ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации Горшкова Алексея Вячеславовича "Граничное условие прилипания для вихревой функции в уравнениях гидродинамики"
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика

Работа А.В.Горшкова посвящена изучению вихревой динамики плоскопараллельных течений во всем пространстве, обтекающих ограниченное тело с условием прилипания на границе для класса решений с бесконечной энергией, которые удовлетворяют вихревым уравнениям во внешности ограниченной области.

Исследования динамики течения несжимаемой жидкости в вихревой форме является весьма актуальной проблемой гидродинамики, особенно в задачах обтекания тел в жидкой среде. Начало этих исследований восходит к работам Гельмгольца, Томсона, Фридмана. Постановка как распределенного, так и граничного условия прилипания для функции вихря также активно исследовалась, начиная с середины прошлого века. Особенностью данной работы является исследование условий прилипания для внешней области, в которой строятся как распределенные, так и граничные условия, и которые имеют свои отличительные особенности. Преимущество вихревых уравнений заключается в том, что для системы Навье-Стокса, записанной в форме скорость-ротор, уравнения для вихря включает меньшее число уравнений и неизвестных функций, чем в форме скорость-давление. Однако сложность этого подхода заключается в том, что краевое условие ставится в терминах завихренности. В отличие от задачи Коши во всем пространстве, в которой вовсе нет граничного условия, что существенно упрощает решение, для начально-краевой задачи с заданной областью краевое условие Дирихле остается сложным интегральным соотношением. При этом возникает проблема перенесения известного принципа ортогональности на внешность области для течений с бесконечной энергией.

В диссертации доказывается теорема об однозначной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи для внешности плоской ограниченной области с заданным внешним потоком на бесконечности. В работе также выведены оценки энергетического типа для решений в пространствах L_2 и H^1. Автором получены явные формулы для решения задачи Стокса с условием прилипания для вихревой функции с использованием метода Фурье, который в данной задаче сводится к вырожденному преобразованию Вебера, связанному с третьим краевым условием, причем формула обращения необходимо расширяется за счет спектрального разложения по функциям из ядра преобразования Вебера.

В первой главе исследуются специальные вырожденные интегральные преобразования, использующие функции Бесселя, которые становятся основным инструментом построения граничных условий для задачи обтекания диска. Эти преобразования, которые называются преобразованиями Вебера, аналогичны преобразованиям Фурье, но отличаются от них, тем, что имеют нетривиальное ядро, поэтому в аналоге тождества Планшереля и в формуле обращения появляются дополнительные члены, порожденные ядром преобразования. Преобразования Вебера связаны с радиальными функциями оператора Лапласа в полярных координатах с граничным условием третьего рода. Выводится формула спектрального разложения, которая применяется в последующих главах в исследовании линейной и нелинейной динамики вихревого течения. Следует отметить, что автор нашел применение именно для вырожденного преобразования Вебера, с помощью которого решена классическая нестационарная задача Стокса обтекания бесконечного цилиндра. В этом заключается особая ценность работы.

Во второй главе выводится формула решения в вихревой форме для задачи обтекания диска. В этой главе исследуется разрешимость задачи дивергенция-ротор с условием прилипания, выводятся интегральные условия (так называемые условия ортогональности), из которых получается граничное условие смешанного типа. Формула решения линейного нестационарного уравнения вихря в задаче обтекания выводится с помощью преобразования Вебера, и при этом получаются оценки разрешающей полугруппы. Отметим, что использование вырожденного преобразования Вебера позволило по-новому объяснить парадокс Стокса об отсутствии стационарного решения задачи.

Третья глава посвящена распространению результатов предыдущей главы для решения линейной задачи дивергенция-ротор с условием прилипания во внешности произвольной ограниченной односвязной области на плоскости. В ней с помощью конформных отображений выводятся интегральные условия ортогональности и граничные условия смешанного типа для односвязной области с гладкой границей, аналогичные рассмотренным условиям во второй главе. В ней вместо Lp-Lq оценок выводятся энергетические оценки решений задачи дивергенция-ротор. Отметим, что поле скорости восстанавливается по ротору не всегда однозначно. Установлена однозначная разрешимость задачи дивергенция-ротор для векторных полей с нулевым граничным условием и заданным на бесконечности внешним потоком и получены оценки решений в пространствах Соболева. Кроме того, выведен модифицированный закон Био-Савара. Результаты этой главы проиллюстрированы примерами конкретных областей, получаемых посредством преобразования Жуковского, для которых построены графики векторного поля, функций ротора и тока для линейного потока Стокса.

В четвертой главе строится вихревое условие прилипания для нелинейной 2D системы Навье-Стокса, которое находится как псевдо-управление. Во второй главе показано, что условие прилипания порождает инвариантное многообразие, то есть, граничное условие предписывает решению оставаться на этом многообразии и, тем самым решается задача граничного управления нелинейного уравнения Гельмгольца, моделирующего нелинейную вихревую динамику в задаче обтекания. Само условие прилипания является распределенным во внешней области условием на функцию ротора и задается в форме инвариантного многообразия. Граничное управление становится инструментом, с помощью которого решение остается на этом многообразии. Также доказывается локальная разрешимость для уравнения Гельмгольца с граничным управлением. Псевдо-управление имеет вид суммы граничного условия и малой добавки, распределенной по всей внешней области. С помощью теоремы о сжимающем отображении доказывается существование граничного условия, распределенного только по границе области.

В пятой главе граничное управление применяется в задаче стабилизации. С помощью интегральных преобразований Ганкеля для системы Стокса строится граничное условие для ротора векторного поля, обеспечивающего степенную стабилизацию функции вихря. Для системы Навье-Стокса с применением теории инвариантных многообразий эволюционных уравнений строится граничное условие. В задачах стабилизации ключевым методом является метод устойчивых многообразий, который использовался в работах А.В.Фурсикова для стабилизации решений двумерной системы Навье-Стокса в ограниченных областях, для которых получается экспоненциальная скорость сходимости. Автор успешно применил этот метод для стабилизации решений 2D системы Навье-Стокса для неограниченной области, при этом актуальной становится степенная скорость сходимости, причем степень может быть произвольно большой. Доказана теорема о существования граничного управления, которое обеспечивает сходимость к заданному горизонтальному течению с заданной степенной скоростью.

При написании диссертации автор продемонстрировал владение математическим аппаратом в теории интегральных преобразований, спектральной теории самосопряженных операторов, в теории разрешимости линейных и нелинейных уравнений и систем математической физики, теории управления. Ему удалось решить ряд сложных задач, которые служили исследованию граничной задачи Гельмгольца. Это задача дивергенция-ротор, энергетические оценки соответствующих эллиптических систем, задача спектрального разложения оператора Лапласа с третьим краевым условием, которое приводит к изучению вырожденного преобразования Вебера, которое также подробно описано в диссертации. При изучении двумерных систем Стокса и Навье-Стокса во внешности произвольных областей были использованы методы комплексного анализа с

применением отображения Римана. Нелинейные уравнения исследуются методами возмущения линейных задач с применением теорем о неподвижной точке. Большой интерес вызывает метод псевдо-управления на инвариантном многообразии, который эффективно применен в задаче с неограниченной областью.

Тема диссертации является весьма актуальной. Хотя исследования носят теоретический характер, их результаты имеют очевидные практические приложения, поскольку позволяют получать численные решения задач обтекания уравнений гидродинамики с экономией вычислительных затрат, используя явные формулы для решений, аналогично тому, как это делается при решении обычного уравнения теплопроводности во всем пространстве с помощью преобразования Фурье. Только в изучаемых задачах классическое преобразование Фурье заменяется на преобразование Вебера, для которого также есть эффективные формулы обращения.

Выводы диссертации обоснованы и верны. Приведены подробные доказательства всех утверждений и теорем. Цитируемая литература достаточно полно освещает историю вопроса и позволяет сопоставлять некоторые из полученных автором результатов с ранее известными результатами. Автором проведен ряд вычислительных экспериментов, как для линейных задач Стокса, так и нелинейных задач Навье-Стокса в разных областях, которые подтверждают верность теоретических результатов диссертации.

Полученные результаты являются новыми и весьма перспективными. По-видимому, разработанные в диссертации методы могут быть в значительной мере применены к решению аналогичных, но еще более сложных задач дивергенция-вихрь в задачах обтекания ограниченных областей в трехмерном пространстве с условиями прилипания. Такое продолжение может привести к новым интересным открытиям в математической гидродинамике.

Диссертация А.В.Горшкова является вполне законченным исследованием, она хорошо структурирована, имеет удобное оформление, она легко читается, написана на высоком математическом уровне и свидетельствует о высокой математической культуре автора.

К недостаткам работы я бы отнес недостаточное описание в тексте численных экспериментов, результаты которых представлены в приложении. Имеются только краткие отсылки во введении и в автореферате. В приложении этому уделена всего 1 страница. К сожалению, я не нашел в диссертации более подробные описания представленных графиков, поэтому пришлось догадываться, к каким главам они служат иллюстрациями, что, впрочем, было несложно сделать.

Автореферат диссертации, в котором подробно излагается история проблемы, а также излагаются основные результаты, выделяются методы

исследования и формулируются выводы, хорошо соответствует содержанию диссертации.

Результаты диссертации достаточно полно изложены в 11 работах, написанных автором единолично, без соавторов, которые опубликованы в ведущих математических журналах, и представлены на многих семинарах и конференциях, проводимых в ведущих математических центрах России.

Считаю, что диссертация А.В.Горшкова удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в п.9 Положения ВАК РФ о присуждении ученых степеней и безусловно заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 – "Дифференциальные уравнения и математическая физика".

Официальный оппонент

Чепыжов Владимир Викторович

доктор физико-математических наук (специальность 05.13.17 – "Теоретические основы информатики"), и.о. главного научного сотрудника, и.о. заведующего Лабораторией № 1 им. М.С. Пинскера Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук.
127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1.
Телефон: +7 (495) 650-42-25
email: chep@iitp.ru

1 октября 2024 г.

Подпись В.В.Чепыжова заверяю

Подпись
Чепыжов Владимир Викторович
УДОСТОВЕРЯЮ
Зав. канцелярией