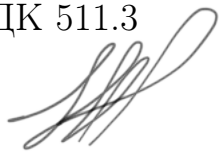
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

На правах рукописи

УДК 511.3



Фроленков Дмитрий Андреевич

Свертки обобщенных функций числа делителей в различных задачах теории чисел

Специальность 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2024

Работа выполнена в отделе теории чисел Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт имени В.А. Стеклова Российской Академии наук.

Научный консультант:

Быковский Виктор Алексеевич–доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник ХО ФГБУН Института Прикладной Математики ДВО РАН (специальность 01.01.06)

Официальные оппоненты:

Петров Федор Владимирович–доктор физико-математических наук, профессор факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета (специальность 01.01.01)

Попов Дмитрий Александрович–доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института физико-химической биологии имени А.Н. Белозерского МГУ имени М.В.Ломоносова (специальность 01.01.06)

Шутов Антон Владимирович–доктор физико-математических наук, профессор Владимирского государственного университета им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир) (специальность 1.1.5)

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Защита диссертации состоится 6 марта 2025г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу 119991, Москва, ул. Губкина, д.8. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова и на сайте МИАН https://mi-ras.ru/dis/ref24 /frolenkov/dis.pdf

Автореферат разослан ____ ноября 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
24.1.167.03 при МИАН,
доктор физико-математических наук Д. В. Осипов

Актуальность темы

Определим обобщенные функции числа делителей следующим образом

$$\tau_v(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^v = n^{-v}\sigma_{2v}(n), \quad \sigma_v(n) = \sum_{d|n} d^v. \tag{1}$$

Настоящая диссертация посвящена изучению сумм вида

$$\sum_{n=1}^{M} \tau_u(n)\tau_v(n+f), \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{M} \tau_u(n)\tau_v(M-n), \tag{3}$$

а также различных задач, связанных с этими суммами. По аналогии с дискретным преобразованием Фурье выражения (2), (3) принято называть свертками функций числа делителей. Классической проблемой, за решение которой на протяжении всего 20 века брались многие известные специалисты в области аналитической теории чисел, такие как Дезуе, Иванец, Ингам, Кузнецов, Мотохаши, Меурман, Хис-Браун, Эстерман, является получение асимптотических формул для сумм (2) с

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad M \to +\infty$$

и как можно больших значений параметра f. Так, Ингаму[1] удалось впервые выделить главный член асимптотической формулы для (2), Эстерману[2] – доказать оценку остатка $O(N^{11/12+\epsilon}f^{1/6})$, Исмоилову[3] и Хис-Брауну[4] – получить остаток $O_f(N^{5/6+\epsilon})$. Начиная с работы Эстермана стало понятно, что изучение суммы (2) сводится к исследованию сумм сумм Клоостермана, определяемых в самом простом случае как

$$S(m,n;c) = \sum_{\substack{0\le x\le c-1\\(x,c)=1}} \exp\left(2\pi i\frac{mx+n\overline{x}}{c}\right), \quad x\overline{x} \equiv 1 \pmod{c}. \tag{4}$$

---

[1] A. E. Ingham, *Some asymptotic formulae in the theory of numbers*, J. London Math. Soc., **2** (1927), 202–208.

[2] T. Estermann, *Über die darstellung einer zahl als differenz von zwei produkten*, J. Reine Angew. Math., Vol. 164, 1931, 173–182.

[3] Д.И. Исмоилов, *Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений*, Докл. АН ТаджССР, 22 (1979), 75–79

[4] D. R. Heath-Brown, *The fourth power moment of the Riemann zeta function*, J. London Math. Soc (3) 38 (1979), 385–422.

Для данных сумм известна оценка Вейля[5,6]:

$$|S(m,n;c)| \leq \tau_0(c)\sqrt{(m,n,c)}\sqrt{c}. \tag{5}$$

Благодаря применению этой оценки Хис-Брауну удалось усилить результат Эстермана. Заметим, что по модулю оценка Вейля оптимально. С другой стороны, при усреднении по c имеет место значительное сокращение между суммами Клоостермана. Знаменитая гипотеза Линника[7,8] гласит

$$\sum_{c\leqslant x} \frac{S(m,n;c)}{c} \ll (|mn|x)^{\epsilon}. \tag{6}$$

Огромный прорыв в изучении сумм сумм Клоостермана произошел благодаря полученной Кузнецовым[9] формуле, называемой сейчас формулой следа Кузнецова, выражающей суммы сумм Клоостермана через билинейные комбинации коэффициентов Фурье параболических автоморфных форм модулярной группы. Как следствие доказанной им формулы, Кузнецов получил в (6) оценку $O(x^{1/6+\epsilon})$, которая до сих пор не была улучшена. Аналогично и все последующие результаты об асимптотиках (2) и (3) так или иначе опираются на формулу Кузнецова. Почти сразу Дезуе и Иванцом[10] при малых f была получена оценка $O(M^{2/3+\epsilon})$ на остаток в асимптотической формуле для (2). Совершенно другим методом аналогичный результат был получен Виноградовым и Тахтаджяном[11]. Данные работы были вскоре несколько улучшены Кузнецовым[12], который доказал асимптотическую формулу с остатком $O(M^{2/3+\epsilon}f^{1/6+\epsilon})$. Уточняя подход Кузнецова, Мотохаши[13] показал, что остаток не превосходит величину

---

[5] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 34, (1948), 204–207.

[6] T.Estermann, *On Kloosterman's sum*, Mathematika, 8 (1961), 83–86.

[7] Yu. V. Linnik, *Additive problems and eigenvalues modular operators*, Proc. of the International Congress of Math., Stockholm, 1962, 270–284.

[8] P. Sarnak, J. Tsimerman, *On Linnik and Selberg's conjecture about sums of Kloosterman sums*, in Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, Vol. II, Progress in Mathematics, vol. 270 (Birkhïauser, Boston, MA, 2009), 619–635.

[9] Н.В.Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана*, Матем. Сб., 111(153):3 (1980), 334–383.

[10] J.-M. Deshouillers, H. Iwaniec, *An additive divisor problem*, J. London. Math. Soc., Vol. 26(2), 1982, 1–14.

[11] А. И. Виноградов, Л. А. Тахтаджян, *Дзета-функция аддитивной проблемы делителей и спектральное разложение автоморфного лапласиана*, Автоморфные функции и теория чисел. II, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 134, Изд-во Наука, Ленинград. отд., Л., 1984, 84–116.

[12] Н. В. Кузнецов, *Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна-Мааса*, Записки научн. семин. ЛОМИ, **129** (1983), 43–84.

[13] Y. Motohashi, *The binary additive divisor problem*, Annales scientifiques de l'École Normale Superieure 27:5 (1994), 529–572.

$$(M^2+Mf)^{1/3+\epsilon}+f^{1/8+\alpha/2}(M^2+Mf)^{1/4+\epsilon}+f^{1/2+\alpha}M^{\epsilon}$$

равномерно по $1 \le f \le M^{2/(1+2\alpha)}$, где α – степенной показатель в гипотезе Рамануджана-Петерссона (т.е. $\alpha = 0$ в предположении справедливости данной гипотезы, а наилучший известный результат Ким-Сарнака[14] позволяет положить $\alpha = 7/64$). На сегодняшний день, наилучший результат для сумм (2) принадлежит Меурману[15], которому удалось доказать следующую оценку на остаточный член в асимптотической формуле для суммы (2):

$$(M^2+Mf)^{1/3}M^{\epsilon}+(M^2+Mf)^{1/4}M^{\epsilon}\min\left(M^{1/4}, f^{1/8+\alpha/2}\right).$$

Таким образом, мы видим, что изучение даже простейшего случая сверток функций числа делителей неожиданно приводит нас (через суммы Клоостермана) к исследованию свойств автоморфных форм. Возникает естественный вопрос, а с какими еще задачами и областями математики связаны данные свертки. Исторически свертки (2) и (3) привлекли к себе внимание благодаря их связи с четвертым моментом дзета-функции Римана. Впервые внимание на это обратил Аткинсон[16], а Хис-Браун[4], используя свой результат о свертке (2), получил асимптотическую формулу для четвертого момента дзета функции Римана

$$\int_T^{2T} |\zeta(1/2+it)|^4 dt \tag{7}$$

с остатком $O(T^{7/8+\epsilon})$. Применяя формулу следа Кузнецова, Иванец[17] получил оценку на четвертый момент на коротком интервале:

$$\int_T^{T+T^{2/3}} |\zeta(1/2+it)|^4 dt \ll T^{2/3+\epsilon}.$$

На основе результатов Кузнецова о свертке (2) Заворотный[18] доказал асимптотическую формулу для (7) с остатком $O(T^{2/3+\epsilon})$.

---

[14] H. H. Kim (with appendices by D. Ramakrishnan, H. H. Kim and P. Sarnak), *Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric square of GL_2*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 139–183.

[15] T. Meurman, *On the binary additive divisor problem*, in Number Theory: Proc. Turku Symp. on Number Theory in Memory of Kustaa Inkeri, Turku, 1999, Ed. by M. Jutila et al. (W. de Gruyter, Berlin, 2001), 223–246.

[16] F.V. Atkinson, *The mean value of the zeta-function on the critical line*, Proc. London Math. Soc. (2) 47 (1941), 174–200

[17] H. Iwaniec, *Fourier coefficients of cusp forms and the Riemann zeta-function*, In Seminar on Number Theory, 1979-1980 (French), pages Exp. No. 18, 36. Univ. Bordeaux I, Talence, 1980

[18] Н.И. Заворотный, *О четвертом моменте дзета-функции Римана*, труды конференции Автоморфные функции и теория чисел I, 69–125, г.Владивосток, 1989.

Вообще, свертки (2) и (3), а также их обобщения оказываются тесно связанными не только с дзета-функцией Римана, но и с L-функциями автоморфных форм. Так Кузнецовым[12] практически сразу была получена формула, выражающая второй момент L-функций параболических форм Маасса модулярной группы через свертки (2) и (3). Аналогичная формула для случая голоморфных форм также была позже доказана Кузнецовым[19]. Таким образом, получились две формулы, являющиеся в каком-то смысле обращением друг друга, одна выражает свертки через моменты L-функций, а вторая – переводит вторые моменты в свертки. Данные формулы для вторых моментов стали основой для целого цикла работ, в которых были получены важные результаты о свойствах L-функций автоморфных форм. Так, для случая форм Маасса сначала Мотохаши[20] передоказал результат Кузнецова и вывел из него асимптотическую формулу для второго момента L-функций параболических форм Маасса с корневым понижением в остаточном члене, а также получил оценку на данный второй момент на коротком интервале (т.е. когда спектральный параметр формы Мааса лежит в интервале $(T, T+H)$). На основе работы Мотохаши Ивич[21] доказал оценку на третий момент на очень коротком интервале длины T^{ϵ}, из которой вывел наилучшую на сегодняшний день оценку на порядок роста центральных значений L-функций параболических форм Маасса $L_j(1/2) \ll t_j^{1/3+\epsilon}$. В следующей своей работе Ивич[22] получил асимптотические формулы для третьего момента с остатком $O(T^{5/4+\epsilon})$ и для четвертого момента с остатком $O(T^{3/2+\epsilon})$. Отметим, что асимптотическая формула для четвертого момента была впервые получена Кузнецовым [23]. Однако, в его работе были допущены некоторые ошибки, которые привели к очень хорошему остатку $O(T^{4/3+\epsilon})$, и на исправление которых отчасти и была направлена работа Ивича[22]. Отметим, что недавно Жи Чи[24] существенно улучшил результат Ивича о третьем моменте, доказав асимптотическую формулу с оптимальной корневой оценкой остатка $O(T^{1+\epsilon})$.

---

[19] Н.В. Кузнецов, *О среднем значении рядов Гекке*, препринт ИПМ ДВО РАН, г.Хабаровск 1994 г., 35 стр.

[20] Y. Motohashi, *Spectral mean values of Maass wave form L-functions*, J. Number Theory 42(1992), 258–284.

[21] A. Ivic, *On sums of Hecke series in short intervals*, J. de Thŷeorie des Nombres Bordeaux 14(2001), 554–568.

[22] A. Ivic, *On the moments of Hecke series at central points*, Funct. Approx. Comment. Math. 30 (2002), 49–82.

[23] Н.В. Кузнецов, *Ряды Гекке в центре критической полосы*, препринт ИПМ ДВО РАН, г.Хабаровск 1999 г., 27 стр.

[24] Z. Qi, *Proof of the Strong Ivic conjecture for the cubic moment of Maass-form L-functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2023, iss.22, p. 19205–19236.

Результаты о моментах L-функций позволяют не только оценить сверху рост их значений, но и исследовать долю L-функций с ненулевым центральным значением, т.е. $L_j(1/2) \neq 0$. Например, используя формулу Мотохаши для второго момента, Балканова, Содергрен и Хуанг[25] получили нижние оценки на долю форм Маасса с $L_j(1/2) \neq 0$ как на длинных, так и на коротких интервалах.

Как можно было заметить, все приведенные выше результаты относятся к L-функциям форм Маасса. Это объясняется тем, что хотя Кузнецов[19] и получил точную формулу для второго момента L-функций параболических голоморфных форм веса $2k$, выражающую этот момент через свертки (2) и (3), применить данный результат без дополнительного усреднения по весу k оказывается довольно сложно. Как в случае форм Мааса, так и в случае голоморфных форм мы получаем выражения вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_u(n)\tau_v(n+f)F_1(n,f), \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{M} \tau_u(n)\tau_v(M-n)F_2(n,M), \tag{9}$$

где F_1, F_2 некие функции, выражающиеся через гипергеометрические функции Гаусса. В случае форм Маасса получаются интегралы от гипергеометрических функций, а в случае голоморфных форм просто гипергеометрические функции. Присутствие интеграла позволяет учесть осцилляции гипергеометрических функций, что в свою очередь приводит к лучшей оценке остатка. По этой причине введение дополнительного усреднения по весу k голоморфных форм обычно позволяет получать результаты сопоставимые со случаем форм Маасса. Мы же в настоящей работе будем рассматривать (см. **главы** 5 и 6) самый технически сложный случай голоморфных форм фиксированного веса. Нами будет получена асимптотическая формула для второго подкрученного момента и выведена из нее оценка на долю форм с ассоциированной L-функцией, имеющей ненулевое центральное значение. Также на основе формулы Кузнецова для второго момента мы получим формулу для третьего момента и докажем новую оценку на порядок рост центральных значений L-функций голоморфных форм веса $2k$ при $k \to +\infty$.

Таким образом, свертки (8) и (9) играют важную роль при изучении моментов как дзета-функции Римана, так и L-функций автоморфных

[25] O. Balkanova, B. Huang, and A. Södergren, *Non-vanishing of Maass form L-functions at the central point*, Proc. Amer. Math. Soc., 149(2):509–523, 2021.

форм модулярной группы. Автоморфные формы можно рассматривать не только для модулярной группы, но и для конгруэнц подгрупп. При этом случае моменты L-функций сводятся к изучению обобщенных сверток, которые в самом общем виде[26] записываются как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_0(nr_1+f_1)\tau_0(nr_2+f_2)\omega_1\left(\frac{nr_1+f_1}{x_1}\right)\omega_2\left(\frac{nr_2+f_2}{x_2}\right), \qquad (10)$$

где ω_i-бесконечно гладкие функции с компактным носителем. Ввиду большого количества параметров мы не приводим итоговый результат, полученный Топакогуллари, но отметим, что в частном случае он соответствует результатам Мотохаши и Меурмана. Безусловно, Топакогуллари был далеко не первым, кто изучал (10). Такие суммы возникали во многих работах, например, в ставших классическими статьях Дьюка-Иванца-Фридландера[27,28] и работе Блумера-Мишеля-Харцоша[29]. В этих статьях как раз изучались L-функции примитивных форм произвольного уровня, а задача сводилась к суммам вида

$$\sum_{g}\frac{1}{g}\sum_{h}\chi(h)\sum_{ln\pm m=gh}\tau_0(n)\tau_0(m)g_l(n,m). \qquad (11)$$

Отметим, что если в работе[29] применялся подход Меурмана, то в статье[27] использовался принципиально другой метод, известный как δ-метод. Его основная идея заключается в том, чтобы расписать условие $ln\pm m-gh=0$ через суммы аддитивных характеров. Существует несколько вариаций данного метода, ставшего особенно популярным в последнее десятилетие благодаря циклу статей Мунши[30,31], применившего его для получения новых подвыпуклых оценок на различные L-функции. Особенностью δ-метода является то, что он практически никак не использует свойства функции числа делителей. Точнее, при применении δ-метода к свертке (11) важно лишь то, что $\tau(n)$ является коэффициентом Фурье рядов Эйзенштейна. Таким образом, δ-метод можно применять для изучения

[26] B.Topacogullari, *On a certain additive divisor problem*, Acta Arith. 181(2), 143–172 (2017).

[27] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, *A quadratic divisor problem*, Invent. Math., 115(2):209–217, 1994.

[28] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions. II*, Invent. Math., 115(2):219–239, 1994.

[29] V. Blomer, G. Harcos, and P. Michel, *Bounds for modular L-functions in the level aspect*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) ұ , 40(5): 697–740, 2007.

[30] R. Munshi, *The circle method and bounds for L-functions–III: t-aspect subconvexity for GL(3) L-functions*, J. Amer. Math. Soc., 28(4):913–938, 2015.

[31] R. Munshi, *The circle method and bounds for L-functions–IV: Subconvexity for twists of GL(3) L-functions*, Ann. of Math. (2), 182(2):617–672, 2015.

сверток коэффициентов любых автоморфных форм, что, в свою очередь, открывает перспективы решения широкого круга задач.

В настоящей диссертации (**главы** 3 и 4) мы рассмотрим моменты L-функции примитивных форм для различных конгруэнц подгрупп. Как и в случае модулярной группы нас в первую очередь волнует вопрос о необнуляемости их центральных значений. Большой интерес к пропорции необнуляемости L-функций автоморфных форм вызван работой Иванца-Сарнака[32], в которой они показали связь данной задачи с вопросом о существовании исключительных нулей Ландау-Зигеля. А именно, Иванец и Сарнак показали, что если чуть больше четверти L-функций примитивных форм бесквадратного уровня N (с условием, что $\phi(N) \sim N$) обладают ненулевым центральным значением, то исключительных нулей нет! В этой же работе Иванцу и Сарнаку удалось получить оценку снизу на пропорцию необнуляемсоти как раз равную $1/4 - \epsilon$. В **главе** 4 мы рассмотрим формы уровня $N = p^{\nu}$. Мотивацией изучать именно такие уровни являлся тот факт, что в некоторых задачах удается получить выигрыш именно за счет рассмотрения уровней специального вида. К сожалению, нам удалось лишь доказать аналог результата Иванца-Сарнака, что тем не менее является обобщением и улучшением предшествующего результата Роуми[33]. Для оценки пропорции необнулемости необходимо получить асимптотические формулы для подкрученных первого и второго моментов. При рассмотрении вторых моментов как раз и возникнут свертки по типу (11). Однако, в данном случае нам будет достаточно тривиальных оценок на функции числа делителей и асимптотических формул на весовые функции. Невозможность применения различных методов изучения сверток при работе со вторыми моментами объясняется тем, что все они так или иначе сводятся ко вторым моментам L-функций автоморфных форм, приводя к зацикливанию решения. Тем не менее, в **главе** 3 нам потребовалось провести довольно тонкий анализ сверток, так как нами была поставлена цель получения точной формулы для второго момента L-функций примитивных форм веса два. Хорошо известно, что в данном случае возникают различные проблемы со сходимостью, которые и были нами решены в том числе благодаря изучению сверток функций числа делителей.

Другим возможным обобщением сверток (2) является следующая сумма:

---

[32] H. Iwaniec, P. Sarnak, *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros*, Israel Journal of Math. 120, (2000), 155–177.

[33] D. Rouymi, *Mollification et non annulation de fonctions L automorphes en niveau primaire*, J. Number Theory. 132:1, (2012), 79–93.

$$D_{k,l}(x) = \sum_{n \leqslant x} d_k(n) d_l(n+h), \quad d_k(m) = \sum_{m_1 \cdot \ldots \cdot m_k = m} 1, \tag{12}$$

интерес к которой обусловлен ее связью со старшими моментами дзета-функции Римана[34,35]. Сразу отметим, что изучение общего случая данных сумм намного сложнее, чем случая $k = l = 2$. Для произвольных k и l до сих пор сформулированы лишь гипотезы об их асимптотическом поведении[36]. Тем не менее, в случае $l = 2$, благодаря применению спектральных методов, получилось добиться существенного продвижения. Так при $k = 3$ и $l = 2$ асимптотические формулы с постепенно улучшающимися остаточными членами были получены Хоули[37], Дезуе[38], Иванцом-Фридландером[39], Хис-Брааuном[40], Быковским-Виноградовым[41]. Наилучший результаты в этом направлении на сегодняшний день принадлежат Топакогуллари[42]. Также Топакогуллари[43] удалось вывести асимптотическую формулу со степенным понижением в остаточным члене в случае $k > 3$ и $l = 2$.

Несмотря на кажущуюся простоту и естественность, свертки (2) и (3) достаточно редко возникают в задачах, не связанных с различными L-функциями и автоморфными формами. Даже в теории цепных дробей, которая связана с теорией автоморфных форм, нам не удалось найти работы, в которых по существу использовались бы свертки функций числа делителей. В **главе** 2 нами разработан новый метод, позволяющий

[34]N. Ng, *The sixth moment of the Riemann zeta function and ternary additive divisor sums*, Discrete Analysis, 2021:6, 60 pages.

[35]N. Ng, Q. Shen, and P.-J. Wong, *The eighth moment of the Riemann zeta function*, arXiv preprint arXiv:2204.13891, (2022).

[36]N. Ng and M. Thom, *Bounds and conjectures for additive divisor sums*, Funct. Approx. Comment.Math. 60 (2019), no. 1, 97–142.

[37] C. Hooley, *An asymptotic formula in the theory of numbers*, Proc. London Math. Soc. (3), 7:396–413, 1957.

[38]J.-M. Deshouillers, *Majorations en moyenne de sommes de Kloosterman*, In Seminar on Number Theory, 1981/1982, pages Exp. No. 3, 5. Univ. Bordeaux I, Talence, 1982.

[39]J. B. Friedlander and H. Iwaniec, *Incomplete Kloosterman sums and a divisor problem*, Ann.of Math. (2), 121(2):319–350, 1985. With an appendix by Bryan J. Birch and Enrico Bombieri.

[40]D. R. Heath-Brown, *The divisor function $d_3(n)$ in arithmetic progressions*, Acta Arith.,47(1):29–56, 1986.

[41]В. А. Быковский, А. И. Виноградов, *Неоднородные свертки*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 160 (1987), 16–30.

[42]B. Topacogullari, *The shifted convolution of divisor sums*, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 24 (2018),7681–7724.

[43]B. Topacogullari, *The shifted convolution of generalized divisor functions*, Q. J. Math. 67, no. 2 (2016),331–363.

применять методы изучения сверток к решению различных[44,45,46] статистических задач из теории цепных дробей. А именно, нам удалось показать, как задача о средней длине цепных дробей рациональных чисел с фиксированным знаменателем может быть сведена к изучению сверток, и как это помогает улучшить остаток в асимптотической формуле для данного среднего.

Цели работы

Целью диссертационной работы является продвижение в решении различных задач из теории чисел, связанных со свертками функций числа делителей, а именно:

- детально изучить и сравнить подходы Меурмана и Мотохаши к изучению сверток функций числа делителей;
- улучшить результат Портера об оценке остатка в асимптотической формуле для среднего значения длин разложений в цепную дробь рациональных чисел с одинаковыми знаменателем;
- получить асимптотическую формулу для второго момента L-функций модулярных параболических форм веса два;
- улучшить результат Роуми о пропорции примитивных параболических форм веса $2k \geq 2$ и уровня $N = p^{\nu}$, где p - простое число и $\nu \geq 2$, с ненулевым центральным значением ассоциированной L-функции;
- получить эффективную оценку на пропорцию модулярных форм Гекке большого индивидуального веса, L-функция которых обладает ненулевым центральным значением;
- получить точную формулу для третьего момента L-функций модулярных форм Гекке;
- улучшить результат Пенга об оценке роста центральных значений L-функций модулярных форм Гекке большого индивидуального веса.

[44] А. В. Устинов, *О статистических свойствах конечных цепных дробей*, Записки научн. семин. ПОМИ, **322** (2005), 186–211.

[45] А. В. Устинов, *О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимальноого по модулю остатка*, Матем. заметки, **85**:1 (2009), 153–156.

[46] А. В. Устинов, *О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными*, Матем. заметки, **88**:4 (2010), 594–604.

Научная новизна

Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- доказана новая оценка остаточного члена в асимптотической формуле для среднего значения длин разложений в цепную дробь рациональных чисел с одинаковыми знаменателями;
- разработан метод, позволяющий изучать моменты L-функций модулярных параболических форм веса два;
- получена новая оценка на пропорцию примитивных параболических форм веса $2k \geq 2$ и уровня $N = p^{\nu}$, где p - простое число и $\nu \geq 2$, с ненулевым центральным значением ассоциированной L-функции;
- впервые получена эффективная оценка на пропорцию модулярных форм Гекке большого индивидуального веса, L-функция которых обладает ненулевым центральным значением;
- доказана новая оценка на рост центральных значений L-функций модулярных форм Гекке большого индивидуального веса.

Данные результаты являются новыми и вносят существенный вклад в развитие соответствующих направлений исследований.

Методы исследования

В работе используются различные методы аналитической теории чисел, теории автоморфных форм и их L-функций, теории цепных дробей, а также теории специальных функции.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при изучении свойств цепных дробей, автоморфных форм и их L-функций. Результаты, а также разработанные при их получении методы могут быть востребованы при проведении исследований в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Национальном исследовательском университете Высшая школа экономики, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Избранные разделы диссертации могут быть использованы в качестве материалов для чтения

специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по различным математическим специальностям.

Апробация работы

Результаты настоящей диссертации докладывались автором на следующих семинарах и международных конференциях:

- семинар «Современные проблемы теории чисел» под руководством академика РАН С. В. Конягина, д.ф.–м.н. М. А. Королева и чл.–корр. РАН И. Д. Шкредова (2015, 2023);
- научная сессия МИАН, посвященная подведению итогов 2017 года;
- общеинститутский семинар «Математика и ее приложения» Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (2018);
- научная сессия МИАН, посвященная подведению итогов 2021 года;
- «Научный семинар Хабаровского отделения Института прикладной математики ДВО РАН» под руководством чл.–корр. РАН В. А. Быковского;
- семинар «Beijing–Moscow Mathematics Colloquium» (2020)
- международная конференция памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям, 28.01.2016-30.01.2016, МИАН, г. Москва;
- Conference «Ecole jeunes chercheurs en theorie des nombers» (Young researchers in Number Theory), 08.06.2016-10.06.2016, Clermont-Ferrand, France;
- международная конференция по теории чисел и приложениям в честь 80-летия А. А. Карацубы, 22.05.2017.-27.05.2017, МИАН и МГУ, г. Москва;
- конференция «Числа, формы и геометрия» 21.08.2017-26.08.2017, г. Сочи;

- XVII международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» 23.09.2019-28.09.2018, ТГПУ им. Л.Н.Толстого, г.Тула;

- конференция международных математических центров, 09.08.2021.-13.08.2021, центр Сириус, г. Сочи;

- международная конференция по комплексному анализу памяти А. А. Гончара и А. Г. Витушкина, 31.10.2022-02.11.2022, МИАН, г. Москва;

- конференция по комплексному анализу и его приложениям, 11.09.2023-15.09.2023, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск;

- XXII международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» 26.09.2023-29.09.2023, ТГПУ им. Л.Н.Толстого, г.Тула;

- конференция «Декабрьские чтения» 19.12.2023-20.12.2023, Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, г.Новосибирск;

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в тринадцати работах, список которых приведен в конце автореферата.

Личный вклад

Научные результаты, опубликованные в работах [1]-[3], [5], [6], выносимые на защиту и составляющие содержание части диссертационной работы, получены автором в соавторстве с О.Г.Балкановой. Вклад соавторов равноценен и не делим.

Научные результаты, опубликованные в работах [7]-[11], выносимые на защиту и составляющие содержание части диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Вклад В.А.Быковского в данные работы состоит в постановке задач и консультациях по методам их решения.

Научные результаты, опубликованные в работах [4], [12], [13] без соавторов, выносимые на защиту и составляющие содержание части диссертационной работы, получены автором самостоятельно.

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 273 страницах и состоит из введения, шести глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 142 наименований.

1 Краткое содержание работы

Во **Введении** приводится краткий обзор предшествующих результатов, а также формулируются основные результаты диссертационного исследования.

Содержание главы 1.

Первая глава посвящена сравнению подходов Мотохаши и Меурмана к получению асимптотической формулы для свертки функций числа делителей (2) с

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad M \to +\infty$$

и равномерной по f. В англоязычной литературе[10,13] задача получения асимптотики для суммы вида (2) называется (бинарной) аддитивной проблемой делителей. Пусть $MT(M, f)$ – главный член, а $E(M, f)$ – остаточный член в асимптотической формуле для суммы (2). Мотохаши,[13] доказал, что оценка

$$E(M,f) \ll (M^2+Mf)^{1/3+\epsilon} + f^{1/8+\alpha/2}(M^2+Mf)^{1/4+\epsilon} + f^{1/2+\alpha}M^{\epsilon} \quad (13)$$

выполнена равномерно по $1 \le f \le M^{2/(1+2\alpha)}$, где $\alpha = 7/64$ (или в предположении справедливости гипотезы Рамануджана-Петерссона $\alpha = 0$). Применяя несколько другой метод, Меурман,[15] показал, что

$$E(M,f) \ll (M^2+Mf)^{1/3}M^{\epsilon} + (M^2+Mf)^{1/4}M^{\epsilon}\min\left(M^{1/4}, f^{1/8+\alpha/2}\right). \quad (14)$$

Данная оценка улучшает (13) при $f \geq M^{2/(1+4\alpha)}$. В **главе 1** мы показываем, что оставаясь в рамках подхода Мотохаши, за счет уточнения оценок на гипергеометрические функции можно доказать результат (14).

Содержание главы 2.

Вторая глава посвящена приложению сверток функций числа делителей к изучению среднего значения длин цепных дробей чисел a/b. Хорошо известно, что алгоритм Евклида для двух натуральных чисел a и b $(a < b)$ тесно связан с разложением рационального числа a/b в конечную цепную дробь

$$\frac{a}{b} = [0; a_1 \ldots, a_s] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_s}}} \tag{15}$$

длины $s = s(a/b)$, в которой $a_1, \ldots, a_s$ — натуральные числа и $a_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$. Существует много модификаций[45,46] алгоритма Евклида, приводящих к представлению рационального числа в виде различных непрерывных дробей. Количество шагов в большинстве алгоритмов Евклида может быть выражено через[45,46] статистики Гаусса-Кузьмина, которые для действительного числа $x \in [0, 1]$ и a/b из (15) задаются равенством

$$s_x(a/b) = \#\{j : 1 \leqslant j \leqslant s(a/b), [0; a_j, \ldots, a_s] \leqslant x\}.$$

Отметим, что $s_1(a/b) = s(a/b)$. Первый результат о среднем значении длин цепных дробей принадлежит Хейльбронну[47]

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant b \\ (a,b)=1}} s(a/b) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \cdot \log b + O(\log^4 \log b), \tag{16}$$

где $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера. При доказательстве формулы (16) Хейльбронн использовал лишь элементарные методы и одно ключевое соображение. А именно, он показал что задача о нахождении среднего значения длин цепных дробей тесно связана с задачей о количестве решений уравнения $n_1 n_2 + n_3 n_4 = b$ в целых числах. Отметим, что впервые связь между средними значениями различных характеристик цепных

[47] H. Heilbronn, *On the average length of a class of finite continued fractions*, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin, VEB (1968), 89–96.

дробей и количеством целочисленных решений некоторого уравнения была установлена Локсом[48].

С помощью оценок А. Вейля для сумм Клоостермана Портер[49] доказал, что

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s(a/b) = \frac{2\log 2}{\zeta(2)} \cdot \log b + C_P - 1 + O_\varepsilon(b^{-1/6+\varepsilon}), \tag{17}$$

где $\varepsilon > 0$ и

$$C_P = \frac{2\log 2}{\zeta(2)} \left(\frac{3\log 2}{2} + 2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1 \right) - \frac{1}{2}$$

–константа Портера (в данном виде получена Ренчем[50]). Результат (17) может быть обобщен[51] на случай статистик Гаусса-Кузьмина в виде

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s_x(a/b) = \frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)} \left(\log(x+1)\log b + C_P(x)\right) + \\ + O_{\varepsilon,x}\left(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon} b\right), \tag{18}$$

где $\varepsilon > 0$ и $x \in (0, 1]$,

$$C_P(x) = \log(1+x)\left(\log x - \frac{\log(x+1)}{2} + 2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1\right) + \\ + h_1(x) + h_2(x) + \frac{\zeta(2)}{2}\left(x\cdot[x<1] - \frac{x}{1+x}\right),$$

функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ заданы абсолютно сходящимися рядами:

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{x}{n+mx} - \log(1+x)\right), \tag{19}$$

$$h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{\frac{n}{x}\leqslant m<\frac{n}{x}+n} \frac{1}{m} - \log(1+x)\right), \tag{20}$$

[48] G. Lochs, *Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüche*, Monatshefte für Math., **65**:1 (1961), 27–52.

[49] J. W. Porter, *On a theorem of Heilbronn*, Mathematika,**22**: 1 (1975), 20–28.

[50] D. E. Knuth, *Evaluation of Porter's Constant*, Comp. and Maths. with Appls., **2** (1976), 137–139.

[51] А. В. Устинов, *О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod q$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции*, Алгебра и анализ, **20**: 5 (2008), 186–216.

а символ $[x < 1]$ равен 1, если $x < 1$ и 0 в противном случае. Используя результат Ренча[50], получаем

$$h_1(1) = \log^2 2 - \frac{\zeta(2)}{2}, \quad h_2(1) = \log^2 2, \quad \frac{2}{\zeta(2)} C_P(1) = C_P - 1.$$

Основным результатом данной главы является улучшение оценки остаточного члена в асимптотической формуле (18).

Теорема 1.1. *Для любого $x \in (0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ справедлива формула:*

$$\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant b \\ (a,b)=1}} s_x(a/b) = \frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)} \left(\log(x+1) \log b + C_P(x)\right) + O_{\varepsilon,x}\left(b^{5/6-1/42+\varepsilon}\right).$$

При $x = 1$ мы могли доказать более сильное утверждение.

Теорема 1.2. *Для любого $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant b \\ (a,b)=1}} s(a/b) = \frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)} \left(\log 2 \log b + C_P(1)\right) + O_{\varepsilon}\left(b^{5/6-7/174+\varepsilon}\right).$$

Основной идеей, лежащей в основе доказательств результатов Хейльбронна, Портера и Устинова, является взаимосвязь между средним значением длин цепных дробей и количеством решений в натуральных числах системы

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 = N, \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant n_3, \quad 1 \leqslant n_2 \leqslant n_4. \tag{21}$$

Опишем основные идеи, позволившие улучшить оценку остаточного члена в асимптотической формуле (18). На первом шаге мы, производя замены переменных, преобразуем систему (21) к виду

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 = N, \quad 1 \leqslant n_1/n_3 \leqslant 2. \tag{22}$$

На втором этапе мы сглаживаем характеристическую функцию отрезка $[1, 2]$ в 22. Возникающие при этом суммы на отрезках сглаживания вычисляются так же как и в работе Устинова[52]. При этом используются лишь методы работ Хейльбронна, Портера и Устинова. Получающиеся асимптотические формулы имеют лучшую чем $O_\varepsilon\left(b^{5/6+\varepsilon}\right)$ оценку остатка

[52] А. В. Устинов, *О статистиках Гаусса–Кузьмина в коротких интервалах*, ДВМЖ, **11**: 1 (2011), 93–98.

за счет малости отрезка сглаживания. Это является третьим шагом доказательства. На четвертом этапе мы вычисляем сумму с гладкой характеристической функцией. Для этого применяется принципиально новый для данной задачи метод. Записывая характеристическую функцию через обратное преобразование Меллина, мы сводим задачу к получению равномерной по s асимптотической формулы для аддитивной проблемы делителей

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sigma_s(n)\sigma_{-s}\left(N-n\right). \tag{23}$$

Обычно при исследовании асимптотического поведения свертки (23) основной задачей является получение наименьшей степени N в остаточном члене. Нам же необходима не только равномерная оценка по s, но и некоторый баланс в остаточном члене между s и N, так как s может быть достаточно велико.

Использование нового метода для подсчета числа решений системы (22) приводит к тому, что для главного члена в асимптотической формуле для суммы со сглаженной функцией мы получаем выражение, отличное от формул Хейльбронна, Портера и Устинова. На пятом этапе мы доказываем равенство главных членов в этих двух различных асимптотических формулах как для сумм на отрезках сглаживания, так и для сумм на отрезке $[1,2]$.

Содержание главы 3.

Третья глава посвящена изучению вторых моментов L-функций голоморфных параболических форм целого четного веса $2k \geqslant 2$ и произвольного уровня. Обозначим через $S_{2k}(N)$ комплексное линейное пространство голоморфных параболических форм целого четного веса $2k \geqslant 2$ относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$, а через $O_{2k}(N)$ ортонормированный (относительно скалярного произведения Петерссона) базис данного пространства. Каждая форма f из $S_{2k}(N)$ раскладывается в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_f(n) e(nz),$$

где $e(x) = \exp(2\pi i x)$. Определим L–ряды, ассоциированные с формой $f(z)$, следующим образом:

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_f(n)}{n^{s+k-1/2}}.$$

Положим

$$W_{2k}(N;t) = \log N + 2\gamma - 2\log(2\pi) + \frac{\Gamma'(k+it)}{\Gamma(k+it)} + \frac{\Gamma'(k-it)}{\Gamma(k-it)}, \tag{24}$$

$$U_{2k}(t) = \frac{\zeta(1+2it)}{(2\pi)^{2it}}\frac{\Gamma(k+it)}{\Gamma(k-it)} + \frac{\zeta(1-2it)}{(2\pi)^{-2it}}\frac{\Gamma(k-it)}{\Gamma(k+it)},$$

где γ – постоянная Эйлера, $\Gamma(s)$ и $\zeta(s)$ – это гамма-функция и дзета-функция Римана соответственно. Главным результатами данной главы является следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть k и N–натуральные числа, t–вещественное. Тогда*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f \in O_{2k}(N)} \left| L_f(\frac{1}{2}+it) \right|^2 = W_{2k}(N;t) + \\ +(-1)^k \delta_{1,N} U_{2k}(t) + V_1(k,N;t)$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$V_1(k,N;t) \ll_\varepsilon \frac{1+|t|}{kN}(kN(1+|t|))^\varepsilon. \tag{25}$$

Основным достижением стоит считать не столько оценку остатка (25) (хотя она и является редким примером оценки, равномерной сразу и по весу и уровню формы, и по аргументу L-функции), сколько отсутствие ограничения на вес формы. Специалистам хорошо известно[53][54], что случай $k = 1$ существенным образом отличается от всех остальных, так как при малом весе начинают возникать различные проблемы со сходимостью рассматриваемых сумм и интегралов. Основным нововведением, позволившем преодолеть эти сложности, является применение нами так называемого "трюка Гекке". При рассмотрении второго момента после применения формулы Петерссона возникают функции Бесселя $J_{2k-1}(x)$, которые при малом x ведут себя

[53] V. Blomer, *Sums of Hecke eigenvalues over values of quadratic polynomials*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008 (2008), no. 16, 1–29.

[54] I. Petrow, *A twisted Motohashi formula and Weyl-subconvexity for L-functions of weight two cusp forms*, Math. Ann., 363 (2015), no. 1-2, 175–216.

как x^{2k-1}. При $k = 1$ этой скорости убывания в нуле не хватает для обеспечения абсолютной сходимости всех выражений, поэтому мы вводим новую переменную λ и заменяем $J_{2k-1}(x)$ на $J_{2\lambda-1}(x)$. Это позволяет обеспечить абсолютную сходимость возникающих выражений и получить точную формулу для второго момента, выражающую его через свертки (8), при условии что λ достаточно велико. Чтобы продолжить получившуюся комбинацию сверток в точку $\lambda = 1$ мы сначала заменяем весовые функции в свертках типа (8) на главный член из их асимптотических формул, при этом остаток сразу оказывается абсолютно сходящимся. Это позволяет свести задачу к изучению продолжимости в $\lambda = 1$ выражения

$$\left(\cos \pi(\lambda - u)A^{+}(u, v, \lambda) + \cos \pi v A^{-}(u, v, \lambda)\right), \tag{26}$$

где

$$A^{\pm}(u, v, \lambda) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\tau_u(d)\tau_v(dN \pm 1)\alpha(dN \pm 1)}{d^u(dN \pm 1)^{\lambda-u}},$$

$$\alpha(x) = 0, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant P \quad \text{и} \quad \alpha(x) = 1, \quad \text{если} \quad x \geqslant 2P.$$

Расписывая $\tau_u(d)$ по определению, применяя разбиение единицы и формулу Вороного, мы записываем $A^{\pm}(u, v, \lambda)$ как сумму главного члена и остатка, который является абсолютно сходящимся рядом. Подставляя полученное выражение в (26) и проводя некоторые преобразования, мы показываем, что комбинация главных членов является голоморфной функцией.

Содержание главы 4.

Обозначим через $H^*_{2k}(N)$ пространство примитивных параболических форм веса $2k \geq 2$ и уровня $N = p^\nu$, где p - простое число и $\nu \geq 2$. Основным преимуществом рассмотрения именно примитивных форм $f \in H^*_{2k}(N)$ является то, что их коэффициенты Фурье

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{(2k-1)/2} e(nz) \tag{27}$$

мультипликативны:

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d|(m,n) \\ (d,N)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right). \tag{28}$$

Для каждой $f \in H^*_{2k}(N)$ определим ассоциированную с ней L-функцию следующим образом:

$$L_f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1. \tag{29}$$

Для достаточно большого N определим гармоническую пропорцию необнуляемости следующим образом

$$PN := \sum_{\substack{f \in H^*_{2k}(N) \\ L_f(1/2) \neq 0}}^{h} 1 \geq c - \epsilon, \quad \epsilon > 0. \tag{30}$$

Индекс h означает, что суммирование ведется с дополнительным весом

$$\sum_{f \in H^*_{2k}(N)}^{h} := \sum_{f \in H^*_{2k}(N)} \frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1} \langle f, f \rangle_N}, \tag{31}$$

где $\langle f, g \rangle_N$-скалярное произведение Петерссона. Брумер выдвинул гипотезу, что $c = 1/2$ при $N \to \infty$. Несмотря на существенный прогресс в оценках величины PN, данное утверждение до сих пор не доказано. Перечислим некоторые результаты об оценке пропорции необнуляемости:

- Дьюк[55]: $c = A/\log^2 N$, N – простое, A – некоторая положительная константа;
- Вандеркам[56]: $c = 1/48$, N – простое;
- Ковальский-Мишель[57]: $c = 1/6$, N – простое;
- Иванец-Сарнак[32]: $c = 1/4$, N – свободно от квадратов и $\phi(N) \sim N$;
- Роуми[33]: c= $\frac{p-1}{6p}$, $N = p^\nu$, p – фиксированное простое, $\nu \to \infty$.

Считается, что пропорция необнуляемости $c = 1/4$ является неким естественным барьером в данной задаче. Это отчасти можно объяснить результатом Иванца–Сарнака[32], гласящим, что если неравенство

[55] W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level*, Invent.Math. 119:1, (1995), 165–174.

[56] J.M. VanderKam, *The rank of quotients of* $J_0(N)$, Duke Math. J. 97:3, (1999), 545–577.

[57] E. Kowalski, P.Michel, *The analytic rank of* $J_0(q)$ *and zeros of automorphic L-functions*, Duke Math. J. 100 (1999), no. 3, 503–542.

(30) (в котором условие необнуляемости заменено на оценку $L(1/2, f) \geq 1/(\log N)^2$) выполнено при некотором $c > 1/4$, то у L-функций квадратичных примитивных характеров нет так называемых исключительных нулей Ландау–Зигеля.

Основным результатом в данной главе является улучшение пропорции необнуляемости, полученной Роумии[33] для L-функции, ассоциированных с формами уровня $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$. Доказанная нами оценка на пропорцию соответствует результату Иванца-Сарнака[32] для случая свободного от квадратов уровня

Теорема 1.4. *Пусть $N = p^\nu$ и p фиксированное простое число. Для любого $\epsilon > 0$*

$$\sum_{\substack{f \in H_{2k}^*(N) \\ L_f(1/2) \neq 0}}^{h} 1 \geq \frac{\phi(N)}{N} \frac{1}{4} - \epsilon, \quad \textit{при} \quad \nu \to \infty.$$

Пусть $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$–фиксировано. Для любого $\epsilon > 0$

$$\sum_{\substack{f \in H_{2k}^*(N) \\ L_f(1/2) \neq 0}}^{h} 1 \geq \frac{1}{4} - \epsilon, \quad \textit{при простом} \quad p \to \infty.$$

Доказательство данного результата базируется на новых асимптотических формулах для первого и второго подкрученных моментов рассматриваемых L-функций

$$M_1(l, u, v) = \sum_{f \in H_{2k}^*(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f(1/2 + u + v),$$

$$M_2(l, u, v) = \sum_{f \in H_{2k}^*(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f(1/2 + u + v) L_f(1/2 + u - v).$$

Нами получены следующие асимптотические формулы, улучшающие предшествующие результаты.

Теорема 1.5. *Пусть $2k \geq 4$, $t \in \mathbf{R}$, $T = 1 + |t|$, $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$ и p – простое число. Если $p|l$, то $M_1(l, 0, it) = 0$. Если $(l, p) = 1$, то справедлива следующая равномерная по N, l, T, p и k асимптотическая формула:*

$$M_1(l, 0, it) = \frac{\phi_\nu(N)}{l^{1/2+it}} + O\left(\mathcal{V}_N(l) + \frac{1}{p}\mathcal{V}_{N/p}(l) + \delta(N, p^2)\frac{1}{\sqrt{l}p^2}\right),$$

где

$$\mathcal{V}_N(l) \ll \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{lT}} \left(2\pi e \frac{lT}{Nk}\right)^k, & l < \frac{1}{4\pi e}\frac{Nk}{T} \\ \frac{l^{1/2}}{N}(lT)^\epsilon \max\left(\frac{\sqrt{T}}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right), & l \geq \frac{1}{4\pi e}\frac{Nk}{T}. \end{cases}$$

Теорема 1.6. *Пусть $k \geq 1$, $t \in \mathbf{R}$, $T := 3 + |t|$, $N = p^\nu$, p – простое число и $\nu \geq 2$. Если $p|l$, тогда $M_2(l, 0, it) = 0$. В остальных случаях справедлива формула:*

$$M_2(l,0,it) = \frac{\phi(N)\phi_\nu(N)}{N}\frac{\sigma_{-2it}(l)}{l^{1/2-it}}\times$$
$$\times \left(\log N + 2\gamma - 2\log 2\pi + 2\frac{\log p}{p-1} + \psi(k+it) + \psi(k-it)\right) -$$
$$- \frac{\phi(N)\phi_\nu(N)}{N}\frac{1}{l^{1/2-it}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_{it}(r)r^{-it}\log r +$$
$$+ O\left(V_N(l) + \frac{1}{p}V_{N/p}(l) + \frac{1}{p^2}V_{N/p^2}(l) + \frac{(lTkp)^\epsilon}{p^2\sqrt{l}}\delta(N,p^2)\right).$$

Функция в остаточном члене может быть оценена следующим образом:

$$V_N(l) \ll \begin{cases} (lkT^2)^\epsilon \frac{l^{1/2}(k+T)}{N} & l \geq N/(1+T^2); \\ \left(\frac{lT^2}{4(N-l)}\right)^k \frac{N^\epsilon}{l^{1/2}T} & l < N/(1+T^2). \end{cases}$$

Содержание главы 5.

В этой главе мы докажем численную оценку снизу на пропорцию необнуляемости L-функций голоморфных параболических форм большого веса. Для случая форм большого веса, усредненных по весу, Иванец и Сарнак[32] доказали, что для любого $\epsilon > 0$ выполнено неравенство:

$$\liminf_{K\to\infty} \frac{1}{K}\sum_{k\leq K} \frac{\#\{f \in H_{4k}(1), \quad L_f(1/2) \geq 1/(\log k)^2\}}{\#\{f \in H_{4k}(1)\}} \geq \frac{1}{2}. \qquad (32)$$

Более того, если пропорция необнуляемости (32) строго больше $1/2$, то у L-функции Дирихле действительного примитивного характера нет исключительных нулей Ландау-Зигеля.

Вопрос необнуляемости L-функций для форм фиксированного веса (т.е. без дополнительного усреднения по k в (32)) был впервые изучен

Иванцом, Луо и Сарнаком[58]. Им удалось доказать, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана, что в этом случае пропорция необнуляемости L-функций не меньше $1/4$. Первый безусловный результат в данной задаче был получен независимо Фоменко[59] и позднее Лау и Цангом[60]. В данных работах, на основе вычислений первого и второго моментов данных L-функций, показано, что пропорция необнуляемости не меньше $1/\log k$. Впоследствии, Луо[61] доказал, что пропорция необнуляемости больше некоторой очень малой, но фиксированной, не зависящей от k, положительной константы. Однако, в его работе не приведены никакие численные значения данной постоянной. По-видимому, методы работы[61] позволяют доказать лишь существование такой постоянной, но не позволяют вычислить ея значение. Одной из причин этого является то, что для получения количественной оценки нужно доказать асимптотическую формулу для подкрученного второго момента, а в работе[61] получена только верхняя оценка на данный момент, чего оказывается недостаточно для получения некой количественной оценки снизу на пропорцию необнуляемости.

Основным результатом этой главы является следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Для любого $\epsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\epsilon)$ такое, что для любого $k \geq k_0$ и $k \equiv 0 \pmod 2$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{|H_{2k}|} \sum_{\substack{f \in H_{2k} \\ L_f(1/2) \geq (\log k)^{-2}}} 1 \geq \frac{1}{5} - \epsilon. \tag{33}$$

Как и в **главе 4** основным ингредиентом доказательства теоремы 1.7 являются асимптотические формулы для первого и второго подкрученных моментов

$$M_j(l) = \sum_{f \in H_{2k}}^{h} \lambda_f(l) L_f^j(1/2), \quad j = 1, 2. \tag{34}$$

Более того, чем больше значение l для которого удается доказать, что остаток в асимптотической формуле меньше главного члена, тем лучше оценка на необнуляемость. Так, если удалось доказать

[58] H. Iwaniec, W. Luo, and P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (2000), no. 91, 55–131.

[59] О. М. Фоменко, *Необращение в нуль автоморфных L-функций в центре критической полосы*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 263 (2000), 193–204.

[60] Y.K. Lau and K.M. Tsang, *A mean square formula for central values of twisted automorphic L-functions*, Acta Arith. 118-3 (2005), 231–262.

[61] W. Luo, *Nonvanishing of the central L-values with large weight*, Adv. in Math. 285 (2015), 220–234.

асимптотическую формулу для первого момента при $l \ll M^{\Delta}$, а для второго момента при $l \ll M^{2\Delta}$, то можно показать, что пропорция необнуляемости не меньше величины $\frac{\Delta}{1+\Delta}$. Для доказательства этой оценки мы используем методы, разработанные в статьях Ковальского-Мишеля[57] и Ковальского-Мишеля-Ван дер Кама[62]. Отметим, что так как в (34) присутствует гармоническое суммирование то, чтобы получить оценку на "чистую"пропорцию в (33), на последнем шаге доказательства нам необходимо избавиться от гармонического суммирования. Для этого мы используем подход, предложенный в работах Ковальского[63] и Ковальского-Мишеля[57]. Таким образом, все сводится к изучению моментов (34). Асимптотическая формула для первого момента при $l \ll k$ является прямым следствием результатов **главы 5**. Основной отправной точкой нашего доказательства новой асимптотической формулы для $M_2(l)$ можно считать точную формулу, доказанную Кузнецовым[19] и переоткрытую Иванцом и Сарнаком[32], выражающую второй подкрученный момент рассматриваемых L-функций через две свертки функций числа делителей

$$E_1(l) := \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{l-1} \tau_0(n)\tau_0(l-n)\phi_k\left(\frac{n}{l}\right), \tag{35}$$

$$E_2(l) := \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_0(n)\tau_0(n+l)\Phi_k\left(\frac{l}{n+l}\right), \tag{36}$$

где $\phi_k(x)$, $\Phi_k(x)$ – функции, выражающиеся через гипергеометрические функции Гаусса. Как уже отмечалось, существует несколько методов, которые можно было бы применить для получения асимптотических формул для сверток (35), (36). К сожалению, по-видимому, ни один из них не позволяют получить требуемые оценки. Дело в том, что в случае их применения суммы (35), (36) будут выражены в том числе через второй момент L-функций голоморфных параболических форм. А так как мы сейчас как раз пытаемся оценить эти вторые моменты, то таким образом произойдет зацикливание, не позволяющее оценить (35) и (36). По этой причине мы оцениваем свертки (35) и (36) тривиально по модулю, а улучшение предшествующих результатов достигается исключительно за счет полученных нами равномерных по x и k асимптотических разложений функций $\phi_k(x)$ и $\Phi_k(x)$. Для их вывода мы используем метод Лиувилля-Грина, также известный как ВКБ метод. Данный метод, наряду

[62] E. Kowalski, P. Michel, J.M. VanderKam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, J. Reine Angew. Math. 526 (2000), 1–34.

[63] E. Kowalski, *The rank of the jacobian of modular curves: analytic methods,* Ph.D. Thesis, Rutgers University (1998).

с методом перевала, является одним из основных способов получения различных асимптотических разложений. В его основе лежит наблюдение, что если функция является решением некого дифференциального уравнения второго порядка, то, несколько преобразовав и упростив данное дифференциальное уравнение так, чтобы его решениями стали функции, чье асимптотическое разложение уже известно, мы можем приблизить изначальную функцию с помощью решений нового упрощенного уравнения. Изначально данный метод получил широкое распространение в физике (особенно в квантовой механике). Применять метод Лиувилля-Грина к специальным функциям, возникающим в теории чисел, по-видимому, впервые предложил Н.В.Кузнецов в 80-х годах. В нашем случае асимптотическое разложение функции $\Phi_k(x)$ основано на K-функции Бесселя, а функция $\phi_k(x)$ аппроксимируется комбинацией J и Y функций Бесселя. Используя стандартные оценки функций Бесселя, мы в итоге получаем следующую асимптотическую формулу для второго подкрученного момента L-функций голоморфных параболических модулярных форм:

$$M_2(l) = \frac{2\tau(l)}{\sqrt{l}}(2\log k - \log l - 2\log 2\pi + 2\gamma) + O\left(\frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}\right). \qquad (37)$$

Таким образом, остаток в асимптотической формуле меньше главного члена при $l \ll k^{1/2-\epsilon}$ и, следовательно, мы можем взять $\Delta = 1/4 - \epsilon$, получая следующую оценку снизу на пропорцию необнуляемости $\frac{\Delta}{1+\Delta} = \frac{1}{5} - \epsilon$. Из свойств функций Бесселя следует, что функция $\Phi_k(x)$ экспоненциально мала при интересующих нас значениях x. В то же время функция $\phi_k(x)$ является осциллирующей. Оценивая (35) по модулю, мы теряем все эти сокращения и получаем неоптимальный результат. Для того чтобы учесть эти осцилляции можно, например, усреднить функцию $\phi_k(x)$ по k, то есть рассмотреть второй момент L-функций модулярных форм с дополнительным усреднением по весу форм. Для исследования моментов усредненных по весу форм возьмем какую-нибудь неотрицательную бесконечно гладкую функцию $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ с компактным носителем $[\theta_1, \theta_2]$ (где $\theta_2 > \theta_1 > 0$) такую, что

$$\|h^{(n)}\|_1 \ll 1 \text{ для всех } n \geq 0. \qquad (38)$$

Введем следующее обозначение для усредненного первого и второго

подкрученного моментов:

$$A_j(l) := \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{f \in H_{4k}(1)}^{h} \lambda_f(l) L_f^j(1/2). \tag{39}$$

Для первого момента $A_1(l)$ можно, используя асимптотику для $M_1(l)$, тривиально получить асимптотическую формулу справедливую при $l \ll K^{1-\epsilon}$. Этого достаточно ровно для того, чтобы доказать оценку (32). Возникает естественный вопрос: является ли вычисление первого подкрученного момента барьером для улучшения оценки (32)? Оказывается, что нет, так как нам удалось получить асимптотическую формулу для $A_1(l)$ справедливую при $l \ll K^{2-\epsilon}$. Доказательство основано на более детальном анализе специальных функций из точной формулы для первого момента. Изначально они записываются через вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), но могут быть сведены (через J-функции Бесселя) к интегралам от полиномов Лежандра $P_k(y)$. Далее из равномерной асимптотической формулы[64] для полиномов Лежандра мы получаем очень хорошие оценки на средние значения $\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) P_k(y)$.

Для второго момента $A_2(l)$, используя осциллирующий характер функции $\phi_k(x)$, мы доказываем асимптотическую формулу, справедливую при $l \ll K^{2-\epsilon}$. Таким образом, мы можем взять $\Delta = 1 - \epsilon$, получая что в среднем по весу пропорция необнуляемость ограничена снизу величиной $\frac{\Delta}{1+\Delta} = \frac{1}{2} - \epsilon$, тем самым передоказывая результат Иванца-Сранака (32).

Улучшение остатка в асимптотических формулах как для $M_2(l)$ так и для $A_2(l)$, по-видимому, является очень трудной задачей. Как уже упоминалось, Иванец и Сарнак [32] установили, что для доказательства отсутствия нулей Ландау-Зигеля достаточно получить асимптотическую формулу для усредненного второго подкрученного момента при $l \gg K^{2+\epsilon}$. Поэтому значение $l = k^2$ является естественным барьером в данной задаче. Естественно предположить, что для его преодоления необходимо не оценивать (35) и (36) тривиально, а использовать методы из работ Кузнецова, Мотохаши, Меурмана и других. Стоит также отметить, что при переходе параметра l через значение k^2 существенным образом меняется поведение остатков $E_j(l)$. Так, при $l \ll k^2$ мы получим, что

[64] P. Baratella, L. Gatteschi, *The bounds for the error term of an asymptotic approximation of Jacobi polynomials*, Orthogonal Polynomials and Their Applications (Segovia, 1986), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1329, Springer, Berlin, New York, 1988, 203–221.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right)\ll e^{-ck/\sqrt{l}}\left(\frac{l^{1/4+\epsilon}}{k^{1/2}}+\frac{l^{1+\epsilon}}{k^{3/2}}\right), \tag{40}$$

и, соответственно, слагаемое $E_2(l)$ является пренебрежимо малым. Однако, при $l > k^2$ данное слагаемое уже не столь мало. Этот факт следует из того, что при больших x функция $\Phi_{2k}(x)$ убывает экспоненциально, тогда как при x очень близких к 1 такого убывания не наблюдается! Следовательно, при $l > k^2$ левая часть (40) не будет пренебрежимо малой. Так как $\Phi_{2k}(x)$ не является осциллирующей функцией, введение дополнительного усреднения по k также не уменьшает $E_2(l)$. В последствии нами будет показано, что

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right)\approx\frac{\sqrt{l}}{k^2}. \tag{41}$$

Соответственно, естественно предположить наличие второго главного члена в (37) при $l > k^2$. Проблема заключается в том, что он оказывается больше главного члена в (37). На первый взгляд, может показаться, что этот феномен делает невозможным улучшение результата Иванца-Сарнака о 50% необнуляемости. Тем не менее, считается, что процент необнуляемости все же должен быть равен 100% и, соответственно, имеет смысл изучить данный второй главный член.

Точная формула для $M_2(l)$, полученная Кузнецовым, содержит три формулы свертки с весовыми функциями в виде гипергеометрических функций. Две из них это (35), (36), а третью, выражающуюся через (36), мы обозначим как $E_3(l)$. Для их вычисления мы предположим, что точная формула для сверток, доказанная Мотохаши[13], верно выделяет их главный член, то есть для $i = 1, 2, 3$ выполнено равенство:

$$E_i(l) = MT_i(l) + ET_i(l), \tag{42}$$

где $MT_i(l)$-предполагаемый главный член свертки. В **главе 5** нами доказано, что эти гипотетические главные члены сокращаются

$$MT_1(l) + MT_2(l) + MT_3(l) = 0, \tag{43}$$

тем самым не образуя второй главный член во втором подкрученном моменте L-функций голоморфных параболических модулярных форм.

Содержание главы 6.

В данной главе мы докажем новую оценку на рост центральных значений L-функций голоморфных параболических модулярных форм большого веса. Для этого, мы займемся изучением поведения третьего момента

$$\sum_{f\in H_{4k}} \omega_f L^3(f,1/2). \tag{44}$$

Ввиду наличия важных приложений, начиная со статьи Иванца-Конри[65], был написан целый ряд работ о третьих моментах автоморфных L-функций (см. Петров[54], Янг[66], Петров-Янг[6768]). Что касается именно третьего момента (44), то наилучший результат о его оценке принадлежит Пенгу[69], доказавшему оценку

$$\sum_{f\in H_{4k}} \omega_f L^3(f,1/2) \ll k^{\epsilon}. \tag{45}$$

Из формулы Вальдспургера[70] (см. также работу Конена-Загье[71]) следует, что $L(f,1/2) \geqslant 0$. Используя этот факт, а также оценку $\omega_f \gg (\log k)^{-2}$, Пенг вывел из (45) следующую подвыпуклую оценку

$$L(f,1/2) \ll k^{1/3+\epsilon}. \tag{46}$$

Отметим, что из функционального уравнения для L-функций голоморфных параболических модулярных форм и теоремы Фрагмена-Линделефа следует, что $L(f,1/2) \ll k^{1/2+\epsilon}$. В **главе 6** мы несколько уточняем оценки (45) и (46). С этой целью мы рассматриваем следующий смещенный третий момент:

$$\mathcal{M}(u,v,\rho) := \sum_{f\in H_{2k}} \omega(f) L(f,1/2+u+v)L(f,1/2+u-v)L(f,1/2+\rho). \tag{47}$$

---

[65] J.B. Conrey, H. Iwaniec, *The cubic moment of central values of automorphic L-functions*, Ann. of Math. (2) 151 (2000), 1175–1216.

[66] M.P. Young, *Weyl-type hybrid subconvexity bounds for twisted L-functions and Heegner points on shrinking sets*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 19(5):1545–1576, 2017.

[67] I. Petrow, M.P. Young, *A generalized cubic moment and the Petersson formula for newforms*, Math. Ann. 373(1-2) (2018), 287–353.

[68] I. Petrow, M.P. Young, *The Weyl bound for Dirichlet L-functions of cube-free conductor*, Annals of Mathematics 192, 2 (2020), 437–486.

[69] Z. Peng, *Zeros and central values of automorphic L-functions*, PhD thesis, Princeton University, 2001.

[70] J.L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des forms modulaires de poids demi-entier*, J. Math. Pure Appl. 60 (1981), 375–484.

[71] W. Kohnen and D.Zagier, *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip*, Invent. Math. 64 (1981), 175–198.

Введение параметров u, v и ρ обусловлено тем, что мы сначала получаем точную формулу для (47), из которой выводим новую оценку на третий момент. Для вывода точной формулы мы используем представление для L-функции в виде ряда, которое справедливо лишь при действительной части аргумента больше 1, а в конце применяем принцип аналитического продолжения в точку $u = v = \rho = 0$. Этот подход кардинально отличается от метода, основанного на записи каждой L-функции с помощью приближенного функционального уравнения, который использовал Пенг.

Одним из преимуществ введения параметров u, v и ρ также является тот факт, что с помощью метода, разработанного Китингом-Конри-Рубинштеном-Снайс-Фармером[72], можно выписать явный вид главного члена в асимптотическом разложении для (47). Основным результатом данной главы является точная формула для третьего момента с явно выделенным главным членом $P_3(\log k)$, предсказанным в работе[72]. Остаток же представляет собой четвертый момент дзета-функции Римана с весовой функцией равной обобщенной гипергеометрической функции ${}_3F_2$.

Теорема 1.8. *Для любого $\epsilon > 0$ и $k \equiv 0 \pmod 2$ справедлива формула:*

$$\mathcal{M}(0,0,0) = P_3(\log k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} |\zeta(1/2+w)|^4 \hat{g}_1(k;w)dw + O\left(\frac{k^\epsilon}{k}\right),$$

$$\hat{g}_1(k;w) = \frac{2\pi^2 \sin(\pi w)}{\cos^2(\pi w)} {}_3F_2\left(1-k, k, 1/2+w; 1, 1; 1\right).$$

Используя теорему 1.8, асимптотическую формулу для четвертого момента дзета-функции Римана, а так же правильную по порядку оценку на функцию $\hat{g}_1(k;w)$, мы уточняем оценку k^ϵ в (45), заменяя ее степенью логарифма $\log k$.

Теорема 1.9. *Справедлива следующая оценка:*

$$\mathcal{M}(0,0,0) \ll \log^{9/2} k. \tag{48}$$

Следствие 1.10. *Имеет место следующая оценка*

$$L(f, 1/2) \ll k^{1/3} \log^{13/6} k. \tag{49}$$

Теорему 1.8 можно рассматривать как обращение точной формулы Мотохаши[73] для четвертого момента дзета-функции Римана, которая

[72] J.B. Conrey, D.W. Farmer, J.P. Keating, M. O. Rubinstein and N.C. Snaith, *Integral moments of L-functions*, Proc. Lond. Math. Soc. (3), 91:1 (2005), 33–104.

[73] Y. Motohashi, *An explicit formula for the fourth power moment of the Riemann zeta-function*, Acta Math. 170 (1993), 181–220.

выражает данный момент через третьи моменты L-функций форм Маасса и примитивных параболических форм уровня один. Результат, аналогичный теореме 1.8, выражающий третий момент L-функций параболических форм уровня q и подкрученных квадратичным характером кондуктора q через четвертый момент L-функций Дирихле, был недавно получен Петровым[54].

Благодарности.

Соискатель считает своим приятным долгом в первую очередь поблагодарить доктора физико–математических наук, чл.-корр. РАН В. А. Быковского и кандидата физико–математических наук О. Г. Балканову за постановку некоторых задач, помощь в изучении новых методов и ценные обсуждения по широкому кругу теоретико-числовых проблем. Кроме того, соискатель благодарит коллектив отдела теории чисел МИАН во главе с академиком С.В.Конягиным за отличные условия для работы и сотрудников ХО ИПМ ДВО РАН за радушный прием во время командировок в г. Хабаровске.

Работы автора по теме диссертации

[1] O. Balkanova, D. Frolenkov, *The first moment of cusp form L-functions in weight aspect on average*, Acta Arith. 181 (2017), 197–208.

[2] O. Balkanova, D. Frolenkov, *Non-vanishing of automorphic L-functions of prime power level*, Monatsh. Math. 185:1 (2018), 17–41.

[3] O. Balkanova, D. Frolenkov, *Moments of L-functions and the Liouville-Green method*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 23:4 (2021), 1333–1380.

[4] D. Frolenkov, *The cubic moment of automorphic L-functions in the weight aspect*, J. Number Theory, 207:2 (2020), 247–281.

[5] О. Г. Балканова, Д. А. Фроленков, *Равномерная асимптотическая формула для второго момента L-функций на критической прямой*, Современные пробоемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016, 20–53.

[6] О. Г. Балканова, Д. А. Фроленков, *О бинарной аддитивной проблеме делителей*, Аналитическая теория чисел, Сборник статей. К 80-летию

со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, 299, МАИК, М., 2017, 50–55.

[7] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *Асимптотическая формула для свертки обобщенной функции делителей*, Докл. РАН, 465:2 (2015), 137–140.

[8] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *О втором моменте L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой*, Докл. РАН, 463:2, (2015), 133–136.

[9] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *Некоторые интегральные представления для гипергеометрической функции*, Дальневост. матем. журн. 15:1, (2015), 38–40.

[10] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *О средней длине конечных цепных дробей с фиксированным знаменателем*, Матем. сб., 208:5 (2017), 63–102.

[11] В.А. Быковский, Д.А. Фроленков, *Асимптотические формулы для вторых моментов L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой,* Изв.РАН Сер.матем., 81:2 (2017), 5–34.

[12] Д. А. Фроленков, *Равномерные асимптотические формулы для гипергеометрической функции,* Дальневост. матем. журн., 15:2 (2015), 289–298.

[13] Д. А. Фроленков, *Недиагональные части второго момента L-функций автоморфных форм,* Матем. сб., 211:8 (2020), 114–131.

Подписано в печать 07.11.2024

Тираж 100 экз.

Отпечатано в (название, адрес типографии)