ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Горшкова Алексея Вячеславовича «Граничное условие прилипания для вихревой функции в уравнениях гидродинамики» по специальности 1.1.2 — «дифференциальные уравнения и математическая физика» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Диссертация А.В. Горшкова посвящена исследованию двумерного уравнения Гельмгольца для завихренности течения со смешанным краевым условием во внешности односвязной области. Тема исследования является актуальной — уравнение вихря находит применение в геофизической гидродинамике, в различных двумерных задачах, или в трехмерных задачах, где граничные условия для ротора имеют удобное представление, будь то задача с периодическими условиями, задача на многообразиях без края, или задача Коши. В диссертации исследуется двумерная краевая задача в неодносвязной неограниченной области с непустой границей. Двумерные краевые задачи для вихревых течений в односвязных областях очень активно изучались с помощью бигармонических уравнений многими математиками. Постановка граничных вихревых условий через функцию Грина изучалась Андерсоном, Руасом. Взаимосвязь вихревого краевого условия с условиями на функцию тока, или поле скоростей была исследована большим количеством математиков. Соответственно само уравнение Гельмгольца дополнялось еще одним или несколькими уравнениями на функцию тока, или на вектор-функцию поля скоростей.
Однако вопросы построения таких условий для неограниченных областей, а также применение их для решения задач стабилизации для уравнений Навье-Стокса недостаточно хорошо изучены. Решению указанных открытых ранее вопросов и посвящена диссертационная работа Горшкова А.В.

В диссертации линеаризация уравнения Гельмгольца с применением функции Грина приводит к нелокальному граничному условию смешанного типа для завихренности (ротора). И это условие не является универсальным, и строго определяется самим уравнением движения. Методом теории возмущений в диссертации находится граничное условие нелинейной задачи. Полученное смешанное краевое условие, как отмечает автор, ранее относилось к нефизическим условиям. Появление этого условия в задаче обтекания актуализирует такого рода условия.

Диссертация состоит из пяти глав, списка литературы из 118 наименований. Объём диссертации составляет 226 страниц.
Во введении обосновывается актуальность темы исследования, приведен обзор работ по теме диссертации, формулируются цель и задачи работы, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, описаны методы, используемые при работе над диссертацией, сформулированы основные

научные результаты, полученные в ходе исследования, обоснована достоверность полученных результатов, приведен список научных мероприятий, на которых проходила апробация диссертационной работы, описаны структура и краткое содержание диссертации.

В первой главе исследуется спектральная задача для оператора Лапласа с условием Робина. Она имеет важное значение, поскольку в ней выводится математический аппарат для дальнейшего исследования. Получен важный результат о спектральном разложении, включающим одновременно точечный и непрерывный спектр.

Результаты первой главы позволяют в последующей главе методом Фурье решить задачу Гельмгольца во внешности круга для покоящегося, вращающегося и движущегося круга. Во второй главе также получены оценки линейной полугруппы, которые станут основой для исследования нелинейных задач.

В третьей главе доказывается однозначная разрешимость задачи нахождения векторного поля по роторной функции при ряде дополнительных ограничений, включающих ограничение на циркуляцию на бесконечности, и счетного набора дополнительных интегральных условий. Эта глава также имеет важное значение для исследования уравнения Гельмгольца. Нелинейное уравнение Гельмгольца включает в себя помимо ротора также и само векторное поле. И в третьей главе получены важные оценки этого векторного поля в пространстве L2. Отдельным важным результатом являются L2 оценки закона Био-Савара. Также в этой главе найдено нелокальное граничное условие смешанного типа для ротора во внешней области.

В четвертой главе доказывается однозначная разрешимость уравнения Гельмгольца с помощью теоремы о сжимающих отображениях. Это важный и одновременно технически сложный результат, поскольку доказывается существование решения уравнения Гельмгольца как интегро-дифференциального уравнения. В доказательстве задействуются полученные ранее оценки как линейной полугруппы решений, так и оценка решения задачи дивергенция-ротор. Граничное условие также находится с помощью теоремы о сжимающих отображениях с применением инвариантных подпространств. Этот результат позволяет вместо задач со сложным распределенным условием решать краевую задачу для вихревого уравнения без дополнительных уравнений на функцию тока или скорость течения.

В пятой главе рассматривается спектральная задача для модифицированного оператора Лапласа в неограниченной области. Вместо непрерывного спектра, эта задача с новым оператором обретает исключительно точечный спектр и полную систему собственных функций. С её помощью с применением теории инвариантных многообразий получен результат о стабилизации вихревого уравнения во внешности области.

В заключении диссертации сформулированы основные научные результаты, полученные в процессе диссертационного исследования и указаны перспективы дальнейшей разработки темы. Список литературы дает полное

представление о методах и предшествующих результатах по теме диссертации.

По тексту диссертации имеются следующие вопросы и замечания:

1. Странная нумерация Предложений, лемм, теорем. Например, после определения 1.3.3 идет первая лемма 1.3.4, затем Предложение 1.3.5.
2. Используются некорректные фразы. Например (глава 1), вместо «функции, определенные на E» написано «функции из E».
3. С.95. Используется обозначение B_1 и непонятно это единичный круг или его внешность?
4. С.101. Приведена оценка в L_q на плоскости, хотя скорость определена только в некоторой области.
5. В лемме 3.2.7 неясно почему функции w_N (N может должно быть верхним индексом) должны быть ограниченными равномерно в H^1?
6. С.131. В формуле для функции Грина не указано, что за функция T(x).
7. В теореме 4.3.1 утверждается, что w\in C([0,\infty), L^2), т.е. величина sup{\| w\|, t>0} конечна, но это не следует из полученной оценки.
8. Для задачи (5.1.1)-(5.1.3) не указано где определено управление и какова гладкость границы.
9. В (5.1.12) не указана связь между параметрами n,k.
10. Одно и тоже обозначение для номера коэффициента Фурье и показателя скорости стабилизации создает путаницу.
11. В теореме 5.2.5 видимо следует указывать промежуток [0,T] в пространстве для w.
12. Часто не указываются явно значения параметров. Видимо предполагается, что они такие же, как и ранее. Например, при постановке задачи в (5.2.4) не указано откуда параметр k.
13. Имеются опечатки, например на стр. 33, 75, 97, 171, 182.

Указанные замечания не являются принципиальными и не снижают научной значимости полученных автором диссертации результатов.

Особо отметим, что проблемы, решенные автором, ранее были открытыми. Для их решения автор модифицировал классические методы анализа линейных и нелинейных краевых задач. Текст диссертации ясный и понятный, что, вместе с уровнем представленных результатов, говорит о высокой квалификации автора. В приложении автор проиллюстрировал теоретический анализ численными примерами стабилизации.

Заключение

Диссертационная работа Горшкова А.В. «Граничное условие прилипания для вихревой функции в уравнениях гидродинамики» является законченной научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в области теории дифференциальных уравнений. Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствует о личном вкладе автора в науку. Диссертация имеет

теоретический характер и ее выводы могут быть использованы при дальнейшем развитии качественной теории дифференциальных уравнений, имеющих приложения в механике сплошных сред. Полученные автором результаты строго математически обоснованы и их сравнение с известными результатами свидетельствует о важных научных достижениях Горшкова А.В. Основные результаты диссертации докладывались на серьезных Российских научных конференциях, опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК России для публикации основных результатов диссертации на соискание ученой степени доктора наук.

Тема диссертационной работы актуальна. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность и новизна не вызывают сомнений. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика. Диссертация Горшкова Алексея Вячеславовича соответствует требованиям действующего Положения о присуждении ученых степеней к диссертациям, представленным на соискание ученой степени доктора наук. Автор диссертации Горшков Алексей Вячеславович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:
профессор департамента математического и компьютерного моделирования Института математики и компьютерных технологий Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Дальневосточный федеральный университет» (690922, Приморский край, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10. +79147064922, chebotarev.ayu@dvfu.ru, www.dvfu.ru), доктор физико-математических наук (01.01.02 — дифференциальные уравнения), профессор

Чеботарев Александр Юрьевич
10.09.2024

Подпись А.Ю. Чеботарева удостоверяю

Подпись А.Ю. Чеботарева
удостоверяю
ДИРЕКТОР ДЕПАРТАМЕНТА
КАДРОВОГО АДМИНИСТРИРОВАНИЯ ДВФУ
НАУМОВА Л.В.
"10" "09" 2024