ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Фроленкова Дмитрия Андреевича

«Свертки обобщенных функций числа делителей в различных задачах теории чисел», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Диссертация Д.А.Фроленкова посвящена исследованию ряда актуальных задач аналитической теории чисел, объединенных общим свойством: при их решении важную роль играют обычные и взвешенные суммы, связанные с обобщенными функциями числа делителей. Среди этих задач классическая аддитивная проблема делителей, изучение длин цепных дробей, а также L-функции модулярных форм. Некоторые из этих задач уже стали классическими (хотя по-прежнему далеки от полного и окончательного решения), интерес к другим особенно усилился в-90-ые годы прошлого века, в связи с многочисленными приложениями. В любом случае все задачи, рассмотренные автором, представляют значительный интерес и работа несомненно является актуальной.

Следует отметить достаточно неожиданный подход автора к выделению круга рассматриваемых задач на основе появления в них сверток функций числа делителей, а также их обобщений. Это позволило увидеть новые связи между вопросами, которые ранее казались несвязанными между собой, что, безусловно, может послужить источником дальнейших обобщений и открытий. При этом для ряда рассматриваемых вопросов обнаружение их связи с свертками функций числа делителей является заслугой автора.

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы из 142 наименований. Объем диссертации составляет 273 страницы.

Во введении подробно обосновывается актуальность работы, описывается история рассматриваемых вопросов, а также дается краткое описание содержания диссертации.

Первая глава диссертации посвящена классической аддитивной проблеме делителей, которую можно рассматривать как простейший пример свертки для функции числа делителей. Эта задача восходит еще к Ингаму. Среди многочисленных математиков, внесших вклад в ее решение, можно отметить Эстермана, Хисбрауна, Кузнецова, Иванца и др. Также необходимо отметить многочисленные связи данной задачи с такими вопросами, как представления натуральных чисел неопределенной квадратичной формой $xy-zt$, оценки для сумм сумм Клостермана и оценки четвертого момента дзета-функции Римана. Наилучшая на данный момент оценка остаточного члена задачи была получена в 2001 году Меурманом. В первой главе диссертации автор дает новое доказательство этого результата, основанное на методе, предложенном ранее Мотохаши, Улучшение достигается за счет получения и использования новой оценки на некоторые интегралы от гипергеометрических функций.

Вторая глава диссертации посвящена задаче о среднем значении длин цепных дробей рациональных чисел с фиксированным знаменателем. Главный член асимптотики этой задачи был получен Хейльбронном. В 1975 году Портер получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами и степенным понижением в остатке. В дальнейшем в этом направлении было получено множество результатов, из которых мы упомянем здесь работы Устинова, посвященные решению задачи Арнольда о статистиках Гаусса-Кузьмина, однако улучшить сам результат Портера никому не удавалось. В диссертации получено улучшение показателя степени в остаточных членах асимптотических формул Портера и Устинова. В основе доказательства лежит принципиально новый метод, основанный на использовании некоторой специальной свертки обобщенных функций делителей, введенной ранее Рамануджаном. Для этой свертки автором получена новая асимптотическая формула, которая представляет и самостоятельный интерес.

Оставшиеся главы диссертации посвящены применению сверток для изучения L-функций модулярных форм. Отметим, что возникающие при этом

задачи, с одной стороны, являются аналогами классических задач о дзета-функции Римана, а, с другой стороны, имеют неожиданные приложения к целому ряду других теоретико-числовых задач.

В третьей главе автором получена асимптотическая формула для второго момента L-функций параболических модулярных форм в точках вида $½+it$. Эта оценка является равномерной как по весу и уровню формы, так и по аргументу L-функции. Кроме того, результат верен даже для случая форм минимального веса, который обычно приходится рассматривать отдельно.

В четвертой и пятой главах изучается так называемая пропорция необнуляемости L-функций модулярных форм. Данная величина представляет собой долю модулярных форм из базиса Гекке пространства параболических форм заданного уровня и веса, L-функции которых не обращаются в нуль в точке ½. Иванец и Сарнак фактически показали, что в случае растущего бесквадратного уровня пропорция необнуляемости не меньше, чем ¼. Важно отметить, что из улучшения данной оценки следовала бы знаменитая гипотеза об отсутствии нулей Ландау-Зигеля у классических L-функций. Также упомянутый результат был ключевым ингредиентом работ Ковальского-Мишеля по оценке ранга якобиана модулярной кривой. В четвертой главе рассматривается случай модулярных форм растущего уровня, являющегося степенью простого числа и доказывается результат, по силе совпадающий с результатом Иванца-Сарнака и улучшающий ранее известный результат Роуми. В пятой главе рассматривается случай, когда уровень равен 1, а вес стремится к бесконечности. В этом случае из результатов Иванца и Сарнака вытекает нижняя оценка для усредненной пропорции необнуляемости. В 2015 году Луо показал, что в этом случае пропорция необнуляемости без усреднения строго больше 0. В диссертации получена первая эффективная оценка снизу для пропорции необнуляемости в данном случае. Ключевую роль в результатах четвертой и пятой главы сыграли полученные автором результаты о первых и вторых моментах L-функций параболических форм, с весами, равными собственным значениям операторов Гекке.

В шестой главе автор изучает кубические моменты L-функций параболических форм в точке ½. Данная тематика восходит к работам Иванца и Конри. Доказывается гипотеза Китинга-Конри-Рубинштена-Снайса-Фармера о поведении главного члена асимптотики для таких моментов, а также новая оценка остаточного члена, улучшающая более раннюю оценку Пенга. В качестве следствия получена наилучшая на данный момент оценка на значение L-функций параболических форм в точке ½ в случае растущего веса. Отметим, что подобные оценки крайне важны в задачах, связанных с арифметической строгой квантовой эргодичностью, а также при перечислении мнимых квадратичных полей с малым числом классов.

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах в ведущих российских и международных журналах, входящих в список ВАК и индексируемых в международных системах цитирования. Автореферат правильно и полно отображает содержание диссертации.

Работа носит теоретический характер. Результаты являются новыми и значительно улучшают предшествующие. Все результаты строго доказаны. Изложение достаточно ясное и полное. Диссертация вносит существенный вклад в развитие аналитической теории чисел, особенно в теорию L-функций автоморфных форм. Некоторые результаты могут быть также интересны специалистам в области алгебраической геометрии, особенно в области эллиптических кривых и абелевых многообразий.

По диссертации имеются следующие замечания.

1. С точки зрения дальнейших приложений в главе 4 стоило бы (аналогично тому, как это сделано в главе 5) избавится от весов при определении пропорции необнуляемости.
2. Некоторые величины начинают использоваться до определения. Например, H_{2k} впервые появляется на с. 18, а его определение – на с. 166. Определений некоторых величин (например, из формулы (1.4)) я вообще не нашел.

3. Автор иногда ссылается по номерам на утверждения из других работ, не формулируя эти утверждения. Это затрудняет чтение.
4. На с. 211-212 в тексте появляются английские слова.
5. Замечание по оформлению: в работе большинство номеров страниц проставлены сверху, что непривычно и неудобно. При этом номера некоторых страниц проставлены снизу.

Указанные замечания ни в коей мере не влияют на высокую оценку диссертации.

Диссертация Фроленкова Дмитрия Андреевича «Свертки обобщенных функций числа делителей в различных задачах теории чисел» представляет собой законченное научное исследование, полностью удовлетворяющее всем требованиям действующего Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор заслуживает присуждения данной ученой степени по специальности 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:
Шутов Антон Владимирович, доктор ф.-м. наук,
доцент, профессор кафедры "Вычислительная техника
и системы управления" ФГБОУ ВО «Владимирский
государственный университет имени Александра Григорьевича и
Николая Григорьевича Столетовых»
60000 Владимир, ул. Горького, 87
(специальность 1.1.5 Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика)
+7(905)055-62-71, a1981@mail.ru

9.01.25

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
УЧ. СЕКРЕТАРЬ ВлГУ
КОЧНОВА Т. Г.