ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Фроленкова Дмитрия Андреевича

«Свертки обобщенных функций числа делителей

в различных задачах теории чисел»

представленной на соискание ученой степени доктора

физико-математических наук по специальности 1.1.5-

математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная

математика.

Диссертация Д.А.Фроленкова посвящена решению ряда известных и трудных задач аналитической теории чисел. Рассматриваемые задачи связаны с исследованием:

1. сверток функций числа делителей,
2. алгоритма Евклида разложения рациональных чисел в непрерывную дробь,
3. оценок моментов L-функций,
4. поведения L-функций на критической прямой.

Заметим, что исследование рассмотренных в диссертации свойств алгоритма Евклида так же сводится к исследованию сверток функции числа делителей.

С другой стороны, второй момент L-функций так же тесно связан со свертками функции числа делителей, что объясняет название диссертации. Что касается L-функций, то современная аналитическая теория чисел – это, в большой степени, исследование их свойств (см. книгу Х.Иванца и Э.Ковальского «Аналитическая теория чисел»). Рассматриваемые L-функции ассоциированы с модулярными формами, а коэффициенты разложения L-функции в ряд Дирихле – это коэффициенты разложения соответствующей формы в ряд Фурье. Необходимо различать голоморфные модулярные формы и формы Маасса. В диссертации рассматривается более трудный случай голоморфных форм.

Рассматриваемые в диссертации задачи находятся в центре внимания специалистов. Эти задачи объединяются как объектами так и методами

исследования. Диссертация Д.А.Фроленкова – это единое исследование на безусловно актуальную тему.

Как уже указывалось рассматриваемые L-функции ассоциированы с модулярными формами. В свою очередь модулярные формы определяются дискретной группой $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$. В приложениях и арифметике рассматриваются конгруэнц-подгруппы группы $SL(2,\mathbb{Z})$. В диссертации рассматривается случай $\Gamma = \Gamma_0(N)$ (побочная конгруэнц-подгруппа уровня N), и модулярные формы определяются уровнем N и весом k. Эта терминология переносится и на ассоциированные L-ряды.

Рассматриваемые свертки функций числа делителей и моменты L-функций включают весовые и сглаживающие функции, выбор которых иногда облегчает доказательство, а иногда сильно осложняет. Выбор весовых и сглаживающих функций является одним из ключевых моментов доказательства нужных результатов.

Доказательства, приведенные в диссертации, отличаются большой сложностью. Чтобы ее оценить достаточно заметить, что Глава 2 содержит около 30 лемм. В ходе доказательства основных результатов Д.А.Фроленков демонстрирует большое аналитическое искусство и полное владение всеми средствами анализа и современной аналитической теории чисел.

Диссертация состоит из Введения, шести глав разбитых на параграфы и списка литературы, включающего 142 названия. В общем Введении и Введениях к Главам четко указаны результаты предшественников и место доказываемых результатов в ряду известных ранее. В связи со сложностью доказательств во Введениях к Главам объясняются возникающие трудности и общая схема доказательства.

Переходим к изложению содержания диссертации по главам.

В короткой Главе 1 рассматривается задача оценки остаточного члена в аддитивной проблеме делителей. Приводятся имеющиеся оценки Мотохаши и Меурмана. Показано как уточняя оценки Мотохаши получить оценки Меурмана. Это достигается с помощью тонкого анализа весовых функций в формуле Кузнецова для $\Gamma = \Gamma_0(1) = SL(2,\mathbb{Z})$.

В Главе 2 рассматривается задача о среднем числе $s(a/b)$ шагов в алгоритме Евклида разложения в конечную цепную дробь рациональных чисел a/b. Речь идет об асимптотике для среднего по $a \leq b$ величин $s(a/b)$. В этой главе получена новая формула для среднего числа шагов со степенным понижением в оценке остаточного члена. Техническая сложность этой задачи уже отмечалась выше. При доказательстве используется новый метод, основанный на редукции рассматриваемой задачи к исследованию сверток обобщенных функций числа делителей.

В оставшихся главах 3-6 рассматриваются задачи связанные с поведением на критической прямой L-функций веса k и уровня N. В Главе 3 впервые получена точная формула для среднего (по базису форм веса k и уровня N) значения квадрата модуля соответствующей L-функции на критической прямой. При этом оценки остатка равномерны по значениям аргумента L-функции и весу k. Чтобы оценить сложность этого результата достаточно обратить внимание на вид главного члена. Особую трудность представляет случай $k = 1$, который ранее не рассматривался.

Для ряда задач теории чисел оказалось важной информация о "числе"примитивных параболических форм для которых ассоциированная L–функция не равна нулю в точке $1/2$. Такие формы будем называть P-формами. Вопрос об их числе рассматривается в Главах 4 и 5.

Рассмотрим Главу 4. Сразу отметим, что при постановке задачи во Введении к этой главе допущена неточность. Так же как и в Главе 5 речь, конечно, идет о доле P-форм среди элементов некоторым образом нормированного базиса в пространстве примитивных форм веса k. При $N = p^\nu$ получена оценка снизу указанной доли P-форм при $p \to \infty$ (ν-фиксировано) и $\nu \to \infty$ (p-фиксировано). Оценка при $\nu \to \infty$ уточняет известные результаты, а оценка при $p \to \infty$ получена впервые. Этот результат основан на доказанных в диссертации новых формулах для взвешенных первом и втором моменте рассматриваемых L-функций на критической прямой и в ее окрестности.

В Главе 5 для группы $\Gamma_0(1) = SL(2, \mathbb{Z})$ рассматривается та же задача что и в Главе 4 при $k \to \infty$. Получена асимптотика при

$k \to \infty$ доли P-форм, таких что центральное значение соответствующей L-функции больше $(\log k)^{-2}$. Ранее такой оценки не было. Отправной точной доказательства является точная формула Кузнецова для второго подкрученного момента L-функции на критической прямой. Доказательство включает оценки сверток функций числа делителей с весами выражающимися через гипергеометрические функции. Применение результатов Главы 1 наталкивается на необходимость получить новые асимптотики этих функций. Для этого используется метод ВКБ, с помощью которого исследуются асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащие большой параметр.

Рассмотрим результаты Главы 6. В предыдущих главах рассматривались первый и второй моменты. В Главе 6 рассматривается третий взвешенный момент. Усреднение, как и в Главе 5, ведется по базису примитивных форм веса k при $k \to \infty$. Хотя это явно не указано, рассматривается случай $\Gamma = \Gamma_0(1) = SL(2, \mathbb{Z})$. В этом случае известна гипотетическая асимптотическая формула для третьего момента. В Главе 6 эта формула уточнена с лучшей чем в Гипотезе оценкой остаточного члена. Полученная формула содержит четвертый момент дзета функции на критической прямой с весом зависящим от обобщенной гипергеометрической функции ${}_3F_2$. С помощью указанной формулы получена новая оценка сверху значений соответствующих L-функций в точке $1/2$.

Замечания.

1. Замечание касающееся постановки задачи в Главе 4 уже было сформулировано выше.

2. Аналогичное замечание касается и Главы 6, в которой не указана группа Γ и вид весовой функции.

3. Мне кажется неудачным термин «необнуляемость» (калька английского non-vanishing).

Эти замечания касаются не самих результатов, а характера их изложения. Они не влияют на представленную ниже общую оценку диссертации.

Заключение.

Диссертация Д.А.Фроленкова выполнена на высоком уровне. Результаты касаются ключевых проблем современной аналитической теории чисел. При решении поставленных задач Д.А.Фроленков демонстрирует высокую аналитическую культуру и полное владение методами аналитической теории чисел. В целом диссертация Д.А.Фроленкова – это завершенное исследование на актуальную тему. Все основные результаты являются новыми, полностью доказаны и опубликованы. Содержание автореферата соответствует содержанию диссертации. Диссертация полностью удовлетворяет критериям п.9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» утвержденного Правительством РФ, и Д.А.Фроленков заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент
Попов Дмитрий Александрович
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.06
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»),
старший научный сотрудник Отдела математических методов в биологии
НИИ Физико-химической биологии имени А. Н. Белозерского
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова» 119992, Москва, Ленинские горы, дом 1, стр 40
e-mail: popov-kupavna@yandex.ru
тел.+7-916-315-79-80

Д.А. Попов

11 февраля 2025 г.

ПОДПИСЬ
УДОСТОВЕРЯЮ
ЗАВ КАНЦЕЛЯРИЕЙ
Н Н СИДОРОВ