \\ &\frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} \int_{r_0}^{\infty} |w_n^0(s)| s^{N+1} |J_n^{(N+1)}(\theta_{\lambda s}\lambda s)| s\mathrm{d}s + \\ &\frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} \int_{r_0}^{\infty} |p_n^0(s)| s^{N+1} |J_n^{(N+1)}(\theta_{\lambda s}\lambda s)| s\mathrm{d}s \leq \\ &C_N \lambda^{N+1} \|w_0(\cdot)\|_{L_{2,N+5/2}(B_{r_0})} \end{aligned}$$

с константой C_N, зависящей от N.

И с помощью изометрического свойства преобразования Ханкеля и Леммы 5.1.2 получим оценку

$$\begin{aligned} &\int_{r_0}^{\infty} |I_1^n(t,r) + p_n(t,r)|^2 r\,\mathrm{d}r \\ &\leq \Big\| e^{-\lambda^2 t} \Big(\int_{r_0}^{\infty} w_n^0(s) J_n(\lambda s) s\mathrm{d}s - \int_{r_0}^{\infty} p_n^0(s) J_n(\lambda s) s\mathrm{d}s \Big) \Big\|^2_{L_2(\lambda\,\mathrm{d}\lambda, 0, \infty)} \\ &\leq C_{N,1} \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+5/2}(B_{r_0})} \int_0^{\infty} \lambda^{2N+3} e^{-2\lambda^2 t} \mathrm{d}\lambda \\ &\leq \frac{C_{N,2} \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+5/2}(B_{r_0})}}{t^{N+2}} \end{aligned}$$

с новыми константами $C_{N,1}$, $C_{N,2}$, зависящими от N.

Таким же образом, как и при доказательстве леммы 5.1.5, мы получим следующие неравенства с новой постоянной C_N:

$$\int_{r_0}^{\infty} |I_1^n(t,r)|^2 r^3 \,\mathrm{d}r \le \frac{C_N \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+7/2}(B_{r_0})}}{t^{N+1}},$$
$$\int_{r_0}^{\infty} |I_1^n(t,r)|^2 r^5 \,\mathrm{d}r \le \frac{C_N \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^{N}},$$

которые приводят к следующей оценке для больших t:

$$\int_{r_0}^{\infty} |I_1^n(t,r)|^2 (1+r^2)^2 r \,\mathrm{d}r \le \frac{C_N \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^{N}}.$$

Суммируя последнее неравенство по n с $|n| \le N$ мы приходим к (5.1.19). Лемма доказана. □

Предыдущие две леммы доказывают следующую теорему:

Теорема 5.1.7. *Для любого $N > 0$, $w_0 \in L_{2,N+9/2}(B_{r_0})$ существует решение, заданное во внешности круга B_{r_0}, задачи*

$$\partial_t w(t,\mathbf{x}) - \Delta w(t,\mathbf{x}) = 0$$
$$w(0,\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}),$$

удовлетворяющее оценке

$$\|w(t,\cdot)\|^2_{L_{2,2}(B_{r_0})} \le \frac{C \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^{N}}.$$

Первая оценка (5.1.8) Теоремы 5.1.7 доказана.

Замечание. Отметим одно важное свойство получаемого управляющего воздействия, стабилизирующего решение к потенциальному. Возмущение $g(t,\mathbf{x})$ представимо конечным гармоническим полиномом. Иными словами, управление не содержит быстро осциллирующих функций для небольших скоростей стабилизации $1/t^k$. И обратно, чем больше k, тем больше высоких частот возникает в управлении.

5.1.4 Стабилизации скорости во внешности круга

Доказательство. Мы представили решение нашей задачи w как сумму решений w и g. Каждое из них является решением уравнения теплопроводности, как и их сумма. Далее, во внешности круга B_{r_0} решение g имеет нулевое начальное условие. Следовательно w при $t = 0$ совпадает с $w_0(\mathbf{x}) = \operatorname{curl} v_0(\mathbf{x})$. Тогда векторное поле можно получить с помощью закона Био-Савара

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} w(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{v}_\infty. \tag{5.1.22}$$

Этот закон восстанавливает векторное поле по функции ротора, заданной во всем $\mathbb{R}^2$, т.е. является решением задачи Коши для системы Гельмгольца (3.0.1), (3.0.2).

Это векторное поле является решением системы Стокса (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3), (5.1.5).

Действительно, поскольку $w = \operatorname{curl} \mathbf{v}$ есть решение уравнения теплопроводности, то

$$\operatorname{curl} (\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}) = 0.$$

Плоскость $\mathbb{R}^2$ односвязна, то $\partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}$ будет являться потенциальным полем, поскольку его ротор равен нулю. И тогда $\mathbf{v}$ будет решением (5.1.1). Далее, поскольку в $\mathbb{R}^2$ векторное поле однозначно восстанавливается по ротору, то из $\operatorname{curl}(0, \mathbf{x}) = \operatorname{curl} v_0(\mathbf{x})$ следует выполнение (5.1.3). Выполнение (5.1.5) следует из явного вида закона Био-Савара.

Найдем $w(t, \cdot)$ согласно Теореме 5.1.7, чтобы выполнялась оценка

$$\|w(t,\cdot)\|^2_{L_{2,2}(B_{r_0})} \le \frac{C\|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^N}.$$

Тогда в силу Леммы 3.5.2 функция $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(B_{r_0})} \le \frac{C\|w_0(\cdot)\|_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^{N/2}}.$$

Зафиксируем произвольное целое число $N \geq 2k$. Напомним, что $w_0(\cdot) = \operatorname{curl} \mathbf{v}_0(\cdot)$. Тогда приведенное выше неравенство с $w_0(\cdot) \in L_{2,N+9/2}$ влечет (5.1.9).

Обозначим $\gamma_{S_{r_0}}$ - непрерывный оператор следа, действующий из $\mathcal{J}(B_{r_0})$ в $H^{\frac{1}{2}}(S_{r_0})$:

$$\gamma_{S_{r_0}} : C\left(\mathbb{R}_+, \mathcal{J}(B_{r_0})\right) \to C\left(\mathbb{R}_+, H^{\frac{1}{2}}(S_{r_0})\right),$$
$$\gamma_{S_{r_0}} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}'), \mathbf{x}' \in S_{r_0}.$$

Окончательно получаем $\left(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}(t, \mathbf{x}')\right)$ будет решением (5.1.1)-(5.1.6), (5.1.9) с $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}') = \gamma_{S_{r_0}} \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$. Теорема доказана. □

5.1.5 Стабилизация скорости во внешней области. Завершение доказательства теоремы 5.1.1

Теперь мы построим граничное управление во внешней области Ω, которое стабилизирует решение к горизонтальному течению по закону (5.1.9). Для этого мы погрузим область Ω во внешность диска $B_{r_0} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \middle| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| > r_0\right\}$ с некоторой центральной точкой $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$. Точка $\mathbf{x}_0$ и радиус r_0 могут быть выбраны произвольно в предположении, что $\Omega \subset B_{r_0}$. С практической точки зрения представляется целесообразным выбирать $\mathbf{x}_0$ и r_0 исходя из критерия $r_0 \to \max$, $\Omega \subset B_{r_0}$.

Затем мы возьмем ротор от начального условия и продолжим $\operatorname{curl} \mathbf{v}_0(\cdot)$ из Ω в B_{r_0}. Мы сведем задачу стабилизации к той, которая была решена для внешности диска в предыдущем разделе. Для этого мы стабилизируем ротор $w(t, \mathbf{x})$ в B_{r_0}.

Замечание. Поскольку скорость восстанавливается по ротору по закону Био-Савара (т.е. путем решения задачи Коши для системы Гельмгольца), то система в вихревой форме становится эквивалентной системе Стокса в исходной форме, и решение уравнения теплопроводности соотносится с решением системы Стокса.

Без потери общности предположим, что $0 \notin \Omega$. Зафиксируем произвольный $r_0 > 0$ такой, что $B_{r_0} \subset \Omega$. Применим оператор ротора $w(t, \mathbf{x}) = \operatorname{curl} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}_1} v_2 - \partial_{\mathbf{x}_2} v_1$ к задаче (5.1.1)-(5.1.3) и получим задачу

$$\frac{\partial w(t, \mathbf{x})}{\partial t} - \Delta w = 0,$$
$$w(0, \mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}),$$

с начальной функцией $w_0(\mathbf{x}) = \operatorname{curl} \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$.

Продолжим функцию $w_0(\cdot) \in L_{2,N+9/2}(B_{r_0})$, заданную на Ω, до функции $\tilde{w}_0(\cdot) \in L_{2,N+9/2}(B_{r_0})$, определенной в B_{r_0}. Если w_0 имеет достаточную гладкость, то для получения гладких решений можно использовать теорему Уитни о продолжении в пространствах Соболева (см. [80]), но для $L_{2,N+9/2}(B_{r_0})$ достаточно продолжить начальную функцию нулем, и тогда

$$\|\tilde{w}_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})} \leq \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(\Omega)}.$$

С помощью теоремы 5.1.7 мы найдем решение $\tilde{w}(t, \cdot)$ уравнения теплопроводности во внешности диска с начальной функцией $\tilde{w}_0(\cdot)$, и которое удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{w}(t, \cdot)\|_{L_{2,2}(B_{r_0})} \leq \frac{C_1 \|\tilde{w}_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^N}.$$

Обозначим γ_Ω оператор сужения функций, заданных в B_{r_0} на область Ω. Тогда $w(t, \mathbf{x}) = \gamma_\Omega \tilde{w}(t, \mathbf{x})$ будет удовлетворять оценке

$$\|w(t, \cdot)\|_{L_{2,2}(\Omega)} \leq \|\tilde{w}(t, \cdot)\|_{L_{2,2}(B_{r_0})} \leq \frac{C_2 \|\tilde{w}_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(B_{r_0})}}{t^N}$$
$$\leq \frac{C_3 \|w_0(\cdot)\|^2_{L_{2,N+9/2}(\Omega)}}{t^N}.$$

Восстановим $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ по формуле (5.1.22). Поскольку поток $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ имеет нулевую циркуляцию, то будет выполнена оценка

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C \|w_0(\cdot)\|_{L_{2,N+9/2}(\Omega)}}{t^{N/2}}.$$

В итоге, $\big(\mathbf{v}(t,\mathbf{x}),\mathbf{u}(t,\mathbf{x}')\big)$ будет решением (5.1.1)-(5.1.6), (5.1.9) с граничным управлением $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}')=\gamma_{\partial\Omega}\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$, где $\gamma_{\partial\Omega}$ оператор следа, действующий из $\mathcal{J}(\Omega)$ в $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Теорема 5.1.1 доказана.

5.2 Стабилизация решения системы Навье-Стокса во внешней области

5.2.1 Постановка задачи стабилизации

Пусть $G\subset\mathbb{R}^2$ - ограниченная область с границей C^1. Во внешности этой области $\Omega=\mathbb{R}^2\backslash G$ рассматривается двумерная система уравнений Навье-Стокса

$$\partial_t\mathbf{v}(t,\mathbf{x})-\Delta\mathbf{v}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=\nabla p,$$
$$\mathrm{div}\mathbf{v}(t,\mathbf{x})=0. \tag{5.2.1}$$

Двумерное векторное поле представимо парой функций $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})=(v_1,v_2),\mathbf{x}\in\Omega$. Задано начальное распределение скоростей $\mathbf{v}_0(\cdot)$

$$\mathbf{v}(0,\mathbf{x})=\mathbf{v}_0(\mathbf{x}). \tag{5.2.2}$$

Управление решением происходит с границы области посредством неизвестной функции $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}')$:

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}')=\mathbf{u}(t,\mathbf{x}'),\mathbf{x}'\in\partial\Omega. \tag{5.2.3}$$

Требуется найти такое граничное управление $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}')$, чтобы решение $(\mathbf{u},\nabla p)$ внешней задачи (5.2.1)-(5.2.3) удовлетворяло условию стабилизации

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot)-\mathbf{v}_\infty\|_{L_q(\Omega)}\le\frac{C_q}{(t+1)^k}. \tag{5.2.4}$$

В качестве фазового пространства будем использовать L_2 с экспоненциальным весом:

$$L_{2,e}(\Omega)=L_2(\Omega,e^{\frac{|\mathbf{x}|^2}{4}})=\big\{f(\mathbf{x})\big|\|f\|^2_{L_{2,e}(\Omega)}=\int_\Omega|f(t,\mathbf{x})|^2e^{\frac{|\mathbf{x}|^2}{4}}d\mathbf{x}<\infty\big\}.$$

В дальнейшем также будут использоваться пространства $L_2(\Omega, \rho(\mathbf{x}))$ с различными весовыми функциями $\rho(\mathbf{x})$.

Определим аффинное пространство решений

$$\mathcal{J}^q(\Omega) = \{\mathbf{v}(\cdot) = \big(v_1(\cdot), v_2(\cdot)\big),\ \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty \in \big(W_q^1(\Omega)\big)^2,\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\},$$

и начальных данных

$$V_q^0(\Omega) = \{\mathbf{v}^0(\cdot) : \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) - \mathbf{v}_\infty \in \big(W_q^1(\Omega)\big)^2, \operatorname{curl} \mathbf{v}^0 \in L_{2,e}(\Omega),\ \operatorname{div} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = 0\},$$

где $q > 2$, W_q^1 - пространство Соболева функций, которые вместе с производными первого порядка принадлежат L_q. Для граничных функций будем использовать пространства Бесова $B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)$.

Сформулируем основную теорему о стабилизации

Теорема 5.2.1. *Для некоторого $\varepsilon > 0$ и произвольного $\mathbf{v}_0 \in V_q^0(\Omega)$, $q > 2$, удовлетворяющего $\|\operatorname{curl} \mathbf{v}_0\|_{L_{2,e}(\Omega)} < \varepsilon$, заданного во внешней области Ω с гладкой границей, существует граничное управление $\mathbf{u} = (u_1(t, \mathbf{x}'), u_2(t, \mathbf{x}'))) \in \big(L_\infty(\mathbb{R}_+; B_q^{1-1/q}(\partial\Omega))\big)^2$ такое, что решение задачи (5.2.1)-(5.2.3) $(\mathbf{v}, \nabla p) \in C\big(\mathbb{R}_+; \mathcal{J}^q(\Omega)\big) \times L_q(\Omega)$ удовлетворяет условию стабилизации (5.2.4).*

Схема стабилизации решения следующая. Мы построим оператор продолжения начального распределения скоростей $\mathbf{v}_0(\cdot)$ внутрь области Ω. Таким образом внешняя задача Дирихле (5.2.1) - (5.2.3) в области Ω будет сведена к задаче Коши во всем пространстве $\mathbb{R}^2$. Искомое управление $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}')$ будет находиться путем ограничения найденного решения задачи Коши на границу области $\partial\Omega$. При этом, оператор продолжения должен быть таким, чтобы решение задачи Коши с продолженным начальным условием удовлетворяло условию стабилизации (5.2.4).

5.2.2 Локальная теорема существования решения задачи Коши

Пусть $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ - решение задачи Коши (5.2.1) с начальными данными $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Тогда функция ротора $w(t,\mathbf{x}) = \operatorname{curl}\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ удовлетворяет одномерному уравнению:

$$\partial_t w(t,\mathbf{x}) - \Delta w + (\mathbf{v}, \nabla w) = 0 \tag{5.2.5}$$

с начальной функцией

$$w(0,\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \tag{5.2.6}$$

где $w_0(\mathbf{x}) = \operatorname{curl}\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$.

Векторное поле $\mathbf{v}(t,\mathbf{x})$ восстанавливается по $w(t,\mathbf{x})$ согласно закону Био-Савара:

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^\perp}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}w(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \mathbf{v}_\infty \tag{5.2.7}$$

В [71] доказана следующая

Лемма 5.2.2. *Для любых $s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $1 < p < 2 < q < \infty$, связанных соотношением $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ с некоторой $C > 0$ верно неравенство:*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty\|_{W^s_q(\mathbb{R}^2)} \le C\|w\|_{W^s_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Для $1 \le p < 2 \le \infty$, $\alpha \in (0,1)$, $\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, существует $C > 0$, что

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty\|_{L_\infty} \le C\|w\|^\alpha_{L_p}\|w\|^{1-\alpha}_{L_q}.$$

Для $p > 1$ справедлива оценка

$$\|\nabla\mathbf{v}\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \le C\|w\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}.$$

Сделаем замену переменных $(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ на масштабирующие переменные $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$:

$$\xi = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+t}},$$
$$\tau = \log(1+t), \tag{5.2.8}$$

и введем новую роторную функцию w^{sc} посредством формулы

$$w(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{1+t} w^{\text{sc}}\Big(\log(1+t), \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+t}}\Big). \tag{5.2.9}$$

Соответствующие векторные поля будут связаны соотношением

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \mathbf{v}^{\text{sc}}\Big(\log(1+t), \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+t}}\Big). \tag{5.2.10}$$

Тогда исходное уравнение (5.2.5) будет эквивалентно

$$\partial_\tau w^{\text{sc}}(\tau,\xi) = \Lambda w^{\text{sc}} - (\mathbf{v}^{\text{sc}}, \nabla) w^{\text{sc}}, \tag{5.2.11}$$

где $\mathbf{v}^{\text{sc}}$ определяется по функции ротора w^{sc} согласно формуле (5.2.7), а оператор Λ имеет следующий вид:

$$\Lambda w^{\text{sc}} = \Delta w^{\text{sc}} + \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla) w^{\text{sc}} + w^{\text{sc}}. \tag{5.2.12}$$

Начальное условие (5.2.6) при преобразовании (5.2.8) останется без изменений, и моменту времени $t = 0$ в новых переменных будет соответствовать $\tau = 0$:

$$w^{\text{sc}}(0,\xi) = w_0(\xi). \tag{5.2.13}$$

Для уравнения (5.2.11) будет доказана локальная теорема существования разрешающей полугруппы в $L_{2,e}$.

Замечание. Для удобства изложения в дальнейшем для новой функции $w^{\text{sc}}(\tau,\xi)$ мы будем использовать прежнее обозначение $w(\tau,\xi)$.

Лемма 5.2.3. *Пусть задано начальное условие $w_0 \in L_{2,e}$. Тогда решение (5.2.11) с начальным условием w_0 удовлетворяет априорной оценке*

$$\|w(\tau,\cdot)\|_{L_{2,e}} \le const(\tau) \|w_0\|_{L_{2,e}}, \tau > 0.$$

Доказательство. Домножим уравнение (5.2.11) на $w(\tau,\xi) e^{\frac{|\xi|^2}{4}}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\int_{\mathbb{R}^2} w^2(\tau,\xi) e^{\frac{|\xi|^2}{4}} d\xi = (\Lambda w, w) - \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{|\xi|^2}{4}} w(\mathbf{v}\cdot\nabla) w d\xi.$$

После элементарных упрощений квадратичная форма $(\Lambda w, w)$ примет следующий вид:

$$(\Lambda w, w) = -\|\nabla w\|^2_{L_{2,e}} + \|w\|^2_{L_{2,e}}.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение, порождаемое нормой $\|\cdot\|^2_{L_{2,e}}$.

Тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|w(\tau,\cdot)\|^2_{L_{2,e}} + \|\nabla w\|^2_{L_{2,e}} - \|w\|^2_{L_{2,e}} \le \|\mathbf{v}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\|\nabla w\|_{L_{2,e}}\|w\|_{L_{2,e}} \le$$
$$\varepsilon\|\nabla w\|^2_{L_{2,e}} + C(\varepsilon, \|\mathbf{v}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)})\|w\|^2_{L_{2,e}}.$$

Откуда при $\varepsilon < 1$ получаем неравенство, завершающее доказательство леммы:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|w(\tau,\cdot)\|^2_{L_{2,e}} \le \big(C(\varepsilon, \|\mathbf{v}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}) + 1\big)\|w\|^2_{L_{2,e}}.$$

Лемма доказана. □

Сформулируем теорему о неявной функции в той форме, которая нам понадобится для доказательства разрешимости уравнения (5.2.11).

Теорема 5.2.4. *Пусть $\Phi : \mathscr{H} \times \mathscr{L} \to \mathscr{H}$ - некоторое отображение гильбертовых пространств $\mathscr{H}, \mathscr{L}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. $\Phi(\hat{w}, \hat{w}_0) = 0$,$\hat{w} \in \mathscr{H}$, $\hat{w}_0 \in \mathscr{L}$.

2. Производные Фреше Φ'_w, Φ'_{w_0} равномерно ограничены в некоторой окрестности пары функций $(\hat{w}, \hat{w}_0)$.

3. $\Phi'_w(\hat{w}, \hat{w}_0)$ обратим.

4. Производные Φ'_w, Φ'_{w_0} удовлетворяют условию Липшица в той же окрестности:

$$\|\Phi'_w(w^1, w^1_0) - \Phi'_w(w^2, w^2_0)\|_{\mathscr{H}} + \|\Phi'_{w_0}(w^1, w^1_0) - \Phi'_{w_0}(w^2, w^2_0)\|_{\mathscr{H}} \le$$
$$C\|w^1 - w^2\|_{\mathscr{H}} + \|w^1_0 - w^2_0\|_{\mathscr{L}}.$$

Тогда уравнение $\Phi(w, w_0) = 0$ однозначно разрешимо относительно w в некоторой области $\mathscr{U}_\delta = \{(w, w_0) \in \mathscr{H} \times \mathscr{L} : \|w - \hat{w}\|_{\mathscr{H}} + \|w_0 - \hat{w}_0\|_{\mathscr{L}} < \delta\}$. Решение w непрерывно зависит от w_0, и отображение $S : w_0 \to w$

дифференцируемо по Фреше. Производная S'_{w_0} равномерно ограничена по w_0, и удовлетворяет условию Липшица.

Теперь мы можем доказать локальную теорему существования и единственности решения задачи Коши для модифицированного уравнения (5.2.11).

Теорема 5.2.5. *Для произвольного $T > 0$ найдется достаточно малый $\varepsilon > 0$ что для $w_0(\xi) \in L_{2,e}, \|w_0\| < \varepsilon$ на интервале $(0,T)$ существует единственное решение $w \in C\big((0,T); L_{2,e}\big)$ уравнения (5.2.11) с начальным условием w_0. Более того, соответствующая разрешающая полугруппа $S(\tau, w(\cdot)) : L_{2,e} \to L_{2,e}$*

$$S(\tau, w_0(\cdot)) = w(\tau, \xi)$$

при фиксированном τ является дифференцируемой по Фреше по w. Производная $S'_w(\tau, w(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $C > 0$:

$$\|S'_w(\tau, w_1(\cdot)) - S'_w(\tau, w_2(\cdot))\| \le C\|w_1(\cdot) - w_2(\cdot)\|_{L_{2,e}}.$$

Доказательство. Положим $\mathscr{H} = L_2(0,T; L_{2,e})$, $\mathscr{L} = L_{2,e}$. Рассмотрим следующее уравнение в вариациях

$$\partial_\tau w = \Lambda w + h, h \in \mathscr{H} \tag{5.2.14}$$

с начальным условием

$$w(0,\xi) = w_0(\xi).$$

Пусть $Q : \mathscr{H} \times \mathscr{L} \to \mathscr{H}$ - линейный оператор, который сопоставляет паре (h, w_0) решение линейного уравнения в вариациях с правой частью h и начальным условием w_0. Разрешимость линейной задачи в указанных пространствах без труда доказывается при помощи оценок, аналогичных тем, что мы вывели выше. Поэтому оператор Q является непрерывным.

Уравнение (5.2.11) с начальным условием (5.2.13) эквивалентно соотношению

$$w = Q(0, w_0) + Q\big((\mathbf{v}, \nabla w), 0\big). \tag{5.2.15}$$

Определим оператор

$$\Phi(w, w_0) = Q(0, w_0) + Q\big((\mathbf{v}, \nabla w), 0\big) - w.$$

Лемма 5.2.6. *Отображение $\Phi(w, w_0)$ дифференцируемо по Фреше в нуле в пространстве $\mathscr{H}\times\mathscr{L}$, и его частные производные удовлетворяют условию Липшица:*

$$\|\Phi'_w(w^1, w_0^1) - \Phi'_w(w^2, w_0^2)\|^2 + \|\Phi'_{w_0}(w^1, w_0^1) - \Phi'_{w_0}(w^2, w_0^2)\|^2 \le C\|w^1 - w^2\|^2_{\mathscr{H}} + \|w_0^1 - w_0^2\|^2_{\mathscr{L}}.$$

Доказательство. Заметим, что частная производная Φ'_{w_0} тем более удовлетворяет условию Липшица, коль скоро Φ линейна по w_0. Поэтому утверждение теоремы достаточно доказать только для $Q\big((\mathbf{v}, \nabla w), 0\big)$.

Дифференцируемость по Фреше $Q\big((\mathbf{v}, \nabla w), 0\big)$ достаточно доказать для $w = 0$. Покажем, что решение w линейного уравнения (5.2.14) с правой частью $(\tilde{\mathbf{v}}, \nabla)\tilde{w}$ есть $o(\|\tilde{w}\|_{L_2(0,T;L_{2,e})})$. Домножим (5.2.14) на $w(\tau, \xi)e^{\frac{|\xi|^2}{4}}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$. Повторяя выкладки как при доказательстве теоремы 5.2.3, получим неравенство

$$\|w\|_{L_{2,e}} \le C\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\|\tilde{w}\|_{L_{2,e}} \le C\|\tilde{w}\|^2_{L_{2,e}},$$

откуда получаем $Q'_w(0, 0) = 0$. Тогда оператор $\Phi'_w(0, 0) = -I$, и, следовательно, обратим.

Докажем выполнение условия Липшица для производных. Пусть $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2, W(\tau, \xi)$ - произвольные функции ротора из $L_2(0, T; L_{2,e})$, а $\tilde{\mathbf{v}}_1$, $\tilde{\mathbf{v}}_2, V(\tau, \xi)$ - соответствующие векторные поля. Тогда, опять, по аналогии с доказатель-

ством теоремы 5.2.3 будем иметь оценку:

$$\left\| \Big[Q'_w\big((\tilde{\mathbf{v}}_1, \nabla)\tilde{w}_1\big) - Q'_w\big((\tilde{\mathbf{v}}_2, \nabla)\tilde{w}_2\big) \Big] W(\tau, \xi) \right\| =$$
$$\left\| \Big[Q\big((\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2, \nabla)W + (V, \nabla)(\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)\big) \Big] \right\| \leq$$
$$C\|\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2\|_{L_2(0,T;L_{2,e})} \|W\|_{L_2(0,T;L_{2,e})}.$$

Таким образом, Φ'_w Φ'_{w_0} являются липшицевыми операторами. Лемма доказана. □

Согласно предыдущей лемме к уравнению (5.2.15) применима теорема о неявной функции, из которой следуют все утверждения доказываемой теоремы.

□

Замечание. Хотя для двумерного уравнения Навье-Стокса справедливы нелокальные теоремы существования и единственности, мы ограничились только локальным случаем. Это связано с тем, что дальнейшие построения инвариантных многообразий (параграф 5.2.3) будут возможны только в малой окрестности нуля. Также отметим, что данное решение получилось локальным не только по фазовой переменной, но и по времени T. Но поскольку в следующих параграфах мы будем решать задачу стабилизации, в которой величина $\|w(\tau, \cdot)\|$ будет стремится к нулю, то решение задачи Коши уже можно будет продолжить на всю временную ось $\mathbb{R}_+$.

5.2.3 Инвариантные подпространства и многообразия

В этом параграфе на основе спектра оператора Λ будут построены инвариантные многообразия для уравнения (5.2.11).

Лемма 5.2.7. *Спектр оператора Λ является дискретным и состоит из неположительных полуцелых чисел*

$$\sigma(\Lambda) = \{-\frac{k}{2}, k = 0, 1, 2, ...\}.$$

Собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_k = -\frac{k}{2}$ *имеет размерность* $k+1$. *Собственными функциями* Λ *являются функции Эрмита* $\psi_\alpha(\xi)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, *которые образуют ортонормированный базис в* $L_{2,e}$:

$$\psi_\alpha(\xi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{2^{|\alpha|}}{\alpha!}}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = k, \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!.$$

Доказательство. В работе Галлай и Уэйна [71] спектр оператора Λ был исследован в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2, (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}})$. В частности, было показано, что в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > \frac{1}{2} - \frac{m}{2}$ спектр оператора Λ состоит только из полуцелых чисел $\frac{k}{2}, k = 0, 1, 2, ...$ А полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda \leq \frac{1}{2} - \frac{m}{2}$ целиком входит в непрерывную часть спектра Λ.

Собственным значениям точек дискретного спектра как раз отвечают функции Эрмита, которые также являются собственными значениями оператора в пространстве $L_{2,e}$.

Покажем, что любое $\lambda \neq -\frac{k}{2}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(\Lambda)$. Действительно, при любом $m > 1 - 2\operatorname{Re}\lambda$ оператор $\Lambda - \lambda I$ будет обратим в $L_2(\mathbb{R}^2, (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}})$. Поскольку $L_{2,e}$ непрерывно вложено в $L_2(\mathbb{R}^2, (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}})$, то в $L_{2,e}$ определен обратный оператор $(\Lambda - \lambda I)^{-1}$. Но, с другой стороны, Λ является генератором сильно непрерывной полугруппы в $L_{2,e}$. Следовательно, резольвента $R(\lambda, \Lambda) = (\Lambda - \lambda I)^{-1}$ является ограниченным оператором. Лемма доказана. □

Функции Эрмита являются базисом Фишера-Риса в пространстве $L_{2,e}$. В частности, разложение резольвенты $R(\Lambda, \lambda)$ по этому базису дается сходящимся рядом:

$$R(\Lambda, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(\psi_\alpha, \cdot)}{\lambda - \frac{k}{2}} \psi_\alpha$$

Оператор Λ с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$ является существенно-самосопряженным ($\Lambda^* = \Lambda^{**}$) с ортонормированным базисом, состоящим из собственных функций оператора.

Лемма 5.2.8. *Для* $\lambda \in \rho(\Lambda)$ *оператор* $R(\Lambda,\lambda) = (\Lambda - \lambda I)^{-1} : L_{2,e} \to H^1(\mathbb{R}^2, e^{\frac{|\xi|^2}{4}})$ *ограничен.*

Доказательство. Резольвента удовлетворяет следующему тождеству:

$$R(\lambda,\Lambda) - R(\zeta,\Lambda) = (\lambda - \zeta)R(\lambda,\Lambda)R(\zeta,\Lambda).$$

Из этого тождества следует, что лемму достаточно доказать хотя бы для одного $\lambda \in \rho(\Lambda)$. Возьмем достаточно большое вещественное $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее уравнение с правой частью $f(\xi) \in L_{2,e}$:

$$(\Lambda - \lambda I)w(\xi) = f(\xi). \tag{5.2.16}$$

Домножим это уравнение на $e^{\frac{|\xi|^2}{4}}w(\xi)$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2$. Тогда будем иметь

$$-\|\nabla w\|^2_{L_{2,e}} + (1-\lambda)\|w\|^2_{L_{2,e}} = \int_{\mathbb{R}^2} fwe^{\frac{|\xi|^2}{4}}d\xi.$$

Поскольку резольвента $R(\Lambda,\lambda)$ ограничена в $L_{2,e}$, то $\|w\|_{L_{2,e}} \le C\|f\|_{L_{2,e}}$. Тогда из последнего тождества получим следующее неравенство с некоторой константой $C = C(\lambda) > 0$:

$$\|\nabla w\|^2_{L_{2,e}} + \|w\|^2_{L_{2,e}} \le C\|f\|^2_{L_{2,e}} \tag{5.2.17}$$

Лемма доказана. □

Чтобы построить локальные инвариантные многообразия, мы вместо (5.2.11) рассмотрим модифицированное уравнение

$$\frac{\partial w(\tau,\xi)}{\partial \tau} = \Lambda w + F_\varepsilon(w) \tag{5.2.18}$$

с нелинейной частью

$$F_\varepsilon(w) = -(\mathbf{v}, \nabla w)\cdot\chi_\varepsilon(\|w\|).$$

Здесь χ_ε - гладкая срезающая функция, равная 1 на интервале $(0,\varepsilon)$, и равная нулю на $(2\varepsilon,\infty)$, $\mathbf{v}$ - векторное поле, восстанавливаемое по роторной функции w. При малых по норме w оператор $F_\varepsilon(w)$ совпадает с

первоначальным оператором $-(\mathbf{v}, \nabla w)$. Поэтому если решения уравнения (5.2.11) с нелинейными членами $-(\mathbf{v}, \nabla w)$, F_ε остаются малы по норме, то они совпадают друг с другом.

Разрешающая полугруппа для уравнения (5.2.18) может быть представлена как

$$S_\varepsilon(\tau, w) = e^{\Lambda\tau} w + \Phi^\varepsilon(\tau, w), \tag{5.2.19}$$

где $\Phi^\varepsilon(\tau, w)$ - некоторый нелинейный оператор. Существование данной полугруппы дается следующей теоремой

Теорема 5.2.9. *Для произвольного $T > 0$ найдется достаточно малое $\delta_0 > 0$, что для произвольной функции $w_0(\xi) \in L_{2,e}, \|w_0\| < \delta_0$ на интервале $(0, T)$ существует единственное решение $w^\varepsilon \in C\big(0, T; L_{2,e}\big)$ уравнения (5.2.18) с начальным условием $w^\varepsilon(0, \cdot) = w_0(\cdot)$. Соответствующая разрешающая полугруппа $S_\varepsilon(\tau, w(\cdot)) : L_{2,e} \to L_{2,e}$*

$$S_\varepsilon(\tau, w_0(\cdot)) = w^\varepsilon(\tau, \xi)$$

является гладкой полугруппой класса C^1, причем ее производная удовлетворяет условию Липшица. При этом функция $\Phi^\varepsilon(\tau, w)$ при любом фиксированном τ также является отображением класса C^1 с липшицевой производной, удовлетворяющей

$$\Phi^\varepsilon(\tau, 0) = \Phi'^\varepsilon_w(\tau, 0) = 0, \tag{5.2.20}$$

$$\|\Phi'^\varepsilon_w(\tau, w)\| \le \gamma, \tag{5.2.21}$$

где $\gamma \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Разрешимость уравнения (5.2.18), дифференцируемость по Фреше, как и выполнение условия Липшица доказываются в точности так же, как при доказательстве теоремы 5.2.5. При этом, все оценки, доказанные для уравнения (5.2.11), остаются справедливыми и для нашего уравнения. Очевидно, что $e^{\Lambda\tau} w$ является главной линейной частью оператора $S_\varepsilon(\tau, w)$, откуда следует (5.2.20).

Докажем оценку (5.2.21). Возьмем произвольное $\gamma > 0$. Производная $\Phi'^{\varepsilon}_{w}(\tau, w)$ непрерывна по w и равна нулю при $w = 0$. Тогда найдется $\rho > 0$ что при $\|w\| < \rho$ будет выполнено $\|\Phi'^{\varepsilon}(\tau, w)\| < \gamma$ равномерно по ε. В то же время найдется настолько малый параметр $\varepsilon > 0$, что при $\|w\| \geq \rho$ полугруппа $S_\varepsilon(\tau, w)$ станет линейной и будет задаваться формулой $S_\varepsilon(\tau, w) = e^{\Lambda\tau}w$. Для таких w очевидно $\Phi'^{\varepsilon}(\tau, w) = 0$, и тем самым оценка (5.2.21) доказана. □

Дальнейшее изложение предварим некоторыми сведениями из теории инвариантных многообразий, адаптированными для нашей задачи. Более подробно эта теория изложена в книге Бабина, Вишика [2].

Пусть в некотором гильбертовом пространстве E задано отображение

$$Sw = Aw + \Phi(w),$$

где A - линейный оператор, а Φ - малый по норме оператор. Предположим, что A обладает двумя инвариантными многообразиями E_+ и E_-, $E_+ \cap E_- = \{0\}$, $E = E_+ + E_-$, $LE_+ \subset E_+$,$LE_- \subset E_-$. Операторы P_+, P_- проектируют E на E_+ и E_- соответственно. Сужение оператора A на инвариантные подпространства E_+, E_- обозначим через A_+, A_-. Также предположим, что выполнены следующие условия:

Условие 1. Существуют $r \in (0, 1), \varepsilon_+, \varepsilon_- > 0$, что

$$\|A_-\| \leq r(1 - \varepsilon_-), \|A_+^{-1}\| \leq \frac{1}{r}(1 - \varepsilon_+).$$

Условие 2. $\Phi(0) = \Phi'_w(0) = 0$, и существует достаточно малое число γ, что $\|\Phi'_w(w)\| \leq \gamma$.

Условие 3. $\|\Phi'_w(w)\|$ удовлетворяет условию Липшица при $\|w_1 - w_2\| < \delta, \delta > 0$:

$$\|\Phi'_w(w_1) - \Phi'_w(w_2)\| \leq L\|w_1 - w_2\|.$$

Определим локальное инвариантное многообразие M_-, заданное в некоторой окрестности нуля $\mathscr{U} \subset E$ в виде графика функции $g(w)$:

$$M_- = \{w \in E : w = w_- + g(w_-), w_- \in E_- \cap \mathscr{U}\}. \tag{5.2.22}$$

Теорема 5.2.10. *В предположении, что выполнены условия 1,2,3, и число γ в условии 2 достаточно мало, существует многообразие M_- вида (5.2.22) с функцией g класса $C^{1+s_0}, s_0 > 0$, которое инвариантно относительно S: $SM_- \subset M_-$. Данное многообразие M_- является касательным к E_- в нуле, т.е. $g'(0) = 0$. При этом справедлива оценка*

$$\|S^\tau w\| \leq r^\tau \|w\|, \tau > 0.$$

Данная теорема доказана в упомянутой выше книге Бабина, Вишика [2], которую мы перенесем на наш случай. В качестве пространства E возьмем $L_{2,e}$. Зафиксируем произвольное $\sigma_0 > 0$ и рассмотрим проектор на собственные функции Λ, собственные значения которых больше $-\sigma_0$:

$$P_+ = \sum_{|\alpha|<2\sigma_0} (\cdot, \psi_\alpha).$$

Соответственно обозначим

$$P_- = I - P_+, E_+ = P_+ E, E_- = P_- E.$$

Очевидно, что пространства E_+, E_- инвариантны относительно действия полугруппы $e^{\tau\Lambda}$.

Зададимся достаточно большим моментом времени $\tau > 0$ и введем следующие операторы:

$$S(w) = S_\varepsilon(\tau, w),$$
$$Aw = e^{\Lambda\tau} w,$$
$$\Phi(w) = \Phi^\varepsilon(\tau, w).$$

Тогда в новых обозначениях эволюционное уравнение (5.2.19) запишется в виде

$$S(w) = Aw + \Phi(w).$$

Лемма 5.2.11. *Существует достаточно большое $\tau > 0$, что операторы $A_+ = AE_+$ и $A_- = AE_-$ удовлетворяют условию 1.*

Доказательство. Поскольку на E_+ спектр оператора Λ ограничен $-\sigma_0$, то

$$\|A_-\| \leq C_1 e^{-\sigma_0 \tau}.$$

Аналогично для A_+ с некоторой константой $C_2 > 0$ и достаточно малым параметром $\varepsilon > 0$ будет выполняться неравенство

$$\|A_+^{-1}\| \leq C_2 e^{(\sigma_0+\varepsilon)\tau}.$$

Тогда нетрудно найти при некотором $\tau > 0$ такие $r = \max(C_1, C_2)e^{-(\sigma_0-\varepsilon/2)\tau}, \varepsilon_+, \varepsilon_- > 0$, что будет выполняться условие 1. Лемма доказана. □

Сформулируем основную теорему этого параграфа:

Теорема 5.2.12. *Для произвольного $\sigma_0 > 0$ в достаточно малой окрестности нуля существует многообразие вида*

$$M_- = \{w \in L_{2,e} : w = w_- + g(w_-), w_- \in E_- \cap \mathscr{O}_\varepsilon\}, \tag{5.2.23}$$

где $g : E_- \to E_+$ некоторая функция класса $C^{1+\delta}$, $\mathscr{O}_\varepsilon = \{w \in L_{2,e}, \|w\|_{L_{2,e}} < \varepsilon\}$. Многообразие M_- инвариантно относительно действия полугруппы $S(\tau, w_0)$ и является устойчивым, т.е. для $w_0 \in M_-$ выполняется неравенство

$$\|S(\tau, w_0)\|_{L_{2,e}} \leq C\|w_0\|_{L_{2,e}} e^{-\sigma_0 \tau}, \tag{5.2.24}$$

где константа $C > 0$ не зависит от w_0.

Доказательство. Как мы показали, условия 1,2,3 теоремы 5.2.10 применительно к полугруппе $S_\varepsilon(\tau, w_0)$ выполнены. Оценка (5.2.24) следует из соответствующей оценки в теореме 5.2.10. Из теоремы 5.2.9 для малых начальных данных $\|w_0\| < \delta_0$ следует существование полгруппы $S_\varepsilon(\tau, w)$ только на интервале $(0, T)$. Но поскольку $w_0 \in M_-$, то из оценки (5.2.24) следует возможность продолжения решения для всех $\tau \in \mathbb{R}_+$. За счет выбора малой окрестности $\mathscr{O}_\varepsilon$ траектории $S(\tau, w_0)$ и $S_\varepsilon(\tau, w_0)$ будут совпадать. Теорема доказана. □

5.2.4 Стабилизация решения. Граничное управление

После нахождения устойчивых инвариантных многообразий для задачи Коши осталось построить оператор продолжения начальных функций, заданных в Ω, до функций, определенных во всем $\mathbb{R}^2$. Причем продолженная функция должна принадлежать инвариантному многообразию M_-. Тогда искомое граничное управление $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ в (5.2.3) можно будет найти как ограничение решения задачи Коши с продолженным начальным условием на границу $\partial\Omega$.

Предыдущая теорема, как и все результаты, полученные в параграфах 5.2.2-5.2.3, были справедливы для функций $\mathbf{v}^{sc}, w^{sc}$, заданных формулами (5.2.10), (5.2.9) в масштабирующих переменных (τ, ξ). В этом параграфе мы вернемся к первоначальному векторному полю $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ с роторной функцией $w(t, \mathbf{x})$, для которой и была поставлена внешняя задача Дирихле (5.2.1)-(5.2.3).

Теорема 5.2.13. *Пусть M_- - устойчивое инвариантное многообразие, определенное в окрестности нуля. Тогда в некоторой, возможно меньшей, окрестности в пространстве $L_{2,e}(\Omega)$ существует непрерывный оператор продолжения из $L_{2,e}(\Omega)$ в $L_{2,e}(\mathbb{R}^2)$, образ которого лежит в M_-.*

Доказательство. Напомним, Ω является внешностью односвязной ограниченной области G. Возьмем произвольное векторное поле $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, у которого ротор $w_0 = \operatorname{curl} \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ достаточно мал: $\|w_0(\mathbf{x})\|_{L_{2,e}(\Omega)} < \delta$. Для функции $w(0,\mathbf{x})$ построим продолжение $\tilde{w}_0$ внутрь области, положив в G $\tilde{w}_0$ равным нулю.

$$\tilde{w}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} w_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{x} \in G. \end{cases}$$

Замечание. Продолжение $\tilde{w}_0$ можно сделать более гладким, нежели оно определено выше. Но поскольку нашим фазовым пространством является $L_2(\Omega, e^{\frac{|\mathbf{x}|^2}{4}})$, то такое негладкое продолжение вполне допустимо.

Пусть $\chi(\mathbf{x})$ - неотрицательная срезающая функция, носитель которой не пуст и сосредоточен внутри области G. Продолжение будем строить в следующем виде:

$$w_0^{ext} = \tilde{w}_0 + \chi(\mathbf{x}) \sum_{|\alpha|<2\sigma_0} c_\alpha \psi_\alpha. \tag{5.2.25}$$

Условие $w_0^{ext}(\mathbf{x}) \in M_-$ эквивалентно

$$g(P_- w_0^{ext}) = P_+(w_0^{ext}),$$

где

$$P_- = I - P_+.$$

Поскольку $\mathrm{I}m\ g \subset E_+$, то $g(P_- w_0^{ext})$ можно разложить по базису E_+:

$$g(P_- w_0^{ext}) = \sum_{|\alpha|<2\sigma_0} g_\alpha(P_- w_0^{ext})\psi_\alpha.$$

Поэтому w_0^{ext} должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\sum_{|\alpha|<2\sigma_0} g_\alpha(P_- w_0^{ext})\psi_\alpha = \sum_{|\alpha|<2\sigma_0} (w_0^{ext}, \psi_\alpha)\phi_k.$$

Т.к. функции $\{\psi_\alpha\}_{|\alpha|<2\sigma_0}$ линейно независимы, то последнее равенство эквивалентно системе уравнений

$$(w_0^{ext}, \psi_\alpha)_{L_{2,e}} = g_\alpha(P_- w_0^{ext}),\ |\alpha| < 2\sigma_0.$$

Обозначим через n количество мультииндексов α с условием $|\alpha| < 2\sigma_0$ и перенумеруем собственные функции $\{\psi_\alpha\}_{|\alpha|<2\sigma_0}$ через систему $\{\psi_i\}_{i=1}^n$. Также перенумеруем $\{g_\alpha\}$ через $\{g_i\}$.

Запишем полученную выше систему из n уравнений в матричном представлении с учетом формулы продолжения (5.2.25):

$$\vec{e} + A\vec{c} = \vec{g}\big(\tilde{w}_0 + \chi(\vec{c}, \vec{\psi}) - (\vec{\psi}, \vec{e} + A\vec{c})\big),$$

где

$$A = \|a_{ij}\|_{i=1..n, j=1..n}, a_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} \chi(\xi)\psi_i(\xi)\psi_j(\xi)d\xi,$$
$$\vec{e} = \{e_i\}_{i=1..n}, e_i = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{w}_0(\xi)\psi_i(\xi)d\xi,$$
$$\vec{c} = \{c_i\}_{i=1..n}, \vec{g} = \{g_i\}_{i=1..n}, \vec{\psi} = \{\psi_i\}_{i=1..n}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$P_- w_0^{ext} = w_0^{ext} - P_+ w_0^{ext} = \tilde{w}_0 + \chi(\vec{c}, \vec{\psi}) -$$
$$\sum_{i=1}^n \left(\tilde{w}_0 + \chi(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^n c_n \psi_n, \psi_i \right) \psi_i = \tilde{w}_0 + \chi(\vec{c}, \vec{\psi}) - (\vec{\psi}, \vec{e} + A\vec{c}).$$

Поскольку функции Эрмита $\{\psi_i\}$ линейно независимы на произвольной непустой подобласти G, то матрица A является положительно определенной, и поэтому обратима:

$$(A\eta, \eta) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_i\eta_j = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{i=1}^n \sqrt{\chi(\xi)}\psi_i\eta_i \right|^2 d\xi > 0, \vec{\eta} \neq 0.$$

Пусть $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - конечномерный оператор, определяемый равенством

$$\Phi(\vec{c}) = A^{-1}\vec{g}\big(\tilde{w}_0 + \chi(\vec{c}, \vec{\psi}) - (\vec{\psi}, \vec{e} + A\vec{c})\big) - A^{-1}\vec{e}.$$

Очевидно, $\|\tilde{w}_0+\chi(\vec{c},\vec{\psi})-(\vec{\psi},\vec{e}+A\vec{c})\|_{L_{2,e}} \to 0$ при $\|\tilde{w}_0\|^2_{L_{2,e}(\mathbb{R}^2)}+\|\vec{c}\|^2_{\mathbb{R}^2} \to 0$. Поскольку, $g'(0)=0$, и, соответственно, $\|\vec{g}'(w)\|_{\mathbb{R}^2} \le \varepsilon$ в достаточно малой окрестности нуля, то из теоремы о неявной функции следует, что уравнение

$$\Phi(\vec{c}) = \vec{c}$$

имеет единственное решение. Таким образом, построено продолжение ротора $w_0(\mathbf{x})$ внутрь области G, которое лежит на многообразии M_-. Нетрудно показать, что $w_0^{ext}(\mathbf{x})$ непрерывно зависит от $w_0(\mathbf{x})$. Соответствующее векторное поле $\mathbf{v}_0^{ext}(\mathbf{x})$ получается при помощи закона Био-Савара (5.2.7). Теорема доказана. □

Перейдем к доказательству основной теоремы о стабилизации, сформулированной в параграфе 5.2.1.

Пусть задано начальное векторное поле $\mathbf{v}_0$, и $w_0^{ext} \in M_-$ есть продолжение $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0$, определенное уже во всем $\mathbb{R}^2$. Решение задачи Коши (5.2.11) с начальным условием w_0^{ext} обозначим через $w^{sc}(\tau,\xi)$. Зададимся произвольным $\sigma_0 > 0$. Тогда

$$\|w^{sc}(\tau,\xi)\|_{L_{2,e}} \le C\|w_0^{ext}\|_{L_{2,e}} e^{-\sigma_0\tau}.$$

Вложение $L_{2,e}(\mathbb{R}^2) \subset L_p(\mathbb{R}^2)$ для $p \in (1,2)$ непрерывно. Тогда

$$\|w^{sc}(\tau,\cdot)\|_{L_p} \le C\|w^{sc}(\tau,\cdot)\|_{L_{2,e}} \le Ce^{-\sigma_0\tau}.$$

Напомним, что исходная вихревая функция в переменных $(t,\mathbf{x})$ определяется как

$$w(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{1+t} w^{\mathrm{sc}}\Big(\log(1+t), \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+t}}\Big).$$

Тогда

$$\|w(t,\cdot)\|_{L_p} = \frac{1}{1+t}\left\|w^{\mathrm{sc}}\Big(\log(1+t), \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+t}}\Big)\right\|_{L_p} =$$
$$(1+t)^{-1+1/p}\|w^{\mathrm{sc}}(\log(1+t),\cdot)\|_{L_p} \le \frac{C}{(1+t)^{\sigma_0+1-1/p}}.$$

Тогда из Леммы 5.2.2 с новой константой $C > 0$ будем иметь

$$\|\mathbf{v}(t,\cdot) - \mathbf{v}_\infty\|_{L_q} \le \frac{C}{(1+t)^{\sigma_0+1-1/p}} = \frac{C}{(1+t)^{\sigma_0+1/2-1/q}}.$$

Таким образом выполнено условие стабилизации (5.2.4) с $k = \sigma_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$, и, следовательно, $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty \in L_\infty\big(\mathbb{R}^2, L_q(\Omega)\big)$. Из неравенства $\|\nabla \mathbf{v}\|_{L_q(\Omega)} \le C\|w\|_{L_q(\Omega)}$, справедливого для $q > 2$ следует, что $\nabla \mathbf{v} \in L_\infty\big(\mathbb{R}^2, L_q(\Omega)\big)$. Тогда для $\mathbf{v}$ определен оператор $\gamma_{\partial\Omega}$, который сужает функции, заданные во всем $\mathbb{R}^2$ на границу $\partial\Omega$:

$$\gamma_\Omega : L_\infty\big(\mathbb{R}_+, W_q^1(\mathbb{R}^2)\big) \to L_\infty\big(\mathbb{R}_+, B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)\big), \gamma_\Omega \mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{v}(t,\mathbf{x}'), \mathbf{x}' \in \partial\Omega, \tag{5.2.26}$$

где $B_q^{1-1/q}(\partial\Omega)$ есть пространство Бесова следов функций из $W_q^1(\mathbb{R}^2)$.

В итоге, $\big(\mathbf{v}(t,\mathbf{x}), \mathbf{u}(t,\mathbf{x}')\big)$ будет искомым решением задачи стабилизации (5.2.1)-(5.2.4), где управление $\mathbf{u}$ находится по формуле $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}') = \gamma_\Omega \mathbf{v}(t,\mathbf{x})$. Теорема 5.2.1 полностью доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования доказали практическую значимость вырожденных преобразований типа Фурье, порождаемых третьей краевой задачей. Вырожденное преобразование Вебера доказало свою актуальность, найдя применение в решении задачи Стокса. Спектральная структура преобразования дала новую интерпретацию парадокса Стокса. Равенство Планшереля-Парсеваля дало новые оценки вихревой полугруппы Стокса, которые нашли применение в нелинейных задачах.

Также исследованием доказано, что принцип ортогональности является актуальным и для внешних областей и течений с бесконечной энергией. Проведенное исследование задачи Ходжа-Гельмгольца (задача дивергенция-ротор) восстановления скорости по ротору показало применимость принципа ортогональности ротора гармоническим функциям и для внешних областей с ненулевым набегающим потоком. При этом в отсутствии циркуляции на бесконечности получаемое решение допускает оценки векторного поля в L_2.

Проведенное исследование показало возможность постановки в явной форме граничного условия для ротора без привлечения дополнительных функций (тока, скорости) в линейных плоских задачах гидродинамики. Дальнейшее исследование показало возможность нахождения аналогичного граничного условия в нелинейных задачах гидродинамики. Подход к граничному условию в нелинейных задачах как к *псевдо-управлению на инвариантное многообразие* показал свою эффективность в построении граничного условия.

Математическое моделирование показало реализуемость предложенного подхода решения граничной задачи для вихревого уравнения с уменьшением количества неизвестных разрешаемых функций с трех до одной функции вихря.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Дальнейшие исследования могут проходить в следующих направлениях:

1. Исследование вырожденных преобразований типа Фурье, порождаемых третьей краевой задачей для операторов Δ_k с потенциалом.
2. Исследование разрешимости задачи дивергенция-ротор в трехмерной внешней области с условием прилипания.
3. Вывод принципа ортогональности для вихревой функции в трехмерной внешней области.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — элемент $\mathbb{R}^2$.

$z = x_1 + ix_2$ — комплексные координаты на плоскости.

$z = re^{i\varphi}$ — полярные координаты на комплексной плоскости.

$L_p(E; r)$ — пространство интегрируемых функций, заданных на $E \subset \mathbb{R}_+$ с конечной нормой $\|f\|^p_{L_p(E;r)} = \int\limits_E |f(r)|^p r \,\mathrm{d}r$.

$L_p(E; \lambda)$ — пространство интегрируемых функций, заданных на $E \subset \mathbb{R}_+$ с конечной нормой $\|f\|^p_{L_p(E;\lambda)} = \int\limits_E |f(\lambda)|^p \lambda \,\mathrm{d}\lambda$.

$L_{2,N}(E) = \{f(\mathbf{x}) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(E)} = \int_E |f(\mathbf{x})|^2 (1 + |\mathbf{x}|^2)^N \mathrm{d}\mathbf{x} < \infty\}$

$L_{2,N}(E; r) = \{f(r) : \|f(\cdot)\|^2_{L_{2,N}(E;r)} = \int_E |f(r)|^2 (1 + r^2)^N r dr < \infty\},\ E \subset \mathbb{R}$,

$\mathbf{v}$ — вектор скорости, задаваемый в декартовых (v_1, v_2) и полярных координатах (v_r, v_φ).

$\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе области.

(v_r, v_φ) — радиальная и тангенциальная составляющая скорости $\mathbf{v}$.

$B_{r_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,\ |\mathbf{x}| > r_0\},\ r_0 > 0$ внешность круга радиуса r_0 на плоскости.

$\mathbf{x}^\perp = (-x_2, x_1)$ — перпендикуляр к $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

$\nabla_{\mathbf{x}} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ — градиент.

$\nabla^\perp_{\mathbf{x}} = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ — орто-градиент.

$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} v_1 + \partial_{x_2} v_2$ — дивергенция.

$\operatorname{curl} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$ — ротор.

$w_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} w_k(r, \varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi$. — k-й коэффициент Фурье

$(v_{r,k}, v_{\varphi,k})$ — k-й коэффициент Фурье вектора скорости (v_r, v_φ).

$\Delta f(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярных координатах.

$\Delta_k f_k(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_k}{dr} \right) - \frac{k^2}{r^2} f_k(r)$ — k-й коэффициент Фурье оператора Лапласа в полярных координатах.

$\mathbf{v}^{\mathbb{C}} = v_1 + iv_2$ — комплексификация вектора $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

$J_k(z)$ — функции Бесселя 1-го рода.

$Y_k(z)$ — функции Бесселя 2-го рода.

$I_k(z)$ — модифицированные функции Бесселя 1-го рода.

$K_k(z)$ — модифицированные функции Бесселя 2-го рода.

$H_k^{(1)}(z) = J_k(z) + iY_k(z)$ — функции Ганкеля 1-го рода.

$H_k^{(2)}(z) = J_k(z) - iY_k(z)$ — функции Ганкеля 2-го рода.

Литература

1. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН. 1964; 19:3(117), с. 53–161.
2. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений, М.: Наука. 1989.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. 2. М.:Наука; 1953.
4. Брычков Ю. А. , Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 20, ВИНИТИ, М. 1982; с. 78–115.
5. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Учебное пособ. - Л., Изд.-во Ленинград. унив. 1978. 296 с.
6. Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций, М.: Изд. иностр. лит-ры 1949.
7. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951; 15:4 , 309–360.
8. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. Сер. Обобщенные функции, вып. 4. М.: Физматгиз. 1961.
9. Горшков А.В. Специальное преобразование Вебера с ненулевым ядром. Матем. заметки. 2023; 114:2 с. 212–228.
10. Gorshkov A.V. No-Slip Boundary Condition for Vorticity Equation in 2D Exterior Domain. J. of Math. Fluid Mech. 2023; 25:47.
11. Gorshkov A.V. Stable invariant manifolds with application to control problems, Mathematical Control and Related Fields(MCRF). 2022; 12:3, pp. 695-707.

12. Gorshkov A.V. Associated Weber-Orr Transform, Biot-Savart Law and Explicit Form of the Solution of 2D Stokes System in Exterior of the Disc. J. Math. Fluid Mech. 2019; 21:3.

13. Горшков А.В. Спектральное представление функции ротора внешней задачи Стокса в цилиндрических областях, Труды НИИСИ РАН. Математическое и компьютерное моделирование сложных систем: теоретические и прикладные аспекты. 2019; 9:2, с. 71-74.

14. Горшков А.В. Инвариантные многообразия для уравнения Бюргерса, заданного на полуоси, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018; 58:1 с. 95–107.

15. Gorshkov A.V. Boundary Stabilization of Stokes System in Exterior Domains, J. of Math. Fluid Mech. 2016; 18:4 : 679-697.

16. Горшков А.В. Стабилизация решения уравнения теплопроводности во внешности сферы с управлением на границе, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2016; 5, с. 3–14.

17. Gorshkov A.V. Stabilization of a Solution to the Heat Equation with Boundary Control in the Exterior of a Disc. Journ. of Math. Sci. 2015; 210, pp. 635–647.

18. Gorshkov A.V. Stabilization of a Solution to the Heat Equation on the Half-Axis with Locally Distributed Control. Journ. of Math. Sci. 2015; 205, pp. 190–198.

19. Горшков А.В. Стабилизация решения двумерной системы уравнений Навье–Стокса во внешности ограниченной области посредством управления с границы, Матем. сб. 2012; 203:9, с. 15–40.

20. Горшков А.В. Стабилизация решений параболических уравнений в неограниченной области, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2004; 2, с. 61–64.

21. Gorshkov A.V. Stabilization of linear parabolic equations defined in an exterior of a bounded domain by a boundary control, Journ. of Dyn. and Control Syst. 2004; 10:1, pp. 1–9.

22. Горшков А.В. Стабилизация решений параболических уравнений в неограниченной области, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2004; 2, с. 61-64.

23. Горшков А.В. Стабилизация полулинейного параболического уравнения, заданного во внешности ограниченной области, посредством управления с границы, Матем. сб. 2003; 194:10, с. 49–76.

24. Горшков А.В. Стабилизация одномерного уравнения теплопроводности на полуограниченном стержне, УМН. 2001; 56:2(338), с. 213–214.

25. Gorshkov A.V. Stabilization of 2D Navier-Stokes system in exterior of a bounded domain by means of boundary control. Book of abstracts "Differential Equations and Related Topics" dedicated to I.G.Petrovskii., Moscow, 2011; c. 49-50.

26. Горшков А.В. Задача Ходжа-Гельмгольца и условие прилипания во внешних областях. Материалы международной Воронежской зимней математической школы С.Г.Крейна, посвященной памяти В. П. Маслова, Воронеж, 2024; с. 80-82.

27. Горшков А.В. Задача Ходжа-Гельмгольца. Материалы международной Воронежской весенней математической школы "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV", Воронеж, 2024; с. 98-100.

28. Гумеров Н. А. Обтекание цилиндра неустановившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1983; 2, с. 79–83.

29. Иосида К. Функциональный анализ, М.:Мир. 1967.

30. Като Т. Теория возмущений линейных операторов, М.:Мир. 1972.

31. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука 1970(2-е изд.).

32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 2. М.: Наука. 1988.

33. Левитан Б. М. Некоторые вопросы спектральной теории самосопряжённых дифференциальных операторов, УМН. 1956; 11:6(72), с. 117–144 .

34. Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, Изв. АН СССР. Сер. матем., 16:4 (1952), 325-352.

35. Маремонти П., Солонников В. А. Об оценке решений системы Стокса во внешних областях. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 9. 1990; Зап. научн. сем. ЛОМИ, 180, Изд-во Наука, Ленинград. отд., Л., с. 105–120.

36. Мессиа А. Квантовая механика. Том I, II. , Наука, М. 1978-1979.

37. Miyakawa T. On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain. Hiroshima Math. J. 1982; 12, pp. 115-140

38. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы, Наука, М. 1969.

39. Русанов Б.В. Медленное неустановившееся обтекание кругового цилиндра вязкой жидкостью. Докл. АН СССР. 1953; 89:6, с. 983-986.

40. Русанов Б.В. Медленное неустановившееся обтекание кругового цилиндра вязкой жидкостью. Вест. Ленингр. ун-та, сер. матем., физики и химии. 1955; № 2, 155. - с. 81 - 106.

41. Русанов Б.В. Медленное неустановившееся обтекание шара вязкой жидкостью. Докл. АН СССР. 1953; 90:I, с. 41-44.

42. Слезкин Н.А. Неустановившееся движение цилиндра в вязкой жидкости. Уч. зап. МГУ. 1940; 46, с. 19-37.

43. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.1, М.: Изд. иностр. лит-ры, 1960.

44. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. 6-е изд., испр, и доп. Изд-во МГУ, 1999.

45. Фурсиков А. В. Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью. Матем. сб. 2001; 192:4, с. 115–160.

46. Abe K. On the large time L_∞-estimates of the Stokes semigroup in two-dimensional exterior domains. J. Differ. Equations. 2021; 300, pp. 337-355.

47. Abe K. Global well-posedness of the Two-Dimensional Exterior Navier–Stokes Equations for non-decaying data. Arch. Rational Mech. Anal. 227:69–104 (2018).

48. Anderson, C. Vorticity boundary conditions and boundary vorticity generation for two-dimensional viscous incompressible flows, J. Comp. Phys. 80 (1989).

49. Auchmuty G., Alexander J. L2 Well-Posedness of Planar Div-Curl Systems. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2001; 160:91-134. doi: 10.1007/s002050100156.

50. Auchmuty G., Alexander J. L2-well-posedness of 3D div-curl boundary value problems. Quarterly of Applied Mathematics. 2005; 63(3):479-508. doi: 10.1090/S0033-569X-05-00972-5.

51. Basset A.B. A treatise on hydrodynamics with numerous examples. Cambridge. 1888; 2 pp. 275-282.

52. Battig A., Kalla S.L. Weber transform in a thermal conduction problem. Rev. Bras. Phys. 1983; 13:753–756.

53. Borchers W., Miyakawa T. L^2-decay for Navier-Stokes flows in unbounded domains, with application to exterior stationary flows. Arch. Rational Mech. Anal. 1992; 118(3):273-295.

54. Buschle L.R., Kurz F.T., Schlemmer H.P., Ziener C.H. Neumann-Weber integral transform for complex indices. J. Math. Phys. 2019, 60.

55. Calderon, A. P., Zygmund, A. On singular integrals. American Journal of Mathematics, The Johns Hopkins University Press. 1956; 78(2), pp. 289–309.

56. Cantarella J., Deturck D., Gluck H. The Biot-Savart operator for application to knot theory, fluid dynamics, and plasma physics. J. Math. Phys. 2001; 42:2, pp. 876-905.

57. W. Dan and Y. Shibata. On the L_q -L_r estimates of the Stokes semigroup in a two-dimensional exterior domain, J. Math. Soc. Japan. 1999; 51:1, pp. 181-207.

58. W. Dan and Y. Shibata. Remark on the L_q -L_r estimates of the Stokes semigroup in a two-dimensional exterior domain, acifc J. of Mathematics. 1999; 189, pp. 223–239.

59. Davies B. Integral Transforms and their Applications, Springer-Verlag, New York. 1985.

60. Davies E. B. Heat kernels and spectral theory. Cambridge University Press. 1989.

61. Delgado B., Macias-Diaz J. An Exterior Neumann Boundary-Value Problem for the Div-Curl System and Applications. Boundary Value Problems. 2023; 9. doi: 10.3390/math9141609.

62. Elnaqeeb T, Shah NA, Vieru D. Weber-Type Integral Transform Connected with Robin-Type Boundary Conditions. Mathematics. 2020; 8(8):1335. https://doi.org/10.3390/math8081335

63. Finn R. An energy theorem for viscous fluid motions. Arch. Rational Mech. Anal. 1960; 6, pp. 371–381.

64. Finn R. On the Exterior Stationary Problem for the Navier-Stokes Equations, and Associated Perturbation Problems, Arch. Rational Mech. Anal. 1965; 19, pp. 363–406.

65. Fursikov, A.V. Stabilizability of two-dimensional Navier-Stokes equation with help of boundary feedback control. J. Math. Fluid Mech. 2001; 3, pp. 259-301.

66. Fursikov, A.V. Stabilization for the 3D Navier-Stokes system by feedback boundary control. Discrete and Cont. Dyn. Syst. 2004; 10, pp.289-314.

67. Fursikov A.V., Gorshkov A.V. Certain questions of feedback stabilization for Navier-Stokes equations. Evolution Equations and Control Theory (EECT). 2012; 1:1, pp. 109-140.

68. Galdi, G., Heywood, J., Shibata, Y. On the Global Existence and Convergence to Steady State of Navier-Stokes Flow Past an Obstacle that is Started from Rest. Arch Rational Mech Anal. 1997; 138, pp. 307–318.

69. Galdi G., Maremonti P. Monotonic decreasing and asymptotic behaviour of the kinetic energy for weak solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains. Arch. Rational Mech. Anal. 1986; 94:253-266.

70. Gallay Th. Infinite energy solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equations. arXiv: Analysis of PDEs. (2014).

71. Gallay Th., Wayne C.E. Invariant manifolds and the long-time asymptotics od the Navies-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$. Arch. Ration. Mech. Anal. 2002; 163:3, pp. 209-258.

72. Gallay Th., Wayne C.E. Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^3$. Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences. 2002; 360(1799), pp. 2155-88.

73. Giga Y., Kambe T. Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation. Comm. Math. Phys. 1988; 117(4), pp. 549-568.

74. Goldstein S. Some two-dimensional diffusion problems with circular symmetry. Proc. London Math.Soc. 1932; 34(2):51-88.

75. Goldstein S. Rosenhead L. Boundary layer growth. Proc. Camb. Phil. Soc. 1936; 32(3):392–401.

76. Griffith J.L. A note on a generalisation of Weber's transform 1956; J. Proc. Roy. Soc. New South Wales 90:157-162.

77. Griffiths D. J. Introduction to Electrodynamics (3rd ed.). Prentice Hall. 1998.

78. Heywood J.G. On Some Paradoxes Concerning Two-Dimensional Stokes Flow Past an Obstacle. Indiana Univ. Math. J. 1974; 24:5, pp. 443-450.

79. Heywood J.G. On Non-stationary Stokes Flow Past an Obstacle. Indiana Univ. Math. J. 1974; 24:3, pp. 271-284.

80. Hormander L. The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis. Springer-Verlag. 1990.

81. Iftimie D., Lopes Filho M. C., Nussenzveig Lopes H. J. Confinement of vorticity in two dimensional ideal incompressible exterior flow. Quart. Appl. Math. 2007; 65, pp. 499-521.

82. Iftimie, D., Lopes Filho, M. C. Nussenzveig Lopes, H. J. Two dimensional incompressible ideal flow around a small obstacle. 2003; Comm. P.D.E. 28, pp. 349–379.

83. Kabala Z., Cassiani G. Well Hydraulics with the Weber–Goldstein Transforms. Transport in Porous Media. 1997; 29:225-246.

84. Kirchhart M., Schulz E. Div–curl problems and H^1-regular stream functions in 3D Lipschitz domains. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021; doi: 10.1002/mma.7414.

85. Kozono H., Ogawa T. Decay properties of strong solutions for the Navier-Stokes equations in two-dimensional unbounded domains. Arch. for Rat. Mech. and Analysis. 1993; 122:1:1-17.

86. Krajewski J, Olesiak Z. Associated Weber integral transforms of $W_{\nu-l,j}[;]$ and $W_{\nu-2,j}[;]$ types, Bull. de L'Academe Polonaise des Scs1982; XXX:7-8.

87. Lacave. C. Two-dimensional incompressible ideal ow around a thin obstacle tending to a curve. Annales Inst. H. Poincare Analyse Non Lineaire. 2009; 26, pp. 1121-1148.

88. Lacave, C., Miot, E., Wang, C. Uniqueness for the Two-Dimensional Euler Equations on Domains with Corners. Indiana University Mathematics Journal. 2014; 63(6), pp. 1725–1756.

89. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 6. edition. 1932.

90. Lockhart R., Fredholm. Hodge and Liouville theorems on noncompact manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 1987; 301, pp. 1–35.

91. Lombardo M., Caflisch R., Sammartino M. Asymptotic analysis of the linearized Navier-Stokes equation on an exterior circular domain: Explicit solution and the zero viscosity limit. Comm. Part. Diff. Eq. 2007; 26(1,2), pp. 335-354.

92. Malits P. On a Certain Class of Integral Equations Associated with Hankel Transforms, Acta Appl. Math. 2007; 98:135-152.

93. Maremonti P. On the Stokes problem in exterior domains: the maximum modulus theorems. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2014; 34, pp. 2135–2171.

94. Maremonti P. On the $L_p - L_q$ estimates of the gradient of solutions to the Stokes problem. J. Evol. Equ. 2019; 19, pp. 645–676.

95. Maremonti P., Shimizu S. Global Existence of Solutions to 2-D Navier–Stokes flow with non-decaying initial data in Exterior Domains. J. Math. Fluid Mech. 20:899–927 (2018).

96. Mukminov F. Kh. On uniform stabilization of solutions of the exterior problem for the Navier–Stokes equations. Mat. Sb. 1994; 185:3:41–68.

97. Nasim C. Associated Weber integral transforms of arbitrary order, Ind. J. Pure & Appl. Math. 1989; 20:11: 126-1138.

98. Neudert M., Wolf von Wahl. Asymptotic behaviour of the div-curl problem in exterior domains. Advances in Differential Equations. 2001; 6(11):1347-1376. doi: 10.57262/ade/1357139964.

99. Ozisik M. N. Heat Conduction, Wiley, New York. 1980.

100. Olshanskii M., Heister T. Natural vorticity boundary conditions on solid walls. Computer Methods in Appl. Mech. and Engineering. 297:18-37 (2015).

101. Pathak R. S., Pandey R. K. Distributional Weber transformation, J. Proc. Roy. Soc. NewSouth Wales. 1981; 114:63-75.

102. Quartapell L. Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations. Birkhauser, Boston, 1993.

103. Quartapelle L., Valz-Gris, F. Projection conditions on the vorticity in viscous incompressible flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1981; 1(2), pp. 129–144.

104. Sirivastav R.P. A pair of dual integral equations involving Bessel functions of the first and the second kind. Proc. Edinb. Math. Soc. 1964; 14(2): 149–158.

105. Stein E. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970; Princeton Mathematical Series, No. 30.

106. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluids. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1851; IX:8.

107. Suh J. C., Kwangsoo Kim. A vorticity–velocity formulation for solving the two-dimensional Navier–Stokes equations. Fluid Dynamics Research. 25:195-216 (1999).

108. Thambynayagam R.K.M., Habashy T.M. A new Weber-type transform. Q. Appl. Math. 2003; 61:485–493

109. Thom A. The flow past circular cylinders at low speeds. Proc. Roy. Soc. London Sect. 1933; A 141, pp. 651-669.

110. Titchmarsh E.C. Weber's integral theorem, Proc. Lond. Math. Soc. 1924; 22:2:15-28.

111. Weber H. Uber eine darstellung willkurticher functionen durch Bessel'sche functionen. Math. Annalen. 1873; 6:146-161.

112. Weinan E., Jian-Guo Liu. Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes. Journal of Comp. Phys. 124:368-382 (1996).

113. Wolf K. B. Integral Transforms in Science and Engineering, Plenum Press, New York. 1979.

114. Wu J. C. Hybrid procedures for computing general viscous flows. Numer. and Phys. Aspects of Aerodynamic Flows, New York (1982).

115. Yakubovich S. On the Weber integral equation and solution to the Weber–Titchmarsh problem, J. Math. Anal. Appl. 2018; 460(1):400-410.

116. Zakharenkov M. N. Formulation of boundary conditions for vorticity in viscous incompressible flow problems. Comput. Math. Math. Phys. 50:6:1085–1092 (2010).

117. Zelik S. Infinite energy solutions for damped Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^2$. J. Math. Fluid Mech. 15:717–745 (2013).

118. Zhang X., Thong D. A generalized Weber transform and its inverse formula. Appl. Math. Comput. 2007; 193:116–126.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Результаты численного моделирования

Ниже приводятся результаты численного моделирования ряда представленных в диссертации утверждений.

Для диска представлен расчет течения Стокса с условием прилипания, даваемым соотношениями ортогональности (Рис. 5.1- Рис. 5.3):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_{r_0}}\frac{w}{z^k}d\mathbf{x}=\begin{cases}0,\ k\geq 0,\ k\neq 1,\\ i\mathbf{v}_\infty,\ k=1.\end{cases}$$

Для внешней области представлен расчет течения Стокса с условием прилипания, даваемым соотношениями ортогональности (Рис. 5.4- Рис. 5.9):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\frac{w}{\Phi(z)^k}d\mathbf{x}=\begin{cases}0,\ k\geq 0,\ k\neq 1,\\ i\mathbf{v}_\infty,\ k=1.\end{cases}$$

Также для ряда областей представлен результат расчета течения, описываемого нелинейным вихревым уравнением Навье-Стокса с условием прилипания, даваемым соотношениями выше (Рис. 5.10- Рис. 5.21).

В качестве функции Φ бралась функция, обратная к функции Жуковского:

$$\Phi^{-1}(x)=z+\frac{\lambda}{z+\zeta}.$$

Результаты представлены для векторного поля, вихревой функции и функции тока.

Количество моментных соотношений - 26.

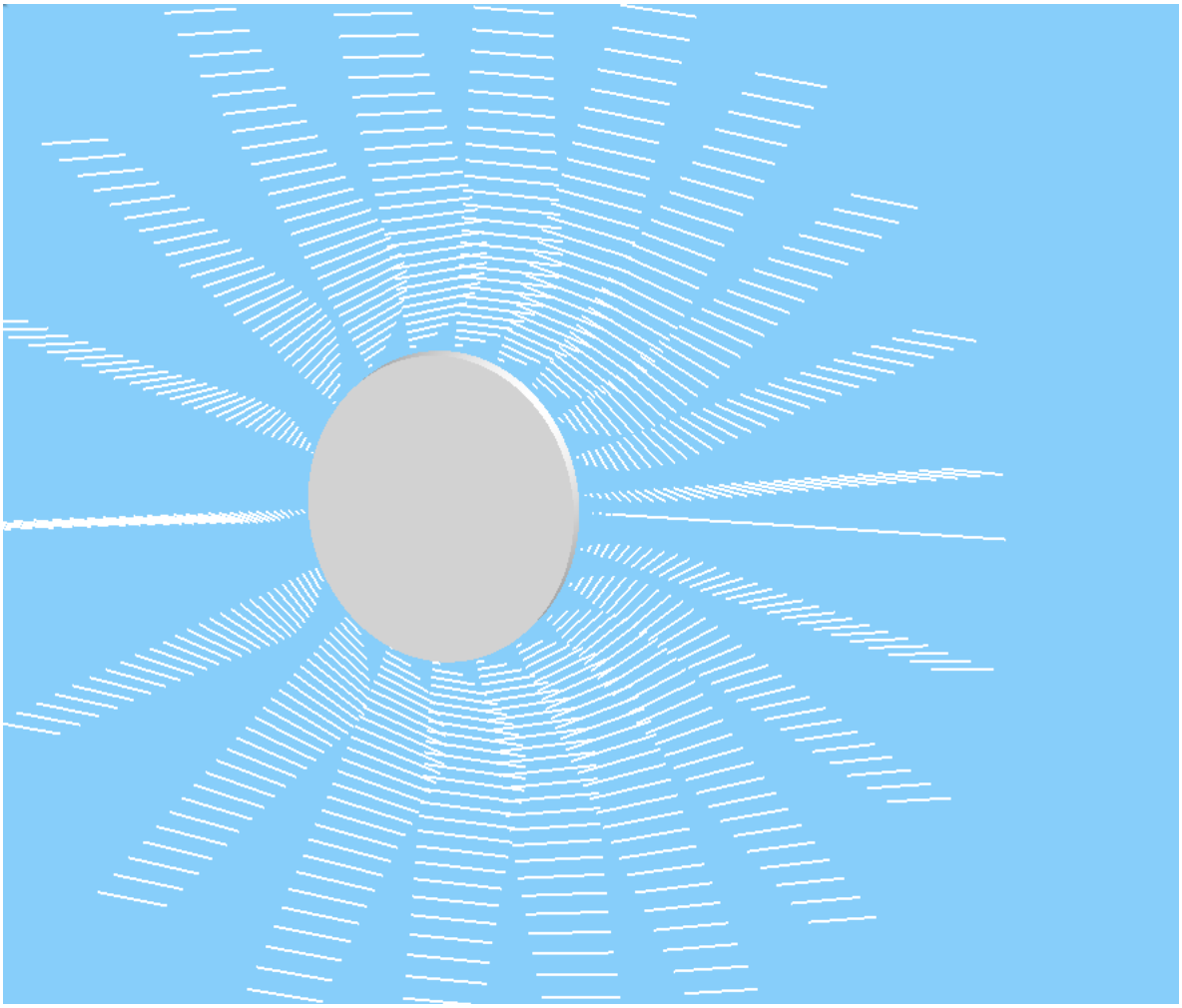


Рис. 5.1. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

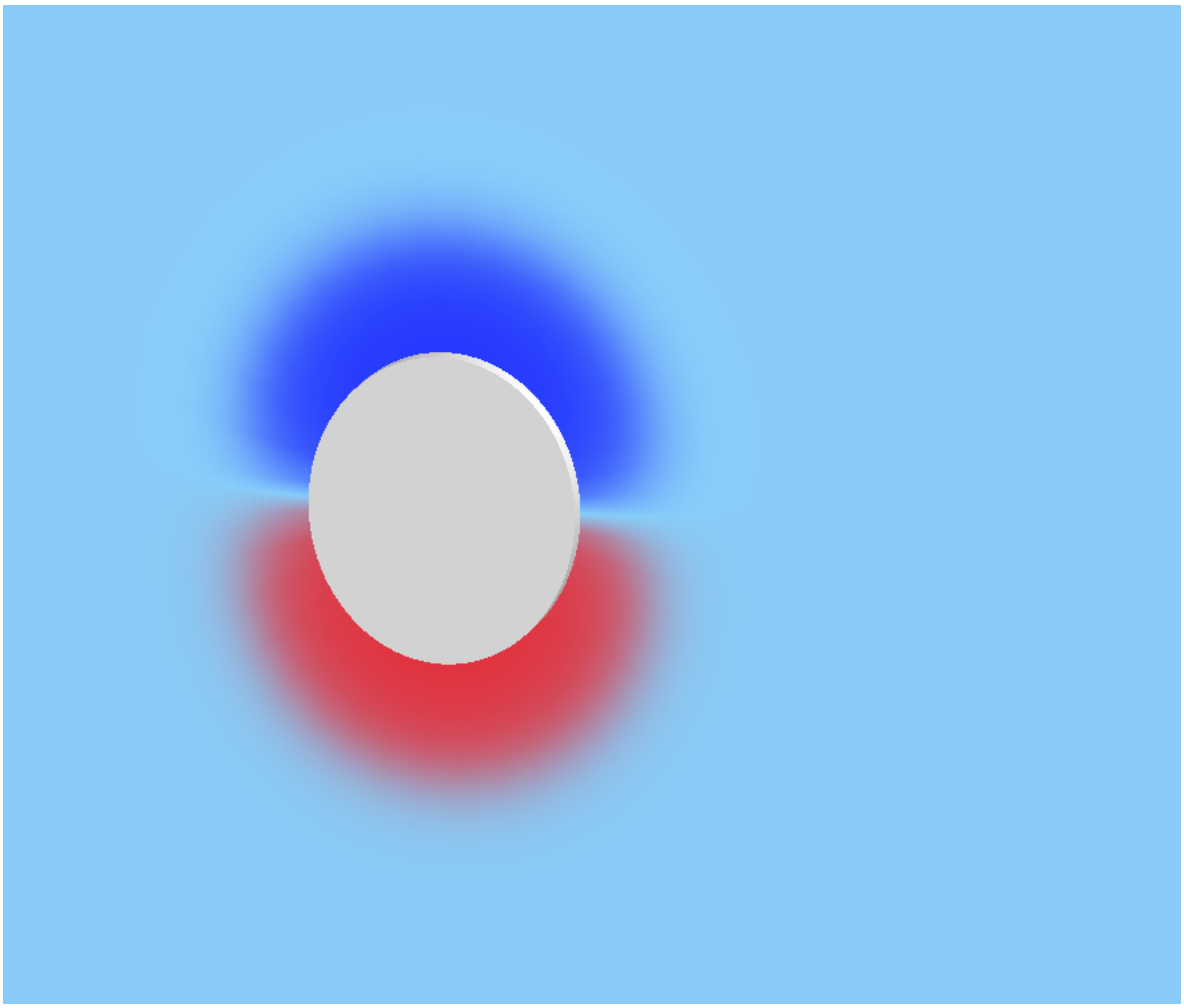


Рис. 5.2. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Функция ротора.

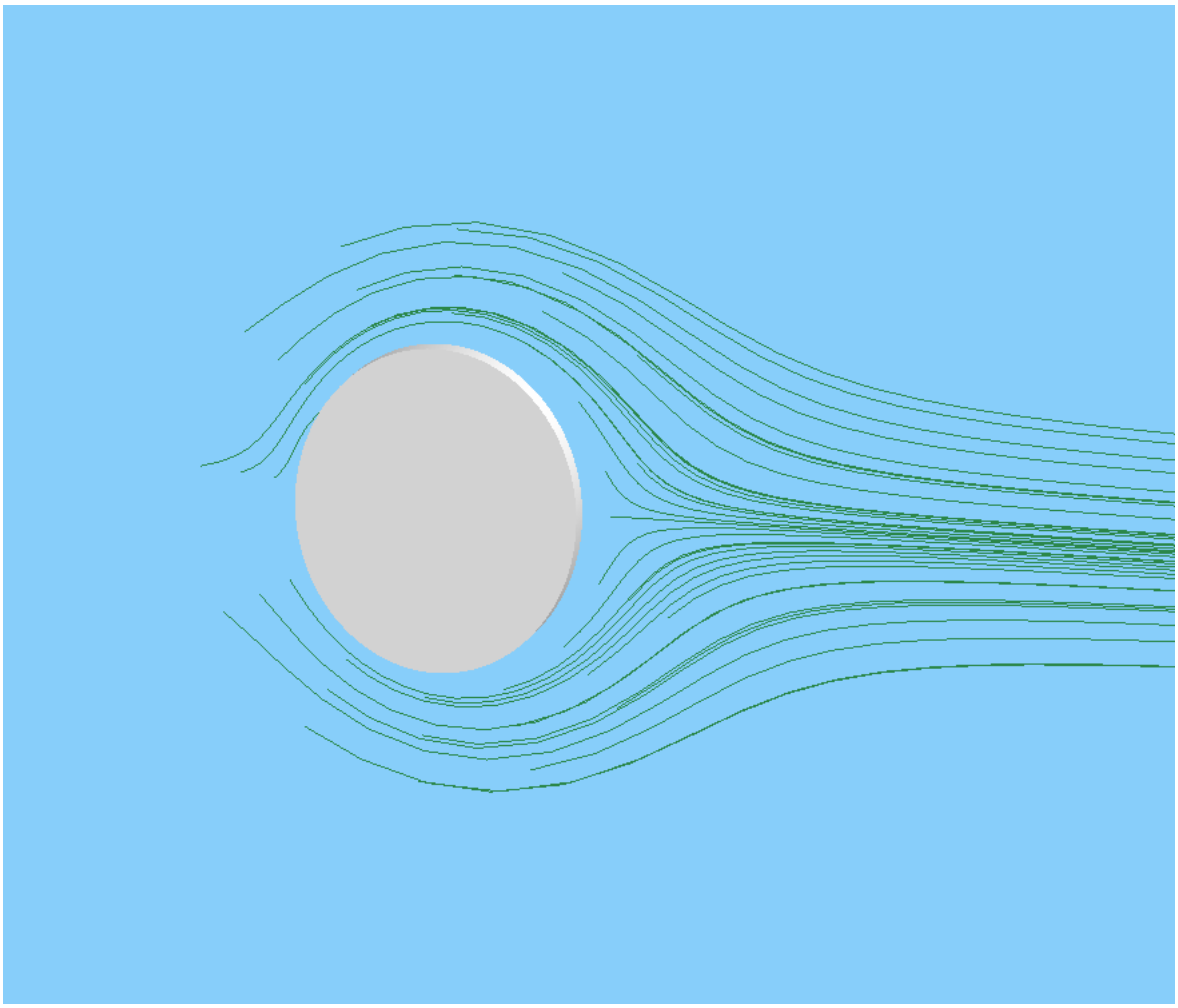


Рис. 5.3. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Функция тока.

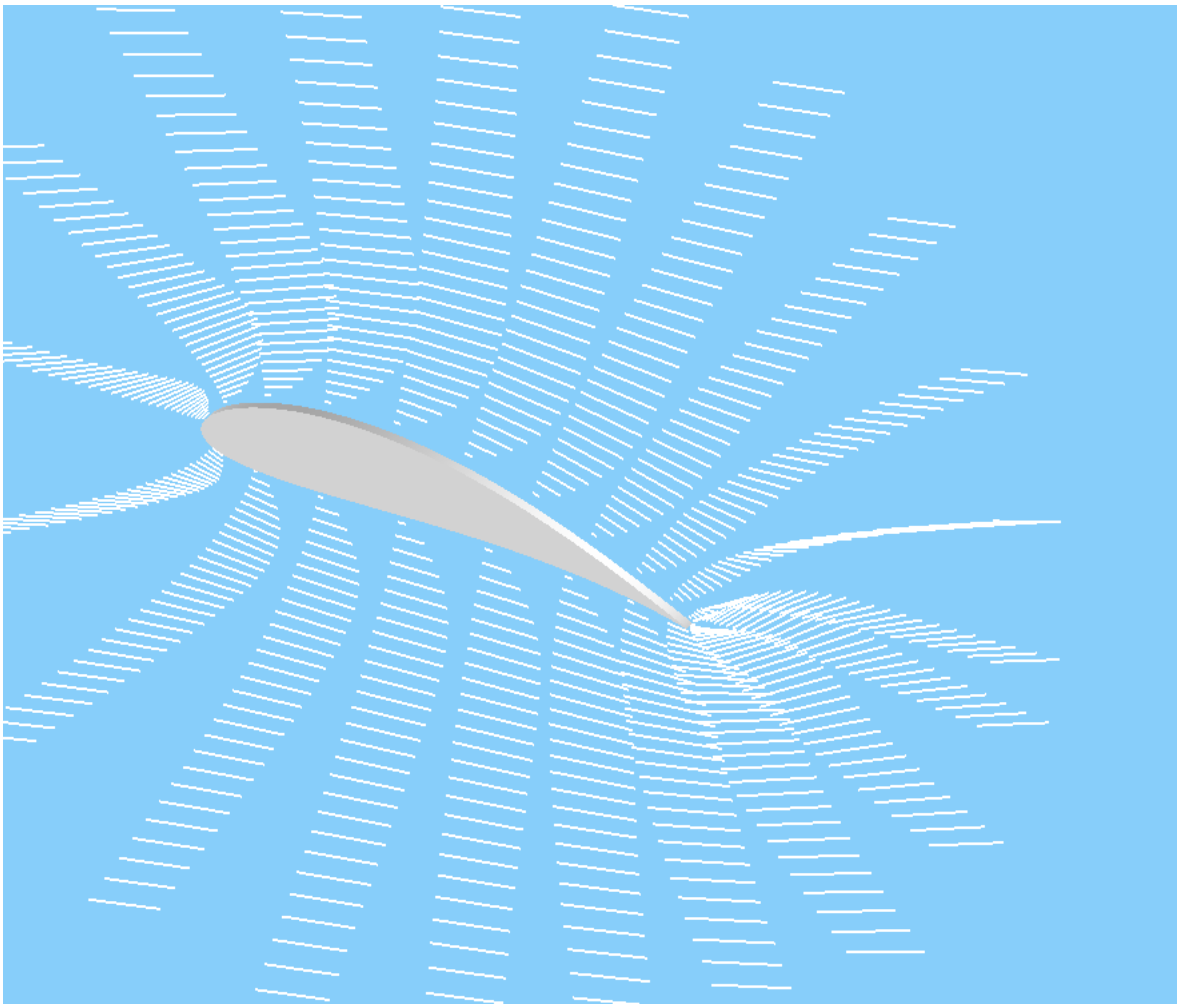


Рис. 5.4. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

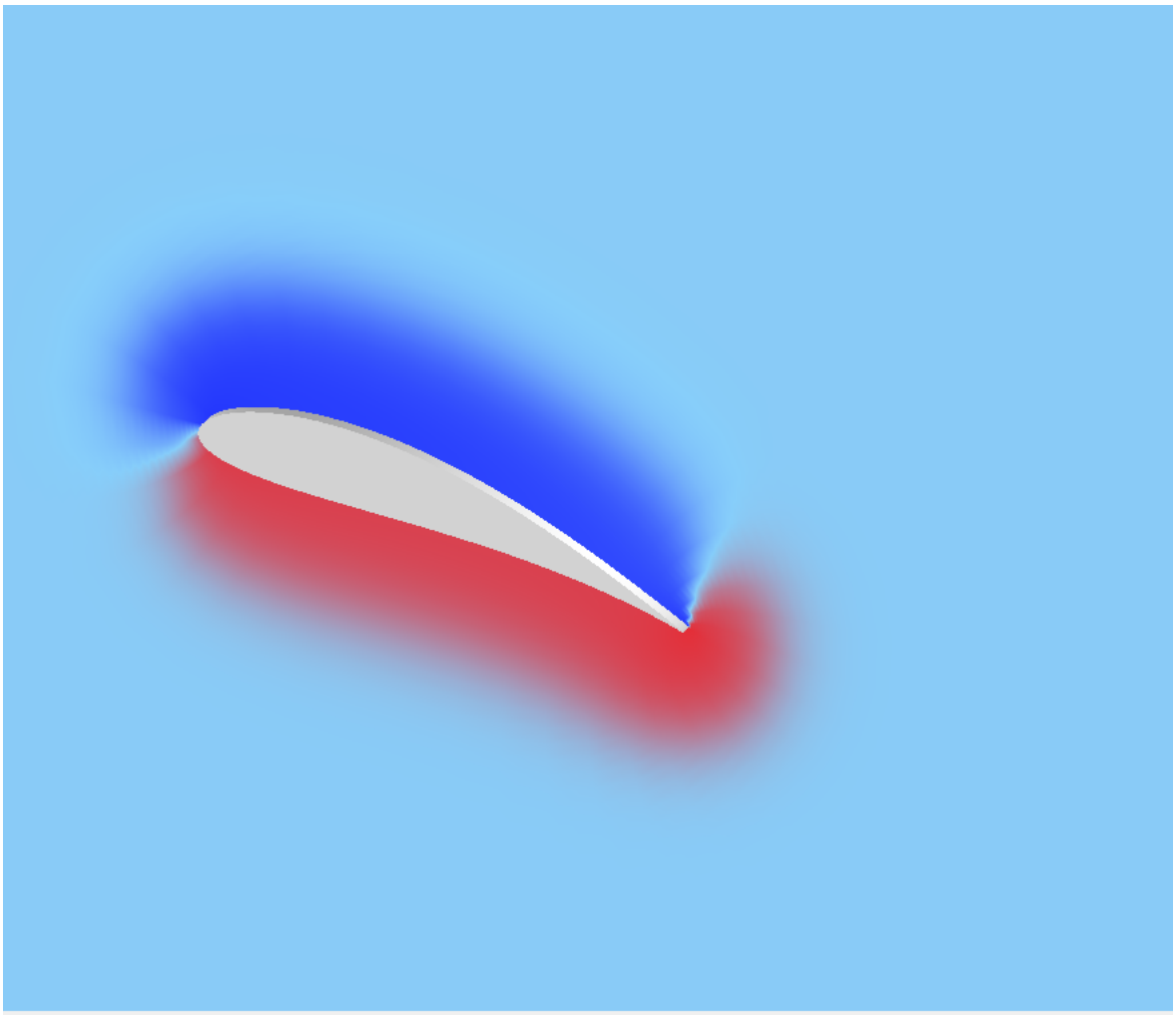


Рис. 5.5. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Функция ротора.

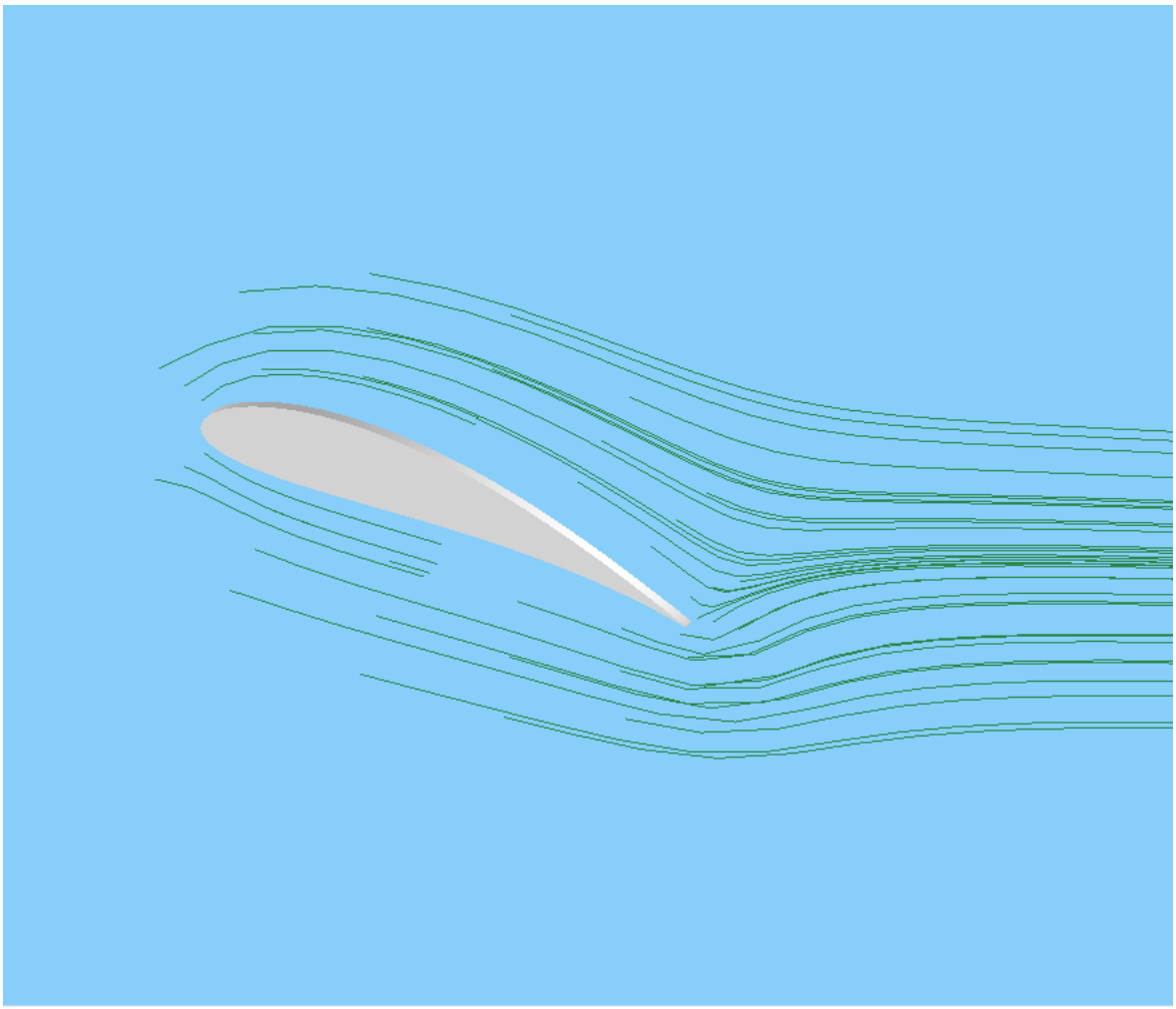


Рис. 5.6. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Функция тока.

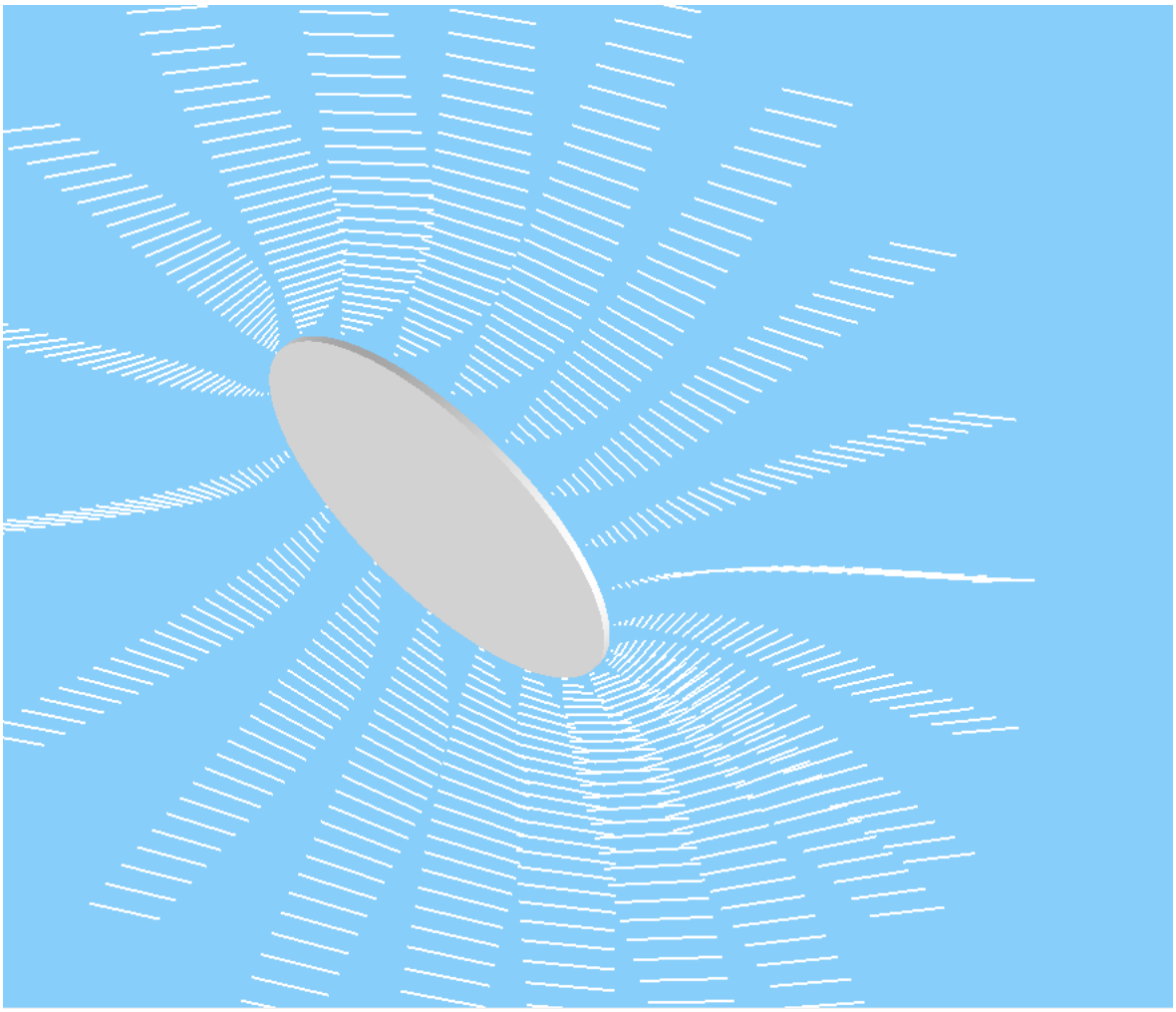


Рис. 5.7. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

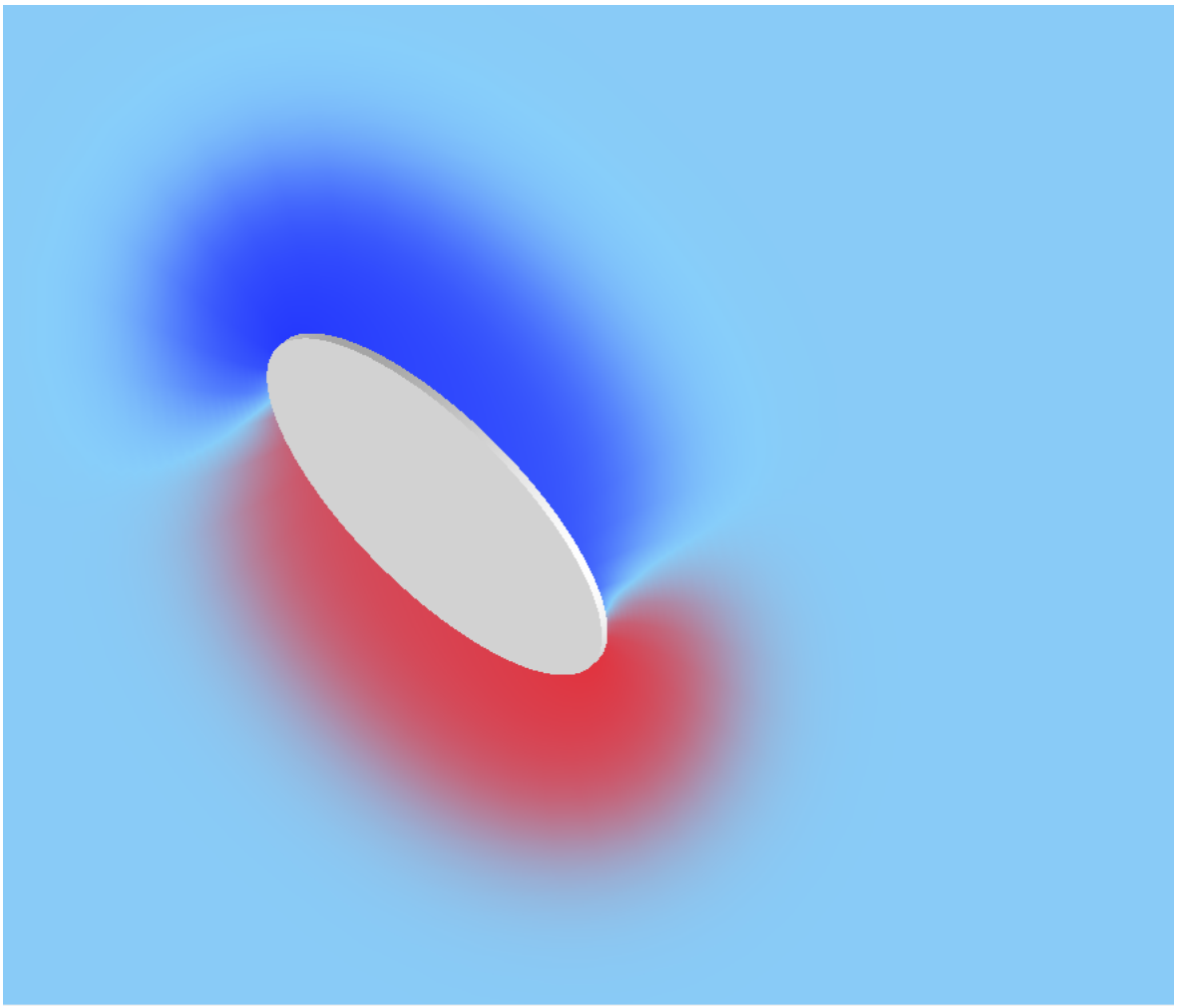


Рис. 5.8. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Функция ротора.

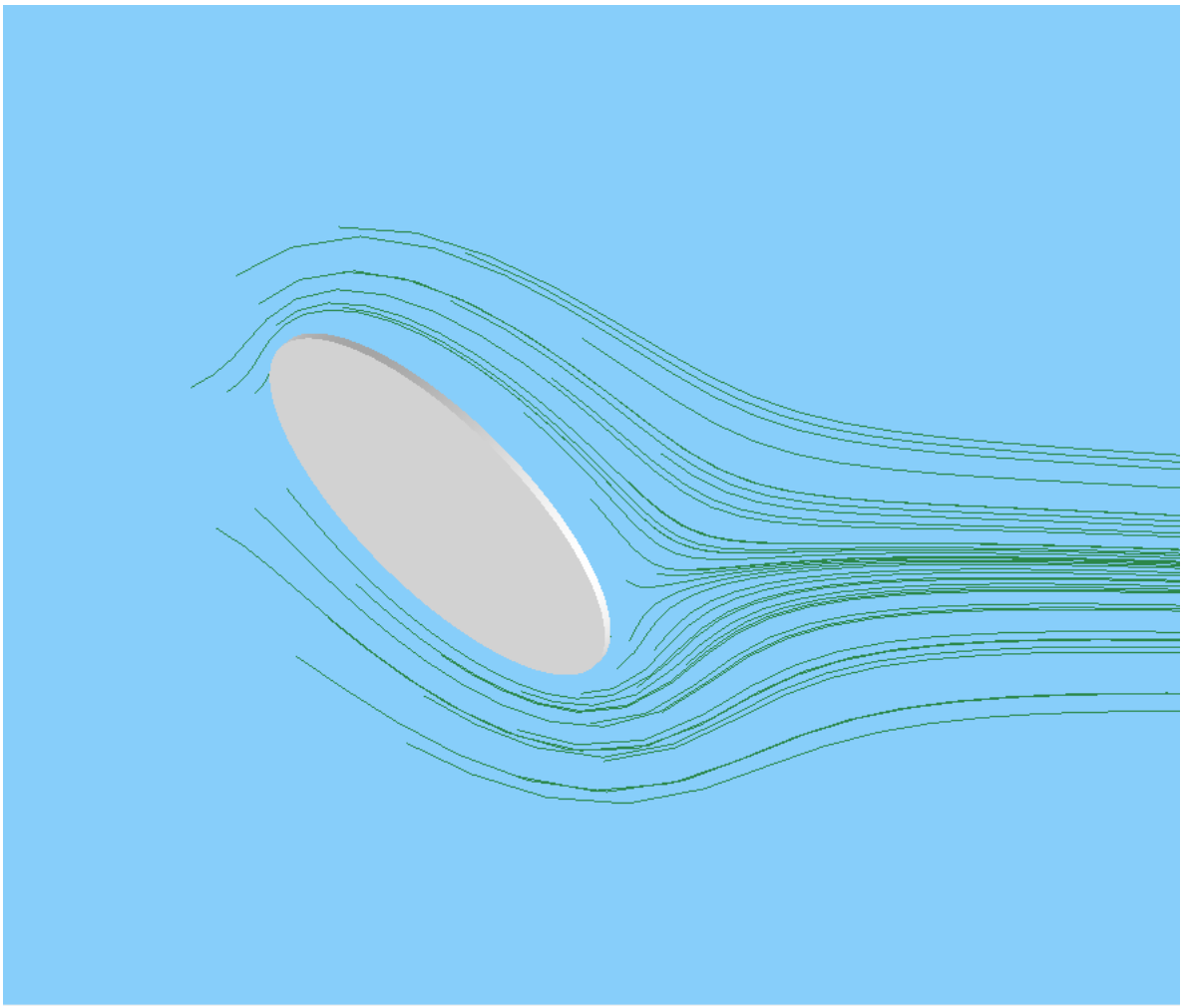


Рис. 5.9. Поток Стокса с вихревым условием прилипания. Функция тока.

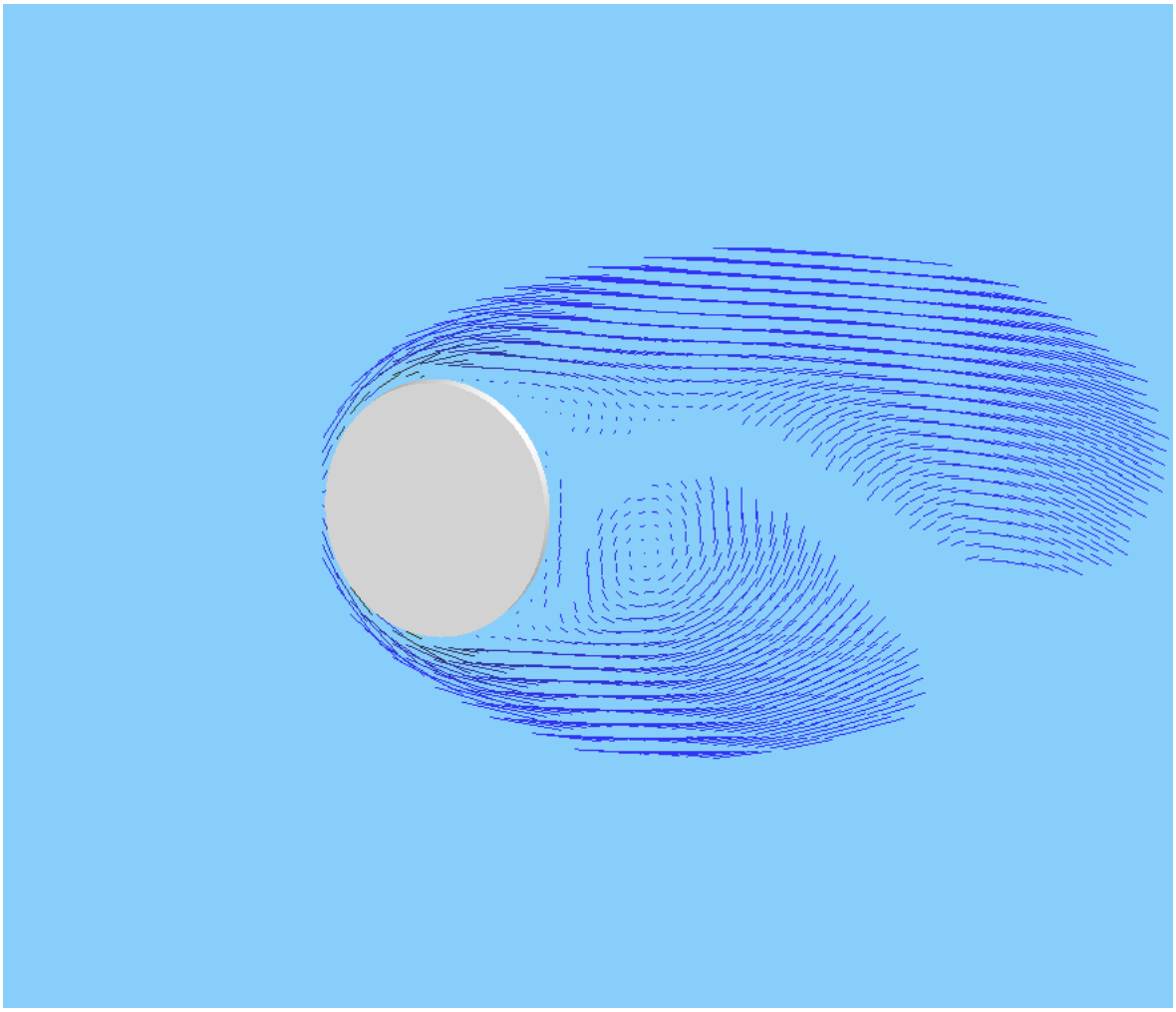


Рис. 5.10. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

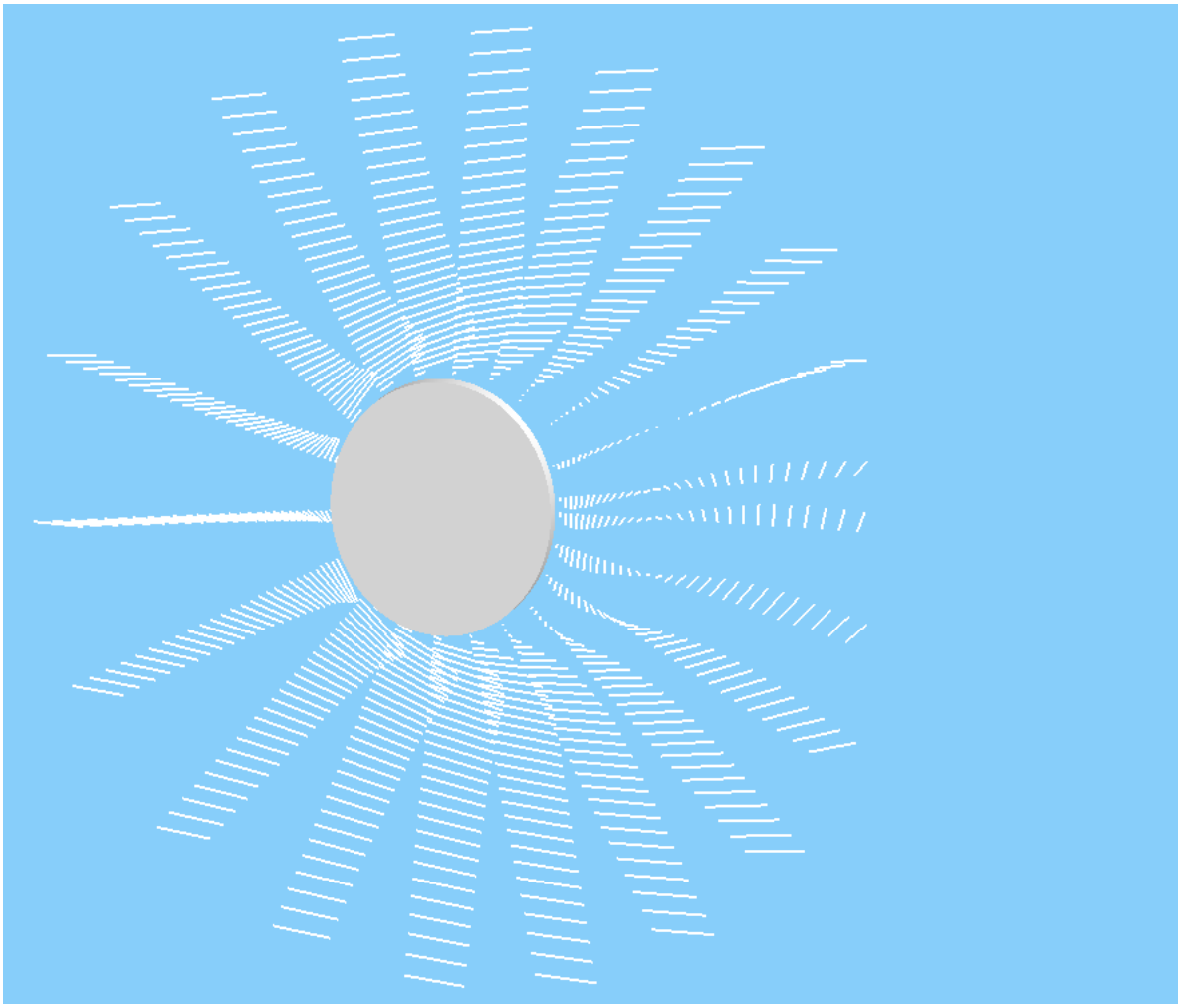


Рис. 5.11. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

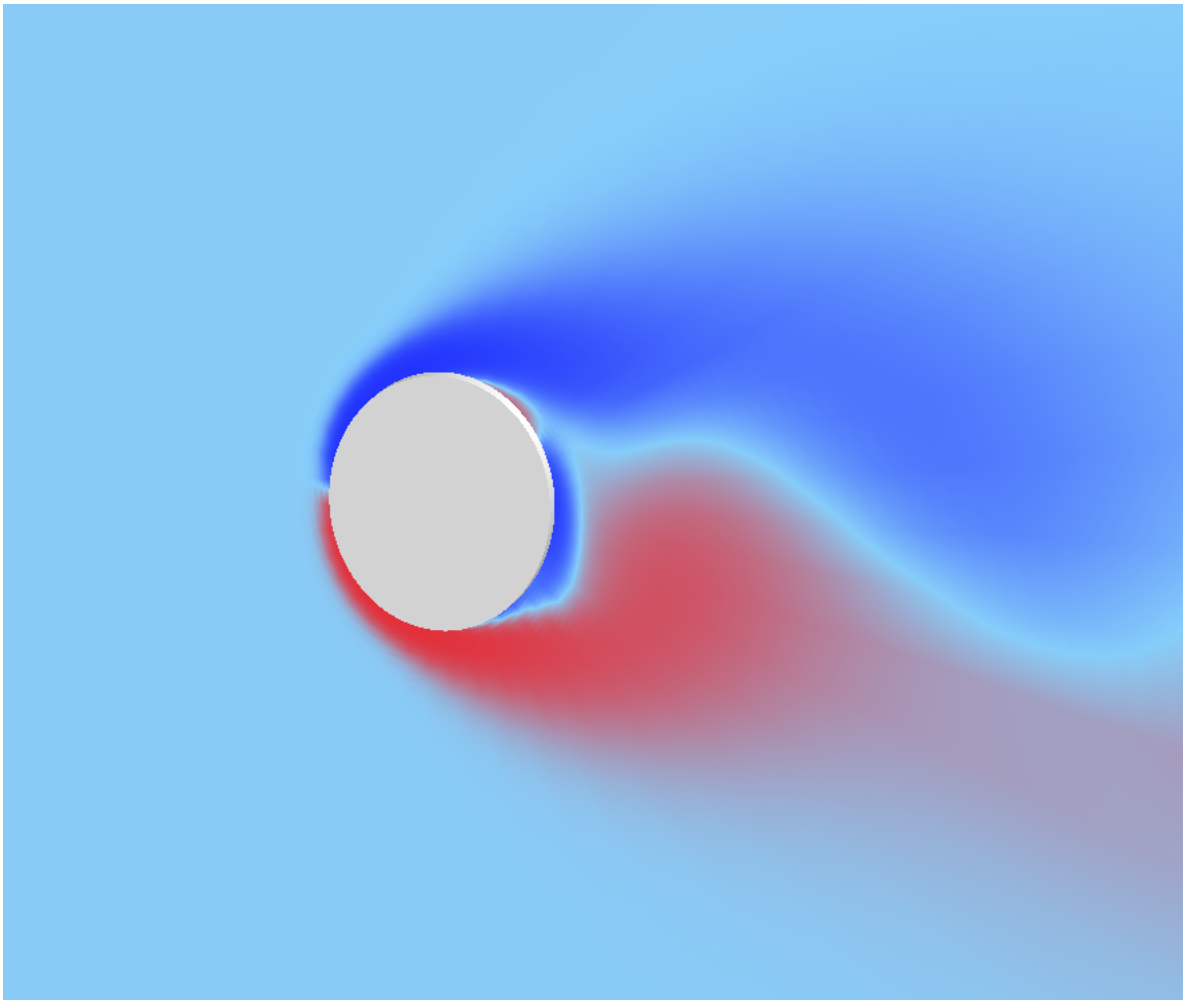


Рис. 5.12. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Функция ротора.

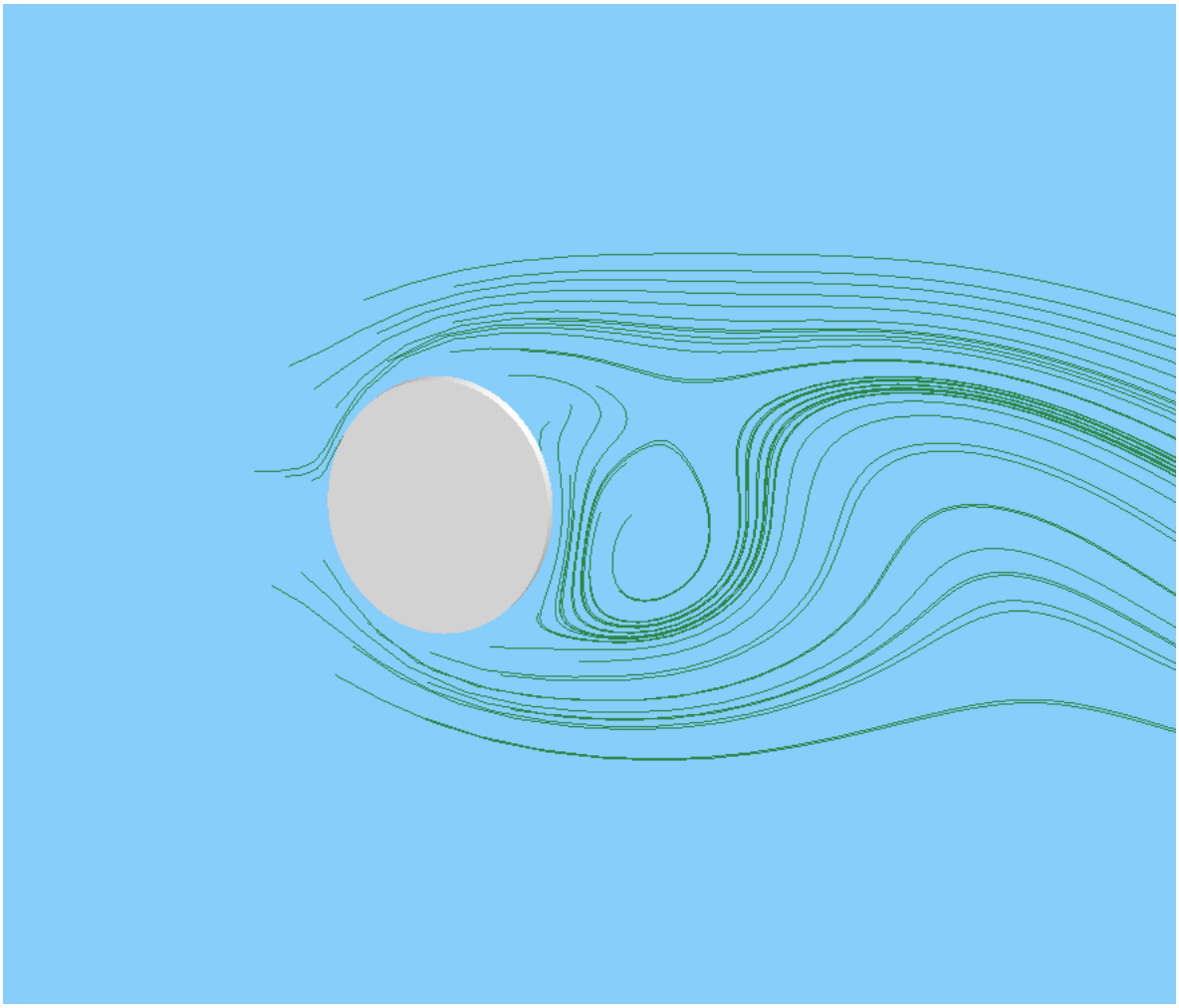


Рис. 5.13. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Функция тока.

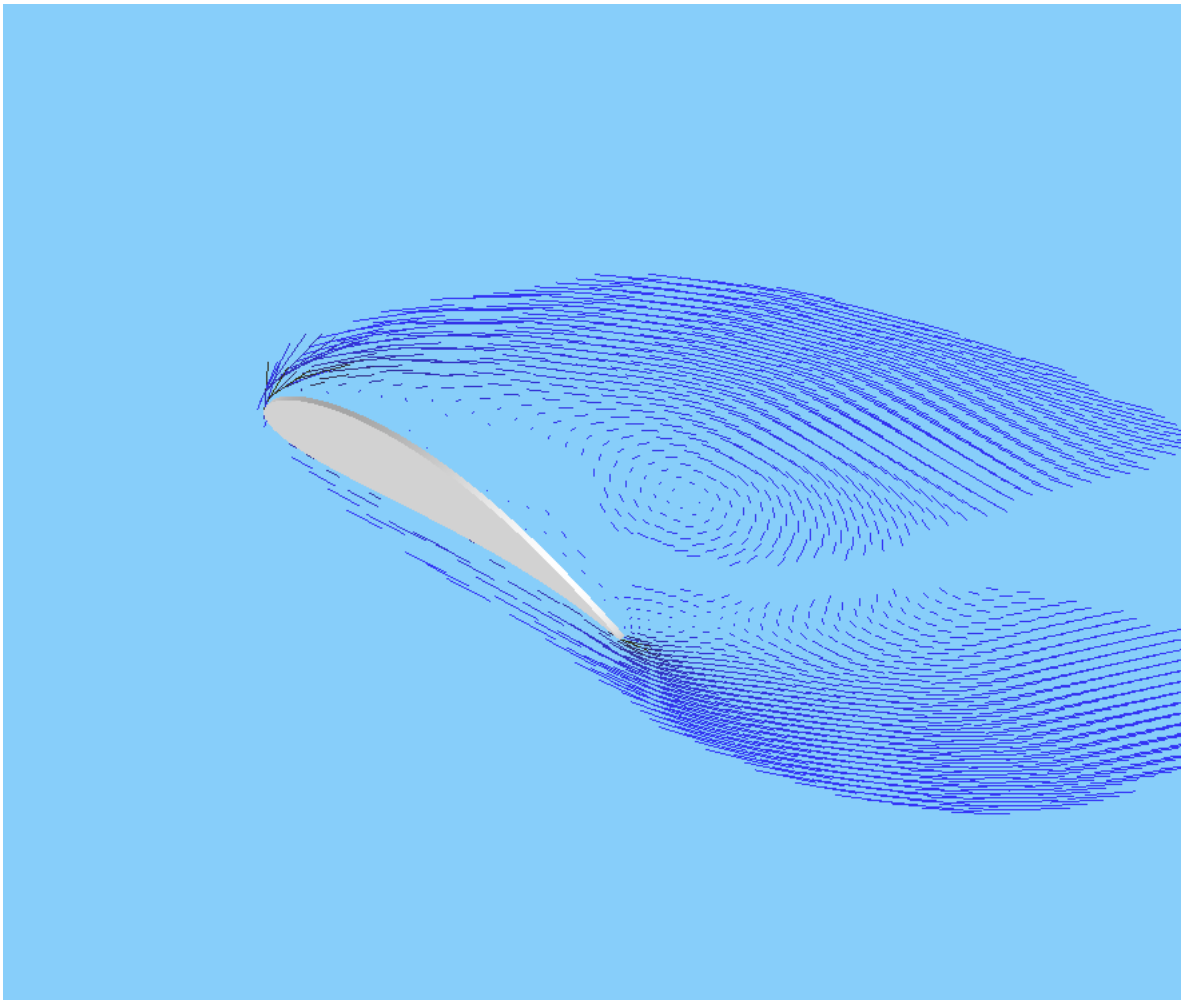


Рис. 5.14. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

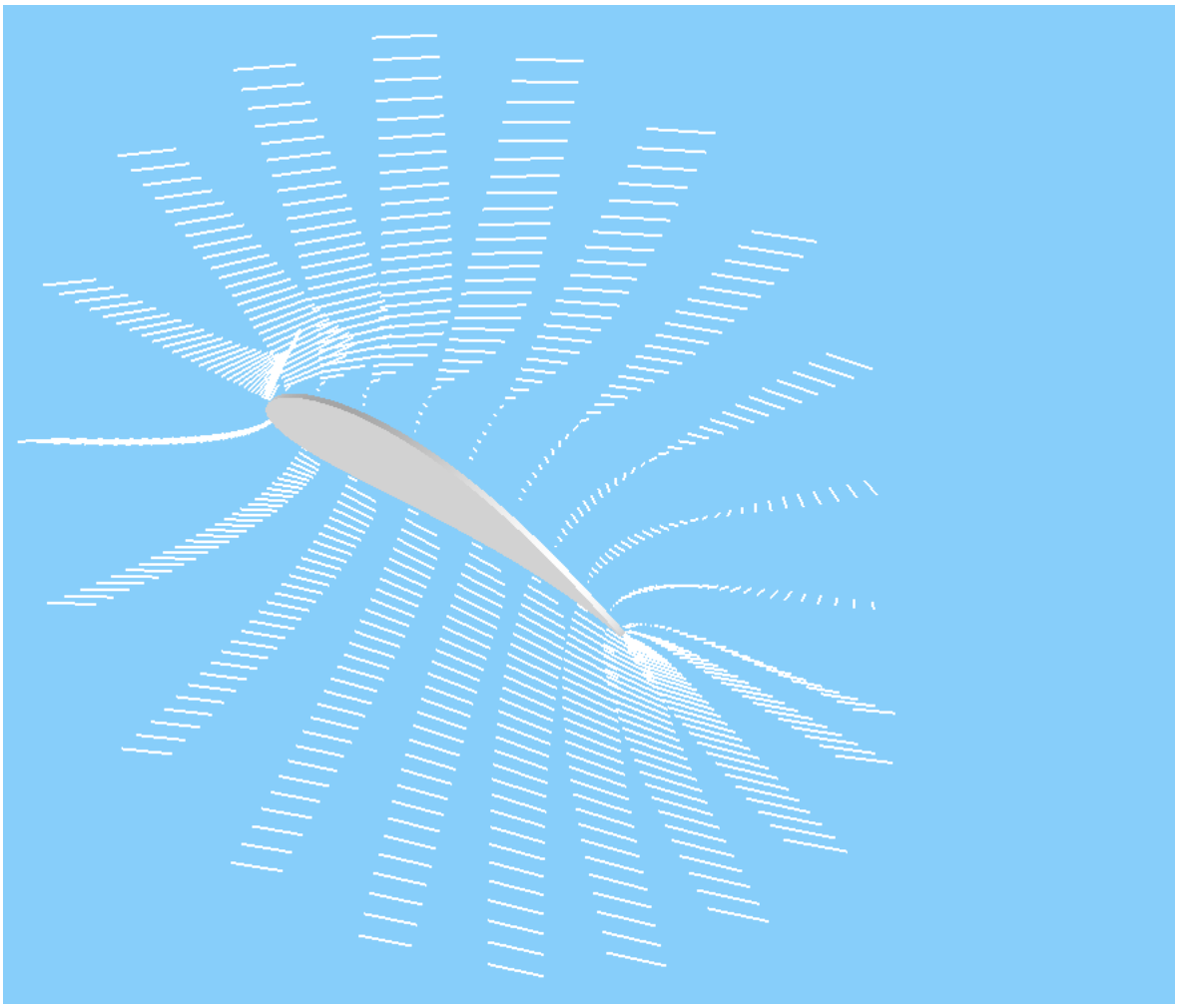


Рис. 5.15. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

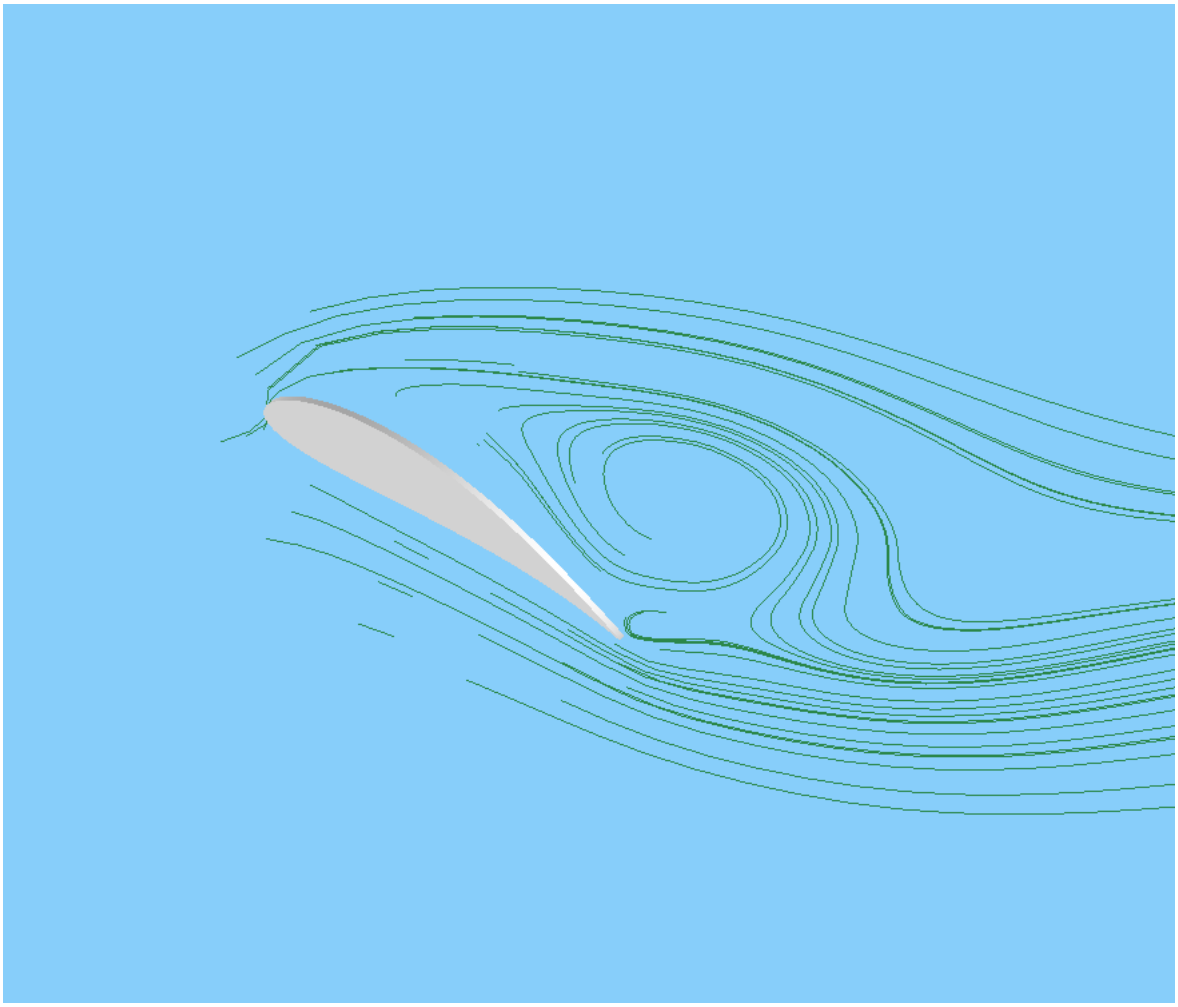


Рис. 5.16. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Функция тока.

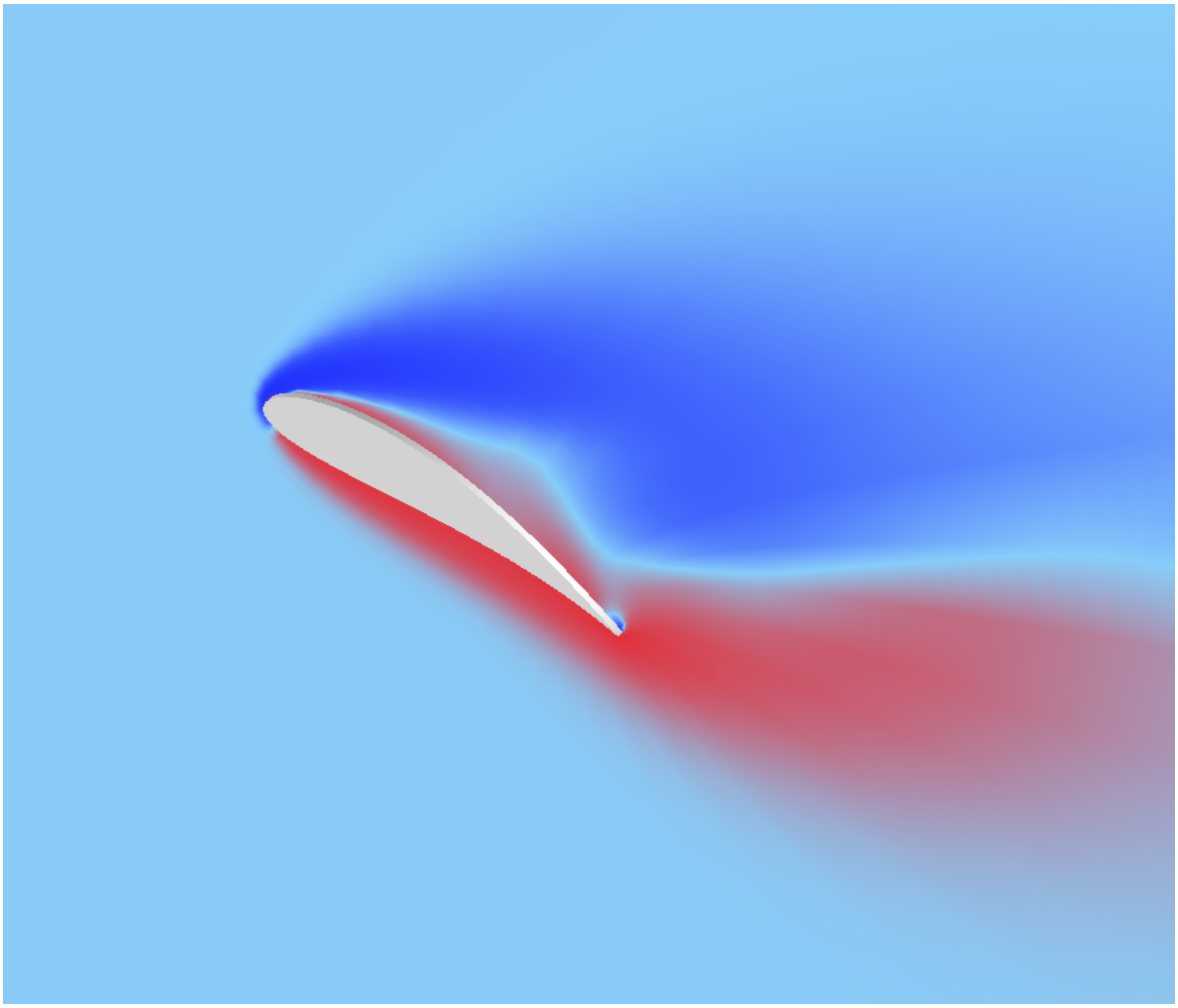


Рис. 5.17. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Функция ротора.

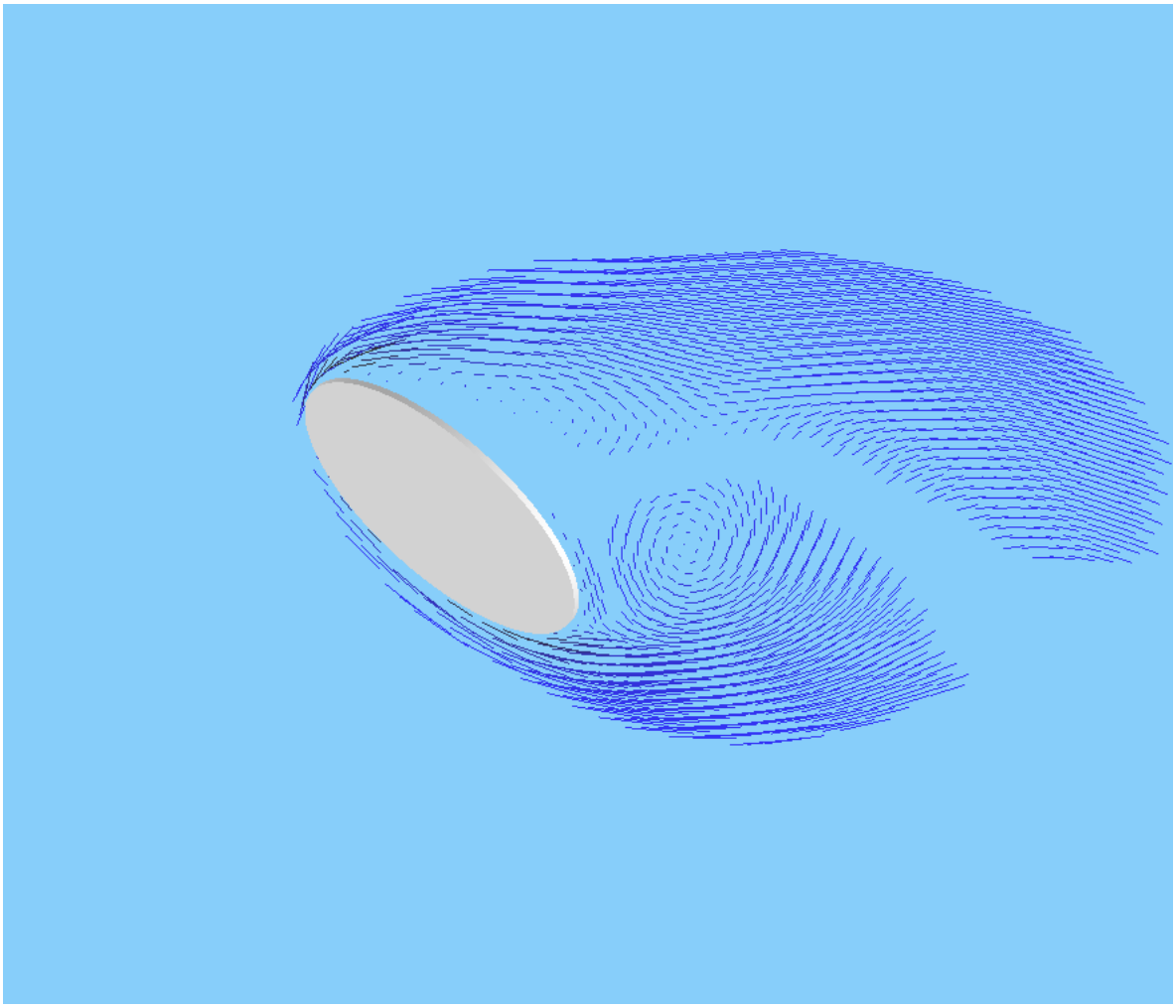


Рис. 5.18. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

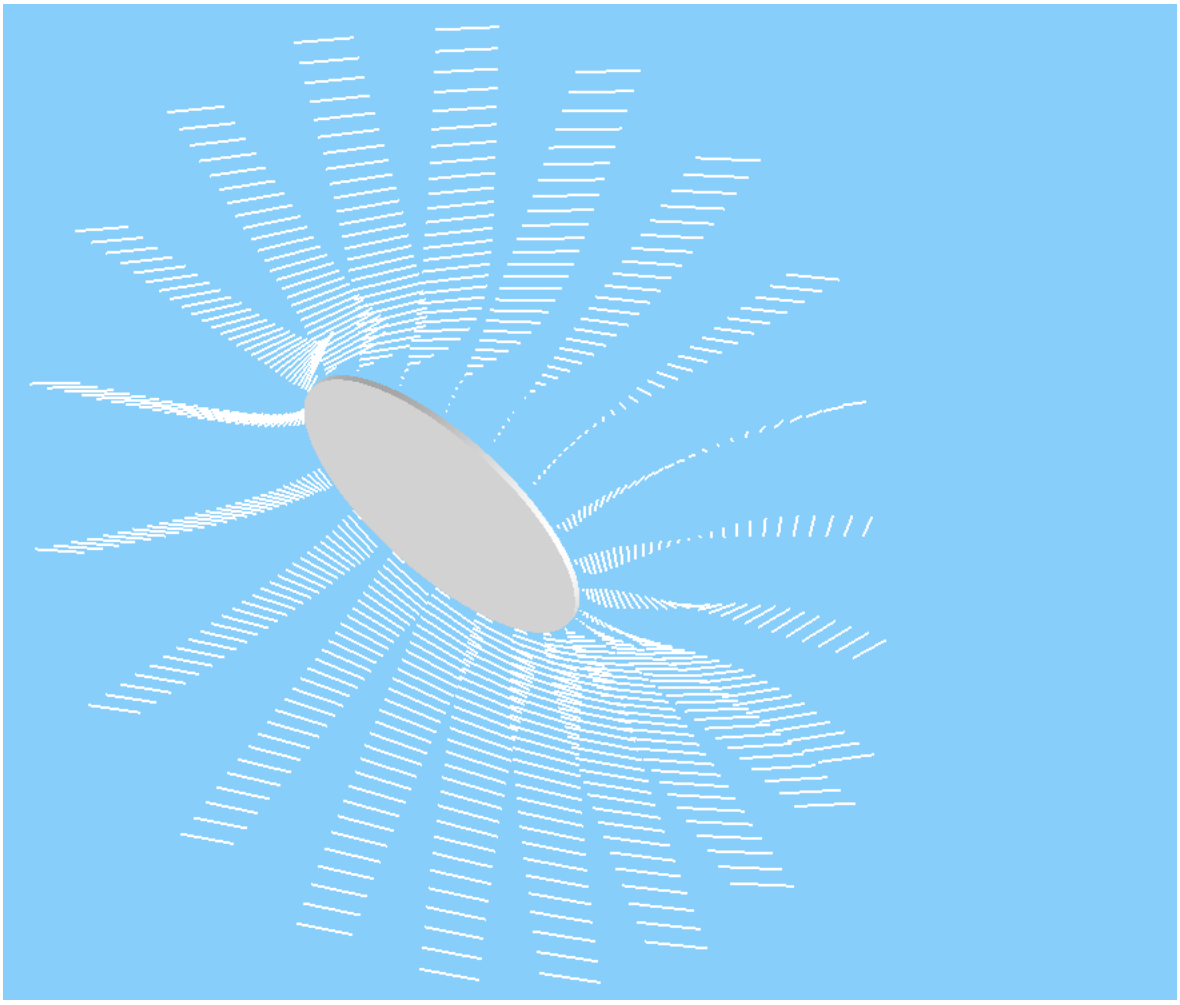


Рис. 5.19. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Векторное поле.

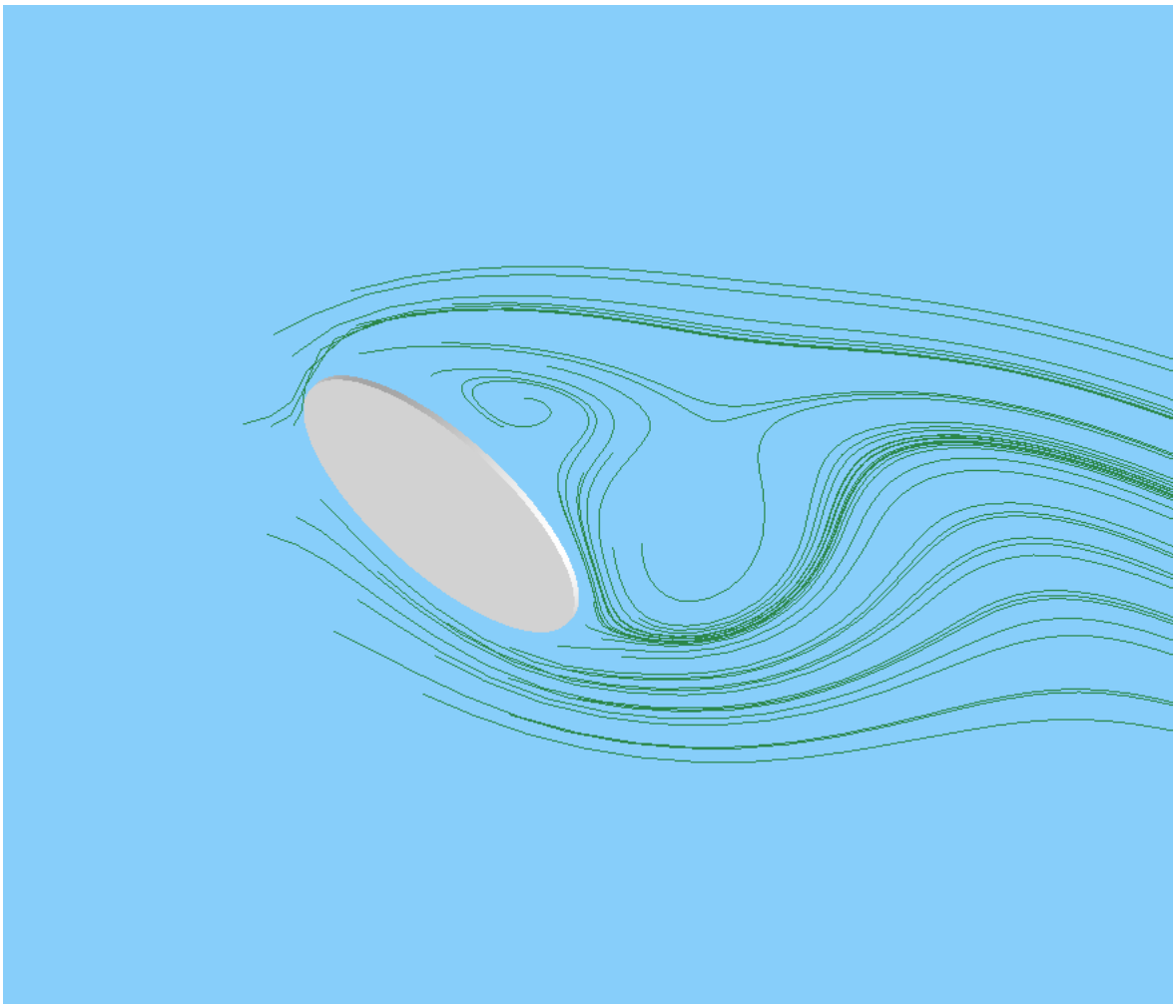


Рис. 5.20. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Функция тока.

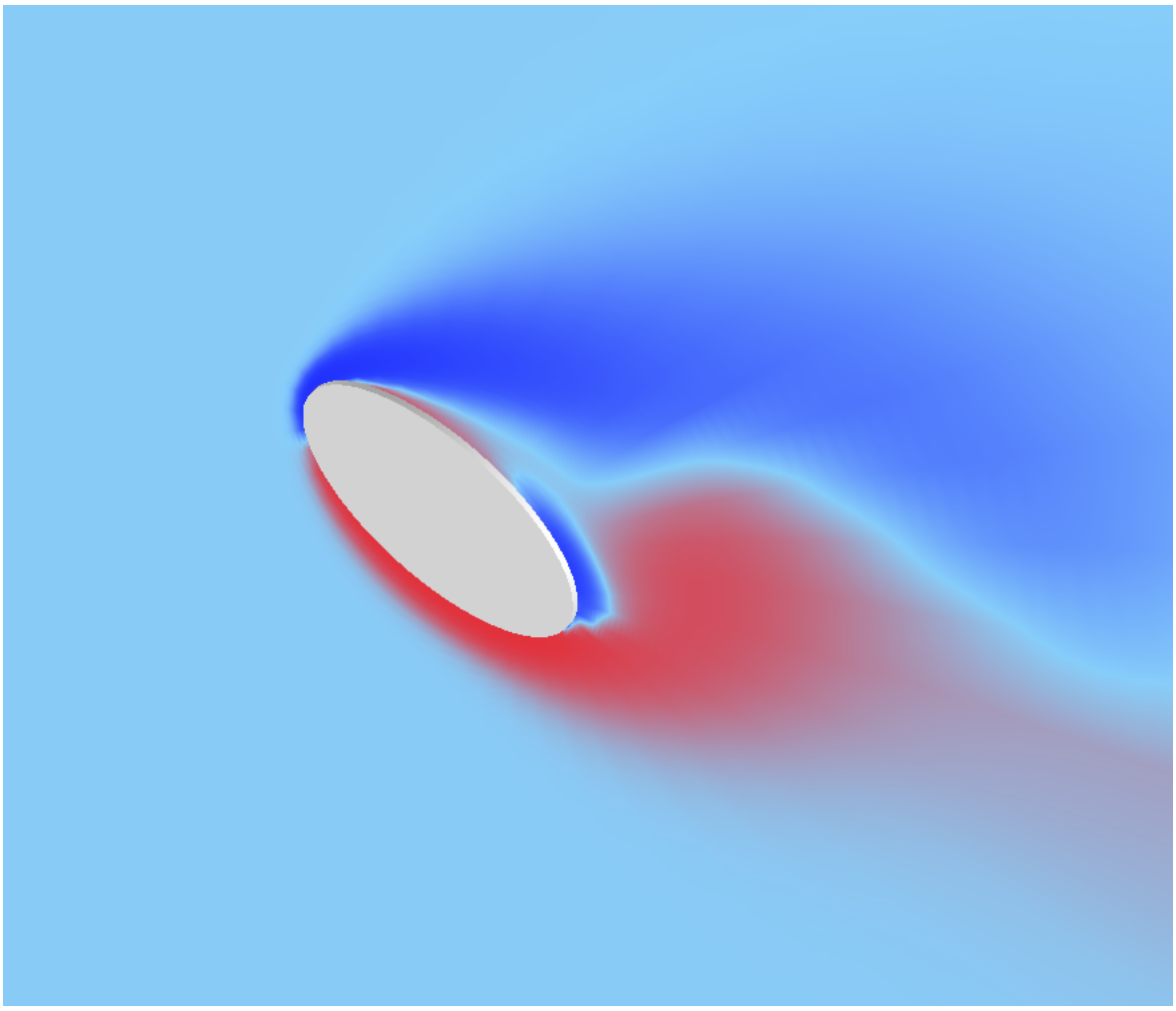


Рис. 5.21. Поток Навье-Стокса с вихревым условием прилипания. Функция ротора.