

Факультет математики и компьютерных наук
Санкт-Петербургский государственный университет

Отзыв на диссертацию
Дмитрия Андреевича Фроленкова
«Свертки обобщенных функций числа делителей
в различных задачах теории чисел»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика.

Диссертация Дмитрия Андреевича Фроленкова представляет основательную и глубокую работу в аналитической теории чисел, в которой решается ряд важных и сложных задач, объединённых тем обстоятельством, что в них возникают указанные в названии свёртки. И широта проблематики сама по себе, и впечатляющий список предшественников и современников, работающих в этом направлении, свидетельствуют о безусловной актуальности темы дисертации и соответствии поставленной научной проблемы докторскому уровню.

На первый взгляд изучение сумм вида $\sum_{n<x}\tau(n)\tau(n+1)$ (где $\tau(n)$ — количество делителей натурального числа n), а тем более — их обобщений, — может показаться искусственным, в лучшем случае — модельным вопросом, но уже связь этих сумм с перечислением целых точек на важнейшем однородном пространстве $\{ab-cd=1\}$ (сумма выше равна количеству таких точек, для которых a,b,c,d положительны и $ab<x$) показывает преждевременность подобного взгляда. Ещё убедительнее это делает диссертация Дмитрия Фроленкова, в которой обнаруживаются замечательные приложения и связи подобных сумм — от цепных дробей до моментов дзета-функции Римана.

Диссертация состоит из введения и 6 глав.

Введение содержит краткий исторический обзор, кроме того, в нём перечисляются основные результаты диссертации.

В главе 1 уточняется метод Мотохаши оценок остатка для сумм вида $\sum_{n\leqslant M}\tau(n)\tau(n+f)$ — в результате получаются оценки того же качества, что полученные из других соображений Меурманом. Отмечу, что изучение сравнительной силы разных подходов представляет безусловный интерес для развития математики, и я приветствую усилия автора в этом направлении.

Глава 2, которая мне понравилась больше всего (но в этом я не претендую на объективность), относится к классической проблеме статистики цепных дробей, восходящей к Гауссу. Дмитрию Фроленкову удалось

улучшить предыдущую оценку остатка в оценке соответствующей суммы, принадлежащую Алексею Устинову, и, что, на мой взгляд ещё более важно, предложить новый метод, связывающий статистику длин цепных дробей с тематикой диссертации.

Глава 3 относится к теории автоморфных форм. В ней получен тонкий результат о вторых моментах на кртитической прямой L-функций параболических форм без ограничения на вес. При этом так же используется виртуозная техника работы со свертками функций числа делителей.

Продолжает тематику параболических форм главы 4 и 5, где изучается вопрос необнуляемости в точке $1/2$ L-функций параболических форм веса $2k$ большого примарного уровня N (глава 4) и большого веса $2k$ и уровня 1 (глава 5). Улучшены предыдущие результаты Роуми и Луо. Эта тематика вызывает интерес ведущих специалистов по аналитической теории чисел, поскольку тесно связана с отсутствием нулей Ландау – Зигеля. Тем замечательнее получить в ней новый результат.

Наконец, в главе 6 получена новая асимптотическая по весу *верхняя* оценка для центральных значений L-функций параболических модулярных форм.

К сожалению, диссертация не лишена ряда недостатков.

Во-первых, она плохо вычитана и изобилует опечатками ("пропорции необнулемости", "Хис-Брааун", "Высшая школа экономики Московском государственном университете", "справедлива следующая оценка Finally, for some constant $c > 0$", "по леммам 5.8.4 и 5.8.6 мы $\Delta < 1 - \epsilon$", "обозначим через γ_i следующий кривую" и т.п.) Есть повторяющиеся грамматические ошибки (например, авторы совместных результатов указываются через дефис, как будто Иванец-Сарнак это такой же человек, как Хис-Браун). Встречаются опечатки и в формулах, что иногда приводит к затруднениям при чтении текста. В пунктуации много явных англицизмов.

Логической чёткости формулировок в утверждениях о равномерности оценок и границах измерения параметров иногда не достаёт. Например, формула (5.8) выглядит как увтерждение о равномерности по n, которая, как я выяснил из разговора с автором, не предполагается, а на самом деле в (5.8) не утверждается просто ничего.

Название параграфа 6.2 "Гипотезы из теории случайных матриц" представляется дезориентирующим: это гипотезы из теории чисел, мотивированные теорией случайных матриц.

Наконец, некоторые промежуточные шаги в доказательствах основных результатов могут быть существенно сокращены. Например, равенство (2.158) проще проверить в точке 0, что делает ненужной (поскольку автоматически доказывает) довольно сложную лемму 2.8.7.

Указанные недостатки не умаляют общего положительного впечатления от диссертации.

Результаты диссертации надлежащим образом опубликованы, в том числе — в таком журнале первого ранга как JEMS. Они неоднократно докладывались на конференциях и семинарах.

В работе продемонстрировано мастерское владение необходимыми для работы в аналитической теории чисел инструментами вещественного и комплексного анализа. Её автор — сложившийся оригинальный математик с замечательными результатами и отличными перспективами.

Безусловно, диссертация удовлетворяет требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика, а ее автор, Фроленков Дмитрий Андреевич, заслуживает присуждения данной степени.

Ф. В. Петров

19 февраля 2025 г.
Санкт-Петербург

сведения об оппоненте

Петров Фёдор Владимирович
доктор физико-математических наук
профессор факультета математики и компьютерных наук
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»,
адрес места работы: Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9
телефон организации: +7 (812) 328–20–00
e-mail организации: spbu@spbu.ru

Подпись Петрова Ф. В.
удостоверяю.

Заместитель начальника
Управления кадров ГУОРП
Хомутская Л. П.
19.02.2025