Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

На правах рукописи
УДК 511.3

Фроленков Дмитрий Андреевич

Свертки обобщенных функций числа делителей в различных задачах теории чисел

Специальность 1.1.5 — математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Научный консультант —
д. ф.–м. н., член.-корр. РАН
В. А. Быковский

Москва 2024

Содержание

Введение 4

Глава 1. Аддитивная проблема делителей 24

1.1. Введение 24

1.2. Анализ доказательства Мотохаши 25

1.3. Основная оценка 26

Глава 2. О средней длине конечных цепных дробей с фиксированным знаменателем 30

2.1. Введение 30

2.2. Вспомогательные утверждения 33

2.3. Длина цепной дроби и число решений уравнения 39

2.4. Аддитивная проблема делителей 42

2.5. Асимптотическая формула для $S_1(x, N)$ 53

2.6. Асимптотические формулы для $S_{2,3}(x, N; z)$ 56

2.7. Новый вид асимптотической формулы для $S_1(x, N)$ 61

2.8. Функциональные ряды 63

2.9. Доказательство теоремы 3.1.1 и 3.1.2 70

Глава 3. Асимптотические формулы для вторых моментов L–рядов голоморфных параболических форм на критической прямой. 72

3.1. Введение 72

3.2. Вспомогательные утверждения 75

3.3. Формула свертки 80

3.4. Аналитическое продолжение в точку $\lambda = 1$ 86

3.5. Аналитическое продолжение в точку $u = 0$ 91

3.6. Аналитическое продолжение в точку $v = 0$ 93

3.7. Оценки на гипергеометрические функции 94

3.8. Доказательство теоремы 3.1.1 98

3.9. Доказательство теоремы 3.1.2 101

Глава 4. Необнуляемость центральных значений L-функций примитивных параболических форм уровня $N = p^\nu$. 105

4.1. Введение 105
4.2. Основные теоретические сведения 112
4.3. Примитивные формы и формула следа Петерссона 113
4.4. Оценки интегралов для первого момента 114
4.5. Асимптотическая формула для первого момента, случай $\nu \geq 3$ 118
4.6. Асимптотическая формула для первого момента, случай $\nu = 2$ 123
4.7. Интегралы от функций Бесселя 127
4.8. Равномерные асимптотические формулы для гипергеометрической функции 133
4.9. Различные оценки на гипергеометрические функции 140
4.10. Второй момент: $\nu \geq 3$ 143
4.11. Второй момент: $\nu = 2$ 149
4.12. Оценки остатков в асимптотической формуле для второго момента 159
4.13. Сглаживание моментов 165

Глава 5. Необнуляемость центральных значений L-функций примитивных параболических форм большого веса. 166
5.1. Введение 166
5.2. Обозначения и некоторые вспомогательные результаты 172
5.3. Первый момент 179
5.4. Второй момент 185
5.5. Метод Лиувилля-Грина 192
5.6. Оценки остатков. Случай форм фиксированного веса. 209
5.7. Оценки остатков в среднем по весу 212
5.8. Сглаживание моментов и необнуляемость центральных значений 217
5.9. Второй главный член в асимптотической формуле для второго подкрученного момента 227

Глава 6. Третий момент L-функций примитивных параболических форм большого веса. 239
6.1. Введение 239
6.2. Гипотезы из теории случайных матриц 242
6.3. Точная формула для второго момента 243
6.4. Специальные функции 244
6.5. Точная формула для третьего момента 254

Список литературы 267

Введение

Актуальность темы. Определим обобщенные функции числа делителей следующим образом

$$\tau_v(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^v = n^{-v}\sigma_{2v}(n), \quad \sigma_v(n) = \sum_{d|n} d^v.$$

Настоящая диссертация посвящена изучению сумм вида

$$\sum_{n=1}^{M} \tau_u(n)\tau_v(n+f), \tag{0.1}$$

$$\sum_{n=1}^{M} \tau_u(n)\tau_v(M-n), \tag{0.2}$$

а также различных задач, связанных с этими суммами. По аналогии с дискретным преобразованием Фурье выражения (0.1) и (0.2) принято называть свертками функций числа делителей. Классической проблемой, за решение которой на протяжении всего 20 века брались многие известные специалисты в области аналитической теории чисел, такие как: Дезуе и Иванец, Ингам, Кузнецов, Мотохаши, Меурман, Хис-Браун, Эстерман, является получение асимптотических формул для сумм (0.1) с $u = v = 0$ при $M \to +\infty$ и как можно больших значениях параметров f. Так, Ингаму [**45**] удалось впервые выделить главный член асимптотической формулы для (0.1), Эстерману [**31**] доказать оценку остатка $O(N^{11/12+\epsilon}f^{1/6})$, Исмоилову [**124**] и Хис-Брауну [**37**] получить остаток $O_f(N^{5/6+\epsilon})$. Начиная с работы Эстермана стало понятно, что изучение суммы (0.1) сводится к исследованию сумм сумм Клоостермана, определяемых в самом простом случае как

$$S(m,n;c) = \sum_{\substack{0\le x\le c-1\\ (\overline{x},c)=1}} \exp\left(2\pi i\frac{mx+n\overline{x}}{c}\right), \quad x\overline{x} \equiv 1 \pmod{c}.$$

Для данных сумм известна оценка Вейля [**108**], [**32**]:

$$|S(m,n;c)| \le \tau_0(c)\sqrt{(m,n,c)}\sqrt{c}.$$

Отчасти, именно за счет использования этой оценки Хис-Брауну удалось усилить результат Эстермана. Несмотря на то, что по модулю суммы Клоостермана оценить лучше

нельзя, в среднем они ведут себя сильно лучше чем $\sqrt{c}$. Знаменитая гипотеза Линника [**71**], [**100**] гласит:

$$\sum_{c\leqslant x}\frac{S(m,n;c)}{c}\ll(|mn|x)^{\epsilon}. \tag{0.3}$$

Огромный скачок в изучении сумм сумм Клоостермана произошел благодаря полученной Кузнецовым [**127**] формуле, называемой сейчас формулой следа Кузнецова, выражающей суммы сумм Клоостермана через билинейные комбинации коэффициентов Фурье параболических автоморфных форм для модулярной группы. Как следствие доказанной им формулы Кузнецов получил в (0.3) оценку $O(x^{1/6+\epsilon})$, которая до сих пор не улучшена. Аналогично и все последующие результаты об асимптотиках (0.1) и (0.2) так или иначе используют формулу Кузнецова. Почти сразу Дезуе и Иванцом [**24**] при малых f была получена оценка $O(M^{2/3+\epsilon})$ на остаток в асимптотической формуле для (0.1). Совершенно другим методом аналогичный результат был получен Виноградовым и Тахтаджяном [**120**]. Данные работы были тут же несколько улучшены Кузнецовым [**126**], доказавшим асимптотическую формулу с остатком $O(M^{2/3+\epsilon}f^{1/6+\epsilon})$. Уточняя подход Кузнецова, Мотохаши [**77**] показал, что остаток не превосходит величины

$$(M^2+Mf)^{1/3+\epsilon}+f^{1/8+\alpha/2}(M^2+Mf)^{1/4+\epsilon}+f^{1/2+\alpha}M^{\epsilon}$$

равномерно по $1\leq f\leq M^{2/(1+2\alpha)}$, где α-показатель в гипотезе Рамануджана-Петерссона (т.е. $\alpha=0$ в предположении справедливости данной гипотезы, а наилучший известный результат Ким-Сарнака [**59**] позволяет положить $\alpha=7/64$). На сегодняшний день наилучший результат для сумм (0.1) принадлежит Меурману [**74**], которому удалось доказать следующую оценку на остаточный член в асимптотической формуле для суммы (0.1)

$$(M^2+Mf)^{1/3}M^{\epsilon}+(M^2+Mf)^{1/4}M^{\epsilon}\min\left(M^{1/4},f^{1/8+\alpha/2}\right).$$

Таким образом, мы видим, что изучение даже простейшего случая сверток функций числа делителей неожиданно приводит нас (через суммы Клоостермана) к исследованию свойств автоморфных форм. Возникает естественный вопрос: в каких еще задачах и областях появляются данные свертки? Исторически свертки (0.1) и (0.2) привлекли к себе внимание благодаря их связи с четвертым моментом дзета-функции Римана. Впервые внимание на это обратил Аткинсон [**2**], а Хис-Браун [**37**], используя свой результат о свертке (0.1), получил асимптотическую формулу для четвертого момента дзета функции Римана

$$\int_T^{2T} |\zeta(1/2+it)|^4 dt \tag{0.4}$$

с остатком $O(T^{7/8+\epsilon})$. Используя формулу следа Кузнецова, Иванец [**49**] доказал оценку на четвертый момент на коротком интервале:

$$\int_T^{T+T^{2/3}} |\zeta(1/2+it)|^4 dt \ll T^{2/3+\epsilon}.$$

На основе результатов Кузнецова о свертке (0.1) Заворотный [**123**] доказал асимптотическую формулу для (0.4) с остатком $O(T^{2/3+\epsilon})$.

Вообще, свертки (0.1) и (0.2) и их обобщения оказываются тесно связанными не только с дзета-функцией Римана, но и с L-функциями автоморфных форм. Так Кузнецовым [**126**] практически сразу была получена формула, выражающая второй момент L-функций параболических форм Маасса модулярной группы через свертки (0.1) и (0.2). Аналогичная формула для случая голоморфных форм также была позже доказана Кузнецовым [**130**]. Таким образом, имеются две формулы, являющиеся в каком-то смысле обращением друг друга. Одна из них выражает свертки через моменты L-функций, а вторая переводит вторые моменты в свертки. Данные формулы для вторых моментов заложили основу для целого цикла работ, в которых были получены важные результаты о свойствах L-функций автоморфных форм. Так, для случая форм Маасса Мотохаши [**75**] доказал результат, аналогичный результату Кузнецова, и вывел из него асимптотическую формулу для второго момента L-функций параболических форм Маасса с корневым понижением в остаточном члене, а также получил оценку на данный второй момент на коротком интервале (т.е. когда спектральный параметр формы Маасса лежит в интервале $(T, T+H)$). Далее на основе работы Мотохаши Ивич [**46**] получил оценку на третий момент на очень коротком интервале длины T^ϵ, из которой вывел наилучшую на сегодняшний день оценку на порядок роста центральных значений L-функций параболических форм Маасса $L_j(1/2) \ll t_j^{1/3+\epsilon.}$ В следующей своей работе Ивич [**47**] получил асимптотические формулы для третьего момента с остатком $O(T^{5/4+\epsilon})$ и для четвертого момента с остатком $O(T^{3/2+\epsilon})$. Отметим, что асимптотическая формула для четвертого момента была впервые получена Кузнецовым [**128**]. Однако, в его работе были допущены некоторые ошибки, приведшие к очень хорошей оценке остатка $O(T^{4/3+\epsilon})$. Работа Ивича [**47**] в частности была направлена на исправление этих ошибок. Отметим, что недавно Жи Чи [**93**] существенно улучшил результат Ивича о третьем моменте, доказав асимптотическую формулу с оптимальной корневой оценкой остатка $O(T^{1+\epsilon})$.

Результаты о моментах L-функций позволяют не только оценить сверху рост их значений, но и исследовать долю L-функций с ненулевым центральным значением, т.е.

$L_j(1/2) \neq 0$. Например, используя формулу Мотохаши для второго момента, Балканова, Содергрен и Хуанг [**8**] получили нижние оценки на долю форм Маасса с $L_j(1/2) \neq 0$ как на длинных, так и на коротких интервалах.

Как можно было заметить, все приведенные выше результаты относятся к L-функциям форм Маасса. Это объясняется тем, что хотя Кузнецов [**130**] и получил точную формулу для второго момента L-функций параболических голоморфных форм веса $2k$, выражающую этот момент через свертки (0.1) и (0.2), применить данный результат без дополнительного усреднения по весу k оказывается довольно сложно. Как в случае форм Мааса, так и в случае голоморфных форм мы получаем выражения вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_u(n)\tau_v(n+f)F_1(n,f), \tag{0.5}$$

$$\sum_{n=1}^{M} \tau_u(n)\tau_v(M-n)F_2(n,M), \tag{0.6}$$

где F_1, F_2 – некие функции, выражающиеся через гипергеометрические функции Гаусса. В случае форм Маасса получаются интегралы от гипергеометрических функций, а в случае голоморфных форм просто гипергеометрические функции. Присутствие интеграла помогает учесть осцилляции гипергеометрических функций, что позволяет доказывать хорошие оценки остатка. По этой причине введение дополнительного усреднения по весу k голоморфных форм обычно позволяет получать результаты сопоставимые со случаем форм Маасса. Мы же в настоящей работе будем рассматривать (см. **главы** 5 и 6) самый технически сложный случай голоморфных форм фиксированного веса. А именно, нами будет получена асимптотическая формула для второго подкрученного момента. позволяющая доказать эффективную оценку на долю форм с ассоциированной L-функцией, имеющей ненулевое центральное значение. Также на основе формулы Кузнецова для второго момента, мы получим формулу для третьего момента и докажем новую оценку на рост центральных значений L-функций голоморфных форм веса $2k$ при $k \to +\infty$.

Итак, мы поняли что свертки (0.5) и (0.6) играют важную роль при изучении моментов как дзета-функции Римана, так и L-функций автоморфных форм модулярной группы. Автоморфные формы можно рассматривать не только относительно модулярной группы, но и относительно так называемых конгруэнц подгрупп. В этом случае моменты L-функций сводятся к изучению обобщенных сверток, которые в самом общем виде [**104**] записываются как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_0(nr_1+f_1)\tau_0(nr_2+f_2)\omega_1\left(\frac{nr_1+f_1}{x_1}\right)\omega_2\left(\frac{nr_2+f_2}{x_2}\right), \tag{0.7}$$

где ω_i-бесконечно гладкие функции с компактным носителем. Ввиду большого количества параметров мы не приводим итоговый результат, полученный Топакогуллари, но отметим, что в частном случае он соответствует результатам Мотохаши и Меурмана. Безусловно, Топакогуллари был далеко не первым, кто изучал (0.7). Такие суммы возникали во многих работах, например, в ставших классическими статьях Дьюка-Иванца-Фридландера [**26**], [**27**] и работе Блумера-Мишеля-Харцоша [**14**]. В этих статьях как раз изучались L-функции примитивных форм произвольного уровня, а задача сводилась к суммам вида

$$\sum_g \frac{1}{g} \sum_h \chi(h) \sum_{ln \pm m = gh} \tau_0(n)\tau_0(m) g_l(n,m). \tag{0.8}$$

Отметим, что если в работе [**14**] применялся подход Меурмана, то в статье [**26**] использовался принципиально другой метод, известный как δ-метод. Его основная идея заключается в том, чтобы расписать условие $ln \pm m - gh = 0$ через суммы аддитивных характеров. Существует большое число вариаций данного метода, который стал особенно популярным в последнее десятилетие благодаря циклу статей Мунши [**79**], [**80**], применившего его для получения новых подвыпуклых оценок на различные L-функции. Особенностью δ-метода является то, что он практически никак не используют свойства функции числа делителей. Точнее, при применении δ-метода к свертке (0.8) важно лишь то, что $\tau(n)$ является коэффициентом Фурье рядов Эйзенштейна. Таким образом, δ-метод можно применять для изучения сверток коэффициентов любых автоморфных форм, что открывает перспективы решения широкого круга задач.

В настоящей диссертации (**главы** 3 и 4) мы также рассмотрим моменты L-функций примитивных форм различных конгруэнц подгрупп. Как и в случае модулярной группы нас в первую очередь волнует вопрос о необнуляемости их центральных значений. Большой интерес к пропорции необнуляемости L-функций автоморфных форм вызван работой Иванца-Сарнака [**53**], в которой они показали связь данной задачи с отсутствием исключительных нулей Ландау-Зигеля. Так, Иванец и Сарнак показали, что если чуть больше четверти L-функций примитивных форм бесквадратного уровня N (и такого, что $\phi(N) \sim N$) обладают ненулевым центральным значением, то исключительных нулей нет! В этой же работе Иванцу и Сарнаку удалось получить оценку снизу на пропорцию необнуляемости чуть меньшую 1/4. В **главе** 4 мы рассмотрим формы уровня $N = p^\nu$. Мотивацией изучать именно такие уровни являлся тот факт, что в некоторых задачах удается получить выигрыш именно за счет рассмотрения уровней специального вида. К сожалению, нам удалось лишь доказать аналог результата Иванца-Сарнака, что тем не менее является обобщением и улучшением предшествующего результата Роуми [**96**]. Для оценки пропорции необнулемости необходимо получить асимптотические формулы

для подкрученных первого и второго моментов. При рассмотрении вторых моментов как раз и возникнут свертки по типу (0.8). Однако, в данном случае нам будет достаточно тривиальных оценок на функции числа делителей и асимптотических формул на весовые функции. Невозможность применения различных методов изучения сверток при работе со вторыми моментами объясняется тем, что все они так или иначе приводят ко вторым моментам L-функций автоморфных форм, приводя к зацикливанию решения. Тем не менее, в **главе** 3 нам потребовалось провести довольно тонкий анализ сверток с целью получения точной формулы для второго момента L-функций примитивных форм веса два. Хорошо известно, что в данном случае возникают различные проблемы со сходимостью, которые были нами преодолены в том числе благодаря изучению сверток функций числа делителей.

Другим возможным обобщением сверток (0.1) является следующая сумма

$$D_{k,l}(x) = \sum_{n \leqslant x} d_k(n) d_l(n+h), \quad d_k(m) = \sum_{m_1 \cdot \ldots \cdot m_k = m} 1,$$

интерес к которой обусловлен ее связью со старшими моментами дзета-функции Римана [**82**], [**83**]. Сразу отметим, что изучение общего случая данных сумм намного сложнее, чем случая $k = l = 2$. Для произвольных k и l до сих пор сформулированы лишь гипотезы об их асимптотическом поведении [**84**]. Тем не менее в случае $l = 2$, благодаря применению спектральных методов, получилось добиться существенного продвижения. Так при $k = 3$ и $l = 2$ асимптотические формулы с постепенно улучшающимися остаточными членами были получены Хоули [**41**], Дезуе [**23**], Иванцом-Фридландером [**33**], Хис-Брауном [**38**], Быковским-Виноградовым [**114**]. Наилучшие результаты в этом направлении на сегодняшний день принадлежат Топакогуллари [**105**]. Также Топакогуллари [**103**] удалось доказать асимптотическую формулу со степенным понижением в остаточным члене в случае $k > 3$ и $l = 2$.

Несмотря на кажущуюся простоту и естественность свертки (0.1) и (0.2) достаточно редко возникают в задачах, не имеющих отношения к различным L-функциям и автоморфным формам. Даже в теории цепных дробей, которая связана с теорией автоморфных форм, нам не удалось найти работы, в которых по существу использовались бы свертки функций числа делителей. В **главе** 2 нами разработан новый метод, позволяющий применять методы изучения сверток к решению различных статистических задач из теории цепных дробей [**133**], [**134**], [**135**]. А именно, нам удалось показать, как задача о средней длине цепных дробей рациональных чисел с фиксированным

знаменателем может быть сведена к изучению сверток, и как это помогает улучшить остаток в асимптотической формуле для данного среднего.

Цели работы. Целью диссертационной работы является продвижение в решении различных задач из теории чисел, связанных со свертками функций числа делителей. А именно, мы планировали:

- детально изучить и сравнить подходы Меурмана и Мотохаши к изучению сверток функций числа делителей;
- улучшить результат Портера об оценке остатка в асимптотической формуле для среднего значения длин разложений в цепную дробь рациональных чисел с одинаковыми знаменателем;
- получить асимптотическую формулу для второго момента L-функций модулярных параболических форм веса два;
- улучшить результат Роуми о пропорции примитивных параболических форм веса $2k \geq 2$ и уровня $N = p^\nu$, где p - простое число и $\nu \geq 2$, с ненулевым центральным значением ассоциированной L-функции;
- получить эффективную оценку на пропорцию модулярных форм Гекке большого индивидуального веса, L-функция которых обладает ненулевым центральным значением;
- получить точную формулу для третьего момента L-функций модулярных форм Гекке;
- улучшить результат Пенга об оценке роста центральных значений L-функций модулярных форм Гекке большого индивидуального веса.

Научная новизна. Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- доказана новая оценка остаточного члена в асимптотической формуле для среднего значения длин разложений в цепную дробь рациональных чисел с одинаковыми знаменателями;
- разработан метод, позволяющий изучать моменты L-функций модулярных параболических форм веса два;
- получена новая оценка на пропорцию примитивных параболических форм веса $2k \geq 2$ и уровня $N = p^\nu$, где p - простое число и $\nu \geq 2$, с ненулевым центральным значением ассоциированной L-функции;

- впервые получена эффективная оценка на пропорцию модулярных форм Гекке большого индивидуального веса, L-функция которых обладает ненулевым центральным значением;
- доказана новая оценка на рост центральных значений L-функций модулярных форм Гекке большого индивидуального веса.

Данные результаты являются новыми и вносят существенный вклад в развитие соответствующих направлений исследований.

Методы исследования. В работе используются стандартные методы аналитической теории чисел, теории автоморфных форм и их L-функций, теории цепных дробей, а также различные методы из теории специальных функции.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы при изучении свойств цепных дробей, автоморфных форм и их L-функций. Результаты, а также разработанные при их получении методы могут быть востребованы при проведении исследований в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Национальном исследовательском университете "Высшая школа экономики Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Избранные разделы диссертации могут быть использованы в качестве материалов для чтения специальных курсов для студентов и аспирантов, обучающихся по различным математическим специальностям.

Апробация работы. Результаты настоящей диссертации докладывались автором на следующих семинарах и международных конференциях:

- семинар «Современные проблемы теории чисел» под руководством академика РАН С. В. Конягина, д.ф.–м.н. М. А. Королева и чл.–корр. РАН И. Д. Шкредова (2015, 2023);
- научная сессия МИАН, посвященная подведению итогов 2017 года;
- общеинститутский семинар «Математика и ее приложения» Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (2018);
- научная сессия МИАН, посвященная подведению итогов 2021 года;
- «Научный семинар Хабаровского отделения Института прикладной математики ДВО РАН» под руководством чл.–корр. РАН В. А. Быковского;
- семинар «Beijing–Moscow Mathematics Colloquium» (2020);
- международная конференция памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям, 28.01.2016-30.01.2016, МИАН, г. Москва;

- conference «Ecole jeunes chercheurs en theorie des nombers» (Young researchers in Number Theory), 08.06.2016-10.06.2016, Clermont-Ferrand, France;
- международная конференция по теории чисел и приложениям в честь 80-летия А. А. Карацубы, 22.05.2017.-27.05.2017, МИАН и МГУ, г. Москва;
- конференция «Числа, формы и геометрия» 21.08.2017-26.08.2017, г. Сочи;
- XVII международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» 23.09.2019-28.09.2018, ТГПУ им. Л.Н.Толстого, г.Тула;
- конференция международных математических центров, 09.08.2021-13.08.2021, центр Сириус, г. Сочи;
- международная конференция по комплексному анализу памяти А. А. Гончара и А. Г. Витушкина, 31.10.2022-02.11.2022, МИАН, г. Москва;
- конференция по комплексному анализу и его приложениям, 11.09.2023-15.09.2023, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск;
- XXII международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» 26.09.2023-29.09.2023, ТГПУ им. Л.Н.Толстого, г.Тула;
- конференция «Декабрьские чтения» 19.12.2023-20.12.2023, Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, г.Новосибирск;

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в тринадцати работах [**5**]-[**7**], [**110**], [**111**], [**116**]-[**119**], [**34**], [**140**], [**141**], список которых также приведен к конце Введения.

Личный вклад. Научные результаты, опубликованные в работах [**5**]-[**7**], [**110**], [**111**], выносимые на защиту и составляющие содержание части диссертационной работы, получены автором в соавторстве с О.Г.Балкановой. Вклад соавторов равноценен и не делим.

Научные результаты, опубликованные в работах [**116**]-[**119**], выносимые на защиту и составляющие содержание части диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Вклад В.А.Быковского в данные работы состоит в постановке задач и консультациях по методам их решения.

Научные результаты, опубликованные в работах [**34**], [**140**], [**141**] без соавторов, выносимые на защиту и составляющие содержание части диссертационной работы, получены автором самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 273 страницах и состоит из введения, шести глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 142 наименований.

Краткое содержание работы. Ниже приведены лишь формулировки основных результатов с небольшими комментариями. Подробный обзор истории задач, полученных результатов и использованных методов приведен во введениях, содержащихся в начале каждой главы.

Содержание главы 1. Первая глава посвящена сравнению подходов Мотохаши и Меурмана к получению равномерной по f асимптотической формулы для свертки функций числа делителей (0.1) с $u = v = 0$ при $M \to +\infty$ и. В англоязычной литературе ([**24**], [**77**]) задача получения асимптотики для суммы (0.1) называется (бинарной) аддитивной проблемой делителей. Обозначим через $MT(M, f)$ главный член, а через $E(M, f)$ остаточный член, в асимптотической формуле для (0.1). Мотохаши [**77**] доказал, что

$$E(M,f) \ll (M^2+Mf)^{1/3+\epsilon} + f^{1/8+\alpha/2}(M^2+Mf)^{1/4+\epsilon} + f^{1/2+\alpha}M^{\epsilon} \tag{0.9}$$

равномерно по $1 \leq f \leq M^{2/(1+2\alpha)}$, где $\alpha = 7/64$ (в предположении справедливости гипотезы Рамануджана-Петерссона $\alpha = 0$). Применяя несколько другой метод, Меурман [**74**] показал, что

$$E(M,f) \ll (M^2+Mf)^{1/3}M^{\epsilon} + (M^2+Mf)^{1/4}M^{\epsilon}\min\left(M^{1/4}, f^{1/8+\alpha/2}\right). \tag{0.10}$$

Данная оценка улучшает (0.9) при $f \geq M^{2/(1+4\alpha)}$. В **главе 1** мы показываем, что оставаясь в рамках подхода Мотохаши за счет уточнения оценок на гипергеометрические функции, можно доказать результат (0.10).

Содержание главы 2. Вторая глава посвящена приложению результатов о свертках функций числа делителей к изучению среднего значения длин цепных дробей чисел a/b:

$$\frac{a}{b} = [0; a_1 \ldots, a_s] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_s}}}, \tag{0.11}$$

и так называемых статистик Гаусса-Кузьмина, которые для действительного $x \in [0,1]$ и a/b из (0.11) задаются равенством

$$s_x(a/b) = \#\{j : 1 \leqslant j \leqslant s(a/b), [0; a_j, \ldots, a_s] \leqslant x\}.$$

В 1975 году Портером [**92**] было доказано, что

$$\frac{1}{\varphi(b)}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s(a/b)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\cdot\log b+C_P-1+O_\varepsilon(b^{-1/6+\varepsilon}), \tag{0.12}$$

где $\varepsilon>0$ и

$$C_P=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\frac{3\log 2}{2}+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\right)-\frac{1}{2}$$

– константа Портера (в данном виде получена Ренчем [**60**]). Позднее результат (0.12) был обобщен Устиновым [**136**] на случай статистик Гаусса-Кузьмина

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s_x(a/b)=\frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}\left(\log(x+1)\log b+C_P(x)\right)+O_{\varepsilon,x}\left(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}b\right), \tag{0.13}$$

где $\varepsilon>0$ и $x\in(0,1]$,

$$C_P(x)=\log(1+x)\left(\log x-\frac{\log(x+1)}{2}+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\right)+$$
$$+h_1(x)+h_2(x)+\frac{\zeta(2)}{2}\left(x\cdot[x<1]-\frac{x}{1+x}\right),$$

функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ заданы абсолютно сходящимися рядами

$$h_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{x}{n+mx}-\log(1+x)\right),$$

$$h_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{\frac{n}{x}\leqslant m<\frac{n}{x}+n}\frac{1}{m}-\log(1+x)\right),$$

а символ $[x<1]$ равен 1, если $x<1$ и 0 в противном случае. Нами получены следующие результаты, улучшающие остатки в асимптотических формулах (0.12) и (0.13).

Теорема 1. *Для любого* $x\in(0,1],\varepsilon>0$

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s_x(a/b)=\frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}\left(\log(x+1)\log b+C_P(x)\right)+O_{\varepsilon,x}\left(b^{5/6-1/42+\varepsilon}\right).$$

Теорема 2. *Для любого* $\varepsilon>0$

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s(a/b)=\frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}\left(\log 2\log b+C_P(1)\right)+O_\varepsilon\left(b^{5/6-7/174+\varepsilon}\right).$$

Для доказательства данных теорем нами был разработан новый метод, сводящий задачу изучения длин цепных дробей к исследованию сверток обобщенных функций числа делителей.

Содержание главы 3. Третья глава посвящена изучению вторых моментов L-функций голоморфных параболических форм целого четного веса $2k \geqslant 2$ и произвольного уровня. Обозначим через $S_{2k}(N)$ комплексное линейное пространство голоморфных параболических форм целого четного веса $2k \geqslant 2$ относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$, а через $O_{2k}(N)$ ортонормированный (относительно скалярного произведения Петерссона) базис данного пространства. Каждая форма f из $S_{2k}(N)$ раскладывается в ряд Фурье, а из её коэффициентов Фурье можно построить ассоциированный L–ряд следующим образом:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_f(n) e(nz), \quad L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_f(n)}{n^{s+k-1/2}},$$

где $e(x) = \exp(2\pi i x)$. Положим

$$W_{2k}(N;t) = \log N + 2\gamma - 2\log(2\pi) + \frac{\Gamma'(k+it)}{\Gamma(k+it)} + \frac{\Gamma'(k-it)}{\Gamma(k-it)},$$

$$U_{2k}(t) = \frac{\zeta(1+2it)}{(2\pi)^{2it}} \frac{\Gamma(k+it)}{\Gamma(k-it)} + \frac{\zeta(1-2it)}{(2\pi)^{-2it}} \frac{\Gamma(k-it)}{\Gamma(k+it)},$$

где γ – постоянная Эйлера, $\Gamma(s)$ и $\zeta(s)$ – это гамма-функция и дзета-функция Римана, соответственно. Главным результатами данной главы является

Теорема 3. *Пусть k и N–натуральные числа, t–вещественное. Тогда*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f \in O_{2k}(N)} \left| L_f(\frac{1}{2} + it) \right|^2 = W_{2k}(N;t) + (-1)^k \delta_{1,N} U_{2k}(t) + V_1(k,N;t)$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$V_1(k,N;t) \ll_\varepsilon \frac{1+|t|}{kN} (kN(1+|t|))^\varepsilon. \tag{0.14}$$

Основным достижением стоит считать даже не оценку остатка (0.14) (хотя она и является редким примером оценки, равномерной сразу и по весу и уровню формы, и по аргументу L-функции), сколько отсутствие ограничения на вес формы. Специалистам хорошо известно **[13]**, **[89]** , что случай $k = 1$ существенным образом отличается от всех остальных, так как при малом весе начинают возникать различные проблемы со сходимостью рассматриваемых сумм и интегралов. Основным нововведением, позволившем преодолеть эти сложности, является применение так называемого «трюка Гекке». При рассмотрении второго момента после применения формулы Петерссона возникают функции Бесселя $J_{2k-1}(x)$, которые при малом x ведут себя как x^{2k-1}. При $k = 1$ этой скорости убывания в нуле не хватает для обеспечения абсолютной сходимости всех выражений, поэтому мы вводим новую переменную λ и заменяем $J_{2k-1}(x)$ на $J_{2\lambda-1}(x)$. Это позволяет обеспечить абсолютную сходимость возникающих выражений и

получить точную формулу для второго момента, выражающую его через свертки (0.5) при условии, что λ достаточно велико. Применяя техники работы со свертками функций числа делителей нам удалось показать, что получившаяся комбинация сверток аналитична в точке $\lambda = 1$.

Содержание главы 4. Обозначим через $H^*_{2k}(N)$ пространство примитивных параболических форм веса $2k \geq 2$ и уровня $N = p^\nu$, где p – простое число и $\nu \geq 2$. Для $f \in H^*_{2k}(N)$ разложение в ряд Фурье и ассоциированная L-функция имеют следующий вид

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \lambda_f(n) n^{(2k-1)/2} e(nz), \quad L_f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1.$$

Для достаточно большого N определим гармоническую пропорцию необнуляемости следующим образом:

$$PN := \sum_{\substack{f\in H^*_{2k}(N) \\ L_f(1/2)\neq 0}}^{h} 1 \geq c - \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

Индекс h означает, что суммирование ведется с дополнительным весом

$$\sum_{f\in H^*_{2k}(N)}^{h} := \sum_{f\in H^*_{2k}(N)} \frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}\langle f, f\rangle_N},$$

где $\langle f, g\rangle_N$ – скалярное произведение Петерссона. Брумер выдвинул гипотезу, что $c = 1/2$ при $N \to \infty$. Несмотря на существенный прогресс в оценках величины PN, данное утверждение до сих пор не доказано. Перечислим некоторые результаты об оценке пропорции необнуляемости:

- Дьюк [**25**]: $c = A/\log^2 N$, N–простое, A-положительная константа;
- Вандеркам [**106**]: $c = 1/48$, N–простое;
- Ковальский-Мишель [**63**]: $c = 1/6$, N–простое;
- Иванец-Сарнак [**53**]: $c = 1/4$, N–свободно от квадратов и $\phi(N) \sim N$;
- Роуми [**96**]: c= $\frac{p-1}{6p}$, $N = p^\nu$, p–фиксированное простое, $\nu \to \infty$.

Основным результатом в данной главе является улучшение пропорции необнуляемости, полученной Роумии [**96**] для L-функции, ассоциированных с формами уровня $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$. Полученная нами пропорция соответствует результату Иванца-Сарнака [**53**] для случая свободного от квадратов уровня

Теорема 4. *Пусть $N = p^\nu$ и p – фиксированное простое число. Для любого $\epsilon > 0$*

$$\sum_{\substack{f\in H^*_{2k}(N)\\ L_f(1/2)\neq 0}}^{h} 1 \geq \frac{\phi(N)}{N}\frac{1}{4} - \epsilon, \quad \textit{при} \quad \nu \to \infty.$$

Пусть $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$–фиксировано. Для любого $\epsilon > 0$

$$\sum_{\substack{f\in H^*_{2k}(N)\\ L_f(1/2)\neq 0}}^{h} 1 \geq \frac{1}{4} - \epsilon, \quad \textit{при простом} \quad p \to \infty.$$

Доказательство данного результата базируется на новых асимптотических формулах для первого и второго подкрученных моментов рассматриваемых L-функций

$$M_1(l,u,v) = \sum_{f\in H^*_{2k}(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f(1/2+u+v),$$

$$M_2(l,u,v) = \sum_{f\in H^*_{2k}(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f(1/2+u+v) L_f(1/2+u-v).$$

Нами получены следующие асимптотические формулы, улучшающие предшествующие результаты

Теорема 5. *Пусть $2k \geq 4$, $t \in \mathbf{R}$, $T = 1 + |t|$, $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$ и p–простое число. Если $p|l$, то $M_1(l,0,it) = 0$. Если $(l,p) = 1$, то справедлива следующая равномерная по N, l, T, p и k асимптотическая формула:*

$$M_1(l,0,it) = \frac{\phi_\nu(N)}{l^{1/2+it}} + O\left(\mathcal{V}_N(l) + \frac{1}{p}\mathcal{V}_{N/p}(l) + \delta(N,p^2)\frac{1}{\sqrt{l}p^2}\right),$$

где

$$\mathcal{V}_N(l) \ll \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{lT}}\left(2\pi e \frac{lT}{Nk}\right)^k, & l < \frac{1}{4\pi e}\frac{Nk}{T} \\ \frac{l^{1/2}}{N}(lT)^\epsilon \max\left(\frac{\sqrt{T}}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right), & l \geq \frac{1}{4\pi e}\frac{Nk}{T}. \end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть $k \geq 1$, $t \in \mathbf{R}$, $T := 3 + |t|$, $N = p^\nu$, p – простое число и $\nu \geq 2$. Если $p|l$, тогда $M_2(l,0,it) = 0$. В остальных случаях справедлива формула*

$$\begin{aligned} M_2(l,0,it) = {} & \frac{\phi(N)\phi_\nu(N)}{N}\frac{\sigma_{-2it}(l)}{l^{1/2-it}} \times \\ & \times \left(\log N + 2\gamma - 2\log 2\pi + 2\frac{\log p}{p-1} + \psi(k+it) + \psi(k-it)\right) - \\ & - \frac{\phi(N)\phi_\nu(N)}{N}\frac{1}{l^{1/2-it}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_{it}(r) r^{-it}\log r + \\ & + O\left(V_N(l) + \frac{1}{p}V_{N/p}(l) + \frac{1}{p^2}V_{N/p^2}(l) + \frac{(lTkp)^\epsilon}{p^2\sqrt{l}}\delta(N,p^2)\right). \end{aligned}$$

Функция в остаточном члене может быть оценена следующим образом

$$V_N(l) \ll \begin{cases} (lkT^2)^{\epsilon} \frac{l^{1/2}(k+T)}{N} & l \geq N/(1+T^2); \\ \left(\frac{lT^2}{4(N-l)}\right)^k \frac{N^{\epsilon}}{l^{1/2}T} & l < N/(1+T^2). \end{cases}$$

Содержание главы 5. В этой главе мы докажем численную оценку снизу на пропорцию необнуляемости L-функций голоморфных параболических форм большого веса. Для случая форм большого веса, усредненных по весу, Иванец и Сарнак [**53**] доказали, что для любого $\epsilon > 0$ выполнено:

$$\liminf_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k\leq K} \frac{\#\{f \in H_{4k}(1), \quad L_f(1/2) \geq 1/(\log k)^2\}}{\#\{f \in H_{4k}(1)\}} \geq \frac{1}{2}. \tag{0.15}$$

Более того, если пропорция необнуляемости (0.15) строго больше $1/2$, то у L-функции действительного примитивного характера нет исключительных нулей Ландау-Зигеля.

Вопрос о необнуляемости L-функций для форм фиксированного веса (т.е. без дополнительного усреднения по k в (0.15)) был впервые изучен Иванцом, Луо и Сарнаком [**52**]. Им удалось доказать, что в этом случае в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана пропорция необнуляемости L-функций не меньше $1/4$. Первый безусловный результат в данной задаче был получен независимо Фоменко [**139**] и позднее Лау и Цангом [**67**]. В данных работах на основе вычислений первого и второго моментов соответствующих L-функций показано, что пропорция необнуляемости не меньше $1/\log k$. Впоследствии, Луо [**73**] доказал, что пропорция необнуляемости больше некоторой очень малой, но фиксированной, не зависящей от k, положительной константы. Однако, в его работе не приведены никакие численные значения данной постоянной.

Основным результатом этой главы является следующее утверждение.

Теорема 7. *Для любого $\epsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\epsilon)$ такое, что для любого $k \geq k_0$ и $k \equiv 0 \pmod 2$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{|H_{2k}|} \sum_{\substack{f\in H_{2k} \\ L_f(1/2)\geq(\log k)^{-2}}} 1 \geq \frac{1}{5} - \epsilon.$$

Как и в **главе 5** основным ингредиентом доказательства теоремы 7 служат асимптотические формулы для первого и второго подкрученных моментов:

$$M_j(l) = \sum_{f\in H_{2k}}^{h} \lambda_f(l) L_f^j(1/2), \quad j = 1, 2.$$

Отправной точкой нашего доказательства новой асимптотической формулы для $M_2(l)$ можно считать точную формулу, доказанную Кузнецовым [**130**] и переоткрытую Иванцом

и Сарнаком [**53**], выражающую второй подкрученный момент рассматриваемых L-функций через две свертки функций числа делителей

$$E_1(l) := \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{l-1} \tau_0(n)\tau_0(l-n)\phi_k\left(\frac{n}{l}\right), \tag{0.16}$$

$$E_2(l) := \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_0(n)\tau_0(n+l)\Phi_k\left(\frac{l}{n+l}\right), \tag{0.17}$$

где $\phi_k(x)$, $\Phi_k(x)$ – функции, выражающиеся через гипергеометрические функции Гаусса. Мы оцениваем свертки (0.16) и (0.17) тривиально по модулю, а улучшение предшествующих результатов достигается исключительно за счет доказанных нами равномерных по x и k асимптотических разложений функций $\phi_k(x)$ и $\Phi_k(x)$. В итоге получается следующая асимптотическая формула для второго подкрученного момента L-функций голоморфных параболических модулярных форм:

$$M_2(l) = \frac{2\tau(l)}{\sqrt{l}}(2\log k - \log l - 2\log 2\pi + 2\gamma) + O\left(\frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}\right). \tag{0.18}$$

Также на основе произведенных вычислений нами доказаны новые асимтотики для усредненного первого и второго подкрученных моментов

$$A_j(l) := \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{f \in H_{4k}(1)}^{h} \lambda_f(l) L_f^j(1/2) \tag{0.19}$$

и передоказан результат Иванца-Сарнака (0.15). Более того, нам удалось получить асимптотическую формулу для $A_1(l)$, справедливую при $l \ll K^{2-\epsilon}$, что гипотетически позволяет улучшить пропорцию необнуляемости в (0.15) с 1/2 до 2/3.

Улучшение остатка в асимптотических формулах как для $M_2(l)$, так и для $A_2(l)$, по-видимому, является очень трудной задачей, так как для того, чтобы показать отсутствие нулей Ландау-Зигеля достаточно доказать асимптотическую формулу для $A_2(l)$ при $l \gg K^{2+\epsilon}$. Поэтому значение $l = k^2$ является естественным барьером в данной задаче. Логично предположить, что для его преодоления необходимо не оценивать (0.16) и (0.17) тривиально, а использовать методы из работ Кузнецова, Мотохаши, Меурмана и других. Стоит также отметить, что при переходе параметра l через значение k^2 существенным образом меняется поведение остатков $E_j(l)$. Так, при $l \ll k^2$ слагаемое $E_2(l)$ является пренебрежимо малым, а при $l > k^2$ уже нет. Так как $\Phi_{2k}(x)$ не является осциллирующей функцией, введение дополнительного усреднения по k также не уменьшает $E_2(l)$. В последствии нами будет показано, что

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right)\approx\frac{\sqrt{l}}{k^2}.$$

Соответственно, естественно предположить наличие второго главного члена в (0.18) при $l > k^2$. Проблема заключается в том, что он оказывается больше главного члена в (0.18). На первый взгляд, может показаться, что этот феномен делает невозможным улучшение результата Иванца-Сарнака о 50% необнуляемости. Тем не менее, считается, что процент необнуляемости все же должен быть равен 100% и, соответственно, имеет смысл изучить данный второй главный член.

Точная формула для $M_2(l)$, полученная Кузнецовым, содержит три формулы свертки с весовыми функциями в виде гипергеометрических функций. Две из них это (0.16) и (0.17), а третью, выражающуюся через (0.17), мы обозначим как $E_3(l)$. Для их вычисления мы предположим, что точная формула для сверток, доказанная Мотохаши [**77**], верно выделяет их главный член, то есть для $i = 1, 2, 3$ выполнено равенство:

$$E_i(l) = MT_i(l) + ET_i(l),$$

где $MT_i(l)$ – предполагаемый главный член свертки. В **главе 5** нами доказано, что эти гипотетические главные члены сокращаются

$$MT_1(l) + MT_2(l) + MT_3(l) = 0,$$

тем самым не образуя второй главный член во втором подкрученном моменте L-функций голоморфных параболических модулярных форм.

Содержание главы 6. В этой главе мы докажем новую оценку на рост центральных значений L-функций голоморфных параболических модулярных форм большого веса. С этой целью мы займемся изучением поведения третьего момента

$$\sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} L^3(f, 1/2).$$

Ввиду наличия важных приложений, начиная со статьи Иванца и Конри [**22**], был написан целый ряд работ о третьих моментах автоморфных L-функций (см. Петров [**89**], Янг [**109**], Петров-Янг [**90, 91**]). Что касается именно третьего момента (6.1), то наилучший результат о его оценке принадлежит Пенгу [**88**] показавшему, что

$$\sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} L^3(f,1/2) \ll k^{\epsilon} \tag{0.20}$$

и как следствие

$$L(f,1/2) \ll k^{1/3+\epsilon}. \tag{0.21}$$

В **главе 6** мы несколько уточняем оценки (0.20) и (0.21), для этого мы рассматриваем следующий смещенный третий момент:

$$\mathcal{M}(u,v,\rho) := \sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} L(f,1/2+u+v)L(f,1/2+u-v)L(f,1/2+\rho). \tag{0.22}$$

Введение параметров u, v и ρ обусловлено тем, что мы сначала получаем точную формулу для (0.22), из которой в последствии доказываем новую оценку на третий момент. Для вывода точной формулы мы используем представление для L-функции в виде ряда, которое справедливо лишь при действительной части аргумента больше 1, а в конце применяем принцип аналитического продолжения в точку $u = v = \rho = 0$. Этот подход кардинально отличается от метода, основанного на записи каждой L-функции с помощью приближенного функционального уравнения, который использовал Пенг.

Одним из преимуществ введения параметров u, v и ρ также является тот факт, что с помощью метода, разработанного Китингом-Конри-Рубинштеном-Снайс-Фармером [**21**] и основанного на моделировании поведения L-функций случайными матрицами, можно выписать явный вид главного члена в асимптотическом разложении для (0.22). Основным результатом данной главы является точная формула для третьего момента с явно выделенным главным членом $P_3(\log k)$, предсказанным в работе [**21**]. Остаток же представляет собой четвертый момент дзета-функции Римана с весовой функцией равной обобщенной гипергеометрической функции ${}_3F_2$.

Теорема 8. *Для любого $\epsilon > 0$ и $k \equiv 0 \pmod 2$ справедлива формула:*

$$\mathcal{M}(0,0,0) = P_3(\log k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} |\zeta(1/2+w)|^4 \hat{g}_1(k;w)dw + O\left(\frac{k^{\epsilon}}{k}\right),$$

$$\hat{g}_1(k;w) = \frac{2\pi^2 \sin(\pi w)}{\cos^2(\pi w)} {}_3F_2\left(1-k,k,1/2+w;1,1;1\right).$$

Используя теорему 8, асимптотическую формулу для четвертого момента дзета-функции Римана, а так же правильную по порядку оценку на функцию $\hat{g}_1(k;w)$, мы уточняем оценку k^{ϵ} в (0.20), заменяя ее степенью логарифма $\log k$.

Теорема 9. *Справедлива следующая оценка:*

$$\mathcal{M}(0,0,0) \ll \log^{9/2} k.$$

Следствие 10. *Имеет место следующая оценка:*

$$L(f, 1/2) \ll k^{1/3} \log^{13/6} k.$$

Теорему 8 можно рассматривать как обращение точной формулы Мотохаши [**76**] для четвертого момента дзета-функции Римана, которая выражает данный момент через третьи моменты L-функций форм Маасса и примитивных параболических форм уровня один. Результат, аналогичный теореме 8, выражающий третий момент L-функций параболических форм уровня q и подкрученных квадратичным характером кондуктора q через четвертый момент L-функций Дирихле, был недавно получен Петровым [**89**].

Благодарности. Соискатель считает своим приятным долгом в первую очередь поблагодарить доктора физико–математических наук, чл.-корр. РАН В. А. Быковского и кандидата физико–математических наук О. Г. Балканову за постановку некоторых задач, помощь в изучении новых методов и ценные обсуждения по широкому кругу теоретико-числовых проблем. Кроме того, соискатель благодарит коллектив отдела теории чисел МИАН во главе с академиком С.В.Конягиным за отличные условия для работы и сотрудников ХО ИПМ ДВО РАН за радушный прием во время командировок в г. Хабаровске.

Список работ, в которых опубликованы результаты диссертации.

(1) O. Balkanova, D. Frolenkov, *The first moment of cusp form L-functions in weight aspect on average*, Acta Arith. 181 (2017) , 197–208.

(2) O. Balkanova, D. Frolenkov, *Non-vanishing of automorphic L-functions of prime power level*, Monatsh. Math. 185:1 (2018), 17–41.

(3) O. Balkanova, D. Frolenkov, *Moments of L-functions and the Liouville-Green method*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 23:4 (2021), 1333–1380.

(4) D. Frolenkov, *The cubic moment of automorphic L-functions in the weight aspect*, J. Number Theory, 207:2 (2020), 247–281.

(5) О. Г. Балканова, Д. А. Фроленков. *Равномерная асимптотическая формула для второго момента L-функций на критической прямой*", Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016, 20–53.

(6) О. Г. Балканова, Д. А. Фроленков. *О бинарной аддитивной проблеме делителей*, Аналитическая теория чисел, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, 299, МАИК, М., 2017, 50–55.

(7) В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *Асимптотическая формула для свертки обобщенной функции делителей*, Докл. РАН, 465:2 (2015), 137–140.

(8) В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *О втором моменте L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой*, ДАН. 463:2, (2015), 133-136.

(9) В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *Некоторые интегральные представления для гипергеометрической функции*, Дальневост. матем. журн. 15:1, (2015), 38-40.

(10) В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *О средней длине конечных цепных дробей с фиксированным знаменателем*, Матем. сб., 208:5 (2017), 63–102.

(11) В.А. Быковский, Д.А. Фроленков, *Асимптотические формулы для вторых моментов L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой,* Изв.РАН Сер.матем., 81:2 (2017), 5–34.

(12) Д. А. Фроленков, *Равномерные асимптотические формулы для гипергеометрической функции,* Дальневост. матем. журн., 15:2 (2015), 289—298.

(13) Д. А. Фроленков, *Недиагональные части второго момента L-функций автоморфных форм,* Матем. сб., 211:8 (2020), 114–131.

ГЛАВА 1

Аддитивная проблема делителей

Данная глава написана на основе работы [**111**].

1.1. Введение

Положим $\tau(n) = \sum_{a|n} 1$. Аддитивной проблемой делителей называется следующее утверждение

$$\sum_{n=1}^{M} \tau(n)\tau(n+f) = MT(M,f) + E(M,f), \tag{1.1}$$

где $MT(M,f)$ - это главный член заданный [**74**, (1)], а $E(M,f)$- отстаточный член. Данная задача исследовалась в работах [**24, 31, 37, 45, 126, 74, 77**].

Рассмотрим результаты Мотохаши [**77**] и Меурмана [**74**]. Для оценки $E(M,f)$ они применили два разных метода. Мотохаши использовал подход Кузнецова [**126**], основанный на методе аналитического продолжения и спектральном разложении левой части уравнения (1.1) при помощи формулы следа Кузнецова. Для любого $\epsilon > 0$, Мотохаши [**77**, (2.18)] показал, что

$$E(M,f) \ll (M^2+Mf)^{1/3+\epsilon} + f^{1/8+\alpha/2}(M^2+Mf)^{1/4+\epsilon} + f^{1/2+\alpha}M^{\epsilon} \tag{1.2}$$

равномерно по $1 \leq f \leq M^{2/(1+2\alpha)}$, где α не превосходит $7/64$ согласно работе Ким-Сарнака [**59**] и $\alpha = 0$ в предположении гипотезы Рамануджана-Петерссона.

Доказательство Меурмана основано на совершенно иных идеях. Он применяет представление Хис-Брауна [**37**] для фунции делителей, формулу следа Кузнецова и неравенства большого решета. В результате Меурман [**74**, (4)] показал, что

$$E(M,f) \ll (M^2+Mf)^{1/3}M^{\epsilon} + (M^2+Mf)^{1/4}M^{\epsilon}\min\left(M^{1/4}, f^{1/8+\alpha/2}\right). \tag{1.3}$$

Заметим, что в области $1 \leq f \leq M^{2/(1+4\alpha)}$ оценки (1.2) и (1.3) совпадают. Тем не менее, когда $f \geq M^{2/(1+4\alpha)}$ оценка (1.3) лучше чем (1.2).

Два рассматриваемых метода могут быть применены для решения широкого круга задач аналитической теории чисел. Поэтому важно понять является ли один из подходов предпочтительным. В случае аддитивной проблемы делителей мы продемонстрируем, что методы Мотохаши и Меурмана одинаково хороши и позволяют доказать одинаковые

оценки на остаточный член во всех областях. С этой целью мы проанализируем доказательство Мотохаши и покажем как может быть улучшена оценка (1.2).

1.2. Анализ доказательства Мотохаши

Мы сохраним обозначения работы [**77**]. Согласно [**77**, (5.3) и теореме 3] остаточный член в аддитивной проблеме делителей может быть представлен в виде суммы непрерывного, дискретного и голоморфного спектров

$$E^*(M;f)-E^*(M/2;f)=e_1(M;f)+e_2(M;f)+e_3(M;f)+O(\delta M^{1+\epsilon}), \tag{1.4}$$

где

$$e_1(M;f)=\frac{\sqrt{f}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^{-ir}\sigma_{2ir}(f)|\zeta(1/2+ir)|^4}{|\zeta(1+2ir)|^2}\Theta(r;W)dr,$$

$$e_2(M;f)=\sqrt{f}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j t_j(f)H_j^2(1/2)\Theta(\kappa_j;W),$$

$$e_3(M,f)=\frac{\sqrt{f}}{4}\sum_{k=6}^{\infty}\sum_{j\le\theta(k)}(-1)^k\alpha_{j,k}t_{j,k}(f)H_{j,k}^2(1/2)\Xi_0(k-1/2;W),$$

где $W(x)=g(fx/M)$ и $g(x)$- гладкая характеристическая функция интервала $(1/2,1)$. Подробное описание дано на странице 561 [**77**]. В [**77**, (5.18), (5.19)] было показано, что для любого $\epsilon>0$ и $M\le f<M^{2-\epsilon}$ справедливо

$$e_1(M;f),e_3(M;f)\ll f^{1/2+\epsilon}. \tag{1.5}$$

Дискретный спектр $e_2(M;f)$ дает самый большой вклад в остаточный член. Заметим, что при этом оценка первого слагаемого [**77**, (5.20)] не является точной. Для того чтобы ее улучшить достаточно оптимизировать [**77**, (5.10)] при помощи более точной оценки на следующий интеграл

$$\Lambda(r,Z)=\frac{\Gamma^2(1/2+ir)}{\Gamma(1+2ir)}\int_0^{\infty}\frac{g\left(1/(Zy)\right)}{y^{3/2-ir}}F\left(\frac{1}{2}+ir,\frac{1}{2}+ir,1+2ir;-y\right)dy, \tag{1.6}$$

где $Z=M/f$. Заметим, что $g(x)$ - гладкая характеристическая функция интервала $[1/2;1]$ согласно [**77**, стр. 561]. Более того, в соответствии с [**77**, теоремой 3] выполняется следующее соотношение

$$\Theta(r;W)=\frac{1}{2}\Re\left(\left(1+\frac{i}{\sinh(\pi r)}\right)\Lambda(r,Z)\right). \tag{1.7}$$

1.3. Основная оценка

Основной результат этого раздела - верхняя оценка на $\Lambda(r, Z)$.

Лемма 1.3.1. *Выполнено следующее*

$$|\Lambda(r, Z)| \ll Z(\log r + |\log Z|) + Z^{3/2} r. \tag{1.8}$$

Доказательство Леммы 1.3.1 основано на следующей оценке.

Лемма 1.3.2. *Для $r \gg 1$ справедлива оценка*

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma^2(-1/2 + i(r+t))\Gamma(1-it)}{\Gamma(i(2r+t))} y^{-1+it} dt \ll \frac{r}{y}.$$

Доказательство. Оценим интеграл по I по модулю. Первая Гамма-функция при помощи [**86**, (5.5.1), (5.4.4)] преобразуется как

$$\left|\Gamma^2(-1/2 + i(r+t))\right| = \left|\frac{\Gamma^2(1/2 + i(r+t))}{(-1/2 + i(r+t))^2}\right| =$$

$$\frac{\pi}{\left|-1/2 + i(r+t)^2\right|^2 \cosh \pi(r+t)} \ll \frac{1}{(1 + (r+t)^2)\cosh \pi(r+t)}.$$

Более того, из [**86**, (5.4.3)] следует

$$|\Gamma(i(2r+t))| = \sqrt{\frac{\pi}{(2r+t)\sinh \pi(2r+t)}}.$$

Далее из [**86**, (5.5.1), (5.4.3)] получаем

$$|\Gamma(1-it)| = |-it\Gamma(-it)| = |-it|\sqrt{\frac{\pi}{t \sinh \pi t}} \ll \sqrt{\frac{t}{\sinh \pi t}}.$$

Таким образом, мы доказали

$$|I| \ll \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{(2r+t)\sinh \pi(2r+t)}}{(1 + (r+t)^2)\cosh \pi(r+t)} \sqrt{\frac{t}{\sinh \pi t}} dt.$$

Разобьем последний интеграл на семь частей

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{1}^{\infty} + \int_{-1}^{1} + \int_{-r+1}^{-1} + \int_{-r-1}^{-r+1} + \int_{-2r+1}^{-r-1} + \int_{-2r-1}^{-2r+1} + \int_{-\infty}^{-2r-1},$$

так что

$$|I| \ll \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{7} I_i.$$

Вне интервалов $2, 4, 6$ гипергеометрическая функция может быть оценена как

$$\exp\left(\frac{\pi}{2}|2r+t| - \pi|r+t| - \frac{\pi}{2}|t|\right).$$

Заметим, что

$$\left|r+\frac{t}{2}\right|-|r+t|-\frac{1}{2}|t|=\begin{cases}-t & t>0\\ 0 & -r<t<0\\ 2r+2t & -2r<t<-r\\ t & t<-2r\end{cases}.$$

Наибольший вклад в I дают I_2, I_3 и I_4. Оценивая интеграл I_2, находим

$$I_2\ll\int_{-1}^{1}\frac{|2r+t|^{1/2}|2+t|^{1/2}}{1+(r+t)^2}dt\ll r^{-3/2}.$$

Интеграл I_3 может быть ограничен сверху следующим способом

$$I_3\ll\int_{-r+1}^{-1}\frac{|2r+t|^{1/2}|t|^{1/2}}{1+(r+t)^2}dt\ll r^{1/2}\int_1^{r-1}\frac{t^{1/2}}{1+(r-t)^2}dt\ll r^{1/2}\int_1^{r-1}\frac{t^{1/2}}{(r-t)^2}dt=$$
$$=r^{1/2}\int_1^{r-1}\frac{(r-y)^{1/2}}{y^2}dy\ll r^{1/2}\left(\int_1^{r/2}\frac{r^{1/2}}{y^2}dy+\int_{r/2}^{r-1}\frac{(r-y)^{1/2}}{y^2}dy\right)\ll r.$$

Далее оценим I_4 как

$$I_4\ll\int_{-r-1}^{-r+1}\frac{|2r+t|^{1/2}|t|^{1/2}}{1+(r+t)^2}dt\ll r.$$

Таким образом,

$$|I|\ll\frac{1}{y}\sum_{i=1}^{7}I_i\ll\frac{1}{y}(I_2+I_3+I_4)\ll\frac{r}{y}.$$

□

Следствие 1.3.3. *Справедлива следующая формула*

$$\frac{\Gamma^2(1/2+ir)}{\Gamma(1+2ir)}F\left(\frac{1}{2}+ir,\frac{1}{2}+ir,1+2ir;-y\right)=$$
$$y^{-1/2-ir}\left(\log y+2\psi(1)-2\psi(1/2+ir)\right)+O\left(\frac{r}{y}\right),$$

где $\psi(s)=\Gamma'(s)/\Gamma(s)$ - *логарифмическая производная Гамма-функции.*

Доказательство. Из интеграла Меллина-Барнса [**86**, (15.6.6)] следует

$$\frac{\Gamma^2(1/2+ir)}{\Gamma(1+2ir)}F\left(\frac{1}{2}+ir,\frac{1}{2}+ir,1+2ir;-y\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma^2(1/2+ir+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(1+2ir+s)}y^s ds,$$

где $-1/2<c<0$.

Сдвинем контур интегрирования на прямую $c=-1$ и положим $s:=-1+it$. Тогда

$$y^{-1/2-ir}\left(\log y+2\psi(1)-2\psi(1/2+ir)\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma^2(-1/2+i(r+t))\Gamma(1-it)}{\Gamma(i(2r+t))}y^{-1+it}dt.$$

Оценивая полученный интеграл при помощи Леммы 1.3.2, доказываем утверждение леммы.

□

Так как функция $g(x)$ не является осциллирующей, доказываем Лемму 1.3.1, оценивая выражение (1.6) по модулю и применяя Следствие 1.3.3.

Покажем, что использование оценки (1.8) вместо [**77**, (5.10)] позволяет значительно лучше оценить $e_2(M,f)$ при $f > M^{2/(1+4\alpha)}$.

Теорема 1.3.4. *Для любого $\epsilon > 0$ и $M^{2/(1+4\alpha)} < f < M^{2-\epsilon}$ получаем*

$$e_2(M,f) \ll f^{\epsilon}\left(f^{1/4}M^{1/2} + \delta^{-1/2}f^{1/2}\right). \tag{1.9}$$

Доказательство. Рассмотрим сумму по $\kappa_j \le \sqrt{f/M} = Z^{-1/2}$. Из неравенств (1.7), (1.8) следует, что для таких κ_j верно

$$\Theta(\kappa_j; W) \ll |\Lambda(\kappa_j, Z)| \ll Zf^{\epsilon}.$$

Получим верхнюю оценку на среднее

$$\sum_{\kappa_j \le \sqrt{f/M}} \alpha_j |t_j(f)| H_j^2(1/2)$$

двумя различными способами. Во-первых, применяя $|t_j(f)| \ll f^{\alpha+\epsilon}$ для любого $\epsilon > 0$ и [**75**, теорему 2], получаем

$$\sum_{\kappa_j \le \sqrt{f/M}} \alpha_j |t_j(f)| H_j^2(1/2) \ll \frac{f^{1+\alpha+\epsilon}}{M}.$$

Во-вторых, из неравенства Коши-Шварца, оценки Кузнецова [**127**], [**77**, (2.1)] и [**75**, теоремы 5] следует

$$\sum_{\kappa_j \le \sqrt{f/M}} \alpha_j |t_j(f)| H_j^2(1/2) \ll \sqrt{\sum_{\kappa_j \le \sqrt{f/M}} \alpha_j t_j(f)^2 \sum_{\kappa_j \le \sqrt{f/M}} \alpha_j H_j^4(1/2)} \ll$$
$$\sqrt{\frac{f}{M} + f^{1/2+\epsilon}}\sqrt{\frac{f}{M}f^{\epsilon}} \ll \frac{f^{3/4+\epsilon}}{M^{1/2}}.$$

Поэтому

$$A := \sqrt{f} \sum_{\kappa_j \le \sqrt{f/M}} \alpha_j t_j(f) H_j^2(1/2)\Theta(\kappa_j; W) \ll$$
$$\frac{Mf^{\epsilon}}{\sqrt{f}} \sum_{\kappa_j \le \sqrt{f/M}} \alpha_j |t_j(f)| H_j^2(1/2) \ll \frac{Mf^{\epsilon}}{\sqrt{f}} \frac{f}{M} \min\left(f^{1/4}, f^{\alpha}\sqrt{f/M}\right).$$

При $f > M^{2/(1+4\alpha)}$ получаем

$$\min\left(f^{1/4}, f^{\alpha}\sqrt{f/M}\right) = f^{1/4} \text{ and } A \ll \sqrt{M}f^{1/4+\epsilon}.$$

Для суммы $\kappa_j > \sqrt{f/M}$ применим оценки Мотохаши. Следовательно,

$$e_2(M,f) \ll M^{1/2} f^{1/4+\epsilon} + (Mf)^{1/4} \left(M^{1/4} + \delta^{-1/2} f^{1/4} M^{-1/4}\right) M^{\epsilon} \ll$$
$$f^{\epsilon} \left(f^{1/4} M^{1/2} + \delta^{-1/2} f^{1/2}\right).$$

□

Подставляя (1.5) и (1.9) в (1.4), находим

$$E^*(M) - E^*(M/2) \ll f^{1/2+\epsilon} + (\delta M + \delta^{-1/2} f^{1/2} + f^{1/4} M^{1/2}) f^{\epsilon}$$

для $M^{2/(1+4\alpha)} < f < M^{2-\epsilon}$. Приравнивая слагаемые, определяем что оптимальный выбор параметра δ следующий

$$\delta = \frac{f^{1/3}}{M^{2/3}}.$$

Тогда, для $M^{2/(1+4\alpha)} < f < M^{2-\epsilon}$ находим

$$E^*(M) - E^*(M/2) \ll f^{\epsilon}(f^{1/3} M^{1/3} + f^{1/4} M^{1/2}). \tag{1.10}$$

Таким образом, оценки (1.10) и (1.3) идентичны при $f > M^{2/(1+4\alpha)}$.

ГЛАВА 2

О средней длине конечных цепных дробей с фиксированным знаменателем

Данная глава написана на основе работ [**116**], [**118**].

2.1. Введение

Хорошо известно, что алгоритм Евклида для двух натуральных чисел a и b $(a < b)$ тесно связан с разложением рационального числа a/b в конечную цепную дробь

$$\frac{a}{b} = [0; a_1 \ldots, a_s] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_s}}} \tag{2.1}$$

длины $s = s(a/b)$, в которой $a_1, \ldots, a_s$ — натуральные и $a_s \geqslant 2$ при $s \geqslant 1$. Существует много модификаций алгоритма Евклида, приводящих к представлению рационального числа в виде различных непрерывных дробей (см. [**134**], [**135**]). Количество шагов в большинстве алгоритмов Евклида может быть выражено через (см.[**134**], [**135**]) статистики Гаусса-Кузьмина, которые для действительного $x \in [0, 1]$ и a/b из (2.1) задаются равенством

$$s_x(a/b) = \#\{j : 1 \leqslant j \leqslant s(a/b), [0; a_j, \ldots, a_s] \leqslant x\}.$$

Отметим, что $s_1(a/b) = s(a/b)$. Первый результат о среднем значении длин цепных дробей принадлежит Хейльбронну (см. [**39**])

$$\frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant b \\ (a,b)=1}} s(a/b) = \frac{2 \log 2}{\zeta(2)} \cdot \log b + O(\log^4 \log b), \tag{2.2}$$

где $\varphi(\cdot)$ функция Эйлера. При доказательстве формулы (2.2) Хейльбронн использовал лишь элементарные методы и одно ключевое соображение. А именно, он показал что задача о нахождении среднего значения длин цепных дробей тесно связана с задачей о количестве решений в целых числах уравнения $n_1 n_2 + n_3 n_4 = b$. Отметим, что впервые связь между средними значениями различных характеристик цепных дробей и количеством целочисленных решений некоторого уравнения была установлена Локсом [**72**].

С помощью оценок А.Вейля для сумм Клоостермана Портер доказал (см. [**92**]), что

$$\frac{1}{\varphi(b)}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s(a/b)=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\cdot\log b+C_P-1+O_\varepsilon(b^{-1/6+\varepsilon}), \tag{2.3}$$

где $\varepsilon>0$ и

$$C_P=\frac{2\log 2}{\zeta(2)}\left(\frac{3\log 2}{2}+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\right)-\frac{1}{2}$$

–константа Портера (в данном виде получена Ренчем см. [**60**]). Результат (2.3) может быть обобщен на случай статистик Гаусса-Кузьмина (см. [**136**]), в виде

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s_x(a/b)=\frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}\left(\log(x+1)\log b+C_P(x)\right)+O_{\varepsilon,x}\left(b^{5/6}\log^{7/6+\varepsilon}b\right), \tag{2.4}$$

где $\varepsilon>0$ и $x\in(0,1]$,

$$C_P(x)=\log(1+x)\left(\log x-\frac{\log(x+1)}{2}+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1\right)+$$
$$+h_1(x)+h_2(x)+\frac{\zeta(2)}{2}\left(x\cdot[x<1]-\frac{x}{1+x}\right),$$

функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$ заданы абсолютно сходящимися рядами

$$h_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{x}{n+mx}-\log(1+x)\right), \tag{2.5}$$

$$h_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{\frac{n}{x}\leqslant m<\frac{n}{x}+n}\frac{1}{m}-\log(1+x)\right), \tag{2.6}$$

а символ $[x<1]$ равен 1, если $x<1$ и 0 в противном случае. Используя результат Ренча [**60**] , получаем

$$h_1(1)=\log^2 2-\frac{\zeta(2)}{2},\quad h_2(1)=\log^2 2,\quad \frac{2}{\zeta(2)}C_P(1)=C_P-1.$$

Основной целью данной работы является улучшение оценки остаточного члена в асимптотической формуле (2.4).

Теорема 2.1.1. *Для любого $x\in(0,1],\varepsilon>0$*

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s_x(a/b)=\frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}\left(\log(x+1)\log b+C_P(x)\right)+O_{\varepsilon,x}\left(b^{5/6-1/42+\varepsilon}\right).$$

При $x=1$ мы докажем более сильное утверждение.

Теорема 2.1.2. *Для любого $\varepsilon>0$*

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s(a/b)=\frac{2\varphi(b)}{\zeta(2)}\left(\log 2\log b+C_P(1)\right)+O_\varepsilon\left(b^{5/6-7/174+\varepsilon}\right).$$

Основной идеей, лежащей в основе доказательств результатов Хейльбронна, Портера и Устинова, является взаимосвязь между средним значением длин цепных дробей и количеством решений в натуральных числах системы

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 = N, \quad 1 \leqslant n_1 \leqslant n_3, \quad 1 \leqslant n_2 \leqslant n_4. \tag{2.7}$$

Опишем основные идеи, позволившие улучшить оценку остаточного члена в асимптотической формуле (2.4). На первом шаге мы, производя замены переменных, преобразуем систему (2.7) к виду

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 = N, \quad 1 \leqslant n_1/n_3 \leqslant 2.$$

На втором этапе мы сглаживаем характеристическую функцию отрезка $[1, 2]$ в 2.1. Возникающие при этом суммы на отрезках сглаживания вычисляются так же как в [**137**]. При этом используются лишь методы работ Хейльбронна, Портера и Устинова. Получающиеся асимптотические формулы имеют лучшую чем $O_\varepsilon\left(b^{5/6+\varepsilon}\right)$ оценку остатка за счет малости отрезка сглаживания. Это является третьим шагом доказательства. На четвертом этапе мы вычисляем сумму с гладкой характеристической функцией. Для этого применяется принципиально новый для данной задачи метод. Записывая характеристическую функцию через обратное преобразование Меллина, мы сводим задачу к получению равномерной по s асимптотической формулы для аддитивной проблемы делителей

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sigma_s(n)\sigma_{-s}\left(N-n\right), \tag{2.8}$$

где $\sigma_s(n)$ сумма s-ых степеней делителей числа n. Данная задача, восходящая к Рамануджану, последовательно изучалась в работах Ингама [**45**], Эстермана [**30**], Халберстама [**36**], Кузнецова [**126**] и Мотохаши [**75**]. Однако во всех перечисленных работах основной задачей было понижение степени N в остаточном члене асимптотической формулы для суммы (2.8). В настоящей работе впервые получена асимптотическая формула для суммы (2.8) равномерная по параметру s.

Использование нового метода приводит к тому, что мы получаем другое выражение, отличное от формул Хейльбронна, Портера и Устинова, для главного члена в асимптотической формуле для суммы со сглаженной функцией. На пятом этапе мы доказываем равенство главных членов в этих двух различных асимптотических формулах как для сумм на отрезках сглаживания, так и для сумм на отрезке $[1, 2]$.

2.2. Вспомогательные утверждения

Если A–некоторое утверждение, то $[A]$ означает 1, если A истинно, и 0 в противном случае. Для натурального q и целого a положим

$$\delta_q(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

Дзета-функция Римана в полосе $\Re s > 1$ определяется по формуле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

с абсолютно сходящимся в полосе $\Re s > 1$ рядом из правой части. Она продолжается голоморфно на всю плоскость комплексного переменного s за исключением точки $s = 1$. В последнем случае в этой точке у $\zeta(s)$ простой полюс с вычетом 1. В дальнейшем нам понадобятся следующие оценки на дзета-функцию Римана при $|t| \geqslant 2$

$$|\zeta(1+it)| \ll \log^{2/3}|t|,\ |\zeta(it)| \ll \sqrt{t}\log^{2/3}|t|,\ \frac{1}{|\zeta(1+it)|} \ll \log|t|. \tag{2.9}$$

Первая оценка доказана, например, в [**121**, стр 114]. Вторая следует из первой с помощью функционального уравнения для дзета-функции Римана. Третья доказана, например, в [**101**, стр. 158]. Для комплексного s и натурального n

$$\tau_s(n) = \tau_{-s}(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^s = n^s \sigma_{-2s}(n) = n^{-s}\sigma_{2s}(n) \tag{2.10}$$

-обобщенная функция числа делителей. Напомним классический результат Дирихле [**125**, теорема 3, стр. 12] (здесь и далее $\tau(n) = \tau_0(n)$)

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant R} \tau(n) = R\left(\log R + 2\gamma - 1\right) + O(R^{1/2}) \tag{2.11}$$

и его следствие, получающиеся путем применения преобразования Абеля

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant R} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{1}{2}\log^2 R + 2\gamma \log R + \gamma^2 - 2\gamma_1 + O\left(\frac{\log R}{R^{1/2}}\right). \tag{2.12}$$

Обозначим через $\mu(\cdot)$ функцию Мебиуса. Справедливы асимптотические формулы

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant R} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O(R^{-1}) \tag{2.13}$$

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant R} \frac{\mu(n)}{n^2}\log n = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + O\left(\frac{\log R}{R}\right). \tag{2.14}$$

Через $\mathrm{Li}_2(z)$ обозначим дилогарифм Эйлера

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t} dt,$$

$$\mathrm{Li}_2'(z) = -\frac{\log(1-z)}{z}. \tag{2.15}$$

Лемма 2.2.1. *При $y > -1, U > 10$ справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{n<U} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{ny}{U}\right) = -\mathrm{Li}_2(-y) + O_y\left(\frac{1}{U}\right).$$

Доказательство. Применяя формулу суммирования Эйлера-Маклорена [**121**, стр. 315], получаем

$$\sum_{n<U} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{ny}{U}\right) = \int_0^U \log\left(1 + \frac{zy}{U}\right) \frac{dz}{z} + O_y\left(\frac{1}{U}\right) = \int_0^y \log(1+t)\,\frac{dt}{t} + O_y\left(\frac{1}{U}\right) =$$

$$= \int_0^y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \frac{dt}{t} + O_y\left(\frac{1}{U}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^n}{n^2} + O_y\left(\frac{1}{U}\right) = -\mathrm{Li}_2(-y) + O_y\left(\frac{1}{U}\right).$$

□

Для целых m_1, m_2 и M

$$S_q(m_1, m_2; M) = \sum_{a,b=0}^{q-1} \delta_q(ab - M) e\left(\frac{m_1 a + m_2 b}{q}\right)$$

–обобщенная сумма Клостермана. Нам понадобится оценка (см.[**136**, лемма 1])

$$|S_q(m_1, m_2; M| \leqslant q^{1/2} \tau^2(q) (m_1 m_2, q)^{1/2} \ll_\varepsilon q^{1/2+\varepsilon} (m_1 m_2, q)^{1/2}. \tag{2.16}$$

Положим

$$k^+(s; z) = \frac{1}{2\sin(\pi s)} \left(J_{-2s}(z) - J_{2s}(z)\right), \qquad k^-(s; z) = \frac{2}{\pi} \cos(\pi s) K_{2s}(z),$$

где $J_s(z)$ и $K_s(z)$, соответственно, стандартная и модифицированная функции Бесселя. Положим

$$\varphi_s(n) = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^{1+s}}, \qquad \gamma(s; M; q) = \sum_{d|(M,q)} d^{-s} \varphi_s\left(\frac{q}{d}\right).$$

Для натурального M и бесконечно дифференцируемой функции $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$ с компактным носителем, отделенным от нуля, справедлива следующая обобщенная формула суммирования Вороного [**19**]

$$\sum_{n \equiv M (mod\, q)} f(n) \tau_s(n) = \frac{\zeta(1+2s)}{q} \gamma(2s; M; q) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x|^s dx + \tag{2.17}$$

$$+ \frac{\zeta(1-2s)}{q} \gamma(-2s; M; q) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x|^{-s} dx +$$

$$+ \frac{2\pi}{q^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^s \left(g^+\left(16\pi^2 \frac{mn}{q^2}\right) S_q(m, n; M) + g^-\left(16\pi^2 \frac{mn}{q^2}\right) S_q(m, n; -M)\right),$$

где

$$g^{\pm}(y)=\int_0^{\infty}\left(k^{\pm}(s;\sqrt{xy})f(x)+k^{\mp}(s;\sqrt{xy})f(-x)\right)dx.$$

Лемма 2.2.2. *Для* $(M,N)=1$ *и* $\Re s>\max\{1,-\Re v\}$ *выполнено следующее равенство*

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma(v;M;qN)}{q^s}=\frac{\tau_{(s+v)/2}(M)}{M^{(s+v)/2}}\frac{\zeta(s)}{\zeta(1+s+v)}\frac{\phi_v(N)}{\phi_{s+v}(N)}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Опираясь на (3.6) и условие $(M,N)=1$, получаем

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma(v;M;qN)}{q^s}=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^s}\sum_{d|(M,q)}d^{-v}\varphi_v\left(\frac{qN}{d}\right)=\sum_{d|M}d^{-v-s}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\varphi_v(qN)}{q^s}=$$

$$=\sum_{d|M}d^{-v-s}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^s}\sum_{m|qN}\frac{\mu(m)}{m^{1+v}}=\sum_{d|M}d^{-v-s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^{1+v}}\frac{(m,N)^s}{m^s}\zeta(s)=$$

$$=\frac{\tau_{(s+v)/2}(M)}{M^{(s+v)/2}}\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^{1+v}}\frac{(m,N)^s}{m^s}.$$

Представляя ряд по m в виде эйлеровского произведения, получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^{1+v}}\frac{(m,N)^s}{m^s}=\prod_p\left(1-\frac{(p,N)^s}{p^{1+v+s}}\right)=\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{1}{p^{1+v+s}}\right)\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^{1+v}}\right)=$$

$$=\phi_v(N)\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{1+v+s}}\right)\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^{1+v+s}}\right)^{-1}=\frac{\phi_v(N)}{\zeta(1+s+v)\phi_{s+v}(N)}.$$

Лемма доказана. □

Для функции $k^{+}(it/2;t\sqrt{z})$ при $z,t>0$ справедлива следующая равномерная по t асимптотическая формула [**28**, (3.4b), (5.16)]

$$k^{+}(it/2;t\sqrt{z})=-\left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2}(1+z)^{-1/4}\left(\sin\left(t\kappa(z)-\pi/4\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kU_{2k}(p)}{t^{2k}}-\right.$$

$$\left.-\cos\left(t\kappa(z)-\pi/4\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^kU_{2k+1}(p)}{t^{2k+1}}+O\left(\frac{p^{2n+1}}{t^{2n+1}}\right)\right), \tag{2.19}$$

где

$$\kappa(z)=(1+z)^{1/2}+\log\frac{z^{1/2}}{1+(1+z)^{1/2}},\quad p=(1+z)^{-1/2}, \tag{2.20}$$

а функции $U_j(p)$ определены в [**131**, стр 363]

$$U_0(p)=1,\quad U_1(p)=\frac{3p-5p^3}{24},\quad U_2(p)=\frac{81p^2-462p^4+385p^6}{1152}.$$

Легко проверить, что

$$\kappa'(z)=\frac{\sqrt{1+z}}{2z}. \tag{2.21}$$

При $t>0$ справедливы следующие оценки (см. [**15**, ф. (14), (21), (25), (26)])

$$0<K_{it}(tz)\ll e^{-\pi t/2-t\rho(z)}\min\left\{\frac{1}{t^{1/3}},\frac{1}{t^{1/2}(z^2-1)^{1/4}}\right\},\quad\text{если}\quad z\geqslant 1, \tag{2.22}$$

где $\rho(z)=\sqrt{z^2-1}-\arccos\frac{1}{z}$ и

$$|K_{it}(tz)|\ll e^{-\pi t/2}\min\left\{\frac{1}{t^{1/3}},\frac{1}{t^{1/2}(1-z^2)^{1/4}}\right\},\quad\text{если}\quad z<1. \tag{2.23}$$

Следовательно,

$$|k^{-}(it/2;z)|\ll\frac{(1+t^2)^{1/12}}{(t^2+z^2)^{1/4}}. \tag{2.24}$$

Применяя (2.19), (2.22) и (2.23), приходим к оценке

$$\left(\int_0^1|k^{\pm}(it/2;\sqrt{xy})|^2dx\right)^{1/2}\ll\frac{1}{\sqrt{1+|t|}}\min\left(1,\frac{\sqrt{1+|t|}}{y^{1/4}}\right). \tag{2.25}$$

Следующее классическое неравенство доказывается с помощью второй теоремы о среднем.

Лемма 2.2.3. *Пусть $f,g\in C^1[a;b]$, $g'(x)\neq 0$ и функция $f(x)/g'(x)$ имеет конечное число участков монотонности, тогда*

$$\left|\int_a^b f(x)e^{ig(x)}dx\right|\ll\sup_{x\in[a;b]}\frac{|f(x)|}{|g'(x)|}.$$

Преобразование Меллина от функции $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ определяется по формуле

$$\hat{f}(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx. \tag{2.26}$$

Если для сколь угодного малого положительного числа ε функция $f(x)$ такова, что $f(x)=O(x^{-a-\varepsilon})$ при $x\to 0+$ и $f(x)=O(x^{-b+\varepsilon})$ при $x\to+\infty$, и при этом $a<b$, то интеграл в (4.23) сходится абсолютно и определяет аналитическую функцию в полосе $a<\Re s<b$. Обратное преобразование Меллина определяется по формуле (см., например,[**87**])

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=c}\hat{f}(s)x^{-s}ds,\quad\text{где}\quad a<c<b. \tag{2.27}$$

Зафиксируем две бесконечно дифференцируемые функции

$$\theta:[0,1]\to[0,1]\quad\text{и}\quad\eta:[0,\infty)\to[0,1],$$

для которых

$$\theta(x)=0,\quad\text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\quad\text{и}\quad\theta(x)=1,\quad\text{если}\quad\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1, \tag{2.28}$$

$$\eta(x)=1,\quad\text{если}\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\eta(x)=0,\quad\text{если}\quad x\geqslant 2, \tag{2.29}$$

$$\theta(x)+\theta(1-x)=1,\quad \eta(x)+\eta(1/x)=1. \tag{2.30}$$

Определим функцию $\omega(\delta,\cdot):(-\infty,\infty)\to[0,\infty)$ следующим образом

$$\omega(\delta,x)=c^{-1}(\delta)\exp\left(\frac{1}{x-\delta}-\frac{1}{x+\delta}\right),\quad \text{если}\quad |x|<\delta,$$

$$\omega(\delta,x)=0\quad \text{если}\quad |x|\geqslant\delta,$$

где константа $c(\delta)$ выбрана таким образом, чтобы выполнялись условие

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\delta,x)dx=1.$$

Лемма 2.2.4. *Для любого действительного числа a такого, что либо $a\geqslant 0$, либо $a^2\delta<2$ справедлива следующая оценка*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\delta,x)(x+\delta)^a dx\ll_a \delta^a. \tag{2.31}$$

Доказательство. Докажем (2.31) при $\delta<1/10$. Оценим константу $c(\delta)$.

$$c(\delta)=\int_{-\delta}^{\delta}\exp\left(\frac{1}{x-\delta}-\frac{1}{x+\delta}\right)dx=2\delta\int_0^1\exp\left(\frac{2}{\delta(x^2-1)}\right)dx= \tag{2.32}$$

$$=2\delta\exp\left(-\frac{2}{\delta}\right)\int_0^1\exp\left(-\frac{2x^2}{\delta(1-x^2)}\right)dx=2\delta\exp\left(-\frac{2}{\delta}\right)\times$$

$$\left(\int_0^{d_0}\exp\left(-\frac{2x^2}{\delta(1-x^2)}\right)dx+\sum_{0\leqslant i<I}\int_{d_i}^{d_{i+1}}\exp\left(-\frac{2x^2}{\delta(1-x^2)}\right)dx\right),$$

где $d_i=d_0 2^i$ при $0\leqslant i<I$ и $d_I=1$. Выбирая $d_0=\delta^{1/2}$, получаем

$$c(\delta)\ll\delta\exp\left(-\frac{2}{\delta}\right)\left(\delta^{1/2}+\sum_{0\leqslant i<I}(d_{i+1}-d_i)\exp\left(-\frac{2d_i^2}{\delta(1-d_i^2)}\right)\right)\ll \tag{2.33}$$

$$\ll\delta\exp\left(-\frac{2}{\delta}\right)\left(\delta^{1/2}+\delta^{1/2}\sum_{0\leqslant i<I}2^i\exp\left(-2^{2i+1}\right)\right)\ll\delta^{3/2}\exp\left(-\frac{2}{\delta}\right)$$

Доказательство оценки (2.31) при $a\geqslant 0$ тривиально. Поэтому положим $a=-b, b>0$. Производя преобразования такие же как в (2.32) и (2.33) получаем

$$\int_{-\delta}^{\delta}\exp\left(\frac{1}{x-\delta}-\frac{1}{x+\delta}\right)(x+\delta)^{-b}dx\ll\delta^{-b}c(\delta)+\delta^{1-b}\exp\left(-\frac{2}{\delta}\right)\times$$

$$\left(\int_0^{d_0}\exp\left(-\frac{2x^2}{\delta(1-x^2)}\right)\frac{dx}{(1-x)^b}+\sum_{0\leqslant i<I}\int_{d_i}^{d_{i+1}}\exp\left(-\frac{2x^2}{\delta(1-x^2)}\right)\frac{dx}{(1-x)^b}\right)$$

Несложно показать, что функция $g(x)=\exp\left(-2\delta^{-1}x^2/(1-x^2)\right)(1-x)^{-b}$ является убывающей при $x>b\delta$. Положим $d_0=\rho\delta^{1/2}$ и выберем константу ρ таким образом, чтобы $d_{I-1}<9/10$. Ввиду условия $b^2\delta<2$ мы получаем, что $g(x)$ убывает при $x>d_0$ и, следовательно,

$$\int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(\frac{1}{x-\delta}-\frac{1}{x+\delta}\right)(x+\delta)^{-b}dx \ll \delta^{-b}c(\delta)+\delta^{1-b}\exp\left(-\frac{2}{\delta}\right)\times$$
$$\left(\delta^{1/2}+\sum_{0\leqslant i<I} d_{i+1}\exp\left(-\frac{2d_i^2}{\delta(1-d_i^2)}\right)(1-d_i)^{-b}\right) \ll \delta^{-b}c(\delta).$$

□

Пусть $\chi(a,b;\cdot)$ характеристическая функция отрезка $[a,b]$. Тогда функция

$$\alpha(a,b,\delta;y)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(a-\delta/2,b+\delta/2;z+y)\omega(\delta/2,z)dz \tag{2.34}$$

обладает следующими свойствами:

$$\alpha(a,b,\delta;y)=1, \quad \text{если} \quad a\leqslant y\leqslant b$$
$$\alpha(a,b,\delta;y)=0, \quad \text{если} \quad y\leqslant a-\delta \quad \text{или} \quad y\geqslant b+\delta. \tag{2.35}$$

Обозначим через $\hat{\alpha}(s)$ преобразование Меллина от функции $\alpha(1,1+x,\Delta;\cdot)$.

Лемма 2.2.5. *Для любого $a>-1, 0<\Delta<\frac{1}{2}$ и $x\in(0,1]$*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\alpha}(it)|t^a dt \ll_{a,x} 1+\Delta^{-a}.$$

Доказательство. Используя (2.35) и (4.23), получаем

$$|\hat{\alpha}(it)| \ll_x 1. \tag{2.36}$$

Интегрируя $n+1$ раз по частям интеграл определяющий $\hat{\alpha}(s)$, получаем для $t>1$

$$|\hat{\alpha}(it)| \ll_x \frac{1}{t^{n+1}}\int_0^{\infty}|\alpha^{(n+1)}(y)|y^n dy \ll_x \frac{1}{t^{n+1}\Delta^n}. \tag{2.37}$$

Используя один раз оценку (2.36) и два раза (2.37) (с $n=0$ и $n=2+[a]$), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\alpha}(it)|t^a dt \ll \int_0^1|\hat{\alpha}(it)|t^a dt+\int_1^{1/\Delta}|\hat{\alpha}(it)|t^a dt+\int_{1/\Delta}^{\infty}|\hat{\alpha}(it)|t^a dt \ll_x$$
$$\ll_x 1+\int_1^{1/\Delta}t^{a-1}dt+\int_{1/\Delta}^{\infty}\frac{t^a}{t^{3+[a]}\Delta^{2+[a]}}dt \ll_{a,x} 1+\Delta^{-a}.$$

□

Лемма 2.2.6. *Преобразование Меллина $\hat{\eta}(s)$ является мероморфной функцией с единственным простым полюсом в точке $s=0$ и для $s\neq 0$*

$$\hat{\eta}(s)+\hat{\eta}(-s)=0. \tag{2.38}$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ в области $\min\limits_{j\geqslant 0} dist(s,-j) > \varepsilon$ имеет место оценка

$$\hat{\eta}(s) = \frac{(-1)^k}{s(s+1)\dots(s+k-1))}\int_{1/2}^{2}\eta^{(k)}(x)x^{s+k-1}dx \ll_{\varepsilon} \frac{1}{(1+|s|)^k}. \tag{2.39}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\hat{\eta}(s) = \int_0^{\infty}\eta(x)x^{s-1}dx = \int_0^{1/2}x^{s-1}dx + \int_{1/2}^{\infty}\eta(x)x^{s-1}dx = \frac{1}{2^s s} + \int_{1/2}^{\infty}\eta(x)x^{s-1}dx,$$

и последний интеграл задает аналитическую по s функцию. Интегрируя по частям, получим (3.21). Чтобы доказать (3.20), запишем $\hat{\eta}(s)$ и $\hat{\eta}(-s)$ в виде

$$\hat{\eta}(s) = \frac{-1}{s}\int_0^{\infty}\eta'(x)x^s dx,$$

$$\hat{\eta}(-s) = \frac{1}{s}\int_0^{\infty}\eta'(x)x^{-s}dx = \frac{1}{s}\int_0^{\infty}\eta'\left(\frac{1}{x}\right)x^{s-2}dx.$$

Отсюда находим, что

$$\hat{\eta}(s) + \hat{\eta}(-s) = \frac{-1}{s}\int_0^{\infty}\left(\eta'(x) - \frac{1}{x^2}\eta'\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^s dx.$$

Дифференцируя (3.19) мы получаем, что $\eta'(x) - \frac{1}{x^2}\eta'\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ и, следовательно, соотношение (3.20) доказано.

□

2.3. Длина цепной дроби и число решений уравнения

Впервые связь между средними значениями различных характеристик цепных дробей и количеством целочисленных решений некоторого уравнения была установлена Локсом [**72**] и впоследствии Хейльбронном [**39**]. Мы воспользуемся обобщением результата Хейльбронна на случай статистик Гаусса-Кузьмина, которые было полученно Устиновым [**133**, лемма 3] и [**136**, ф. (32)]

Лемма 2.3.1. *Для любого $b \geqslant 2, \epsilon > 0$ и $x \in (0,1]$ справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant b\\(a,b)=1}} s_x(a/b) = 2\sum_{d_1 d_2|b}\mu(d_1)\mu(d_2)\widetilde{T}_x\left(\frac{b}{d_1 d_2}\right) + \varphi(b)\left(x\cdot[x<1] - \frac{x}{x+1}\right) + O_{\epsilon}(b^{\epsilon}), \tag{2.40}$$

где $\widetilde{T}_x(N)$ число решений уравнения

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 = N, \tag{2.41}$$

относительно неизвестных с условиями

$$1 \leqslant n_1 \leqslant x n_3, \quad 1 \leqslant n_2 \leqslant n_4. \tag{2.42}$$

Устиновым [**136**] была доказана следующая асимптотическая формула для $\widetilde{T}_x(N)$

Лемма 2.3.2. *Для любого* $N \geqslant 2, \epsilon > 0$ *и* $x \in (0,1]$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{T}_x(N) = \frac{\log(1+x)}{\zeta(2)} \sum_{d|N} \frac{N}{d} \log \frac{N}{d^2} +$$

$$+ \frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)} \left(C(x) + h_1(x) + h_2(x)\right) + O_\epsilon\left(N^{5/6} \log^{7/6+\epsilon} N\right), \tag{2.43}$$

где $h_1(x)$ *и* $h_2(x)$ *определены в* (2.5), (2.6) *и*

$$C(x) = \log(1+x)\left(\log x - \frac{\log(x+1)}{2} + 2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1\right). \tag{2.44}$$

Чтобы доказать теорему 2.1.1 нам достаточно получить асимптотическую формулу (2.43) с таким же как в теореме 2.1.1 остаточным членом. Первый шаг доказательства заключается в упрощении условия (2.42)

Лемма 2.3.3. *Для любого* $N \geqslant 2, \epsilon > 0$ *и* $x \in (0,1]$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{T}_x(N) = T_x(N) + \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)\sigma_1(N) + O_\epsilon(N^\epsilon), \tag{2.45}$$

где $T_x(N)$ *число решений уравнения* (2.41) *относительно неизвестных с условиями*

$$n_3 \leqslant n_1 \leqslant (x+1)n_3, \quad n_2, n_3, n_4 \geqslant 1. \tag{2.46}$$

Доказательство. В (2.41), (2.42) произведем замену переменных

$$n_4 = m_4 + n_2, \quad n_1 = m_1 - n_3.$$

Получаем, что $\widetilde{T}_x(N)$ равно числу решений системы

$$m_1 n_2 + n_3 m_4 = N, \quad n_3 < m_1 \leqslant (1+x)n_3, \quad m_4 \geqslant 0, \quad n_{2,3} \geqslant 1. \tag{2.47}$$

Из (2.47) и определения $T_x(N)$ следует, что

$$\widetilde{T}_x(N) = T_x(N) + \sum_{m_1 n_2 = N} \sum_{n_3 < N/n_2 \leqslant (1+x)n_3} 1 - \sum_{n_3(n_2+m_4)=N} 1 =$$

$$= T_x(N) + \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)\sigma_1(N) + O_\epsilon(N^\epsilon).$$

□

Знак ромба в сумме $\sum^\diamond$ означает, что суммирование ведется по решениям уравнения (2.41) в натуральных числах. Используя свойство (2.35) функции $\alpha(1, 1+x, \Delta; \cdot)$, получаем следующее утверждение.

Лемма 2.3.4. *Справедливо равенство*

$$T_x(N) = S_1(x,N) - S_2(x,N) - S_3(x,N),$$

где

$$S_1(x,N) = \sideset{}{^\diamond}\sum \alpha\left(1, 1+x, \Delta; \frac{n_1}{n_3}\right),$$

$$S_2(x,N) = \sideset{}{^\diamond}\sum_{1-\Delta<n_1/n_3<1} \alpha\left(1, 1+x, \Delta; \frac{n_1}{n_3}\right),$$

$$S_3(x,N) = \sideset{}{^\diamond}\sum_{1+x<n_1/n_3\leqslant 1+x+\Delta} \alpha\left(1, 1+x, \Delta; \frac{n_1}{n_3}\right). \tag{2.48}$$

Используя определение (2.34) функции $\alpha(1, 1+x, \Delta; \cdot)$, получаем еще одно утверждение.

Лемма 2.3.5. *Справедливы равенства*

$$S_{2,3}(x,N) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\Delta/2, z) S_{2,3}(x,N;z)dz,$$

где $S_2(x,N;z)$ и $S_3(x,N;z)$ число решений уравнения (2.41) *с условиями*

$$1 - \frac{\Delta}{2} - z \leqslant \frac{n_1}{n_3} < 1 \quad и \quad 1 + x < \frac{n_1}{n_3} \leqslant 1 + x + \frac{\Delta}{2} - z \tag{2.49}$$

соответственно.

Таким образом задача о нахождении асимптотических формул для величин $S_{2,3}(x,N)$ вновь свелась к подсчету числа решений уравнения (2.41) с дополнительными условиями. Главное преимущество условий (2.49) над (2.46) заключается в том, что теперь величина n_1/n_3 должна принадлежать короткому интервалу, что обеспечит лучшую оценку остаточного члена в асимптотической формуле для $S_{2,3}(x,N)$.

Напомним, что $\hat{\alpha}(s)$ обозначает преобразование Меллина от функции $\alpha(1, 1+x, \Delta; \cdot)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.3.6. *Справедливо равенство*

$$S_1(x,N) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re s = 0} \hat{\alpha}(s) V(s;N) ds, \tag{2.50}$$

где

$$V(s;N) = \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_s(n)\sigma_{-s}(N-n) = \sum_{n_1 n_2 + n_3 n_4 = N} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^s. \tag{2.51}$$

Доказательство. Подставляя в определение суммы $S_1(x,N)$ из (2.48) функцию $\alpha(1, 1+x, \Delta; \cdot)$ записанную с использованием обратного преобразования Меллина, получаем равенство

$$S_1(x,N)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=0}\hat{\alpha}(s)\sum\nolimits^{\diamond}\left(\frac{n_1}{n_3}\right)^{-s}ds.$$

Осталось воспользоваться определением (3.4). □

Таким образом задача о нахождении асимптотической формулы для величин $S_1(x,N)$ свелась к хорошо изученной аддитивной проблеме делителей. Основная трудность заключается в том, что нам необходима равномерная по s асимптотическая формула для $V(s;N)$.

2.4. Аддитивная проблема делителей

Определим функцию комплексных аргументов s_1 и s_2

$$\begin{aligned}\rho_N(z;s_1,s_2)=\sigma_{1+s_1+s_2}(N)\frac{\zeta(1+s_1)\zeta(1+s_2)}{\zeta(2+s_1+s_2)}z^{s_1}(1-z)^{s_2}+\\ +N^{s_1}\sigma_{1-s_1+s_2}(N)\frac{\zeta(1-s_1)\zeta(1+s_2)}{\zeta(2-s_1+s_2)}(1-z)^{s_2}+\\ +N^{s_2}\sigma_{1+s_1-s_2}(N)\frac{\zeta(1+s_1)\zeta(1-s_2)}{\zeta(2+s_1-s_2)}z^{s_1}+N^{s_1+s_2}\sigma_{1-s_1-s_2}(N)\frac{\zeta(1-s_1)\zeta(1-s_2)}{\zeta(2-s_1-s_2)}.\end{aligned}\tag{2.52}$$

Отметим, что данная функция является голоморфной по каждой из переменных s_1 и s_2.

Теорема 2.4.1. *Для любого $N>2,\varepsilon>0$ и $s=it$, $T=1+|t|$*

$$V(s;N)=\int_0^1\rho_N(z,s,-s)dz+O_\varepsilon\left((NT)^{3/4+\varepsilon}\right).\tag{2.53}$$

Всюду далее будем считать $t>1$. Для $Q>0$ определим две функции

$$\xi_1(s;Q;x)=\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)x^{s/2},\tag{2.54}$$

$$\xi_{-1}(s;Q;x)=\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\frac{x^{s/2}}{(1-x)^s}.$$

Из определений (2.28) и (3.18) функций $\theta(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ следует, что $\xi_{\pm1}(s;Q;x)\neq0$ только на отрезке $[1/4,1-Q/2]$. Следовательно, $\xi_{\pm1}(s;Q;x)=0$ при $Q\geq3/2$. Для некоторого $\lambda\geqslant1$, которое будет выбрано оптимальным образом, и $j=\pm1$ положим

$$V_j(s;N;\lambda)=\sum_{q\leqslant\sqrt{3N\lambda^j/2}}\left(\frac{N^{1/2}}{q}\right)^{js}\tilde{V}_j(s;N;\lambda;q),\tag{2.55}$$

$$\tilde{V}_j(s;N;\lambda;q)=\sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\equiv N(mod q)}}\xi_j\left(s;\frac{q^2}{N\lambda^j};\frac{n}{N}\right)\tau_{s/2}(n).\tag{2.56}$$

Лемма 2.4.1. *Для любого $\lambda \geq 1$ справедливо равенство*

$$V(s;N) = V_1(s;N;\lambda) + V_1(-s;N;\lambda) + V_{-1}(s;N;\lambda) + V_{-1}(-s;N;\lambda). \tag{2.57}$$

Доказательство. Используя (3.19) и (2.51), получаем

$$V(s;N) = \sum_{n_1n_2+n_3n_4=N} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^s \left(\theta\left(\frac{n_1n_2}{N}\right) + \theta\left(\frac{n_3n_4}{N}\right)\right).$$

Производя во второй сумме замену $n_1 = m_3, n_2 = m_4, n_3 = m_1, n_4 = m_2$, получаем

$$V(s;N) = V(s;N;\theta) + V(-s;N;\theta), \tag{2.58}$$

$$V(s;N;\theta) = \sum_{n_1n_2+n_3n_4=N} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^s \theta\left(\frac{n_1n_2}{N}\right).$$

Рассмотрим $V(s;N;\theta)$. Используя (3.19), получаем

$$V(s;N;\theta) = \sum_{n_1n_2+n_3n_4=N} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^s \theta\left(\frac{n_1n_2}{N}\right)\left(\eta\left(\frac{n_3}{\lambda n_4}\right) + \eta\left(\frac{\lambda n_4}{n_3}\right)\right). \tag{2.59}$$

Преобразуем первую сумму из (2.59). Из (3.18) следует, что слагаемые в первой сумме не обнулятся только при $n_4 \geq n_3/(2\lambda)$. Так как $n_3n_4 < N$, то $n_3 < (2N\lambda)^{1/2}$. Фиксируя $n_3 = q$ и выражая $n_4 = (N - n_1n_2)/q$, получаем

$$\sum_{n_1n_2+n_3n_4=N} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^s \theta\left(\frac{n_1n_2}{N}\right)\eta\left(\frac{n_3}{\lambda n_4}\right) =$$

$$= \sum_{q<\sqrt{2N\lambda}} \sum_{\substack{n_1n_2\equiv N(mod q)\\ n_1n_2<N}} \left(\frac{n_1}{q}\right)^s \theta\left(\frac{n_1n_2}{N}\right)\eta\left(\frac{q^2}{\lambda(N-n_1n_2)}\right) =$$

$$= \sum_{q<\sqrt{2N\lambda}} q^{-s} \sum_{\substack{n\equiv N(mod q)\\ n<N}} \tau_{s/2}(n) n^{s/2}\theta\left(\frac{n}{N}\right)\eta\left(\frac{q^2}{\lambda(N-n)}\right).$$

Используя (2.54) и (2.55), находим

$$\sum_{n_1n_2+n_3n_4=N} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)^s \theta\left(\frac{n_1n_2}{N}\right)\eta\left(\frac{n_3}{\lambda n_4}\right) = V_1(s;N;\lambda).$$

Вторая сумма из (2.59) преобразуется аналогичным способом. Отметим, что слагаемые во второй сумме не обнулятся только при $n_4 < (2N/\lambda)^{1/2}$. Соответственно, мы фиксируем $n_4 = q$ и тогда $n_3 = (N - n_1n_2)/q$. Таким образом

$$V(s;N;\theta) = V_1(s;N;\lambda) + V_{-1}(s;N;\lambda). \tag{2.60}$$

Подставляя (2.60) в (2.58), получаем (2.57). □

Для $j=\pm 1$ определим функции

$$G_j^{\pm}(s;Q;y)=\int_0^{\infty}\xi_j(s;Q;x)k^{\pm}(s/2;\sqrt{xy})dx. \tag{2.61}$$

Лемма 2.4.2. *Для любого $N>2,\varepsilon>0$ и $s=it$, $T=1+|t|$ справедливо равенство*

$$V(s;N)=\int_0^1\rho_N(z,s,-s)dz+O_{\epsilon}\left((NT\lambda)^{1/2+\epsilon}\right)+\sum_{k,m=\pm 1}R_k^{\pm}(ms;N),$$

где для $j=\pm 1$

$$R_j^{\pm}(s;N)=\sum_{q\leqslant\sqrt{3N\lambda^j/2}}\frac{2N}{q^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{n}\right)^{s/2}S_q(m,n;N)G_j^{\pm}\left(s;\frac{q^2}{N\lambda^j};\frac{16\pi^2}{q^2}Nmn\right). \tag{2.62}$$

Доказательство. Пусть $\Re s>0$. Применяя к суммам (2.56) формулу Вороного (3.2) получаем

$$V_j(s;N;\lambda)=\sum_{q\leqslant\sqrt{3N\lambda^j/2}}\left(\frac{\sqrt{N}}{q}\right)^{js}\left(\frac{\zeta(1+s)}{q}\gamma(s;N;q)\int_0^{\infty}\xi_j\left(s;\frac{q^2}{N\lambda^j};\frac{x}{N}\right)x^{s/2}dx+\right.$$
$$\left.+\frac{\zeta(1-s)}{q}\gamma(-s;N;q)\int_0^{\infty}\xi_j\left(s;\frac{q^2}{N\lambda^j};\frac{x}{N}\right)x^{-s/2}dx\right)+R_j^{+}(s;N)+R_j^{-}(s;N).$$

Рассмотрим случай $j=1$. В интегралах сделаем замену $x=Ny$. Так как $\xi_j\left(s;\frac{q^2}{N\lambda};\frac{x}{N}\right)=0$ при $q>\sqrt{3N\lambda/2}$, то мы можем вести суммирование по q от 1 до бесконечности. Меняя порядки суммирования и интегрирования, получаем

$$V_1(s;N;\lambda)=\int_0^{\infty}\left(N^{1+s}\zeta(1+s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma(s;N;q)}{q^{1+s}}\xi_1\left(s;\frac{q^2}{N\lambda};y\right)y^{s/2}+\right.$$
$$\left.+N\zeta(1-s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma(-s;N;q)}{q^{1+s}}\xi_1\left(s;\frac{q^2}{N\lambda};y\right)y^{-s/2}\right)dy+R_1^{+}(s;N)+R_1^{-}(s;N)=$$
$$=\int_0^{\infty}\theta(y)\left(N^{1+s}\zeta(1+s)y^s\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma(s;N;q)}{q^{1+s}}\eta\left(\frac{q^2}{N\lambda(1-y)}\right)+\right.$$
$$\left.+N\zeta(1-s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma(-s;N;q)}{q^{1+s}}\eta\left(\frac{q^2}{N\lambda(1-y)}\right)\right)dy+R_1^{+}(s;N)+R_1^{-}(s;N).$$

Вычислим суммы по q. Применяя для функции $\eta(\cdot)$ обратное преобразование Меллина (3.17), находим

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma(s;N;q)}{q^{1+s}}\eta\left(\frac{q^2}{N\lambda(1-y)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\gamma(s;N;q)}{q^{1+s}}\int\limits_{\Re z=c}\hat{\eta}(z)\left(\frac{q^2}{N\lambda(1-y)}\right)^{-z}dz,$$

где $c > 0$. Так как $\Re s > 0, c > 0$, то сумма по q и интеграл по z сходятся абсолютно и мы можем поменять порядок интегрирования и суммирования

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\gamma(s;N;q)}{q^{1+s}} \eta\left(\frac{q^2}{N\lambda(1-y)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re z=c} \hat{\eta}(z) \left(N\lambda(1-y)\right)^z \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\gamma(s;N;q)}{q^{1+s+2z}} dz.$$

Применяя (2.18), получаем

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\gamma(s;N;q)}{q^{1+s}} \eta\left(\frac{q^2}{N\lambda(1-y)}\right) = \tag{2.63}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re z=c} \hat{\eta}(z) \left(N\lambda(1-y)\right)^z \frac{\tau_{1/2+s+z}(N)}{N^{1/2+s+z}} \frac{\zeta(1+s+2z)}{\zeta(2+2s+2z)} dz.$$

Аналогично находим

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\gamma(-s;N;q)}{q^{1+s}} \eta\left(\frac{q^2}{N\lambda(1-y)}\right) = \tag{2.64}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re z=c} \hat{\eta}(z) \left(N\lambda(1-y)\right)^z \frac{\tau_{1/2+z}(N)}{N^{1/2+z}} \frac{\zeta(1+s+2z)}{\zeta(2+2z)} dz.$$

Подставляя (2.63) и (2.64) в (2.4.2), получаем

$$V_1(s;N;\lambda) = N^{1/2} \times$$

$$\int_0^{\infty} \theta(y) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re z=c} \hat{\eta}(z) \Bigg(y^s \left(\lambda(1-y)\right)^z \tau_{1/2+s+z}(N) \frac{\zeta(1+s)\zeta(1+s+2z)}{\zeta(2+2s+2z)} +$$

$$+ \left(\lambda(1-y)\right)^z \tau_{1/2+z}(N) \frac{\zeta(1-s)\zeta(1+s+2z)}{\zeta(2+2z)} \Bigg) dzdy + R_1^+(s;N) + R_1^-(s;N).$$

Аналогично получается формула и для $V_{-1}(s;N;\lambda)$. В итоге

$$V_1(s;N;\lambda) + V_{-1}(s;N;\lambda) = N^{1/2} \int_0^{\infty} \theta(y) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re z=c} \hat{\eta}(z) \times$$

$$\times \Bigg(y^s \left(\lambda(1-y)\right)^z \tau_{1/2+s+z}(N) \frac{\zeta(1+s)\zeta(1+s+2z)}{\zeta(2+2s+2z)} +$$

$$+ \left(\lambda(1-y)\right)^z \tau_{1/2+z}(N) \frac{\zeta(1-s)\zeta(1+s+2z)}{\zeta(2+2z)} +$$

$$+ \frac{y^s}{(1-y)^s} \left((1-y)/\lambda\right)^z \tau_{1/2+z}(N) \frac{\zeta(1+s)\zeta(1-s+2z)}{\zeta(2+2z)} +$$

$$+ \frac{1}{(1-y)^s} \left((1-y)/\lambda\right)^z \tau_{1/2-s+z}(N) \frac{\zeta(1-s)\zeta(1-s+2z)}{\zeta(2-2s+2z)} \Bigg) dzdy +$$

$$+ R_1^+(s;N) + R_1^-(s;N) + R_{-1}^+(s;N) + R_{-1}^-(s;N). \tag{2.65}$$

Используя принцип аналитического продолжения, получаем, что формула (2.65) справедлива и при $\Re s = 0$. Подынтегральная функция имеет полюса в точках $z = 0, z =$

$\pm s/2$. Сдвигая контур интегрирования на прямую $\Re z = -1/2$, мы по теореме Коши получаем

$$V_1(s;N;\lambda)+V_{-1}(s;N;\lambda)=N^{1/2}\int_0^\infty\theta(y)\Bigg(y^s\tau_{1/2+s}(N)\frac{\zeta(1+s)\zeta(1+s)}{\zeta(2+2s)}+$$
$$+\tau_{1/2}(N)\frac{\zeta(1-s)\zeta(1+s)}{\zeta(2)}+\frac{y^s}{(1-y)^s}\tau_{1/2}(N)\frac{\zeta(1+s)\zeta(1-s)}{\zeta(2)}+$$
$$+\frac{1}{(1-y)^s}\tau_{1/2-s}(N)\frac{\zeta(1-s)\zeta(1-s)}{\zeta(2-2s)}\Bigg)dy+$$
$$+\frac{N^{1/2}}{2\lambda^{s/2}}\int_0^\infty\theta(y)\Bigg(y^s\frac{\hat\eta(-s/2)+\hat\eta(s/2)}{(1-y)^{s/2}}\tau_{1/2+s/2}(N)\frac{\zeta(1+s)}{\zeta(2+s)}+$$
$$+\frac{\hat\eta(-s/2)+\hat\eta(s/2)}{(1-y)^{s/2}}\tau_{1/2-s/2}(N)\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(2-s)}\Bigg)dy+$$
$$+N^{1/2}\int_0^\infty\theta(y)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re z=-1/2}\hat\eta(z)\Big(\dots\Big)dzdy+\sum_{k=\pm1}R_k^{\pm}(s;N),$$

где в интеграле по z стоит то же выражение, что и в интеграле по z в (2.65). С помощью соотношения (3.20), а также оценок (2.9) и (3.21) получаем, что

$$V_1(s;N;\lambda)+V_{-1}(s;N;\lambda)=N^{1/2}\int_0^1\theta(y)\Bigg(y^s\tau_{1/2+s}(N)\frac{\zeta(1+s)\zeta(1+s)}{\zeta(2+2s)}+$$
$$+\tau_{1/2}(N)\frac{\zeta(1-s)\zeta(1+s)}{\zeta(2)}+\frac{y^s}{(1-y)^s}\tau_{1/2}(N)\frac{\zeta(1+s)\zeta(1-s)}{\zeta(2)}+$$
$$+\frac{\tau_{1/2-s}(N)}{(1-y)^s}\frac{\zeta(1-s)\zeta(1-s)}{\zeta(2-2s)}\Bigg)dy+$$
$$+O_\epsilon\left((NT\lambda)^{1/2+\epsilon}\right)+R_1^+(s;N)+R_1^-(s;N)+R_{-1}^+(s;N)+R_{-1}^-(s;N).$$

Используя соотношения

$$\int_0^1(\theta(y)+\theta(y))\,dy=1,\quad\int_0^1(\theta(y)y^s+\theta(y)(1-y)^s)\,dy=\int_0^1y^sdy,$$
$$\int_0^1\left(\theta(y)\frac{y^s}{(1-y)^s}+\theta(y)\frac{y^{-s}}{(1-y)^{-s}}\right)dy=\int_0^1\frac{y^s}{(1-y)^s}dy$$

и (2.57) получаем

$$V(s;N)=V_1(s;N;\lambda)+V_{-1}(s;N;\lambda)+V_1(-s;N;\lambda)+V_{-1}(-s;N;\lambda)=$$

$$=N^{1/2}\int_0^1\Bigg(y^s\tau_{1/2+s}(N)\frac{\zeta(1+s)\zeta(1+s)}{\zeta(2+2s)}+$$

$$+\tau_{1/2}(N)\frac{\zeta(1-s)\zeta(1+s)}{\zeta(2)}+\frac{y^s}{(1-y)^s}\tau_{1/2}(N)\frac{\zeta(1+s)\zeta(1-s)}{\zeta(2)}+$$

$$+\frac{\tau_{1/2-s}(N)}{(1-y)^s}\frac{\zeta(1-s)\zeta(1-s)}{\zeta(2-2s)}\Bigg)dy+$$

$$+O_\epsilon\left((NT\lambda)^{1/2+\epsilon}\right)+R_1^+(\pm s;N)+R_1^-(\pm s;N)+R_{-1}^+(\pm s;N)+R_{-1}^-(\pm s;N).$$

Применяя (3.4) мы замечаем, что подынтегральная функция совпадает с $\rho_N(y,s,-s)$, определенной в (2.52).

□

Таким образом для завершения доказательства теоремы 2.4.1 нам осталось оценить остатки $R_{\pm1}^{\pm}(\pm s;N)$. Для этого необходимо получить оценки на функции $G_j^{\pm}(s;Q;y)$ из (2.61). Для получения необходимых соотношений мы будем интегрировать (2.61) по частям, с помощью дифференциальных уравнений.

Лемма 2.4.3. *Функции*

$$u_1(x)=x^{s/2}\mathrm{k}^+(s/2;\sqrt{xy}),$$

$$u_{-1}(x)=(1-x)^{-s}x^{s/2}\mathrm{k}^+(s/2;\sqrt{xy}), \tag{2.66}$$

$$v_1(x)=x^{s/2}\mathrm{k}^-(s/2;\sqrt{xy}),\quad v_{-1}(x)=(1-x)^{-s}x^{s/2}\mathrm{k}^-(s/2;\sqrt{xy})$$

удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{4x}{y}u_1''(x)+\frac{4(1-s)}{y}u_1'(x)+u_1(x)=0,$$

$$\frac{a(x)}{c(x)}u_{-1}''(x)-\frac{b(x)}{c(x)}u_{-1}'(x)+u_{-1}(x)=0, \tag{2.67}$$

$$\frac{4x}{y}v_1''(x)+\frac{4(1-s)}{y}v_1'(x)-v_1(x)=0,\quad \frac{a(x)}{d(x)}v_{-1}''(x)-\frac{b(x)}{d(x)}v_{-1}'(x)+v_{-1}(x)=0,$$

где

$$a(x)=4x(1-x)^2,\quad b(x)=4(1-x)\left(s(1+x)-(1-x)\right) \tag{2.68}$$

$$c(x)=y(1-x)^2+4(s^2-s),\quad d(x)=-y(1-x)^2+4(s^2-s). \tag{2.69}$$

Доказательство. Дифференциальное уравнение для $u_1(x)$ является частным случаем [**122**, ф. 8491.3]. Дифференциальное уравнение для $v_1(x)$ проверяется непосредственно с помощью [**122**, ф. 8486.10,8486.12]. Дифференциальные уравнения для $u_{-1}(x), v_{-1}(x)$ выводятся из дифференциальных уравнений для $u_1(x), v_1(x)$.

□

В дальнейшем нам понадобятся оценки снизу на функцию $c(x)$. Напомним, что $s = it$ и $t > 1$.

Лемма 2.4.4. *При* $1/4 \leqslant x \leqslant 1 - Q/2$ *справедливы оценки*

$$|c(x)| \gg \begin{cases} t^2, & \text{если } y \leqslant (7t/3)^2, \\ yQ^2, & \text{если } y > (5t/Q)^2. \end{cases}$$

Доказательство. Из (2.69) следует

$$|c(x)| = \sqrt{(y(1-x)^2 - 4t^2)^2 + (4t)^2} \gg |y(1-x)^2 - 4t^2| + 4t \tag{2.70}$$

Пусть $y \leqslant (7t/3)^2$. Учитывая что $1/4 \leqslant x \leqslant 1 - Q/2$, получаем $y(1-x)^2 \leqslant (7t/4)^2$. Подставляя полученную оценку в (2.70), находим $|c(x)| \gg t^2$. Пусть $y > (5t/Q)^2$. Учитывая что $1/4 \leqslant x \leqslant 1 - Q/2$, получаем $y(1-x)^2 \geqslant (5t/2)^2$. Подставляя полученную оценку в (2.70), находим $|c(x)| \gg y(1-x)^2$.

□

Лемма 2.4.5. *При* $0 < Q \leqslant 3/2, y > 0$ *справедлива оценка*

$$G_{-1}^{+}(s;Q;y) \ll \begin{cases} (1+y)/(yt^{5/2}), & \text{если } y \leqslant (7t/3)^2, \\ y^{-3/4}\sqrt{t}, & \text{если } (7t/3)^2 < y \leqslant (5t/Q)^2, \\ y^{-7/4}Q^{-2}t, & \text{если } y > (5t/Q)^2. \end{cases} \tag{2.71}$$

Доказательство. Положим $M = y/t^2$.

(1) Пусть $(7/3)^2 < M \leqslant (5/Q)^2$. В интеграле (2.61) сделаем замену $x = z/M$. В результате получаем

$$G_{-1}^{+}(s;Q;y) \ll \frac{1}{M} \times \tag{2.72}$$
$$\left| \int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right) \eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right) k^{+}(s/2; t\sqrt{z}) \frac{z^{s/2}dz}{(M-z)^s} \right|.$$

Теперь мы подставляем в (2.72) асимптотическую формулу (2.19) с $n = 1$. Заметим, что все слагаемые из формулы (2.19), за исключением остаточного члена, оцениваются единообразно. Поэтому

$$G_{-1}^{+}(s;Q;y) \ll \frac{t^{3/2}}{y}\left|\int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{e^{ith_{\pm}(z)}}{(1+z)^{1/4}}dz\right| + \\ +\frac{t^{3/2}}{y}\int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{dz}{t^3(1+z)^{7/4}}, \tag{2.73}$$

где $h_{\pm}(z) = \log\frac{\sqrt{z}}{M-z} \pm \kappa(z)$. Рассмотрим интеграл с $h_+(z)$. Учитывая (2.21), получаем

$$h'_+(z) = \frac{1}{2z}\left(\frac{M+z}{M-z} + \sqrt{1+z}\right). \tag{2.74}$$

Применяя лемму 2.2.3, получаем

$$\frac{t^{3/2}}{y}\left|\int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{e^{ith_{+}(z)}}{(1+z)^{1/4}}dz\right| \ll \frac{t^{1/2}M^{1/4}}{y}. \tag{2.75}$$

Рассмотрим интеграл с $h_-(z)$. Учитывая (2.20) и (2.21), получаем

$$h'_-(z) = \frac{1}{M-z} - \frac{1}{2(\sqrt{1+z}+1)} = \frac{1}{2z}\left(\frac{M+z}{M-z} - \sqrt{1+z}\right), \tag{2.76}$$

$$h''_-(z) = \frac{1}{(M-z)^2} + \frac{(\sqrt{1+z}-1)^2}{4z^2\sqrt{1+z}}. \tag{2.77}$$

Единственным решением уравнения $h'_-(z) = 0$ является число $z_0 = M - 2\sqrt{M}$ и при этом

$$h''_-(z_0) = \frac{1}{4\sqrt{M}(\sqrt{M}-1)} \asymp \frac{1}{M}.$$

Положим $Z = (M/t)^{1/2}$. Разобьем интеграл по z на два с условиями $|z-z_0| \leqslant Z$ и $|z-z_0| > Z$. Первый интеграл оценим по модулю, второй с помощью леммы 2.2.3. Тогда

$$\frac{t^{3/2}}{y}\left|\int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{e^{ith_{-}(z)}}{(1+z)^{1/4}}dz\right| \ll \frac{t^{3/2}}{y}\left(\frac{Z}{(1+M)^{1/4}} + \right. \\ \left. + \sup_{|z-z_0|>Z}\left|\theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{(th'_-(z))^{-1}}{(1+z)^{1/4}}\right|\right). \tag{2.78}$$

Так как $h''_-(z) > 0$, то нам остается оценить снизу $|h'_-(z_0 \pm Z)|$.

$$h'_-(z_0+Z) - h'_-(z_0) = \frac{Z}{(M-z_0)(M-z_0-Z)} + \\ + \frac{Z}{2(\sqrt{1+z_0}+1)(\sqrt{1+z_0+Z}+1)(\sqrt{1+z_0}+\sqrt{1+z_0+Z})}.$$

Следовательно, $|h'_-(z_0 \pm Z)| \gg Z/M$. Подставляя полученную оценку в (2.78) находим

$$\frac{t^{3/2}}{y}\left|\int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{e^{ith_-(z)}}{(1+z)^{1/4}}dz\right| \ll$$
$$\ll \frac{t^{3/2}}{y}\left(\frac{Z}{(1+M)^{1/4}}+\frac{M}{Zt(1+M)^{1/4}}\right) \ll \frac{tM^{1/4}}{y}. \tag{2.79}$$

Подставляя (2.75) и (2.79) в (2.73), получаем

$$G^+_{-1}(s;Q;y) \ll \frac{tM^{1/4}}{y}+\frac{t^{1/2}M^{1/4}}{y}+\frac{1}{t^{3/2}yM^{3/4}} \ll \frac{tM^{1/4}}{y}=\frac{t^{1/2}}{y^{3/4}}.$$

(2) Пусть $M \leqslant (7/3)^2$. Из (2.61), (2.54) и (2.66) следует

$$G^+_{-1}(s;Q;y)=\int_0^\infty \theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)u_{-1}(x)dx.$$

Выражая $u_{-1}(x)$ при помощи дифференциального уравнения (2.67) и интегрируя по частям, получаем

$$G^+_{-1}(s;Q;y)=$$
$$=-\int_0^\infty\left(\left(\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\frac{a(x)}{c(x)}\right)''+\left(\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\frac{b(x)}{c(x)}\right)'\right)u_{-1}(x)dx.$$

Дифференцируя и сравнивая слагаемые при одинаковой степени $c(x)$ получаем

$$G^+_{-1}(s;Q;y) \ll$$
$$\ll \int_0^\infty \theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\left(\frac{b'(x)}{c(x)}+\frac{b(x)c'(x)}{c^2(x)}+\frac{a(x)(c'(x))^2}{c^3(x)}\right)u_{-1}(x)dx.$$

Положим $Y=y(1-x)^2$. Так как $M \leqslant (7/3)^2$ и $1/4 \leqslant x \leqslant 1-Q/2$, то $Y \leqslant (7t/4)^2$. Используя (2.70), (2.68) и (2.69), получаем

$$\frac{b(x)c'(x)}{c(x)} \ll \frac{Yt}{|Y-4t^2|+4t} \ll \frac{Y}{t} \ll t \ll b'(x),$$

$$\frac{a(x)(c'(x))^2}{c^2(x)} \ll \frac{Y^2}{(Y-4t^2)^2+16t^2} \ll \frac{Y^2}{t^4} \ll 1 \ll b'(x).$$

Следовательно,

$$G^+_{-1}(s;Q;y) \ll \int_0^\infty \theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\frac{b'(x)}{c(x)}u_{-1}(x)dx. \tag{2.80}$$

Произведем замену $x = z/M$. После этого мы применяем асимптотическую формулу (2.19) с $n = 1$. Заметим, что все слагаемые из формулы (2.19), за исключением остаточного члена, оцениваются единообразно. Поэтому

$$G_{-1}^{+}(s;Q;y) \ll \frac{t^{3/2}}{y}\left|\int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{b'(z/M)}{c(z/M)}\frac{e^{ith_{\pm}(z)}}{(1+z)^{1/4}}dz\right| + \\ + \frac{t^{3/2}}{y}\int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{b'(z/M)}{c(z/M)}\frac{dz}{t^3(1+z)^{7/4}}. \tag{2.81}$$

Рассмотрим интеграл с $h_-(z)$. Так как см. (2.77) $h_-''(z) > 0$, то см. (2.76)

$$|h_-'(z)| > |h_-'(M/4)| \gg M^{-1}.$$

Из оценки (2.70) следует $|b'(z/M)||c(z/M)|^{-1} \ll t^{-1}$. Применяя лемму 2.2.3, получаем

$$\frac{t^{3/2}}{y}\left|\int_0^\infty \theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{b'(z/M)}{c(z/M)}\frac{e^{ith_{-}(z)}}{(1+z)^{1/4}}dz\right| \ll \\ \ll \frac{t^{1/2}}{y}\sup_{z\in[0;\infty]}\theta\left(\frac{z}{M}\right)\eta\left(\frac{Q}{1-z/M}\right)\frac{|b'(z/M)|}{|c(z/M)||h_-'(z)|} \ll \frac{M}{yt^{1/2}}. \tag{2.82}$$

Рассмотрим интеграл с $h_+(z)$. Действуя аналогично и учитывая, что ввиду (2.74) при $M/4 < z < M(1-Q/2)$ выполнено

$$h_+'(z) > \frac{M+z}{2z(M-z)} \gg M^{-1},$$

получаем оценку (2.82). Используя неравенство $|b'(z/M)||c(z/M)|^{-1} \ll t^{-1}$, оцениваем второй интеграл из (2.81) и получаем

$$G_{-1}^{+}(s;Q;y) \ll \frac{M+t^{-2}}{yt^{1/2}}.$$

(3) Пусть $M > (5/Q)^2$. Аналогично предыдущему пункту, учитывая что теперь $Y \geqslant (5t/2)^2$, получаем сначала (2.80), а затем и (2.81). Используя следующие оценки

$$|b'(z/M)||c(z/M)|^{-1} \ll t/(yQ^2),$$
$$|h_-'(z)| > |h_-'(M(1-Q/2)| \gg M^{-1/2}, \quad |h_+'(z)| \gg M^{-1/2}$$

аналогично предыдущему пункту получаем

$$G_{-1}^{+}(s;Q;y) \ll \frac{t^{3/2}M^{1/4}}{(yQ)^2}.$$

□

Лемма 2.4.6. *При* $0 < Q \leqslant 3/2, y > 0, |t| > 1$ *справедлива оценка*

$$G_{-1}^{-}(s;Q;y) \ll \frac{t^{1/2}}{yQ^{1/2}}\min\left\{1, \frac{t^{1/2}}{y^{1/4}}\right\} \tag{2.83}$$

Доказательство. Из (2.61), (2.4) и (2.4.3) следует

$$G_{-1}^{-}(s;Q;y)=\int_0^\infty \theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)v_{-1}(x)dx.$$

Выражая $v_{-1}(x)$ при помощи дифференциального уравнения (2.4.3) и интегрируя по частям, получаем

$$G_{-1}^{-}(s;Q;y)=-\int_0^\infty\left(\left(\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\frac{a(x)}{d(x)}\right)''+\left(\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\frac{b(x)}{d(x)}\right)'\right)v_{-1}(x)dx.$$

Дифференцируя и сравнивая слагаемые, получаем

$$G_{-1}^{-}(s;Q;y)\ll\int_0^\infty \theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\frac{t}{d(x)}v_{-1}(x)dx.$$

Применяя (2.4.3), (2.69), находим

$$G_{-1}^{-}(s;Q;y)\ll\int_0^\infty \theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\frac{t}{y(1-x)^2+t^2}k^{-}(it/2;\sqrt{xy})dx.$$

При $y\gg t^2$ оценка (2.83) сразу следует из (2.22). При $y\ll t^2$ (2.25), находим

$$G_{-1}^{-}(s;Q;y)\ll\frac{1}{t^{3/2}}\min\left(1,\frac{\sqrt{1+|t|}}{y^{1/4}}\right),$$

тем самым доказывая (2.83). □

Лемма 2.4.7. *При* $0<Q\leqslant 3/2, y>0, |t|>1$ *справедливы оценки*

$$G_{1}^{\pm}(s;Q;y)\ll\frac{1}{y}\left(\frac{t^{1/2}}{Q^{1/2}}+\frac{1}{Qt^{1/3}}\right)\min\left\{1,\frac{t^{1/2}}{y^{1/4}}\right\} \tag{2.84}$$

Доказательство. Из (2.61), (2.4) и (2.4.3) следует

$$G_{1}^{-}(s;Q;y)=\int_0^\infty \theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)v_{1}(x)dx.$$

Выражая $v_1(x)$ при помощи дифференциального уравнения (2.4.3), интегрируя по частям и используя (2.4.3), получаем

$$G_{1}^{-}(s;Q;y)\ll\int_0^\infty\left(\frac{1+|t|}{y}\left(\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\right)'+\frac{1}{y}\left(x\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\right)''\right)$$
$$\times|k^{-}(it/2;\sqrt{xy})|dx.$$

Аналогично

$$G_{1}^{+}(s;Q;y)\ll\int_0^\infty\left(\frac{1+|t|}{y}\left(\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\right)'+\frac{1}{y}\left(x\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\right)''\right)$$
$$\times|k^{+}(it/2;\sqrt{xy})|dx.$$

Вычисляя производные и применяя (2.25), находим

$$\int_0^\infty \left(\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\right)' |k^{\pm}(it/2;\sqrt{xy})|dx \ll \int_0^\infty \frac{\theta(x)}{(1-x)}\eta'\left(\frac{Q}{1-x}\right)|k^{+}(it/2;\sqrt{xy})|dx \ll$$

$$\ll \frac{1}{\sqrt{(1+|t|)Q}}\min\left(1,\frac{\sqrt{1+|t|}}{y^{1/4}}\right). \tag{2.85}$$

Вычисляя производные и используя (2.24), (2.19), получаем

$$\int_0^\infty \left(x\theta(x)\eta\left(\frac{Q}{1-x}\right)\right)'' |k^{+}(it/2;\sqrt{xy})|dx \ll$$

$$\ll \frac{1}{Q}\sup_{0<x<\infty}|k^{+}(it/2;\sqrt{xy})| \ll \frac{1}{Qt^{1/3}}\min\left(1,\frac{\sqrt{1+|t|}}{y^{1/4}}\right).$$

Подставляя (2.85) и (2.4.7) в (2.4.7), (2.4.7), мы доказываем оценку (2.84). □

Следствие 2.4.8. *При $s=it$, $|t|>1$ справедливы неравенства*

$$R_{-1}^{+}(s;N) \ll N^{3/4+\epsilon}\frac{t}{\lambda^{3/4}}, \tag{2.86}$$

$$R_{1}^{\pm}(s;N), R_{-1}^{-}(s;N) \ll N^{3/4+\epsilon}\left(t^{1/2}\lambda^{3/4}+t^{1/6}\lambda\right). \tag{2.87}$$

Доказательство. Подставляя в (2.62) оценки (2.71) и (2.84), оценивая суммы Клоостермана по модулю с помощью (3.2) и учитывая, что $|(m/n)^{it/2}|=1$, получаем, соответственно, (2.86) и (2.87).

□

Выбирая $\lambda = t^{1/3}$, находим

$$\sum_{k=-1,+1}\left(R_k^{+}(s;N)+R_k^{-}(s;N)\right) \ll N^{3/4+\epsilon}t^{3/4}. \tag{2.88}$$

Подставляя (2.88) в (2.4.2), получаем (2.53).

2.5. Асимптотическая формула для $S_1(x,N)$

Для упрощения записи формул пусть $\alpha(z)=\alpha(1,1+x,\Delta;z)$. Основная цель данного параграфа–доказать следующий промежуточный результат

Утверждение 2.5.1. *Для любого $N\geqslant 2, \epsilon>0$ и $x\in(0,1]$ справедливо равенство*

$$S_1(x,N)=\sum_{d|N}d\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau(n)\mu(k)}{nk^2}\int_0^1\left(\alpha\left(\frac{M}{z}\right)+\alpha\left(\frac{z}{M}\right)\right)dz+$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(\log N-\frac{2}{\sigma_1(N)}\sum_{d|N}d\log d-2\gamma+2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}+1\right)\int_0^{\infty}\frac{\alpha(y)}{y}dy-$$

$$-\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\int_0^{\infty}\frac{\alpha(y)}{y}\log ydy+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(H_1(\alpha)+H_2(\alpha)\right)+O_{\varepsilon}\left(\left(\frac{N}{\Delta}\right)^{3/4+\varepsilon}\right),\qquad(2.89)$$

где $M=Nd^{-2}nk^2$,

$$H_1(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha(m/n)}{m}-\int_0^{\infty}\frac{\alpha(y)}{y}dy\right),$$

$$H_2(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_0^1\alpha\left(\frac{m(1-z)}{nz}\right)dz-\int_0^{\infty}\frac{dy}{y}\int_0^1\alpha\left(\frac{y(1-z)}{z}\right)dz\right).$$

Доказательство. Для получения формулы (2.89) необходимо подставить (2.53) в (2.50). Вклад остаточного члена из асимптотической формулы (2.53) оценивается по лемме 2.2.5. Следовательно, нам остается вычислить

$$\int_0^1 I(z)dz,\quad\text{где}\quad I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=0}\hat{\alpha}(s)\rho_N(z;s,-s)ds.\qquad(2.90)$$

Подставляем в (2.90) функцию $\rho_N(z;s,-s)$ из (2.52) и записываем все возникшие дзета-функции Римана в виде рядов. Меняя порядки суммирования и интегрирования мы приходим к интегралам вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=0}\hat{\alpha}(s)a^{-s}ds=\alpha(a).$$

Однако, из-за наличия в $\rho_N(z;s,-s)$ слагаемого $\zeta(1-s)\zeta(1+s)$ мы не можем выбрать прямую интегрирования $\Re s=c$ так, чтобы все ряды, представляющие дзета-функции Римана абсолютно сходились. Соответственно мы не можем поменять порядки суммирования и интегрирования. Эта проблема решается следующим образом.

Ввиду голоморфности функций $\hat{\alpha}(s)$ и $\rho_N(z;s,-s)$ мы можем трансформировать контур интегрирования, не изменяя значения $I(z)$. Положим $\Gamma_0=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$, где γ_1 прямая, соединяющая $-i\infty$ с $-i/4$, $\gamma_2=\{|z|=1/4,\,\Re z\geqslant 0\}$ и γ_3 прямая, соединяющая $i/4$ с $i\infty$. Тогда

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\hat{\alpha}(s)\rho_N(z;s,-s)ds.$$

Для произвольного $0 < \delta < 1/16$ определим

$$\rho_N(z;s,-s;\delta) = \sigma_1(N)\frac{\zeta(1-s+\delta)\zeta(1+s+\delta)}{\zeta(2)}z^s(1-z)^{-s}+$$
$$+N^s\sigma_{1-2s}(N)\frac{\zeta^2(1-s+\delta)}{\zeta(2-2s)}(1-z)^{-s}+$$
$$+N^{-s}\sigma_{1+2s}(N)\frac{\zeta^2(1+s+\delta)}{\zeta(2+2s)}z^s+\sigma_1(N)\frac{\zeta(1-s+\delta)\zeta(1+s+\delta)}{\zeta(2)}, \tag{2.91}$$

$$I(z;\delta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\hat{\alpha}(s)\rho_N(z;s,-s;\delta)ds. \tag{2.92}$$

Тогда

$$I(z) = \lim_{\delta\to 0} I(z;\delta). \tag{2.93}$$

В интеграле (2.92) трансформируем контур в $\Re s = 0$, при этом мы пройдем через полюс в точке $s = \delta$. По интегральной теореме Коши получаем

$$I(z;\delta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=0}\hat{\alpha}(s)\rho_N(z;s,-s;\delta)ds - \hat{\alpha}(\delta)\sigma_1(N)\frac{\zeta(1+2\delta)}{\zeta(2)}z^\delta(1-z)^{-\delta}+$$
$$+\hat{\alpha}(\delta)N^\delta\sigma_{1-2\delta}(N)\frac{(1-z)^{-\delta}}{\zeta(2-2\delta)}\Big(\log N - \log(1-z) - 2\gamma+$$
$$+\frac{\hat{\alpha}'(\delta)}{\hat{\alpha}(\delta)} + 2\frac{\zeta'(2-2\delta)}{\zeta(2-2\delta)} - 2\frac{\sigma'_{1-2\delta}(N)}{\sigma_{1-2\delta}(N)}\Big) - \hat{\alpha}(\delta)\sigma_1(N)\frac{\zeta(1+2\delta)}{\zeta(2)}. \tag{2.94}$$

Подставим (2.91) в (2.94). Будем работать с первым слагаемым из (2.91), оставшиеся три рассматриваются аналогично

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=0}\hat{\alpha}(s)\sigma_1(N)\frac{\zeta(1-s+\delta)\zeta(1+s+\delta)}{\zeta(2)}z^s(1-z)^{-s}ds =$$
$$= \frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1+\delta}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=0}\hat{\alpha}(s)\left(\frac{mz}{n(1-z)}\right)^s ds =$$
$$= \frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1+\delta}}\alpha\left(\frac{n(1-z)}{mz}\right) =$$
$$= \frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{1+\delta}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}\alpha\left(\frac{n(1-z)}{mz}\right) - \frac{1}{m^\delta}\int_0^\infty\alpha\left(\frac{y(1-z)}{z}\right)\frac{dy}{y^{1+\delta}}\right)+$$
$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\zeta(1+2\delta)\int_0^\infty\alpha\left(\frac{y(1-z)}{z}\right)\frac{dy}{y^{1+\delta}}.$$

Полагая $M = Nd^{-2}nk^2$, получаем

$$I(z;\delta) = \sum_{d|N} d \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(n)\mu(k)}{n^{1+\delta}k^2}\left(\alpha\left(\frac{M}{z}\right)+\alpha\left(\frac{1-z}{M}\right)\right)+ \tag{2.95}$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha(m/n)}{m^{1+\delta}}-\frac{1}{n^{\delta}}\int_0^{\infty}\frac{\alpha(y)}{y^{1+\delta}}dy\right)+$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{1+\delta}}\alpha\left(\frac{m(1-z)}{nz}\right)-\frac{1}{n^{\delta}}\int_0^{\infty}\alpha\left(\frac{y(1-z)}{z}\right)\frac{dy}{y^{1+\delta}}\right)+$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\zeta(1+2\delta)\Big(\int_0^{\infty}\alpha\left(\frac{y(1-z)}{z}\right)\frac{dy}{y^{1+\delta}}+\int_0^{\infty}\alpha\left(y\right)\frac{dy}{y^{1+\delta}}-$$

$$-\hat{\alpha}(\delta)-\hat{\alpha}(\delta)\frac{z^{\delta}}{(1-z)^{\delta}}\Big)+\hat{\alpha}(\delta)N^{\delta}\sigma_{1-2\delta}(N)\frac{(1-z)^{-\delta}}{\zeta(2-2\delta)}\times$$

$$\left(\log N-\log(1-z)-2\gamma+\frac{\hat{\alpha}'(\delta)}{\hat{\alpha}(\delta)}+2\frac{\zeta'(2-2\delta)}{\zeta(2-2\delta)}-2\frac{\sigma'_{1-2\delta}(N)}{\sigma_{1-2\delta}(N)}\right).$$

Чтобы перейти к пределу $\delta\to 0$ заметим, что

$$\int_0^{\infty}\alpha\left(\frac{y(1-z)}{z}\right)\frac{dy}{y^{1+\delta}}+\int_0^{\infty}\alpha\left(y\right)\frac{dy}{y^{1+\delta}}-\hat{\alpha}(\delta)-\hat{\alpha}(\delta)\frac{z^{\delta}}{(1-z)^{\delta}}=a(\delta)-a(-\delta),$$

где

$$a(\delta)=\left(1+\frac{(1-z)^{\delta}}{z^{\delta}}\right)\hat{\alpha}(-\delta).$$

Находим

$$\lim_{\delta\to 0}\zeta(1+2\delta)\left(a(\delta)-a(-\delta)\right)= \tag{2.96}$$

$$=-2\int_0^{\infty}\frac{\alpha(y)}{y}\log y dy+\log\frac{1-z}{z}\int_0^{\infty}\frac{\alpha(y)}{y}dy.$$

Подставляя (2.95) в (2.93) и используя (2.96), получаем (2.89). □

2.6. Асимптотические формулы для $S_{2,3}(x,N;z)$

Напомним, что $S_2(x,N;z)$ обозначает число решений уравнения (2.41) относительно

$$(1-\Delta/2-z)n_3\leqslant n_1<n_3,\quad n_{1,2,3,4}\geqslant 1. \tag{2.97}$$

Пусть

$$\beta_2=\frac{\Delta/2+z}{1-\Delta/2-z}.$$

Лемма 2.6.1. *Для любого $\epsilon>0$ справедливо равенство*

$$S_2(x,N;z)=S_2^*(\beta_2,N;z)-\frac{\beta_2}{\beta_2+1}\sigma_1(N)+O_{\epsilon}(N^{\epsilon}),$$

где $S_2^*(\beta_2, N; z)$ *число решений уравнения* (2.41) *относительно неизвестных*

$$n_3 \leqslant \beta_2 n_1, \quad n_4 \leqslant n_2, \quad n_3, n_4 \geqslant 1.$$

Доказательство. В (2.41), (2.97) произведем замену переменных

$$n_3 = m_3 + n_1, \quad n_2 = m_2 - n_4.$$

Получаем, что $S_2(x, N; z)$ равно числу решений системы

$$m_3 n_4 + n_1 m_2 = N, \quad 1 \leqslant m_3 \leqslant \beta_2 n_1, \quad 1 \leqslant n_4 < m_2$$

или в более удобных обозначениях

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 = N, \quad 1 \leqslant n_3 \leqslant \beta_2 n_1, \quad 1 \leqslant n_4 < n_2. \tag{2.98}$$

Из (2.98) и определения $S_2^*(\beta_2, N; z)$ следует

$$S_2(x, N; z) = S_2^*(\beta_2, N; z) - \sum_{\substack{n_2(n_1+n_3)=N \\ n_3 \leqslant \beta_2 n_1}} 1 = S_2^*(\beta_2, N; z) - \sum_{n_2 | N} \left[\frac{\beta_2}{\beta_2 + 1} \frac{N}{n_2} \right] =$$

$$= S_2^*(\beta_2, N; z) - \frac{\beta_2}{\beta_2 + 1} \sigma_1(N) + O(\sigma_0(N)).$$

□

Лемма 2.6.2. *Для любых* $N \geqslant 2, \epsilon > 0, x \in (0, 1]$ *и параметра* $U \leqslant N^{1/2}$, *такого что* N/U*–полуцелое число, справедливо равенство*

$$S_2^*(\beta_2, N; z) = \frac{\log(1 + \beta_2)}{\zeta(2)} \sum_{d | N} \frac{N}{d} \log \frac{N}{d^2} + \frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)} \left(C(\beta_2) + h_1(\beta_2) + h_2(\beta_2) \right) +$$

$$+ O_\epsilon \left(\left(\beta_2 U N^{1/3} + N^{4/3} \frac{\beta_2}{U} + \frac{N^2}{U^{5/2}} + \frac{U^{5/2}}{N^{1/2} \beta_2^{3/2}} \right) N^\epsilon \right), \tag{2.99}$$

где $h_1(\beta_2), h_2(\beta_2)$ *и* $C(\beta_2)$ *определены в* (2.5), (2.6) *и* (2.44) *соответственно.*

Доказательство. Данное утверждение является частным случаем результата [**137**].

□

Напомним , что $S_3(x, N; z)$ обозначает число решений уравнения (2.41) относительно

$$(1 + x) n_3 < n_1 \leqslant (1 + x + \Delta/2 - z) n_3, \quad n_{1,2,3,4} \geqslant 1. \tag{2.100}$$

Сначала рассмотрим случай $x = 1$. Пусть

$$\beta_3 = \Delta/2 - z.$$

Лемма 2.6.3. *Для любого $\epsilon > 0$ справедливо равенство*

$$S_3(1,N;z) = S_3^*(1,N;z) - \frac{\beta_3}{2(\beta_3+2)}\sigma_1(N) + O_\epsilon(N^\epsilon),$$

где $S_3^*(1,N;z)$ число решений уравнения (2.41) относительно неизвестных

$$n_3 \leqslant \beta_3 n_1, \quad 2n_4 \leqslant n_2, \quad n_3, n_4 \geqslant 1. \tag{2.101}$$

Доказательство. В (2.41), (2.100) произведем замену переменных

$$n_1 = m_1 + 2n_3, \quad n_4 = m_4 - 2n_2.$$

Получаем, что $S_3(1,N;z)$ равно числу решений системы

$$m_1 n_2 + n_3 m_4 = N, \quad 1 \leqslant m_1 \leqslant \beta_3 n_3, \quad 1 \leqslant n_2 < m_4/2$$

или в более удобных обозначениях

$$n_1 n_2 + n_3 n_4 = N, \quad 1 \leqslant n_3 \leqslant \beta_3 n_1, \quad 1 \leqslant n_4 < n_2/2. \tag{2.102}$$

Из (2.102) и определения $S_3^*(1,N;z)$ следует

$$S_3(1,N;z) = S_3^*(1,N;z) - \sum_{\substack{n_2(2n_1+n_3)=N \\ n_3 \leqslant \beta_3 n_1}} 1 =$$

$$= S_3^*(1,N;z) - \sum_{n_2|N}\sum_{n_1}\left[\frac{2N}{(2+\beta_3)n_2} \leqslant 2n_1 \leqslant \frac{N}{n_2} - 1\right] =$$

$$= S_3^*(1,N;z) - \frac{\beta_3}{2(\beta_3+2)}\sigma_1(N) + O(\sigma_0(N)).$$

□

Лемма 2.6.4. *Для любых $N \geqslant 2, \epsilon > 0, x \in (0,1]$ и параметра $U \leqslant N^{1/2}$, такого что N/U–полуцелое число, справедливо равенство*

$$S_3^*(1,N;z) = \frac{\log(1+\beta_3/2)}{\zeta(2)}\sum_{d|N}\frac{N}{d}\log\frac{N}{d^2} +$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(h_7(\beta_3) + h_8(\beta_3) + \left(2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1\right)\log\left(1+\frac{\beta_3}{2}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{\beta_3}{\beta_3+2}\right)\right) +$$

$$+O_\epsilon\left(\left(\beta_3 U N^{1/3} + N^{4/3}\frac{\beta_3}{U} + \frac{N^2}{U^{5/2}} + \frac{U^{5/2}}{N^{1/2}\beta_3^{3/2}}\right)N^\epsilon\right), \tag{2.103}$$

где функции $h_7(x)$ и $h_7(x)$ заданы абсолютно сходящимися рядами

$$h_7(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m\leqslant n/2}\frac{x}{n+xm} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right),$$

$$h_8(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m\leqslant xn}\frac{1}{m+2n} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right).$$

Доказательство. Условия (2.101) отличаются от ограничений рассмотренных в [**136**] и [**137**] только наличием двойки в неравенстве $2n_4 \leqslant n_2$. Это изменение никак не влияет на оценку остаточного члена, но изменяет главный член (сравните (2.103) с (2.99)). Поэтому мы опишем только изменения происходящие при вычислении главного члена в [**136**]. Мы будем использовать те же обозначения что и в [**136**], добавляя к ним $'$. Следующие рассуждения верны для произвольного $y > 0$, итоговые формулы применяются для $y = \beta_3$. Итак

$$\Phi'_y(U) = \sum_{n\leqslant U} \frac{1}{n} \sum_{m\leqslant n/2} \frac{y}{n+my}, \tag{2.104}$$

$$\Phi'_y(U) = \sum_{n\leqslant U} \frac{1}{n} \left(\sum_{m\leqslant n/2} \frac{y}{n+my} - \log\left(1+\frac{y}{2}\right)\right) + \log\left(1+\frac{y}{2}\right) \sum_{n\leqslant U} \frac{1}{n} =$$
$$= \log\left(1+\frac{y}{2}\right)(\log U + \gamma) + h_7(y) + O(U^{-1}). \tag{2.105}$$

Следующая формула является видоизменением [**133**, лемма 10]

$$F'(\xi) = \sum_{n\leqslant \xi} \frac{1}{n} \sum_{m\leqslant ny} \min\left\{ \frac{1}{2n+m}, \frac{1}{m} - \frac{n}{m\xi}\right\} =$$
$$= \log\left(1+\frac{y}{2}\right)(\log\xi + \gamma - 1) + h_8(y) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{y+2}\right) + O\left(\frac{\log(1+\xi)}{\xi}\right). \tag{2.106}$$

Для доказательства формулы (2.106) представим $F'(\xi)$ в виде

$$F'(\xi) = F'_1(\xi) + F'_2(\xi), \tag{2.107}$$

где

$$F'_1(\xi) = \sum_{n\leqslant \xi} \frac{1}{n} \sum_{\substack{m\leqslant ny \\ m\leqslant 2(\xi-n)}} \frac{1}{2n+m}, \quad F'_2(\xi) = \sum_{n\leqslant \xi} \frac{1}{n} \sum_{\substack{m\leqslant ny \\ m>2(\xi-n)}} \left(\frac{1}{m} - \frac{n}{m\xi}\right).$$

Вычислим $F'_1(\xi)$

$$F'_1(\xi) = \sum_{n\leqslant 2\xi/(2+y)} \frac{1}{n} \sum_{m\leqslant ny} \frac{1}{2n+m} + \sum_{2\xi/(2+y)<n\leqslant \xi} \frac{1}{n} \sum_{m\leqslant 2(\xi-n)} \frac{1}{2n+m} =$$
$$= \sum_{n\leqslant 2\xi/(2+y)} \frac{1}{n} \left(\sum_{m\leqslant ny} \frac{1}{2n+m} - \log\left(1+\frac{y}{2}\right)\right) +$$
$$+ \left(\log\frac{2\xi}{2+y} + \gamma + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)\log\left(1+\frac{y}{2}\right) + \sum_{2\xi/(2+y)<n\leqslant \xi} \frac{1}{n}\left(\log\frac{\xi}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$
$$= \log\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(\log\xi - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y}{2}\right) + \gamma\right) + h_8(y) + O\left(\frac{\log(1+\xi)}{\xi}\right). \tag{2.108}$$

Представим сумму $F_2'(\xi)$ в виде $F_2'(\xi) = F_3'(\xi) + F_4'(\xi)$, где

$$F_3'(\xi) = \sum_{m \leqslant 2y\xi/(2+y)} \sum_{\xi - m/2 < n \leqslant \xi} \left(\frac{1}{mn} - \frac{1}{m\xi} \right),$$

$$F_4'(\xi) = \sum_{2y\xi/(2+y) < m \leqslant \xi y} \sum_{m/y \leqslant n \leqslant \xi} \left(\frac{1}{mn} - \frac{1}{m\xi} \right).$$

Вычислим $F_3'(\xi)$. Применяя лемму 2.2.1, находим

$$F_3'(\xi) = \sum_{m \leqslant 2y\xi/(2+y)} \frac{1}{m} \left(-\log\left(1 - \frac{m}{2\xi}\right) + O\left(\frac{1}{\xi - m/2}\right)\right) - \tag{2.109}$$

$$- \sum_{m \leqslant 2y\xi/(2+y)} \frac{1}{\xi m} \left(\frac{m}{2} + O(1) \right) = \mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{y+2}\right) - \frac{y}{2+y} + O\left(\frac{\log(1+\xi)}{\xi}\right).$$

Вычислим $F_4'(\xi)$

$$F_4'(\xi) = \sum_{2y\xi/(2+y) < m \leqslant \xi y} \frac{1}{m} \left(\log\frac{\xi y}{m} + O\left(\frac{1}{m}\right)\right) -$$

$$- \sum_{2y\xi/(2+y) < m \leqslant \xi y} \frac{1}{\xi m} \left(\xi - \frac{m}{y} + O(1) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log^2\left(1 + \frac{y}{2}\right) - \log\left(1 + \frac{y}{2}\right) + \frac{y}{2+y} + O\left(\frac{1}{\xi}\right). \tag{2.110}$$

Используя (2.109) и (2.110), получаем

$$F_2'(\xi) = \frac{1}{2}\log^2\left(1 + \frac{y}{2}\right) - \log\left(1 + \frac{y}{2}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{y+2}\right) + O\left(\frac{\log(1+\xi)}{\xi}\right). \tag{2.111}$$

Подставляя в (2.107) формулы (2.108) и (2.111), получаем (2.106).

□

Рассмотрим случай произвольного x в неравенствах (2.100).

Лемма 2.6.5. *Для любых $N \geqslant 2, \epsilon > 0, x \in (0,1]$ и параметра $U \leqslant N^{1/2}$, такого что N/U–полуцелое число, справедливо равенство*

$$S_3(x, N; z) = \frac{\log(1 + x + \beta_3) - \log(1+x)}{\zeta(2)} \sum_{d|N} \frac{N}{d} \log\frac{N}{d^2} +$$

$$+ \frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)} \left(C(x+\beta_3) + h_1(x+\beta_3) + h_2(x+\beta_3) - C(x) - h_1(x) - h_2(x)\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+\beta_3} \right) \sigma_1(N) + O_\epsilon\left(\left(UN^{1/3} + \beta_3 \frac{N^{4/3}}{U} + \frac{N^2}{U^{5/2}} \right) N^\epsilon \right). \tag{2.112}$$

Доказательство. В (2.41), (2.100) произведем замену переменных

$$n_1 = m_1 + n_3, \quad n_4 = m_4 - n_2.$$

Получаем, что $S_3(x,N;z)$ равно числу решений системы

$$m_1n_2+n_3m_4=N,\quad xn_3<m_1\leqslant(x+\beta_3)n_3,\quad 1\leqslant n_2<m_4$$

или в более удобных обозначениях

$$n_1n_2+n_3n_4=N,\quad xn_1<n_3\leqslant(x+\beta_3)n_1,\quad 1\leqslant n_4<n_2. \tag{2.113}$$

Из (2.113) и определения $S_2^*(\beta_2,N;z)$ следует

$$S_3(x,N;z)=S_2^*(x+\beta_3,N;z)-S_2^*(x,N;z)-\sum_{\substack{n_2(n_1+n_3)=N\\ xn_1<n_3\leqslant(x+\beta_3)n_1}}1=$$

$$=S_2^*(x+\beta_3,N;z)-S_2^*(x,N;z)-\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+\beta_3}\right)\sigma_1(N)+O(\sigma_0(N)).$$

Применяя результат из работы [**137**], получаем (2.112). □

2.7. Новый вид асимптотической формулы для $S_1(x,N)$

Ввиду леммы 2.3.4 нам будет необходимо сравнить главные члены в $S_{2,3}(x,N)$ с главным членом в $S_1(x,N)$. Поэтому удобно записать $S_1(x,N)$ в том же виде что и $S_{2,3}(x,N)$ в лемме 2.3.5. Для этого в (2.89) надо заменить функцию $\alpha(z)=\alpha(1,1+x,\Delta;z)$ ее интегральным представлением вида (2.34). Положим

$$a_1=b_2=1,\quad b_1=a_3=1+x,\quad a_2=1-\Delta/2-z,\quad b_3=1+x+\Delta/2-z$$

и

$$\chi_1(z;y)=[a_1\leqslant y\leqslant b_1],\quad \chi_2(z;y)=[a_2\leqslant y<b_2],\quad \chi_3(z;y)=[a_3<y\leqslant b_3].$$

Тогда (2.34)

$$\alpha(z)=\alpha(1,1+x,\Delta;z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\chi_1(z;y)+\chi_2(z;y)+\chi_3(z;y)\right)\omega(\Delta/2,z)dz. \tag{2.114}$$

Заменяя в (2.89) функцию $\alpha(z)$ ее интегральным представлением (2.114) получаем утверждение.

Лемма 2.7.1. *Справедливо равенство*

$$S_1(x,N)=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\Delta/2,z)\sum_{i=1}^{3}S_{1,i}(x,N;z)dz+O_\varepsilon\left(\left(\frac{N}{\Delta}\right)^{3/4+\varepsilon}\right),$$

где $M = Nd^{-2}nk^2$ *и*

$$S_{1,i}(x,N;z) = \sum_{d|N} d \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(n)\mu(k)}{nk^2} \int_0^1 \left(\chi_i\left(z;\frac{M}{t}\right) + \chi_i\left(z;\frac{t}{M}\right)\right) dt +$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(\log N - \frac{2}{\sigma_1(N)}\sum_{d|N} d\log d - 2\gamma + 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + 1\right)\int_0^\infty \frac{\chi_i(z;y)}{y}dy -$$

$$-\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\int_0^\infty \frac{\chi_i(z;y)}{y}\log y dy + \frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(H_1(\chi_i(z;\cdot)) + H_2(\chi_i(z;\cdot))\right). \qquad (2.115)$$

Остается подставить в (2.115) функции $\chi_i(z;\cdot)$ и преобразовать получившиеся формулы.

Лемма 2.7.2. *При* $i = 1,2,3$ *справедливы равенства*

$$S_{1,i}(x,N;z) = \frac{\log(b_i/a_i)}{\zeta(2)}\sum_{d|N}\frac{N}{d}\log\frac{N}{d^2} + \frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(h_{2+i}(a_i,b_i) + h_6(a_i,b_i)\right) +$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(2\gamma - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 1 - \frac{1}{2}\log(a_ib_i)\right)\log\frac{b_i}{a_i} + O_\epsilon\left(N^{1/2+\epsilon}\right), \qquad (2.116)$$

где функции $h_3(a,b), h_4(a,b), h_5(a,b)$ *и* $h_6(a,b)$ *заданы абсолютно сходящимися рядами*

$$h_3(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{an\leqslant m\leqslant bn}\frac{1}{m} - \log\frac{b}{a}\right),$$

$$h_4(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{an\leqslant m< bn}\frac{1}{m} - \log\frac{b}{a}\right),$$

$$h_5(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{an< m\leqslant bn}\frac{1}{m} - \log\frac{b}{a}\right), \qquad (2.117)$$

$$h_6(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+an} - \frac{1}{m+bn}\right) - \log\frac{b}{a}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим технически самый сложный случай $i = 3$. Для интегралов в (2.115) при $i = 3$ получаем

$$\int_0^1 \left(\chi_3\left(z;\frac{M}{t}\right) + \chi_3\left(z;\frac{t}{M}\right)\right) dt = [a_3 < M \leqslant b_3] + [b_3^{-1} < M \leqslant a_3^{-1}] +$$

$$+Ma_3^{-1}[M\leqslant a_3] + Mb_3[M\leqslant b_3^{-1}] - Mb_3^{-1}[M\leqslant b_3] - Ma_3[M\leqslant a_3^{-1}],$$

$$\int_0^\infty \frac{\chi_3(z;y)}{y}dy = \log\frac{b_3}{a_3}, \quad \int_0^\infty \frac{\chi_3(z;y)}{y}\log y dy = \frac{1}{2}\left(\log^2 b_3 - \log^2 a_3\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y}\int_0^1 \chi_3\left(z;\frac{y(1-t)}{t}\right)dt = \log\frac{b_3}{a_3},$$

$$\int_0^1 \chi_3\left(z;\frac{m(1-t)}{nt}\right)dt=\frac{m}{m+a_3n}-\frac{m}{m+b_3n}.$$

Следовательно,

$$S_{1,3}(x,N;z)=\sum_{d|N}d\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n}\Bigg([a_3<M\leqslant b_3]+[b_3^{-1}<M\leqslant a_3^{-1}]+$$

$$+Ma_3^{-1}[M\leqslant a_3]+Mb_3[M\leqslant b_3^{-1}]-Mb_3^{-1}[M\leqslant b_3]-Ma_3[M\leqslant a_3^{-1}]\Bigg)+$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(\log N-\frac{2}{\sigma_1(N)}\sum_{d|N}d\log d-2\gamma+2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}+1-\frac{1}{2}\log(a_3b_3)\right)\log\frac{b_3}{a_3}+$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(h_5(a_3,b_3)+h_6(a_3,b_3)\right). \tag{2.118}$$

Таким образом нам осталось вычислить суммы по d,k,n. Применяя (2.11), (2.12), (2.13) и (2.14), получаем

$$\sum_{d|N}d\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n}[a_3<M\leqslant b_3]=\frac{\log(b_3/a_3)}{\zeta(2)}\sum_{d|N}\frac{N}{d}\log\frac{N}{d^2}+$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}+\frac{1}{2}\log(a_3b_3)\right)\log\frac{b_3}{a_3}+O_\epsilon\left(N^{1/2+\epsilon}\right), \tag{2.119}$$

$$\sum_{d|N}d\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n}Ma_3^{-1}[M\leqslant a_3]=\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|N}\frac{N}{d}\log\frac{N}{d^2}+$$

$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-1+\log a_3\right)+O_\epsilon\left(N^{1/2+\epsilon}\right). \tag{2.120}$$

Формулы для остальных четырех сумм тривиальным образом получаются из (2.119) и (2.120). Подставляя найденные асимптотические формулы в (2.118) получаем (2.116). □

2.8. Функциональные ряды

Наша цель–доказать различные соотношения между функциям $h_i(\cdot)$. В данном параграфе $x>0$ и $y>0$ произвольные числа.

Лемма 2.8.1. *Для любых положительных x и y справедливо равенство*

$$h_6(1+y,1+x)=h_1(x)-h_1(y)- \tag{2.121}$$

$$-\zeta(2)\left(\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right)+\mathrm{Li}_2(-y)-\mathrm{Li}_2(-x).$$

Доказательство. Следуя Устинову [**136**] определим функцию

$$\Phi_x(U)=\sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\frac{x}{n+mx}. \tag{2.122}$$

Используя определение (2.5)

$$\Phi_x(U) = \log(1+x)\sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n} + \sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n}\left(\sum_{m\leqslant n}\frac{x}{n+mx} - \log(1+x)\right) =$$

$$= \log(1+x)\left(\log U + \gamma\right) + h_1(x) + O_x(U^{-1}). \tag{2.123}$$

Рассмотрим разность двух функций (2.122)

$$\Phi_x(U) - \Phi_y(U) = \sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n}\left(\frac{x}{n+mx} - \frac{y}{n+my}\right) = \tag{2.124}$$

$$= \sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n}\sum_{m<n}\left(\frac{x}{n+mx} - \frac{y}{n+my}\right) + \zeta(2)\left(\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right) + O_{x,y}(U^{-1}).$$

Для двойной сумму из (2.124) находим

$$\sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n}\sum_{m<n}\left(\frac{x}{n+mx} - \frac{y}{n+my}\right) = \sum_{m<U}\sum_{m<n\leqslant U}\frac{x-y}{(n+mx)(n+my)} = \tag{2.125}$$

$$= \sum_{m<U}\sum_{n\leqslant U-m}\frac{x-y}{(n+m(1+x))(n+m(1+y))} =$$

$$= \sum_{m<U}\frac{1}{m}\sum_{n\leqslant U-m}\left(\frac{1}{n+m(1+y)} - \frac{1}{n+m(1+x)}\right) =$$

$$= \sum_{m<U}\frac{1}{m}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+m(1+y)} - \frac{1}{n+m(1+x)}\right) - \log\frac{1+x}{1+y}\right) +$$

$$+ \left(\log U + \gamma + O(U^{-1})\right)\log\frac{1+x}{1+y} -$$

$$- \sum_{m<U}\frac{1}{m}\sum_{n>U-m}\left(\frac{1}{n+m(1+y)} - \frac{1}{n+m(1+x)}\right).$$

Для последней суммы находим

$$- \sum_{m<U}\frac{1}{m}\sum_{n>U-m}\left(\frac{1}{n+m(1+y)} - \frac{1}{n+m(1+x)}\right) =$$

$$= -\sum_{m<U}\frac{1}{m}\sum_{n>U}\left(\frac{1}{n+my} - \frac{1}{n+mx}\right) =$$

$$= \sum_{m<U}\frac{1}{m}\log\frac{U+my}{U+mx} + O\left(\sum_{m<U}\frac{1}{(U+my)(U+mx)}\right) = \sum_{m<U}\frac{1}{m}\log\left(1+\frac{my}{U}\right) -$$

$$- \sum_{m<U}\frac{1}{m}\log\left(1+\frac{mx}{U}\right) + O_{x,y}\left(U^{-1}\right).$$

Применяя лемму 2.2.1, получаем

$$- \sum_{m<U}\frac{1}{m}\sum_{n>U-m}\left(\frac{x}{n+m(1+y)} - \frac{x}{n+m(1+x)}\right) = \tag{2.126}$$

$$= \mathrm{Li}_2(-x) - \mathrm{Li}_2(-y) + O_{x,y}\left(U^{-1}\right).$$

Подставляя (2.126) в (2.125), находим

$$\sum_{n\leqslant U}\frac{1}{n}\sum_{m<n}\left(\frac{x}{n+mx}-\frac{y}{n+my}\right)=h_6(1+y,1+x)+(\log U+\gamma)\log\frac{1+x}{1+y}+$$
$$+\mathrm{Li}_2(-x)-\mathrm{Li}_2(-y)+O_{x,y}\left(U^{-1}\right). \tag{2.127}$$

Подставляя (2.127) в (2.124), получаем

$$\Phi_x(U)-\Phi_y(U)=h_6(1+y,1+x)+(\log U+\gamma)\log\frac{1+x}{1+y}+$$
$$+\mathrm{Li}_2(-x)-\mathrm{Li}_2(-y)+\zeta(2)\left(\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right)+O_{x,y}\left(U^{-1}\right). \tag{2.128}$$

Подставляя в (2.128) формулу (2.123) и устремляя U к бесконечности получаем (2.121).

□

Лемма 2.8.2. *Для $x>y>0$ справедливо равенство*

$$h_5(1+y,1+x)=h_2(x)-h_2(y)+$$
$$+\mathrm{Li}_2(-x)-\mathrm{Li}_2(-y)+\log x\log(1+x)-\log y\log(1+y). \tag{2.129}$$

Доказательство. Следуя Устинову [**133**] определим функцию

$$F_x(U)=\sum_{n<U}\sum_{m\leqslant nx}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right). \tag{2.130}$$

Используя определение (2.6), получаем (см. [**133**])

$$F_x(U)=(\log(1+x)+\log U)\,(\log(xU)+\gamma)+h_2(x)-$$
$$-\sum_{m<xU}\frac{\log(m+U)}{m}+O_x\left(\frac{\log U}{U}\right).$$

Применяя лемму 2.2.1, находим

$$\sum_{m<xU}\frac{\log(m+U)}{m}=\sum_{m<xU}\frac{\log U+\log(1+m/U)}{m}=$$
$$=(\log(xU)+\gamma)\log U-\mathrm{Li}_2(-x)+O_x\left(\frac{\log U}{U}\right).$$

Следовательно

$$F_x(U)=(\log(xU)+\gamma)\log(1+x)+h_2(x)+\mathrm{Li}_2(-x)+O_x\left(\frac{\log U}{U}\right). \tag{2.131}$$

Рассмотрим разность двух функций (2.130). Используя определение (2.117), получаем

$$F_x(U) - F_y(U) = \sum_{n<U} \sum_{ny<m\leqslant nx} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}\right) = \sum_{n<U} \frac{1}{n} \sum_{n(1+y)<m\leqslant n(1+x)} \frac{1}{m} =$$

$$= \sum_{n<U} \frac{1}{n}\left(\sum_{n(1+y)<m\leqslant n(1+x)} \frac{1}{m} - \log\frac{1+x}{1+y}\right) + (\log U + \gamma)\log\frac{1+x}{1+y} + O_{x,y}\left(\frac{1}{U}\right),$$

$$F_x(U) - F_y(U) = h_5(1+y, 1+x) + (\log U + \gamma)\log\frac{1+x}{1+y} + O_{x,y}\left(\frac{1}{U}\right). \tag{2.132}$$

Подставляя (2.131) в (2.132) и устремляя U к бесконечности, получаем (2.129). □

Лемма 2.8.3. *Для любого $0 \leqslant y < 1$ справедливо равенство*

$$h_6(1-y, 1) = h_1\left(\frac{y}{1-y}\right) - y\zeta(2) + \mathrm{Li}_2(y). \tag{2.133}$$

Доказательство. Преобразуем функцию (2.122)

$$\Phi_{y/(1-y)}(U) = \sum_{n\leqslant U} \frac{1}{n} \sum_{m\leqslant n} \frac{y}{n(1-y)+my} =$$

$$= y\zeta(2) + O_y(U^{-1}) + \sum_{n\leqslant U} \frac{1}{n} \sum_{m<n} \frac{y}{n(1-y)+my} =$$

$$= y\zeta(2) + O_y(U^{-1}) + \sum_{m<U} \frac{1}{m} \sum_{m<n\leqslant U} \frac{my}{n(n(1-y)+my)}. \tag{2.134}$$

Преобразуем последнюю сумму из (2.134)

$$\sum_{m<U} \frac{1}{m} \sum_{m<n\leqslant U} \frac{my}{n(n(1-y)+my)} = \sum_{m<U} \frac{1}{m} \sum_{k\leqslant U-m} \frac{my}{(k+m)(k(1-y)+m)} =$$

$$= \sum_{k<U} \frac{1}{k} \sum_{m\leqslant U-k} \frac{ky}{(k+m)(k(1-y)+m)} =$$

$$= \sum_{k<U} \frac{1}{k}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(1-y)+m} - \frac{1}{k+m}\right) - \log\frac{1}{1-y}\right) +$$

$$+ \big(\log U + \gamma + O(U^{-1})\big)\log\frac{1}{1-y} - \sum_{k<U} \frac{1}{k} \sum_{m>U-k} \frac{ky}{(k+m)(k(1-y)+m)}. \tag{2.135}$$

Применяя лемму 2.2.1, находим

$$\sum_{k<U} \frac{1}{k} \sum_{m>U-k} \frac{ky}{(k+m)(k(1-y)+m)} =$$

$$= \sum_{k<U} \frac{1}{k} \sum_{m>U-k} \left(\frac{1}{k(1-y)+m} - \frac{1}{k+m}\right) =$$

$$= -\sum_{k<U} \frac{1}{k}\log\left(1 - \frac{ky}{U}\right) + O\left(\frac{\log U}{U}\right) = \mathrm{Li}_2(y) + O_y\left(\frac{\log U}{U}\right). \tag{2.136}$$

Подставляя (2.136) в (2.135), получаем

$$\sum_{m<U}\frac{1}{m}\sum_{m<n\leqslant U}\frac{my}{n(n(1-y)+my)}=$$

$$=h_6(1-y,1)+(\log U+\gamma)\log\frac{1}{1-y}-\mathrm{Li}_2(y)+O_y\left(\frac{\log U}{U}\right). \tag{2.137}$$

Подставляя (2.137) и (2.123) в (2.134) и устремляя U к бесконечности, получаем (2.133). □

Лемма 2.8.4. *Для любого $0\leqslant y<1$ справедливо равенство*

$$h_4(1-y,1)=h_2\left(\frac{y}{1-y}\right)-\log y\log(1-y)-\mathrm{Li}_2(y). \tag{2.138}$$

Доказательство. Запишем равенство (2.131) в точке $x=y/(1-y)$ в виде

$$F_{y/(1-y)}(U)=-\left(\log U+\log\frac{y}{1-y}+\gamma\right)\log(1-y)+$$

$$+h_2\left(\frac{y}{1-y}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{y-1}\right)+O_y\left(\frac{\log U}{U}\right). \tag{2.139}$$

Воспользуемся определением (2.130)

$$F_{y/(1-y)}(U)=\sum_{n<U}\sum_{m\leqslant ny/(1-y)}\frac{1}{n(m+n)}.$$

Производя замену $m=k-n$, находим

$$F_{y/(1-y)}(U)=\sum_{n<U}\sum_{n<k\leqslant n/(1-y)}\frac{1}{nk}=\sum_{k\leqslant U}\sum_{k(1-y)\leqslant n<k}\frac{1}{nk}+ \tag{2.140}$$

$$+\sum_{U<k<U/(1-y)}\sum_{k(1-y)\leqslant n<U}\frac{1}{nk}.$$

Для первой суммы из (2.140) получаем

$$\sum_{k\leqslant U}\frac{1}{k}\sum_{k(1-y)\leqslant n<k}\frac{1}{n}=\sum_{k\leqslant U}\frac{1}{k}\left(\sum_{k(1-y)\leqslant n<k}\frac{1}{n}-\log\frac{1}{1-y}\right)+$$

$$+\left(\log U+\gamma+O(U^{-1})\right)\log\frac{1}{1-y}=$$

$$=h_4(1-y,1)+(\log U+\gamma)\log\frac{1}{1-y}+O_y\left(\frac{1}{U}\right). \tag{2.141}$$

Для второй суммы из (2.140) находим

$$\sum_{U<k<U/(1-y)}\sum_{k(1-y)\leqslant n<U}\frac{1}{nk}=\sum_{U<k<U/(1-y)}\frac{1}{k}\left(\log\frac{U}{1-y}-\log k\right)+O\left(\frac{1}{U}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\log^2(1-y)+O_y\left(\frac{\log U}{U}\right). \tag{2.142}$$

Подставляя (2.141) и (2.142) в (2.140), получаем

$$F_{y/(1-y)}(U) = h_4(1-y,1) - (\log U + \gamma)\log(1-y) + \tag{2.143}$$
$$+\frac{1}{2}\log^2(1-y) + O_y\left(\frac{\log U}{U}\right).$$

Приравнивая (2.143) и (2.139) и устремляя U к бесконечности, находим

$$h_4(1-y,1) = h_2\left(\frac{y}{1-y}\right) - \log\frac{y}{1-y}\log(1-y) - \tag{2.144}$$
$$-\frac{1}{2}\log^2(1-y) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{y-1}\right).$$

Используя соотношение [**86**, 25.12.3] с $z = y/(y-1)$, находим

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{y}{y-1}\right) = -\mathrm{Li}_2(y) - \frac{1}{2}\log^2(1-y). \tag{2.145}$$

Подставляя (2.145) в (2.144) получаем (2.138). □

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 2.8.1.

Лемма 2.8.5. *Для любого $x > 0$ справедливо равенство*

$$h_6(1,1+x) = h_1(x) - \zeta(2)\frac{x}{1+x} - \mathrm{Li}_2(-x).$$

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 2.8.2.

Лемма 2.8.6. *Для любого $x > 0$ справедливо равенство*

$$h_3(1,1+x) = h_2(x) + \zeta(2) + \mathrm{Li}_2(-x) + \log x \log(1+x).$$

Лемма 2.8.7. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) - \log^2 2 = \mathrm{Li}_2(-2) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) - \mathrm{Li}_2(-1) + \frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2}.$$

Доказательство. Нам понадобится равенство ([**70**, ф.84])

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{6}\log^2 3. \tag{2.146}$$

Используя равенство ([**69**, ф.17, стр.284]) с $x = y = 1/3$, получаем

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) = \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{2}\log^2\frac{4}{3}. \tag{2.147}$$

Подставляя (2.146) в (2.147), находим

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^2}{18} + 2\log 2\log 3 - 2\log^2 2 - \frac{2}{3}\log^2 3. \tag{2.148}$$

Из (2.146) и (2.148) следует

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right) + 2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \log^2 2 - \log^2\frac{3}{2}. \tag{2.149}$$

Справедливы следующие равенства ([**69**, ф.5,8, стр.283])

$$\mathrm{Li}_2(-2)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\log^2 2,\quad \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Li}_2(-2)-\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\log^2 2+\frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2}. \tag{2.150}$$

Складывая (2.150) с (2.149), находим

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right)+\mathrm{Li}_2(-2)=-\frac{3}{2}\log^2 2-\frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2}. \tag{2.151}$$

Справедливы равенства ([**69**, ф.3,4, стр.283])

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\log^2 2,\quad \mathrm{Li}_2(-1)=-\frac{\pi^2}{12},$$

следовательно

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Li}_2(-1)=-\frac{1}{2}\log^2 2. \tag{2.152}$$

Вычитая (2.152) из (2.151), получаем

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{4}\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{3}\right)+\mathrm{Li}_2(-2)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Li}_2(-1)=$$
$$=-\log^2 2-\frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2}.$$

□

Лемма 2.8.8. *Для любого $x>0$ справедливо равенство*

$$h_7(x)=h_1(1+x)-h_1(1)+\mathrm{Li}_2(-1)-\mathrm{Li}_2(-1-x)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{2+x}\right)-$$
$$-\log 2\log\left(1+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\log^2\left(1+\frac{x}{2}\right). \tag{2.153}$$

Доказательство. Заметим, что нам достаточно доказать равенство

$$\Phi_{1+x}(U)-\Phi_1(U)-\Phi_x'(U)=\mathrm{Li}_2(-1-x)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{2+x}\right)-\mathrm{Li}_2(-1)+$$
$$+\log 2\log\left(1+\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\log^2\left(1+\frac{x}{2}\right)+O_x(U^{-1}). \tag{2.154}$$

Действительно, подставляя в (2.154) формулы (2.105) и (2.123) и устремляя U к бесконечности, мы получаем (2.153). Используя (2.122) и (2.104), находим

$$\Phi_{1+x}(U)-\Phi_1(U)-\Phi_x'(U)=$$
$$=\sum_{n\leqslant U}\sum_{m\leqslant n}\frac{x}{(n+m)(n+m(1+x))}-\sum_{n\leqslant U}\sum_{m\leqslant n/2}\frac{x}{n(n+mx)}. \tag{2.155}$$

Для первой сумму находим

$$\sum_{n\leqslant U}\sum_{m\leqslant n}\frac{x}{(n+m)(n+m(1+x))}=\sum_{m\leqslant U}\sum_{2m\leqslant n\leqslant m+U}\frac{x}{n(n+mx)}=$$
$$=\sum_{n\leqslant U}\sum_{m\leqslant n/2}\frac{x}{n(n+mx)}+\sum_{U<n\leqslant 2U}\sum_{n-U\leqslant m\leqslant n/2}\frac{x}{n(n+mx)}. \tag{2.156}$$

Подставляя (2.156) в (2.155) и учитывая что U можно считать полуцелым, получаем

$$\Phi_{1+x}(U)-\Phi_1(U)-\Phi_x'(U)=\sum_{U<n\leqslant 2U}\sum_{n-U<m\leqslant n/2}\frac{x}{n(n+mx)}=$$
$$=\sum_{U<n\leqslant 2U}\frac{1}{n}\left(\log\frac{n(1+x/2)}{n(1+x)-Ux}+O\left(\frac{1}{n-U+n/x}\right)\right)=$$
$$=\log 2\log\frac{1+x/2}{1+x}-\sum_{U<n\leqslant 2U}\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{Ux}{n(1+x)}\right)+O_x\left(\frac{1}{U}\right).$$

Действуя также как при доказательстве леммы 2.2.1, находим

$$\Phi_{1+x}(U)-\Phi_1(U)-\Phi_x'(U)=$$
$$=\log 2\log\frac{1+x/2}{1+x}+\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{1+x}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{2(1+x)}\right)+O_x\left(\frac{1}{U}\right). \tag{2.157}$$

Подставляя (2.157) в (2.154) и устремляя U к бесконечности, получаем, что нам достаточно доказать равенство

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{1+x}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{2(1+x)}\right)-\log 2\log(1+x)=$$
$$=\mathrm{Li}_2(-1-x)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{2+x}\right)-\mathrm{Li}_2(-1)+\frac{1}{2}\log^2\left(1+\frac{x}{2}\right). \tag{2.158}$$

Дифференцируя с помощью (2.15) равенство (2.158) по x мы получаем тождество $0=0$. Следовательно, справедливость равенства (2.158) достаточно проверить в одной точке. В точке $x=1$ равенство (2.158) было доказано в лемме 2.8.7. □

2.9. Доказательство теоремы 3.1.1 и 3.1.2

Лемма 2.9.1. *Для любых $N\geqslant 2,\epsilon>0,x\in(0,1]$ и параметра $U\leqslant N^{1/2}$, такого что N/U–полуцелое число, справедливы равенства*

$$S_{1,1}(x,N;z)=\frac{\log(1+x)}{\zeta(2)}\sum_{d|N}\frac{N}{d}\log\frac{N}{d^2}-\left(\frac{x}{x+1}-1\right)\sigma_1(N)+$$
$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(C(x)+h_1(x)+h_2(x)\right)+O_\epsilon\left(N^{1/2+\epsilon}\right), \tag{2.159}$$

$$S_{1,2}(x,N;z)-S_2(x,N;z)= \tag{2.160}$$
$$=O_\epsilon\left(\left(\beta_2UN^{1/3}+\beta_2\frac{N^{4/3}}{U}+\frac{N^2}{U^{5/2}}+\frac{U^{5/2}}{N^{1/2}\beta_2^{3/2}}\right)N^\epsilon\right),$$

$$S_{1,3}(x,N;z)-S_3(x,N;z)= \tag{2.161}$$
$$=O_\epsilon\left(\left(UN^{1/3}+\beta_3\frac{N^{4/3}}{U}+\frac{N^2}{U^{5/2}}\right)N^\epsilon\right),$$

$$S_{1,3}(1,N;z)-S_3(1,N;z)= \tag{2.162}$$
$$=O_\epsilon\left(\left(\beta_3UN^{1/3}+\beta_3\frac{N^{4/3}}{U}+\frac{N^2}{U^{5/2}}+\frac{U^{5/2}}{N^{1/2}\beta_3^{3/2}}\right)N^\epsilon\right).$$

Доказательство. Формула (2.159) следует из лемм 2.7.2, 2.8.5 и 2.8.6. Формула (2.160) следует из лемм 2.6.1, 2.6.2, 2.7.2, 2.8.3 и 2.8.4. Формула (2.161) следует из лемм 2.6.5, 2.7.2, 2.8.1 и 2.8.2. Формула (2.162) следует из лемм 2.6.3, 2.6.4, 2.7.2, 2.8.8 и равенства $h_8(x)=h_5(2,2+x)$. □

Лемма 2.9.2. *Для любых $N\geqslant 2,\epsilon>0,x\in(0,1]$ и параметра $U\leqslant N^{1/2}$, такого что N/U–полуцелое число, справедливы равенства*

$$T_x(N)=\frac{\log(1+x)}{\zeta(2)}\sum_{d|N}\frac{N}{d}\log\frac{N}{d^2}-\left(\frac{x}{x+1}-1\right)\sigma_1(N)+ \tag{2.163}$$
$$+\frac{\sigma_1(N)}{\zeta(2)}\left(C(x)+h_1(x)+h_2(x)\right)+$$
$$+O_\epsilon\left(\left(\Delta UN^{1/3}+UN^{1/3}[x<1]+\Delta\frac{N^{4/3}}{U}+\frac{N^2}{U^{5/2}}+\frac{U^{5/2}}{N^{1/2}\Delta^{3/2}}+\frac{N^{3/4}}{\Delta^{3/4+\epsilon}}\right)N^\epsilon\right).$$

Доказательство. Формула (2.163) следует из лемм 2.3.4, 2.3.5, 2.7.1, 2.9.1 и 2.2.4. □

Выбирая параметры следующим образом

$$U=\frac{N}{[N^{1/2+1/42}]+\frac12},\quad N^{-5/63}\leqslant\Delta\leqslant N^{-1/21},\quad\text{при}\quad x<1,$$
$$U=\frac{N}{[N^{1/2+1/58}]+\frac12},\quad \Delta=N^{-5/87},\quad\text{при}\quad x=1$$

и подставляя (2.163) в (2.45), мы получаем асимптотическую формулу (2.43) с остаточными членами

$$O_\epsilon\left(N^{5/6-1/42+\epsilon}\right)\quad\text{при}\quad x<1,\quad O_\epsilon\left(N^{5/6-7/174+\epsilon}\right)\quad\text{при}\quad x=1.$$

Подставляя полученную асимптотическую формулу в (2.40), мы получаем (см.[**136**]) теоремы 3.1.1 и 3.1.2.

ГЛАВА 3

Асимптотические формулы для вторых моментов L–рядов голоморфных параболических форм на критической прямой.

Данная глава написана на основе работ [**115**], [**117**], [**119**].

3.1. Введение

Ориентируясь на обозначения и терминологию из монографии [**51**], обозначим через $S_{2k}(N)$ комплексное линейное пространство голоморфных параболических форм целого четного веса $2k \geqslant 2$ относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$. Каждая форма f из $S_{2k}(N)$ раскладывается в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_f(n) e(nz),$$

где $e(x) = \exp(2\pi i x)$. Ассоциированные с f L–ряды

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_f(n)}{n^{s+k-1/2}}, \qquad L_f^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\rho_f(n)}}{n^{s+k-1/2}},$$

абсолютно сходящиеся в полосе $\Re s > 1$, определяют голоморфные по s функции на всей плоскости комплексного переменного (см., например, [**51**, стр. 378]).

Пространство $S_{2k}(N)$ конечномерно и мы можем выбрать в нем ортонормированный базис $O_{2k}(N)$ относительно скалярного произведения Петерссона

$$\langle f, g \rangle = \iint\limits_{\Gamma_0(N)\backslash H} f(z)\overline{g(z)} y^{2k-2} dx dy, \qquad H = \{z = x + iy | x, y \in \mathbb{R}; y > 0\}.$$

Изучение свойств $L_f(s)$ на критической прямой $\Re s = 1/2$ является одной из важнейших задач теории автоморфных функций (см.[**51**]). Следует отметить, что во многих приложениях достаточно оценок в среднем по тем или иным параметрам. Асимптотические формулы для различных вторых моментов функций $L_f(s)$ необходимы не только для изучения свойств самих L-рядов, но и для решения многих задач аналитической теории чисел. Положим

$$W_{2k}(N; t) = \log N + 2\gamma - 2\log(2\pi) + \frac{\Gamma'(k+it)}{\Gamma(k+it)} + \frac{\Gamma'(k-it)}{\Gamma(k-it)}, \tag{3.1}$$

$$U_{2k}(t) = \frac{\zeta(1+2it)}{(2\pi)^{2it}} \frac{\Gamma(k+it)}{\Gamma(k-it)} + \frac{\zeta(1-2it)}{(2\pi)^{-2it}} \frac{\Gamma(k-it)}{\Gamma(k+it)},$$

где γ–постоянная Эйлера, $\Gamma(s)$ и $\zeta(s)$, соответственно, гамма-функция и дзета-функция Римана. Главным результатами данной главы являются

Теорема 3.1.1. *Пусть k и N–натуральные числа, t–вещественное. Тогда*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f \in O_{2k}(N)} \left| L_f(\frac{1}{2}+it) \right|^2 = W_{2k}(N;t) + (-1)^k \delta_{1,N} U_{2k}(t) + V_1(k,N;t)$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$V_1(k,N;t) \ll_\varepsilon \frac{1+|t|}{kN} (kN(1+|t|))^\varepsilon.$$

Теорема 3.1.2. *Пусть k и N–натуральные числа, T–вещественное число, большее 1. Тогда*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f \in O_{2k}(N)} \int_0^T \left| L_f(\frac{1}{2}+it) \right|^2 dt = \int_0^T \left(W_{2k}(N;t) + (-1)^k \delta_{1,N} U_{2k}(t) \right) dt + V_2(k,N;T)$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$V_2(k,N;T) \ll_\varepsilon \frac{T}{kN} (kNT)^\varepsilon.$$

В формулировках теорем $\delta_{1,N}$–символ Кронекера, равный 1 при $N = 1$ и 0 при $N > 1$.

Отметим, что случай $k = 1$ намного сложнее для рассмотрения, по причине отсутствия в существующих публикациях (известных автору) формулы свертки для веса 2 (см. [**113**],[**18**], [**53**, теорема 17]). Так что основным достижением стоит считать даже не оценку остатка (3.1.1) (хотя она и является редким примером оценки, равномерной сразу и по весу и уровню формы, и по аргументу L-функции), сколько отсутствие ограничения на вес формы. Специалистам хорошо известно [**13**], [**89**] , что случай $k = 1$ существенным образом отличается от всех остальных, так как при малом весе начинают возникать различные проблемы со сходимостью рассматриваемых сумм и интегралов. Основным нововведением, позволившем преодолеть эти сложности, является применение нами так называемого "трюка Гекке". При рассмотрении второго момента после применения формулы Петерссона возникают функции Бесселя $J_{2k-1}(x)$, которые при малом x ведут себя как x^{2k-1}. При $k = 1$ этой скорости убывания в нуле не хватает для обеспечения абсолютной сходимости всех выражений, поэтому мы вводим новую переменную λ и заменяем $J_{2k-1}(x)$ на $J_{2\lambda-1}(x)$. Это позволяет обеспечить абсолютную сходимость возникающих выражений и получить точную формулу для второго момента, выражающую его через свертки функций числа делителей, при условии что λ достаточно велико. Чтобы продолжить получившуюся комбинацию сверток в точку $\lambda = 1$ мы сначала заменяем весовые функции в свертках на главный член из их асимптотических формул,

при этом остаток сразу оказывается абсолютно сходящимся. Это позволяет свести задачу к изучению продолжимости в $\lambda = 1$ выражения

$$\left(\cos\pi(\lambda-u)A^{+}(u,v,\lambda)+\cos\pi v A^{-}(u,v,\lambda)\right), \tag{3.2}$$

где

$$A^{\pm}(u,v,\lambda)=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau_u(d)\tau_v(dN\pm 1)\alpha(dN\pm 1)}{d^u(dN\pm 1)^{\lambda-u}},$$

$$\alpha(x)=0, \quad \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant P \quad \text{и} \quad \alpha(x)=1, \quad \text{если} \quad x\geqslant 2P,$$

Расписывая $\tau_u(d)$ по определению, применяя разбиение единицы и формулу Вороного, мы записываем $A^{\pm}(u,v,\lambda)$ как сумму главного члена и остатка, который является абсолютно сходящимся рядом. Подставляя полученное выражение в (3.2) и проводя некоторые преобразования, мы показываем, что комбинация главных членов является голоморфной функцией.

Различные асимптотические формулы для второго момента рядов $L_f(s)$ или их обобщений при усреднении по базису $O_{2k}(N)$ можно найти в работах [**1**], [**57**], [**99**]. Так А. Санкаранараян при $k>1$ доказал , что

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{f\in O_{2k}(N)}\int_0^T\left|L_f(\frac{1}{2}+it)\right|^2dt\ll NT(\log NT)^3(\log\log T)^2+N^{5+\epsilon}e^{-C\log^2 T}.$$

Таким образом, теорема 3.1.2 обобщает и улучшает результат из работы [**99**].

Из теории Аткина-Ленера следует, что пространство $S_{2k}(N)$ распадается на подпространства новых и старых форм

$$S_{2k}(N)=S_{2k}^{new}(N)\oplus S_{2k}^{old}(N).$$

Обозначим через $H_{2k}^{*}(N)$ ортогональный базис пространства $S_{2k}^{new}(N)$. Хорошо известно (см.[**51**, § 14.7]), что при простом N и $k=\{1,2,3,4,5,7\}$ не существует старых форм и, следовательно, $S_{2k}(N)=S_{2k}^{new}(N)$. Соответственно при таких N и k элементы базисов $O_{2k}(N)$ и $H_{2k}^{*}(N)$ отличаются только нормировкой и формулу (3.1.1) можно рассматривать как частный случай асимптотической формулы для выражения

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{f\in H_{2k}^{*}(N)}\rho_f(l)\left|L_f(\frac{1}{2}+it)\right|^2, \tag{3.3}$$

где l натуральное. Отметим, что методы доказательства теоремы 3.1.1 переносятся и на случай произвольного l [**110**]. Детальное исследование величин (3.3) связано с большим количеством приложений [**51**, § 26]. Например, из асимптотических формул для (3.3) следуют результаты о пропорции необнуляемости рядов $L_f(1/2)$. Различные результаты об асимптотическом поведении величин (3.3) или их обобщений можно найти в [**25**], [**64**], [**96**], [**106**]. В частном случае при $k = 1, t = 0$ и N–простое теорема 3.1.1 совпадает с результатом Х. Буя [**17**]. Отметим, что методы данной главы и статьи [**17**] отличаются друг от друга.

3.2. Вспомогательные утверждения

Для натурального q и целого a положим

$$\delta_q(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod q \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

Для комплексного s и натурального n

$$\tau_s(n) = \tau_{-s}(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^s = n^s \sigma_{-2s}(n) = n^{-s}\sigma_{2s}(n) \tag{3.4}$$

обобщенная функция числа делителей

$$\tau(n) = \tau_0(n) = \sigma_0(n) = \sum_{n_1 | n} 1.$$

Здесь и в дальнейшем q, n, n_1 и n_2 натуральные числа.

Для целых m_1, m_2 и M

$$S_q(m_1, m_2; M) = \sum_{a,b=0}^{q-1} \delta_q(ab - M) e\left(\frac{m_1 a + m_2 b}{q}\right)$$

обобщенная сумма Клостермана. Нам понадобится оценка (см.[**51**, следствие 11.12])

$$|S_q(m_1, m_2; \pm 1)| \leqslant \tau(q)(m_1, m_2, q)^{1/2} q^{1/2} \ll_\varepsilon q^{1/2+\varepsilon}(m_1 m_2, q)^{1/2}.$$

Для функции Бесселя (см.[**112**, глава 7])

$$J_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+s)} \left(\frac{z}{2}\right)^{s+2n}$$

при $1 - 2\Re\lambda < \Delta < 0$ и положительном вещественном y имеет место интегральное представление (см.[**112**, стр. 30, ф. (34)])

$$J_{2\lambda-1}(y) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\Re s = \Delta} \frac{\Gamma(\lambda - 1/2 + s/2)}{\Gamma(\lambda + 1/2 - s/2)} \left(\frac{y}{2}\right)^{-s} ds \tag{3.5}$$

и выполняется оценка

$$J_{2\lambda-1}(y) \ll \min\left\{y^{2\Re\lambda-1}, y^{-1/2}\right\},$$

равномерная по λ на всех компактых подмножествах в полосе $\Re\lambda > 1/2$. Положим

$$k^+(s;z) = \frac{1}{2\sin(\pi s)}\left(J_{-2s}(z) - J_{2s}(z)\right), \qquad k^-(s;z) = \frac{2}{\pi}\cos(\pi s)K_{2s}(z),$$

где $K_s(z)$ модифицированная функция Бесселя. Имеет место оценка (см. [**28**, ф.(5.16)])

$$|k^+(it;tz)| \ll \frac{1}{t^{1/2}(1+z^2)^{1/4}}.$$

Положим

$$\varphi_s(n) = \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^{1+s}}, \qquad \gamma(s;M;q) = \sum_{d|(M,q)} d^{-s}\varphi_s\left(\frac{q}{d}\right). \tag{3.6}$$

Для натурального M и бесконечно дифференцируемой функции $f : (-\infty,\infty) \to \mathbb{C}$ с компактным носителем, отделенным от нуля, справедлива следующая обобщенная формула суммирования Вороного [**19**]

$$\sum_{n\equiv M(mod\, q)} f(n)\tau_s(n) = \frac{\zeta(1+2s)}{q}\gamma(2s;M;q)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)|x|^s dx +$$
$$+\frac{\zeta(1-2s)}{q}\gamma(-2s;M;q)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)|x|^{-s}dx +$$
$$+\frac{2\pi}{q^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{n}\right)^s\left(g^+\left(16\pi^2\frac{mn}{q^2}\right)S_q(m,n;M) + g^-\left(16\pi^2\frac{mn}{q^2}\right)S_q(m,n;-M)\right),$$

где

$$g^{\pm}(y) = \int_0^{\infty}\left(k^{\pm}(s;\sqrt{xy})f(x) + k^{\mp}(s;\sqrt{xy})f(-x)\right)dx.$$

Дзета-функция Лерха с вещественными параметрами α и β в полосе $\Re s > 1$ определяется по формуле

$$\xi(\alpha,\beta;s) = \sum_{n+\alpha>0}\frac{e(n\beta)}{(n+\alpha)^s}$$

с абсолютно сходящимся в полосе $\Re s > 1$ рядом из правой части. Она периодична по β с периодом 1, продолжается голоморфно на всю плоскость комплексного переменного по s за исключением точки $s = 1$ для целого β. В последнем случае в этой точке у $\xi(\alpha,\beta;s)$ простой полюс с вычетом 1. Нам понадобятся функции

$$\xi(\alpha,0;s), \qquad \xi(0,\beta;s),$$

связанные функциональным соотношением

$$\xi(0,\alpha;1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\left(e\left(\frac{s}{4}\right)\xi(\alpha,0;s) + e\left(-\frac{s}{4}\right)\xi(-\alpha,0;s)\right). \tag{3.7}$$

В частном случае $\alpha = 0$ мы получаем функциональное уравнение для дзета-функции Римана

$$\zeta(1-s) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s). \tag{3.8}$$

В дальнейшем нам понадобится разложение дзета-функции Римана в ряд Лорана в окрестности точки $s = 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|). \tag{3.9}$$

В частном случае для дзета-функции Лерха при $\Re s > 0$ справедливо тождество

$$\xi\left(0, \frac{a}{q}; s\right) = \sum_{n+a/q>0}^{N-1} \frac{e(na/q)}{(n+a/q)^s} + s\int_N^\infty \frac{S(x)}{x^{s+1}} dx,$$

где $q > 1$, $(a,q) = 1$ и

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} e\left(\frac{an}{q}\right).$$

Доказательство аналогично [**142**, стр.99] и основывается на применении формулы суммирования Абеля. Выбирая $N = [T]$, получаем при $0 < \sigma < 1$ оценку

$$\left|\xi\left(0, \frac{a}{q}; \sigma + iT\right)\right| \ll_\sigma T^{1-\sigma}. \tag{3.10}$$

Определим величину

$$\mu(\alpha, \beta; \sigma + it) = \limsup_{t \to \pm\infty} \frac{\log|\xi(\alpha, \beta; \sigma + it)|}{\log|t|}.$$

В работе [**58**] доказано, что

$$\mu(\alpha, \beta; \sigma + it) \leqslant \max\left\{\frac{1}{2} - \sigma, \frac{1-\sigma}{2}, 0\right\}. \tag{3.11}$$

Определим для $\Re s > 1 + |\Re v|$ абсолютно сходящимся рядом следующую функцию комплексного переменного s

$$G(s, v; q) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{S_q(m, n; 1)}{(mn)^s} \left(\frac{m}{n}\right)^v. \tag{3.12}$$

При $q = 1$

$$G(s, v; 1) = \zeta(s - v)\zeta(s + v). \tag{3.13}$$

Из теории дзета-функции Римана следует, что $G(s, v; 1)$–голоморфная по s на всей плоскости комплексного переменного функция за исключением точек $s_1 = 1 + v$, $s_2 = 1 - v$ с полюсами первого порядка при $v \neq 0$, а $\zeta(1+2v)$ и $\zeta(1-2v)$ соответствующие им вычеты. Функция $G(s, v; 1)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$G(s, v; 1) = 2\Gamma(1 - s + v)\Gamma(1 - s - v)(2\pi)^{2s-2} \left(-\cos\pi s + \cos\pi v\right) G(1 - s, -v; 1).$$

Следующее утверждение является обобщением вышесказанного

Лемма 3.2.1. *При $q > 1$ для любого комплексного v функция $G(s, v; q)$ продолжается по s голоморфно на всю плоскость комплексного переменного и для $\Re s < -|\Re v|$ выполняется равенство*

$$G(s,v;q) = 2\Gamma(1-s+v)\Gamma(1-s-v)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2s-2}$$
$$\times\left(-\cos\pi s\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-1)}{(mn)^{1-s}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}+\cos\pi v\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_q(mn+1)}{(mn)^{1-s}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}\right). \qquad (3.14)$$

Доказательство. Из определения суммы Клостермана непосредственно следует, что

$$G(s,v;q) = \sum_{a,b=0}^{q-1}\delta_q(ab-1)\xi\left(0,\frac{a}{q};s-v\right)\xi\left(0,\frac{b}{q};s+v\right). \qquad (3.15)$$

Для $q > 1$ выполняется равенство $\delta_q(-1) = 0$ и поэтому суммирование по a и b можно вести от 1 до $q-1$. Но в таком случае $\frac{a}{q}$ и $\frac{b}{q}$ не являются целыми числами. Поэтому $G(s, v; q)$ является линейной комбинацией голоморфных функций на всей плоскости комплексного переменного. Так как $\Re s < -|\Re v|$, то используя функциональное уравнение (4.22) получаем равенство

$$G(s,v;q) = \Gamma(1-s+v)\Gamma(1-s-v)\,(2\pi)^{2s-2}\sum_{a,b=0}^{q-1}\delta_q(ab-1)$$
$$\times\left(e\left(\frac{1-s+v}{4}\right)\xi\left(\frac{a}{q},0;1-s+v\right)+e\left(-\frac{1-s+v}{4}\right)\xi\left(-\frac{a}{q},0;1-s+v\right)\right)$$
$$\times\left(e\left(\frac{1-s-v}{4}\right)\xi\left(\frac{b}{q},0;1-s-v\right)+e\left(-\frac{1-s-v}{4}\right)\xi\left(-\frac{b}{q},0;1-s-v\right)\right).$$

Заметим, что

$$\xi\left(\frac{a}{q},0;s\right) = \sum_{m_1+a/q>0}\frac{1}{(m_1+a/q)^s} = q^s\sum_{qm_1+a>0}\frac{1}{(qm_1+a)^s} = q^s\sum_{m\equiv a(mod q)}\frac{1}{m^s},$$

$$\xi\left(\frac{b}{q},0;s\right) = q^s\sum_{n\equiv b(mod q)}\frac{1}{n^s}.$$

Так как для $(m, n) \equiv \pm(a, b) \pmod q$

$$\delta_q(ab-1) = \delta_q((-a)(-b)-1) = \delta_q(mn-1),$$

а для $(m, n) \equiv \pm(-a, b) \pmod q$

$$\delta_q((-a)b-1) = \delta_q(a(-b)-1) = \delta_q(mn+1),$$

то формула (3.2.1) превращается в (3.14). □

Преобразование Меллина от функции $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ определяется по формуле

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx. \tag{3.16}$$

Если

$$f(x) = \begin{cases} O(x^{-a-\varepsilon}), & \text{при } x \to 0+ \\ O(x^{-b+\varepsilon}), & \text{при } x \to +\infty, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ и $a < b$, то интеграл в (4.23) сходится абсолютно и определяет аналитическую функцию в полосе $a < \Re s < b$. Обратное преобразование Меллина вычисляется по формуле (см., например,[**87**])

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re s = c} \hat{f}(s) x^{-s} ds, \quad \text{где} \quad a < c < b. \tag{3.17}$$

Зафиксируем бесконечно дифференцируемую убывающую функцию $\eta : [0, \infty) \to [0, 1]$, для которой

$$\eta(x) = 1, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \eta(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \geqslant 2, \tag{3.18}$$

а также

$$\eta(x) + \eta(1/x) = 1. \tag{3.19}$$

Лемма 3.2.2. *Преобразование Меллина $\hat{\eta}(s)$ является мероморфной функцией с единственным простым полюсом в точке $s = 0$ и для $s \neq 0$*

$$\hat{\eta}(s) + \hat{\eta}(-s) = 0. \tag{3.20}$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ в области $\min\limits_{j \geqslant 0} dist(s, -j) > \varepsilon$ имеет место оценка

$$\hat{\eta}(s) = \frac{(-1)^k}{s(s+1)\dots(s+k-1))} \int_{1/2}^2 \eta^{(k)}(x) x^{s+k-1} dx \ll_\varepsilon \frac{1}{(1+|s|)^k}. \tag{3.21}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\hat{\eta}(s) = \int_0^\infty \eta(x) x^{s-1} dx = \int_0^{1/2} x^{s-1} dx + \int_{1/2}^\infty \eta(x) x^{s-1} dx = \frac{1}{2^s s} + \int_{1/2}^\infty \eta(x) x^{s-1} dx,$$

и последний интеграл задает аналитическую по s функцию. Интегрируя по частям, получим (3.21). Чтобы доказать (3.20), запишем $\hat{\eta}(s)$ и $\hat{\eta}(-s)$ в виде

$$\hat{\eta}(s) = \frac{-1}{s} \int_0^\infty \eta'(x) x^s dx,$$

$$\hat{\eta}(-s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty \eta'(x) x^{-s} dx = \frac{1}{s} \int_0^\infty \eta'\left(\frac{1}{x}\right) x^{s-2} dx.$$

Отсюда находим, что

$$\hat{\eta}(s)+\hat{\eta}(-s)=\frac{-1}{s}\int_0^\infty\left(\eta'(x)-\frac{1}{x^2}\eta'\left(\frac{1}{x}\right)\right)x^s dx.$$

Дифференцируя (3.19) мы получаем, что $\eta'(x)-\frac{1}{x^2}\eta'\left(\frac{1}{x}\right)=0$ и, следовательно, соотношение (3.20) доказано.

□

3.3. Формула свертки

Пусть u и v комплексные числа с $|\Re u|<k-1$ и $\Re v=0$. Формула свертки (см.[**113**] или [**18**]) имеет следующий вид

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{f\in O_{2k}(N)}L_f(\frac{1}{2}+u+v)L_f^*(\frac{1}{2}+u-v)= \tag{3.22}$$

$$=\zeta(1+2u)+\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{4u}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+u-v)}\zeta(1-2u)+(-1)^k\delta_{1,N}$$

$$\times\left(\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{2u-2v}\frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)}\zeta(1+2v)+\left(\frac{2\pi}{\sqrt{N}}\right)^{2u+2v}\frac{\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)}\zeta(1-2v)\right)+$$

$$+2(2\pi)^{2u}\cos\pi u\sum_{\substack{m_1m_2-n_1n_2=1\\ n_1\equiv 0(mod N)}}\left(\frac{m_1m_2}{n_1n_2}\right)^u\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^u\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^v\frac{1}{(m_1m_2)^k}H_k\left(u,v;\frac{1}{m_1m_2}\right)+$$

$$+2(2\pi)^{2u}(-1)^k\cos\pi v\sum_{\substack{m_1m_2-n_1n_2=-1\\ n_1\equiv 0(mod N)}}\left(\frac{m_1m_2}{n_1n_2}\right)^u\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^u\frac{(m_2/m_1)^v}{(m_1m_2)^k}H_k\left(u,v;\frac{-1}{m_1m_2}\right),$$

где

$$H_k\left(u,v;y\right)=\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(2k)}{}_2F_1(k-u+v,k-u-v,2k;y) \tag{3.23}$$

с гипергеометрической функцией Гаусса ${}_2F_1(a,b,c;y)$, а участвующие в суммированиях переменные m_1,m_2,n_1,n_2–натуральные числа.

Ограничение $|\Re u|<k-1$ предполагает, что $k\geqslant 2$, и именно для таких k доказана формула свертки в [**18**] и [**113**]. В случае $k=1$ (вес 2) ситуация более сложная. Это связано с тем, что при $y\to 0$

$$\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1-u+v)\Gamma(1-u-v)}H_1\left(u,v;y\right)=1+O(y), \tag{3.24}$$

и, следовательно, каждое из двух последних слагаемых расходящиеся ряды. С данной проблемой мы справимся с помощью замены натурального k комплексной переменной λ и дальнейшим аналитическим продолжением в точку $\lambda=k=1$.

Доказательство формулы свертки базируется на классической формуле следа Петерссона (см.[**51**, утв. 14.5])

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{f\in O_{2k}(N)}\frac{\overline{\rho_f(m)}\rho_f(n)}{(mn)^{k-1/2}}=$$

$$=\delta_{m,n}+2\pi(-1)^k\sum_{q\equiv 0(modN)}\frac{1}{q}S_q(m,n;1)J_{2k-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{mn}}{q}\right),$$

где m и n любые натуральные числа.

Пусть u и v такие, что $\Re u > 3/4$, $\Re v = 0$. Действуя формально, умножим обе части формулы следа Петерссона на

$$\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v,$$

а затем просуммируем по всем натуральным m и n. В результате получим равенство

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{f\in O_{2k}(N)}L_f(\frac{1}{2}+u+v)L_f^*(\frac{1}{2}+u-v)=$$

$$=\zeta(1+2u)+2\pi(-1)^k D_N(u,v;k), \tag{3.25}$$

где

$$D_N(u,v;\lambda)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v\sum_{q\equiv 0(modN)}\frac{S_q(m,n;1)}{q}J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{mn}}{q}\right). \tag{3.26}$$

Замечание 3.3.1. *В определении $D_N(u,v;\lambda)$ мы вместо натурального k рассматриваем комплексный параметр λ. Это позволит нам получить формулу свертки для веса 2 путем аналитического продолжения по λ в точку $\lambda = k = 1$.*

Лемма 3.3.2. *Ряд, определяющий в (3.26) функцию $D_N(u,v;\lambda)$, абсолютно сходится для*

$$\Re\lambda > \frac{3}{4}, \qquad \Re u > \frac{3}{4} \tag{3.27}$$

и определяет в этой области голоморфную по u, v и λ функцию $D_N(u,v;\lambda)$.

Доказательство. Пусть δ любое фиксированное положительное число из интервала $(0, 1/4)$ и

$$\delta^{-1} > \Re\lambda > \frac{3}{4}+\delta, \qquad \Re u > \frac{3}{4}+\delta. \tag{3.28}$$

Из оценок для сумм Клостермана и функции Бесселя следует, что интересующий нас ряд мажорируется следующим рядом с вещественными положительными слагаемыми (и некоторой константой $c(\delta) > 0$)

$$c(\delta)\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+\Re u}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\tau(q)(mn,q)^{1/2}}{q^{1/2}}\min\left\{\left(\frac{\sqrt{mn}}{q}\right)^{2\Re\lambda-1},\left(\frac{q}{\sqrt{mn}}\right)^{1/2}\right\}.$$

Объединим слагаемые m и n с одинаковым произведением $mn = d$. По этой причине последний ряд оценивается величиной

$$c(\delta)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau(d)}{d^{3/2+\delta}}\sum_{q<\sqrt{d}}\tau(q)(d,q)^{1/2}+c(\delta)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau(d)}{d^{7/4+\delta-\Re\lambda}}\sum_{q\geqslant\sqrt{d}}\frac{\tau(q)(d,q)^{1/2}}{q^{2\Re\lambda-1/2}}\ll_{\delta}$$

$$\ll_{\delta}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau(d)}{d^{1+\delta/2}}\ll_{\delta}1.$$

Из полученной оценки следует абсолютная сходимость ряда, определяющего функцию $D_N(u,v;\lambda)$ и ее голоморфность по всем трем комплексным переменным u, v и λ в области (3.28). Так как δ любое положительное число из интервала $(0,1/4)$, то утверждение леммы 3.3.3 выполняется в полном объеме.

□

Ввиду абсолютной сходимости мы можем в области (3.27) переставить порядки суммирования и записать (3.26) в виде

$$D_N(u,v;\lambda)=\sum_{q\equiv 0(mod N)}\frac{1}{q}D_N(u,v,\lambda;q), \tag{3.29}$$

где

$$D_N(u,v,\lambda;q)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^{v}S_q(m,n;1)J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{mn}}{q}\right).$$

Лемма 3.3.3. *Для* $\Re\lambda > 3/4, \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$

$$D_N(u,v,\lambda;q)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Re s=\Delta}\frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)}G\left(\frac{1}{2}+u+\frac{s}{2},v;q\right)\left(\frac{q}{2\pi}\right)^{s}ds, \tag{3.30}$$

при условии $\max\{1-2\Re\lambda, 1-2\Re u\} < \Delta < 0$.

Доказательство. Формула (3.30) непосредственно следует из интегрального представления (4.21) для функции Бесселя и стандартных оценок (далее t - вещественное)

$$\left|\frac{\Gamma(\lambda-1/2+\Delta/2+it/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-\Delta/2-it/2)}\right|\ll_{\lambda,\Delta}\frac{1}{(1+|t|)^{1-\Delta}}, \tag{3.31}$$

$$G\left(\frac{1}{2}+u+\frac{\Delta}{2}+\frac{it}{2},v;q\right)\ll_{q,u,v}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+\Delta/2+\Re u}}, \tag{3.32}$$

равномерных по λ на компактных подмножествах. Условие $1-2\Re u < \Delta$ необходимо для абсолютной сходимости ряда в правой части (3.32).

□

Лемма 3.3.4. *Для* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$

$$D_N(u,v,\lambda;q) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\Re s=\Delta} \frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)} G\left(\frac{1}{2}+u+\frac{s}{2},v;q\right)\left(\frac{q}{2\pi}\right)^s ds +$$

$$+\delta_{1,q}\left(\frac{\zeta(1+2v)}{(2\pi)^{1-2u+2v}}\frac{\Gamma(\lambda-u+v)}{\Gamma(\lambda+u-v)} + \frac{\zeta(1-2v)}{(2\pi)^{1-2u-2v}}\frac{\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(\lambda+u+v)},\right)$$

при условии $1-2\Re\lambda < \Delta < -1-2\Re u$.

Доказательство. В интеграле из (3.30) сдвинем прямую интегрирования в область

$$1-2\Re\lambda < \Delta < -1-2\Re u.$$

Из (3.13) и леммы 3.2.1 следует, что при этом мы пройдем два полюса в точках $s_\pm = 1-2u\pm 2v$, возникающих только при $q=1$. Обоснуем возможность сдвига прямой интегрирования. Покажем, что можно сдвинуть контур интегрирования с прямой $\Re s = \Delta_1 = 1-2\Re u+\varepsilon$ на прямую $\Re s = \Delta_2 = -1-2\Re u-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Выберем большой параметр $T > 0$. Из представления (3.15) и оценок (3.11), (3.31) следует, что интегралы по вертикальным лучам $\Re s = \Delta_{1,2}, |\Im s| > T$ сходятся абсолютно и оцениваются величиной $O\left(T^{1-2\Re u+\epsilon}\right)$. Таким образом нам осталось показать, что интегралы по горизонтальным отрезкам

$$\int_{\Delta_2\pm iT}^{\Delta_1\pm iT} \frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)} G\left(\frac{1}{2}+u+\frac{s}{2},v;q\right)\left(\frac{q}{2\pi}\right)^s ds$$

стремятся к нулю при $T\to\infty$. После замены переменных получим интегралы

$$\int_{-\varepsilon\pm iT_1}^{1+\varepsilon\pm iT_1} \frac{\Gamma(\lambda-u-1+z)}{\Gamma(\lambda+u+1-z)} G\left(z,v;q\right)\left(\frac{q}{2\pi}\right)^{2z} dz$$

с $T_1 = T/2+\Im u$, которые с помощью формулы Стирлинга оцениваются величиной

$$T_1^{-2-2\Re u}\int_{-\varepsilon}^{1+\varepsilon} T_1^{2x}\left|G\left(x+iT_1,v;q\right)\right| dx \tag{3.33}$$

Разобьем интеграл (3.33) на два I_1 и I_2 в соответствии с условиями $x \leqslant \varepsilon$ и $x \geqslant \varepsilon$. Используя (3.10), получаем оценку $I_2 \ll T_1^{-2\Re u+2\varepsilon}$. Чтобы оценить интеграл I_1 мы воспользуемся формулой (3.2.1). Возникшие дзета-функции Лерха запишем в виде [**121**, лемма 3, стр.24]

$$\xi\left(\alpha,0;s\right) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{1}{s-1}\left(N+\frac{1}{2}+\alpha\right)^{1-s} + s\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{1/2-\{u\}}{(u+\alpha)^{s+1}}du,$$

где $\{u\}$ – дробная часть числа u. Выбирая $N = T_1$ и оценивая получившееся выражение по модулю, получаем оценку $I_1 \ll T_1^{-1-2\Re u+\varepsilon}$. Таким образом, если $\Re u > 3/4$, то оба

интеграла I_1 и I_2 стремятся к нулю при $T \to \infty$. Следовательно, проведенный сдвиг прямой интегрирования законен. □

Положим

$$d(u,v,\lambda) = \frac{\zeta(1+2v)}{(2\pi)^{1-2u+2v}} \frac{\Gamma(\lambda-u+v)}{\Gamma(\lambda+u-v)} + \frac{\zeta(1-2v)}{(2\pi)^{1-2u-2v}} \frac{\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(\lambda+u+v)}, \tag{3.34}$$

$$\Gamma(u,v,\lambda;s) = \frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)} \Gamma(1/2-u+v-s/2)\Gamma(1/2-u-v-s/2).$$

Используя формулу Стирлинга, при $\Re v = 0$ получаем оценку

$$|\Gamma(u,v,\lambda;\sigma+it)| \ll \frac{e^{-\pi|t|/2}}{|t|^{1+2\Re u}}. \tag{3.35}$$

Лемма 3.3.5. *Для* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$

$$D_N(u,v;\lambda) = \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i} \int\limits_{\Re s=\Delta} \Gamma(u,v,\lambda;s)$$
$$\times \Bigg(\sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right) \sum_{q\equiv 0 (mod N)} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\delta_q(mn-1)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v} +$$
$$+ \cos\pi v \sum_{q\equiv 0 (mod N)} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\delta_q(mn+1)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v} \Bigg) ds + \delta_{1,N} d(u,v,\lambda), \tag{3.36}$$

при условии $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$.

Доказательство. Подставим в формулу (3.29) результат леммы 3.3.4 и леммы 3.2.1. Ввиду условий леммы и оценки (3.35) получившиеся суммы и интеграл абсолютно сходятся. Это обеспечивает возможность перестановки суммирования по q и интегрирования по s.

□

Лемма 3.3.6. *Для* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$

$$D_N(u,v;\lambda) = \delta_{1,N} d(u,v,\lambda) +$$
$$+ \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i N^{2u}} \int\limits_{\Re s=\Delta} \Gamma(u,v,\lambda;s) \Bigg(\zeta(2u) \sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right) +$$
$$+ \sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\tau_u(d)\tau_v(dN+1)}{d^u(dN+1)^{1/2-u-s/2}} + \cos\pi v \sum_{dN>1}^{\infty} \frac{\tau_u(d)\tau_v(dN-1)}{d^u(dN-1)^{1/2-u-s/2}} \Bigg) ds,$$

при условии $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$.

Доказательство. В первой тройной сумме из (3.36) выделяем слагаемое с $m = n = 1$. В оставшейся сумме делаем замену $mn = 1 + dN$ и, используя (3.4), получаем

$$\sum_{q\equiv 0(modN)}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-1)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}=\frac{\zeta(2u)}{N^{2u}}+$$

$$+\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{(dN+1)^{1/2-u-s/2}}\sum_{q\equiv 0(modN)}\frac{\delta_q(dN)}{q^{2u}}\sum_{mn=1+dN}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}=$$

$$=\frac{\zeta(2u)}{N^{2u}}+\frac{1}{N^{2u}}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau_u(d)\tau_v(dN+1)}{d^u(dN+1)^{1/2-u-s/2}}$$

Во второй тройной сумме из (3.3.6) делаем замену $mn = -1 + dN$. Заметим, что так как $mn \geqslant 1$, то при $N = 1$ выполнено неравенство $d \geqslant 2$. Далее действуем аналогично. □

Лемма 3.3.7. *Для* $\Re\lambda > 1$, $\Re u = 0$, $\Re v = 0$ *и* $u \neq 0$

$$D_N(u,v;\lambda)=\frac{2(2\pi)^{2u-1}}{N^{2u}}\zeta(2u)\Gamma(2u)\cos\pi(\lambda-u)\frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(\lambda+u+v)\Gamma(\lambda+u-v)}+$$

$$+\frac{2(2\pi)^{2u-1}}{N^{2u}}\left(\cos\pi(\lambda-u)\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau_u(d)\tau_v(dN+1)}{d^u(dN+1)^{\lambda-u}}H_\lambda\left(u,v;\frac{1}{dN+1}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\pi v\sum_{d=1+\delta_{1,N}}^{\infty}\frac{\tau_u(d)\tau_v(dN-1)}{d^u(dN-1)^{\lambda-u}}H_\lambda\left(u,v;\frac{-1}{dN-1}\right)\right)+\delta_{1,N}d(u,v,\lambda),\qquad(3.37)$$

где функция $H_\lambda(u,v;y)$ *определена в* (3.23).

Доказательство. Сначала докажем формулу (3.37) для $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ и $\Re v = 0$. Для этого достаточно вычислить следующие интегралы из (3.3.6)

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=\Delta}\Gamma(u,v,\lambda;s)\sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right)ds,$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=\Delta}\Gamma(u,v,\lambda;s)\sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right)z_+^{s/2}ds,$$

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=\Delta}\Gamma(u,v,\lambda;s)z_-^{s/2}ds,$$

где $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$ и $z_\pm = dN \pm 1$. Так как $z_\pm \geqslant 1$, то вычисляя вычеты подынтегральных функций в точках $s_j = 1 - 2\lambda - 2j$, $j = 0, 1, 2\ldots$, получаем

$$I_2=\frac{2\cos\pi(\lambda-u)}{z_+^{\lambda-1/2}}\frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(2\lambda)}{}_2F_1\left(\lambda-u+v,\lambda-u-v,2\lambda;\frac{1}{z_+}\right),$$

$$I_3=\frac{2}{z_-^{\lambda-1/2}}\frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(2\lambda)}{}_2F_1\left(\lambda-u+v,\lambda-u-v,2\lambda;\frac{-1}{z_-}\right).$$

Используя равенство

$${}_2F_1\left(a,b,c;1\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

получаем, что

$$I_1 = 2\cos\pi(\lambda-u)\Gamma(2u)\frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(\lambda+u+v)\Gamma(\lambda+u-v)}.$$

Тем самым формула (3.37) для $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ и $\Re v = 0$ доказана. Далее по принципу аналитического продолжения получаем утверждение леммы. □

Замечание 3.3.8. *Применяя в формуле* (3.37) *функциональное соотношение для дзета-функции Римана и полагая* $\lambda = k > 1$, *мы, используя равенство* (3.25), *получим* (3.22). *Однако в случае* $k = 1$ *мы не можем непосредственно положить* $\lambda = 1$ *в формуле* (3.37). *Получению аналитического продолжения в точку* $\lambda = 1$ *будет посвящен следующий параграф.*

3.4. Аналитическое продолжение в точку $\lambda = 1$

Пусть $P = (1+|t|)^a N^b$ с некоторыми положительными a и b, значения которых будут определены в дальнейшем. Зафиксируем две бесконечно дифференцируемые функции $\alpha, \beta : [0,\infty) \to [0,1]$, для которых

$$\beta(x) = 1, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant P \quad \text{и} \quad \beta(x) = 0, \quad \text{если} \quad x \geqslant 2P,$$
$$\alpha(x) = 0, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant P \quad \text{и} \quad \alpha(x) = 1, \quad \text{если} \quad x \geqslant 2P,$$
$$\beta(x) + \alpha(x) = 1.$$

Подставив данное разбиение единицы в оба ряда из (3.37), получим

$$D_N(u,v;\lambda) = \frac{2(2\pi)^{2u-1}}{N^{2u}}\zeta(2u)\Gamma(2u)\cos\pi(\lambda-u)\frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(\lambda+u+v)\Gamma(\lambda+u-v)} + \\ + S_\beta(u,v;\lambda) + S_\alpha(u,v;\lambda) + \delta_{1,N}d(u,v,\lambda), \tag{3.38}$$

где для $f(x) = \alpha(x)$ или $f(x) = \beta(x)$

$$S_f(u,v;\lambda) = \frac{2(2\pi)^{2u-1}}{N^{2u}}\Bigg(\cos\pi(\lambda-u) \\ \times\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau_u(d)\tau_v(dN+1)}{d^u(dN+1)^{\lambda-u}}H_\lambda\left(u,v;\frac{1}{dN+1}\right)f(dN+1) + \\ + \cos\pi v\sum_{d=1+\delta_{1,N}}^{\infty}\frac{\tau_u(d)\tau_v(dN-1)}{d^u(dN-1)^{\lambda-u}}H_\lambda\left(u,v;\frac{-1}{dN-1}\right)f(dN-1)\Bigg). \tag{3.39}$$

Основная и единственная трудность, это аналитическое продолжение функции $S_\alpha(u,v;\lambda)$ в точку $\lambda=1$. На первом шаге мы выделяем "главные части" в $S_\alpha(u,v;\lambda)$, а именно

$$S_\alpha(u,v;\lambda)=\frac{2(2\pi)^{2u-1}}{N^{2u}}\left(\cos\pi(\lambda-u)C^+(u,v,\lambda)+\cos\pi v C^-(u,v,\lambda;)\right)+$$
$$+\frac{2(2\pi)^{2u-1}}{N^{2u}}\frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(2\lambda)}\left(\cos\pi(\lambda-u)A^+(u,v,\lambda)+\cos\pi v A^-(u,v,\lambda)\right),$$

где

$$C^\pm(u,v,\lambda)=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau_u(d)\tau_v(dN\pm1)\alpha(dN\pm1)}{d^u(dN\pm1)^{\lambda-u}}\left(H_\lambda\left(u,v;\frac{\pm1}{dN\pm1}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(2\lambda)}\right),\tag{3.40}$$

$$A^\pm(u,v,\lambda)=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\tau_u(d)\tau_v(dN\pm1)\alpha(dN\pm1)}{d^u(dN\pm1)^{\lambda-u}}.$$

Ввиду (3.24) ряды $C^\pm(u,v,\lambda)$ абсолютно сходятся при $\Re\lambda>0$ и, следовательно, аналитически продолжаются в точку $\lambda=1$. Поэтому нам осталось продолжить в точку $\lambda=1$ только слагаемое

$$\left(\cos\pi(\lambda-u)A^+(u,v,\lambda)+\cos\pi v A^-(u,v,\lambda)\right).\tag{3.41}$$

Расписывая функцию $\tau_u(d)$ по определению (3.4) и используя функцию $\eta(\cdot)$, определенную в (3.18), получим, что

$$A^\pm(u,v,\lambda)=\sum_{d_1,d_2=1}^{\infty}\frac{\tau_v(d_1d_2N\pm1)\alpha(d_1d_2N\pm1)}{d_1^{2u}(d_1d_2N\pm1)^{\lambda-u}}\left(\eta\left(\frac{d_1}{d_2}\right)+\eta\left(\frac{d_2}{d_1}\right)\right)=$$
$$=A_1^\pm(u,v,\lambda)+A_2^\pm(u,v,\lambda),\tag{3.42}$$

где первое слагаемое соответствует $\eta(d_1/d_2)$, а второе $\eta(d_2/d_1)$. В сумме $A_1^+(u,v,\lambda)$ сделаем внешним суммирование по d_1, а в сумме по d_2 сделаем замену $m=d_1d_2N+1$. В сумме $A_2^+(u,v,\lambda)$ сделаем внешним суммирование по d_2, а в сумме по d_1 сделаем замену $m=d_1d_2N+1$. В итоге получаем

$$A_1^+(u,v,\lambda)=\sum_{d_1=1}^{\infty}\frac{1}{d_1^{2u}}\sum_{m\equiv1(mod\,d_1N)}\frac{\tau_v(m)\alpha(m)}{m^{\lambda-u}}\eta\left(\frac{d_1^2N}{m-1}\right),$$

$$A_2^+(u,v,\lambda)=N^{2u}\sum_{d_2=1}^{\infty}d_2^{2u}\sum_{m\equiv1(mod\,d_2N)}\frac{\tau_v(m)\alpha(m)}{m^{\lambda-u}(m-1)^{2u}}\eta\left(\frac{d_2^2N}{m-1}\right).$$

Без ограничения общности можно считать, что $|u| \ll 1$, с абсолютной константой в знаке Виноградова. Так как

$$(m-1)^{-2u} = m^{-2u} + O(1/m),$$

то

$$A_2^+(u,v,\lambda) = N^{2u}\sum_{d=1}^{\infty} d^{2u} \sum_{m\equiv 1(mod\, dN)} \frac{\tau_v(m)\alpha(m)}{m^{\lambda+u}} \eta\left(\frac{d^2N}{m-1}\right) + O_\varepsilon\left(\frac{(PN)^\varepsilon}{PN}\right).$$

Заметим, что

$$\eta(x) \neq \eta\left(x + \frac{x}{m-1}\right) \quad \text{только при} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \leqslant x \leqslant 2$$

и

$$\left|\eta(x) - \eta\left(x + \frac{x}{m-1}\right)\right| \ll \frac{x}{m-1}.$$

Так как

$$\frac{d^2N}{m-1} = \frac{d^2N}{m}\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)$$

то

$$A_1^+(u,v,\lambda) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^{2u}} \sum_{m\equiv 1(mod\, dN)} \frac{\tau_v(m)\alpha(m)}{m^{\lambda-u}} \eta\left(\frac{d^2N}{m}\right) + O_\varepsilon\left(\frac{(PN)^\varepsilon}{PN}\right),$$

$$A_2^+(u,v,\lambda) = N^{2u}\sum_{d=1}^{\infty} d^{2u} \sum_{m\equiv 1(mod\, dN)} \frac{\tau_v(m)\alpha(m)}{m^{\lambda+u}} \eta\left(\frac{d^2N}{m}\right) + O_\varepsilon\left(\frac{(PN)^\varepsilon}{PN}\right).$$

Аналогичные формулы с заменой $m \equiv 1(mod\, dN)$ на $m \equiv -1(mod\, dN)$ справедливы и для $A_{1,2}^-(u,v,\lambda)$. Следовательно,

$$A_2^\pm(u,v,\lambda) = N^{2u} A_1^\pm(-u,v,\lambda). \tag{3.43}$$

Теперь к главным членам из $A_1^\pm(u,v,\lambda)$ применим формулу суммирования Вороного (3.2) с $M = 1$ и

$$f^\pm(x) = \frac{\alpha(\pm x)}{(\pm x)^{\lambda-u}} \eta\left(\frac{d^2N}{\pm x}\right).$$

В условиях формулы суммирования Вороного требовалось, чтобы функция имела компактный носитель, отделенный от нуля. В нашем случае этого можно добиться, если представить $\alpha(x)$ в виде

$$\alpha(x)=\sum_{j>J}a_j(x),\quad \text{где}\quad supp\, a_j(x)=[2^{j-1},2^{j+1}]$$

и сначала применить формулу суммирования Вороного с функциями $a_j(x)$, а потом уже просуммировать по j. Для простоты изложения мы опустим этот технический момент и применим формулу суммирования Вороного с функцией $\alpha(x)$. В результате получим

$$A_1^{\pm}(u,v,\lambda)=L(u,v,\lambda)+L(u,-v,\lambda)+R^{\pm}(u,v,\lambda)+O_{\varepsilon}\left(\frac{(PN)^{\varepsilon}}{PN}\right), \tag{3.44}$$

где

$$L(u,v,\lambda)=\frac{\zeta(1+2v)}{N}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\gamma(2v;1;dN)}{d^{1+2u}}\int_0^{\infty}\frac{\alpha(x)}{x^{\lambda-u-v}}\eta\left(\frac{d^2N}{x}\right)dx, \tag{3.45}$$

$$R^{\pm}(u,v,\lambda)=\frac{2\pi}{N^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2+2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{n}\right)^v$$
$$\times\left(g^{+}\left(16\pi^2\frac{mn}{(qN)^2}\right)S_{qN}(m,n;\pm1)+g^{-}\left(16\pi^2\frac{mn}{(qN)^2}\right)S_{qN}(m,n;\mp1)\right) \tag{3.46}$$

и

$$g^{\pm}(y)=\int_0^{\infty}k^{\pm}(v;\sqrt{xy})f^{+}(x)dx. \tag{3.47}$$

В формуле (3.45) представим функцию $\eta\left(\frac{d^2N}{x}\right)$ с помощью обратного преобразования Меллина (3.17)

$$\eta\left(\frac{d^2N}{x}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=c}\hat{\eta}(s)\frac{x^s}{d^{2s}N^s}ds,\quad \text{где}\quad c>0.$$

Ввиду абсолютной сходимости интегралов и рядов в (3.45) получаем

$$L(u,v,\lambda)=\frac{\zeta(1+2v)}{N}\int_0^{\infty}\frac{\alpha(x)}{x^{\lambda-u-v}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=c}\hat{\eta}(s)\frac{x^s}{N^s}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\gamma(2v;1;dN)}{d^{1+2u+2s}}dsdx.$$

Применяя к сумме по d формулу (2.18), находим

$$L(u,v,\lambda)=\frac{\zeta(1+2v)}{N}\int_0^{\infty}\frac{\alpha(x)}{x^{\lambda-u-v}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=c}\hat{\eta}(s)\frac{x^s}{N^s}\times$$
$$\times\frac{\zeta(1+2u+2s)}{\zeta(2+2u+2v+2s)}\frac{\phi_{2v}(N)}{\phi_{1+2u+2v+2s}(N)}dsdx.$$

В интеграле по s сдвинем контур на прямую $\sigma = -1/2$. При этом мы пройдем полюса в точках $s_1 = 0$ и $s_2 = u$. Следовательно,

$$L(u,v,\lambda) = \frac{\zeta(1+2u)\zeta(1+2v)}{N} Z_1(u,v,\lambda) + \\ + \frac{\hat{\eta}(-u)\zeta(1+2v)}{2N^{1-u}} Z_1(0,v,\lambda) + \frac{\zeta(1+2v)}{N} Z_2(u,v,\lambda), \tag{3.48}$$

где

$$Z_1(u,v,\lambda) = \frac{\phi_{2v}(N)}{\zeta(2+2u+2v)\phi_{1+2u+2v}(N)} \int_0^\infty \frac{\alpha(x)}{x^{\lambda-u-v}} dx, \tag{3.49}$$

$$Z_2(u,v,\lambda) = \int_0^\infty \frac{\alpha(x)}{x^{\lambda-u-v}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Re s=\sigma} \hat{\eta}(s) \frac{x^s}{N^s} \times \\ \times \frac{\zeta(1+2u+2s)}{\zeta(2+2u+2v+2s)} \frac{\phi_{2v}(N)}{\phi_{1+2u+2v+2s}(N)} ds dx. \tag{3.50}$$

После интегрирования (3.49) по частям получаем, что

$$Z_1(u,v,\lambda) = \frac{\phi_{2v}(N)(\lambda-1-u-v)^{-1}}{\zeta(2+2u+2v)\phi_{1+2u+2v}(N)} \int_0^\infty \frac{\alpha'(x)}{x^{\lambda-1-u-v}} dx. \tag{3.51}$$

Напомним, что наша цель – продолжить в точку $\lambda = 1$ аналитическую функцию (3.41). Из (3.42), (3.43) и (3.44) следует, что

$$A^{\pm}(u,v,\lambda) = L(u,v,\lambda) + L(u,-v,\lambda) + N^{2u} L(-u,v,\lambda) + N^{2u} L(-u,-v,\lambda) + \\ + R^{\pm}(u,v,\lambda) + N^{2u} R^{\pm}(-u,v,\lambda) + O_\varepsilon\left(\frac{(PN)^\varepsilon}{PN}\right).$$

Применяя (3.48) и учитывая (3.20), получаем

$$A^{\pm}(u,v,\lambda) = \mathcal{A}(u,v,\lambda) + \mathcal{R}^{\pm}(u,v,\lambda) \tag{3.52}$$

$$\mathcal{R}^{\pm}(u,v,\lambda) = R^{\pm}(u,v,\lambda) + N^{2u} R^{\pm}(-u,v,\lambda) + O_\varepsilon\left(\frac{(PN)^\varepsilon}{PN}\right), \tag{3.53}$$

$$\mathcal{A}(u,v,\lambda) = \frac{\zeta(1+2u)\zeta(1+2v)}{N} Z_1(u,v,\lambda) + N^{2u} \frac{\zeta(1-2u)\zeta(1+2v)}{N} Z_1(-u,v,\lambda) + \\ + \frac{\zeta(1+2u)\zeta(1-2v)}{N} Z_1(u,-v,\lambda) + N^{2u} \frac{\zeta(1-2u)\zeta(1-2v)}{N} Z_1(-u,-v,\lambda) + \\ + \frac{\zeta(1+2v)}{N} Z_2(u,v,\lambda) + \frac{\zeta(1-2v)}{N} Z_2(u,-v,\lambda) + \\ + N^{2u} \frac{\zeta(1+2v)}{N} Z_2(-u,v,\lambda) + N^{2u} \frac{\zeta(1-2v)}{N} Z_2(-u,-v,\lambda). \tag{3.54}$$

Из (3.46) , (3.51) и (3.50) следует, что при $u \neq 0$, $v \neq 0$ и $u+v \neq 0$ мы можем продолжить $A^{\pm}(u,v,\lambda)$ в точку $\lambda = 1$.

Лемма 3.4.1. *Для* $k=1$, $\Re u=0$, $\Re v=0$ *и* $u\neq 0$, $v\neq 0$ *и* $u+v\neq 0$ *справедливо следующее тождество*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{f\in O_{2k}(N)}L_f(\frac{1}{2}+u+v)L_f^*(\frac{1}{2}+u-v)=\zeta(1+2u)+ \tag{3.55}$$

$$+\frac{2(2\pi)^{2u}}{N^{2u}}\zeta(2u)\Gamma(2u)\cos\pi u\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+u-v)}+2\pi(-1)^k\delta_{1,N}d(u,v,k)+$$

$$+2\pi(-1)^kS_\beta(u,v;k)+(-1)^k\frac{2(2\pi)^{2u}}{N^{2u}}\left(\cos\pi(k-u)C^+(u,v,k)+\cos\pi vC^-(u,v,k;)\right)+$$

$$+(-1)^k\frac{4(2\pi)^{2u}}{N^{2u}}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(2k)}\sin\frac{\pi(u+v)}{2}\sin\frac{\pi(u-v)}{2}\mathcal{A}(u,v,k)+$$

$$+(-1)^k\frac{2(2\pi)^{2u}}{N^{2u}}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(2k)}\left(\cos\pi(k-u)\mathcal{R}^+(u,v,k)+\cos\pi v\mathcal{R}^-(u,v,k)\right),$$

где $d(u,v,k)$, $S_\beta(u,v;k)$, $C^\pm(u,v,k)$, $\mathcal{A}(u,v,k)$ *и* $\mathcal{R}^\pm(u,v,k)$ *определены соответственно в* (3.34), (3.39), (3.40),(3.54) *и* (3.53).

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из (3.25), (3.38), (3.4) и (3.52). □

3.5. Аналитическое продолжение в точку $u=0$

Наша цель, получить аналитическое продолжение функции из правой части (3.55) в точку $u=0$. Отметим, что все слагаемые в формуле (3.55), за исключением только первых двух и, возможно, функции $\mathcal{A}(u,v,k)$, являются аналитическими функциями. Сначала покажем, что сумма двух первых слагаемых задает аналитическую функцию. Из функционального уравнение для дзета-функции Римана (3.8) следует, что

$$\zeta(1+2u)+\frac{2(2\pi)^{2u}}{N^{2u}}\zeta(2u)\Gamma(2u)\cos\pi u\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+u-v)}=$$
$$=\zeta(1+2u)+\frac{(4\pi^2)^{2u}}{N^{2u}}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+u-v)}\zeta(1-2u).$$

Применяя (3.9) и переходя к пределу по $u\to 0$, получаем

$$\lim_{u\to 0}\left(\zeta(1+2u)+\frac{(4\pi^2)^{2u}}{N^{2u}}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+u-v)}\zeta(1-2u)\right)=$$
$$=\log N+2\gamma-2\log(2\pi)+\frac{\Gamma'(k+v)}{\Gamma(k+v)}+\frac{\Gamma'(k-v)}{\Gamma(k-v)}=W_{2k}(N;iv),$$

где $W_{2k}(N;t)$ определено в (3.1). Запишем $\mathcal{A}(u,v,k)$ в следующем виде

$$\mathcal{A}(u,v,k)=\mathcal{A}_1(u,v,k)+\mathcal{A}_1(u,-v,k)+\mathcal{A}_2(u,v,k)+\mathcal{A}_2(u,-v,k),$$

где

$$\mathcal{A}_1\left(u,v,k\right)=\frac{\zeta(1+2u)\zeta(1+2v)}{N}Z_1(u,v,\lambda)+$$
$$+N^{2u}\frac{\zeta(1-2u)\zeta(1+2v)}{N}Z_1(-u,v,\lambda), \tag{3.56}$$

$$\mathcal{A}_2\left(u,v,k\right)=\frac{\zeta(1+2v)}{N}Z_2(u,v,\lambda)+N^{2u}\frac{\zeta(1+2v)}{N}Z_2(-u,v,\lambda). \tag{3.57}$$

Из (3.50) следует, что $\mathcal{A}_2\left(u,v,k\right)$ аналитична в точке $u=0$. Таким образом, нам осталось продолжить в точку $u=0$ только следующее выражение

$$\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}h(u,v)\left(\mathcal{A}_1\left(u,v,k\right)+\mathcal{A}_1\left(u,-v,k\right)\right), \tag{3.58}$$

где

$$h(u,v)=\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{2u}\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)\sin\frac{\pi(u+v)}{2}\sin\frac{\pi(u-v)}{2}.$$

Так как $h(u,v)=h(u,-v)$, то выражение (3.58) симметрично по v, и поэтому достаточно продолжить в точку $u=0$ только слагаемое с $\mathcal{A}_1\left(u,v,k\right)$. Чтобы продолжить второе слагаемое с $\mathcal{A}_1\left(u,-v,k\right)$, достаточно заменить всюду v на $-v$. Из (3.51) (3.56) и (3.58) следует, что необходимо продолжить в точку $u=0$ выражение

$$\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}h(u,v)\mathcal{A}_1\left(u,v,k\right)=-\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}\frac{\zeta(1+2v)\phi_{2v}(N)}{N}h(u,v)$$
$$\int_0^\infty\alpha'(x)x^v\left(\zeta(1+2u)\omega_1(u,v;x)+\zeta(1-2u)\omega_1(-u,v;x)N^{2u}\right)dx,$$

где

$$\omega_1(u,v;x)=\frac{x^u}{(u+v)\zeta(2+2u+2v)\phi_{1+2u+2v}(N)}.$$

Применяя (3.9) и переходя к пределу по $u\to0$, получаем

$$\lim_{u\to0}h(u,v)\left(\zeta(1+2u)\omega_1(u,v;x)+\zeta(1-2u)\omega_1(-u,v;x)N^{2u}\right)=$$
$$=(2\gamma-\log N)h(0,v)\omega_1(0,v;x)+h(0,v)\frac{\partial}{\partial u}\omega_1(u,v;x)\Big|_{u=0}$$

В итоге

$$\lim_{u\to0}\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}h(u,v)\mathcal{A}_1\left(u,v,k\right)=\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}h(0,v)\frac{\zeta(1+2v)\phi_{2v}(N)}{N}$$
$$\times\int_0^\infty\alpha'(x)x^v\left((\log N-2\gamma)\omega_1(0,v;x)-\frac{\partial}{\partial u}\omega_1(u,v;x)\Big|_{u=0}\right)dx:=$$
$$:=\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}h(0,v)\mathcal{T}(v,k). \tag{3.59}$$

Итак, мы доказали следующий результат

Теорема 3.5.1. *Для* $k=1$, $\Re v=0$ *и* $v\neq 0$ *справедлива формула*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{f\in O_{2k}(N)}L_f(\frac{1}{2}+v)L_f^*(\frac{1}{2}-v)=W_{2k}(N;iv)+2\pi(-1)^k\delta_{1,N}d(0,v,k)+$$

$$+2\pi(-1)^kS_\beta(0,v;k)+2(-1)^k\left((-1)^kC^+(0,v,k)+\cos\pi vC^-(0,v,k;)\right)+$$

$$+\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}h(0,v)\left(\mathcal{T}(v,k)+\mathcal{T}(-v,k)+\mathcal{A}_2(0,v,k)+\mathcal{A}_2(0,-v,k)\right)+$$

$$+2(-1)^k\frac{\Gamma(k+v)\Gamma(k-v)}{\Gamma(2k)}\left((-1)^k\mathcal{R}^+(0,v,k)+\cos\pi v\mathcal{R}^-(0,v,k)\right), \tag{3.60}$$

где $W_{2k}(N;t)$, $d(u,v,k)$, $S_\beta(u,v;k)$, $C^\pm(u,v,k)$, $\mathcal{R}^\pm(u,v,k)$ *и* $\mathcal{A}_2(u,v,k)$ *определены в* (3.1), (3.34), (3.39), (3.40),(3.53) *и* (3.57) *соответственно.*

3.6. Аналитическое продолжение в точку $v=0$

Наша цель, получить аналитическое продолжение формулы (3.60) в точку $v=0$. Отметим, что только функции $d(u,v,k),\mathcal{A}_2(u,v,k)$ и $\mathcal{T}(v,k)$, возможно, не являются аналитическими функциями. Сначала продолжим в точку $v=0$ функцию $d(u,v,k)$. Применяя (3.9) и переходя к пределу по $u\to 0$, получаем

$$\lim_{v\to 0}d(0,v,k)=\frac{1}{2\pi}W_{2k}(1;0).$$

Теперь продолжим в точку $v=0$ слагаемые с функцией $\mathcal{A}_2(0,v,k)$. Отметим,что так как $\Re v=0$, то

$$h(0,v)=-\frac{\pi}{2}v\tan\frac{\pi v}{2}. \tag{3.61}$$

Таким образом, $h(0,v)$ имеет ноль второго порядка в точке $v=0$. Однако, из (3.57) и (3.50) следует, что $\mathcal{A}_2(0,v,k)$ имеет полюс первого порядка в точке $v=0$. Поэтому

$$\lim_{v\to 0}h(0,v)\mathcal{A}_2(0,v,k)=0.$$

Нам осталось продолжить в точку $v=0$ слагаемые с функцией $\mathcal{T}(v,k)$, определенной в (3.59). Вычисляя производную функции $\omega_1(u,v;x)$ по u в точке $u=0$ и учитывая (3.61), получаем

$$\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}h(0,v)\mathcal{T}(v,k)=$$

$$=-\frac{2\pi(-1)^k}{N\Gamma(2k)}\int_0^\infty\alpha'(x)\tan\frac{\pi v}{2}\zeta(1+2v)\left(\omega_2(v;x)+\frac{1}{v}\omega_3(v;x)\right)dx, \tag{3.62}$$

где

$$\omega_2(v;x)=\omega_3(v;x)\left(\log N-2\gamma-\log x+2\frac{\zeta'(2+2v)}{\zeta(2+2v)}+2\frac{\phi'_{1+2v}(N)}{\phi_{1+2v}(N)},\right) \tag{3.63}$$

$$\omega_3(v;x)=\frac{x^v\phi_{2v}(N)}{\zeta(2+2v)\phi_{1+2v}(N)} \tag{3.64}$$

и $\phi'_{1+2v}(N)=\frac{\partial}{\partial s}\phi_s(N)|_{s=1+2v}$. Вычисляя пределы по правилу Лопиталя, находим

$$\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}\lim_{v\to 0}h(0,v)\left(\mathcal{T}(v,k)+\mathcal{T}(-v,k)\right)=$$
$$=-\frac{\pi^2(-1)^k}{N\Gamma(2k)}\int_0^\infty\alpha'(x)\left(\omega_2(0;x)+2\gamma\omega_3(0;x)+\frac{\partial}{\partial v}\omega_3(v;x)\Big|_{v=0}\right)dx.$$

Используя (3.63) и (3.64), получаем

$$\frac{4(-1)^k}{\Gamma(2k)}\lim_{v\to 0}h(0,v)\left(\mathcal{T}(v,k)+\mathcal{T}(-v,k)\right)=-\frac{\pi^2(-1)^k}{N\Gamma(2k)}\frac{\phi_0(N)}{\zeta(2)\phi_1(N)}\left(\log N+2\frac{\phi_0'(N)}{\phi_0(N)}\right).$$

Таким образом, нами доказан следующий результат

Теорема 3.6.1. *Для $k=1$ справедлива формула*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}}\sum_{f\in O_{2k}(N)}L_f(\frac{1}{2})L_f^*(\frac{1}{2})=W_{2k}(N;0)+(-1)^k\delta_{1,N}W_{2k}(N;0)+$$
$$+2\pi(-1)^kS_\beta(0,0;k)+2(-1)^k\left((-1)^kC^+(0,0,k)+C^-(0,0,k;)\right)-$$
$$-\frac{\pi^2(-1)^k}{\zeta(2)\Gamma(2k)}\frac{\phi_0(N)}{N\phi_1(N)}\left(\log N+2\frac{\phi_0'(N)}{\phi_0(N)}\right)+$$
$$+2(-1)^k\frac{\Gamma(k)\Gamma(k)}{\Gamma(2k)}\left((-1)^k\mathcal{R}^+(0,0,k)+\mathcal{R}^-(0,0,k)\right),$$

где $W_{2k}(N;t)$, $S_\beta(u,v;k)$, $C^\pm(u,v,k)$ и $\mathcal{R}^\pm(u,v,k)$ определены в (3.1), (3.39), (3.40) *и* (3.53) *соответственно.*

Замечание 3.6.1. *Отметим, что при $N=1$ и нечетном k*

$$W_{2k}(N;0)+(-1)^k\delta_{1,N}W_{2k}(N;0)=0.$$

Это объясняется тем, что при нечетном k из функционального уравнения [**78**, лемма 3.6] *следует, что $L_f(\frac{1}{2})=0$.*

3.7. Оценки на гипергеометрические функции

Для натурального k, а также вещественных y и t определим

$$G_k(t;x)=\frac{\Gamma(k+it)\Gamma(k-it)}{\Gamma(2k)}{}_2F_1(k+it,k-it;2k;x). \tag{3.65}$$

Для данной функции известно [**86**, 15.6.1] следующее интегральное представление

$$G_k(t;x)=\int_0^1\frac{y^{k-it-1}(1-y)^{k+it-1}}{(1-xy)^{k+it}}dy.$$

При $0\leqslant x\leqslant 1/2$, оценивая подынтегральное выражение по модулю, находим

$$|G_k(t;x)|\leqslant 2^k\int_0^1\left(y(1-y)\right)^{k-1}dy\leqslant 2^k\int_0^1 4^{-k+1}dy=\frac{4}{2^k}. \tag{3.66}$$

В следующей лемме доказываются два интегральных представления которые удобно использовать для получения иных оценок на данную функцию.

Лемма 3.7.1. *Для любого* $x > 0$

$$\frac{x^k}{2}\operatorname{ch}\pi t\cdot G_k(t;-x) = Q_0(k;t;x) + (-1)^k Q_1(k;t;x), \tag{3.67}$$

$$Q_0(k;t;x) = \int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos\left(2t\log(y+\sqrt{y^2+1})\right)}{\sqrt{1-y^2x^{-1}}\sqrt{1+y^2}}\cos\left((2k-1)\arcsin\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\,dy \tag{3.68}$$

$$Q_1(k;t;x) = \int\limits_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{\cos\left(2t\log(y+\sqrt{y^2+1})\right)}{\sqrt{y^2x^{-1}-1}\sqrt{1+y^2}}\frac{dy}{\left(yx^{-1/2}+\sqrt{y^2x^{-1}-1}\right)^{2k-1}}, \tag{3.69}$$

$$\frac{x^k}{2}\operatorname{ch}\pi t\cdot G_k(t;-x) =$$

$$= \operatorname{cth}\pi t\cdot\int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin\left(2t\log(y+\sqrt{y^2+1})\right)}{\sqrt{1-y^2x^{-1}}\sqrt{1+y^2}}\sin\left((2k-1)\arcsin\frac{y}{\sqrt{x}}\right)\,dy. \tag{3.70}$$

Доказательство. Воспользуемся табличными интегралами Вебера – Шафхейтлина (см. [**122**, 6.576.3], [**112**, стр.106, ф.(30)])

$$\frac{1}{2}x^k\operatorname{ch}\pi t\cdot G_k(t;-x) = \operatorname{ch}\pi t\int\limits_0^{\infty} K_{2it}(yx^{-1/2})J_{2k-1}(y)\,dy,$$

$$\int\limits_0^{\infty} J_{2k-1}(y)\cos(uy)\,dy == \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cos\left((2k-1)\arcsin u\right) & \text{при} \quad 0\leqslant u<1 \\ \frac{(-1)^k}{\sqrt{u^2-1}}\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)^{-2k+1} & \text{при} \quad u>1 \end{cases}$$

и интегральным представлением [**112**, стр.95, ф.(25)]

$$\operatorname{ch}\pi t\cdot K_{2it}(x) = \int\limits_0^{\infty}\cos(x\operatorname{sh}u)\cos(2tu)\,du = \int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(xy)}{\sqrt{1+y^2}}\cos(2t\operatorname{Arsh}y)\,dy. \tag{3.71}$$

Действуя формально, с их помощью получим

$$\frac{1}{2}\operatorname{ch}\pi t\cdot x^k\cdot G_k(t;x) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\cos(yx^{-1/2}\operatorname{sh}u)J_{2k-1}(y)\cos(2tu)\,du\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{\operatorname{sh}u\leqslant\sqrt{x}} \frac{\cos\left((2k-1)\arcsin(x^{-1/2}\operatorname{sh}u)\right)}{\sqrt{1-x^{-1}\operatorname{sh}^2u}}\cos(2tu)\,du+$$

$$+(-1)^k\int\limits_0^{\operatorname{sh}u\geqslant\sqrt{x}} \frac{\left(x^{-1/2}\operatorname{sh}u+\sqrt{x^{-1}\operatorname{sh}^2u-1}\right)^{-2k+1}}{\sqrt{x^{-1}\operatorname{sh}^2u-1}}\cos(2tu)\,du.$$

Выполнив замену $y = \operatorname{sh} u$, получим интегральное представление (3.67).

Однако, так как интегралы по u и по y сходятся условно, то перестановка местами переменных интегрирования некорректна. Этот пробел в доказательстве можно устранить с помощью двух абсолютно сходящихся интегралов

$$\operatorname{ch} \pi t \cdot K_{2it}(x) = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x \operatorname{sh} u)}{x} \frac{d}{du} \left(\frac{\cos 2tu}{\operatorname{ch} u} \right) du$$

(в (3.71) выполнено интегрирование по частям),

$$\int\limits_0^\infty J_{2k-1}(y) \frac{\sin ry}{y}\, dy = \begin{cases} \frac{1}{2k-1} \sin\left((2k-1) \arcsin r\right) & \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \left(r + \sqrt{r^2-1}\right)^{-2k+1} & \text{при} \quad r \geqslant 1. \end{cases}$$

После интегрирования в двойном интеграле по u и интегрирования по частям по y, получим интегральное представление (3.67).

Представление (3.70) доказывается точно также с помощью двух абсолютно сходящихся интегралов (см. [**112**])

$$J_{2k-1}(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\left((2k-1)\theta\right) \sin(y \sin\theta)\, d\theta,$$

$$\int\limits_0^\infty K_{2it}\left(ux^{-1/2}\right) \sin(u \sin\theta))\, du == \frac{\pi}{2} \frac{\sin\left(2t \log\left(\sqrt{x}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + x^{-1}}\right)\right)\right)}{\operatorname{sh} \pi t \cdot \sqrt{\sin^2\theta + x^{-1}}}$$

и замены $\sin\theta = ux^{-1/2}$.

□

Совершая в (3.68) и (3.69) замену $y = r\sqrt{x}$ и оценивая косинус по модулю единицей, приходим к

$$|Q_0(k;t;x)| \leqslant \sqrt{x} \int\limits_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} dr = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \tag{3.72}$$

$$|Q_1(k;t;x)| \leqslant \sqrt{x} \int\limits_1^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^2-1}\left(r + \sqrt{r^2-1}\right)^{2k-1}} =$$

$$= \sqrt{x} \int\limits_1^\infty \frac{d\left(r + \sqrt{r^2-1}\right)}{\left(r + \sqrt{r^2-1}\right)^{2k}} = \frac{\sqrt{x}}{2k-1}. \tag{3.73}$$

Подставляя оценки (3.72), (3.73) в (3.67), получаем

$$\operatorname{ch} \pi t \cdot G_k(t;-x) \ll \frac{\sqrt{x}}{x^k}. \tag{3.74}$$

При

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 2|t|\sqrt{x} \leqslant k - \frac{1}{2} \tag{3.75}$$

оценку (3.72) можно несколько уточнить. Для этого положим

$$f_{\pm}(r) = 2t \log\left(r\sqrt{x} + \sqrt{xr^2+1}\right) \pm (2k-1)\arcsin r,$$

тогда

$$Q_0(k;t;x) = \frac{\sqrt{x}}{2}\int\limits_0^1 \frac{\cos f_+(r) + \cos f_-(r))}{\sqrt{1-r^2}\sqrt{1+xr^2}}dr = \frac{\sqrt{x}}{2}\int\limits_0^1 \frac{d\sin f_+(r)}{f'_+(r)\sqrt{1-r^2}\sqrt{1+xr^2}}dr +$$

$$+\frac{\sqrt{x}}{2}\int\limits_0^1 \frac{d\sin f_-(r)}{f'_-(r)\sqrt{1-r^2}\sqrt{1+xr^2}}dr.$$

Так как при условии (3.75) выполнено

$$\sqrt{1-r^2}|f'_{\pm}(r)| = \sqrt{1-r^2}\left|\frac{2t\sqrt{x}}{\sqrt{1+xr^2}} \pm \frac{2k-1}{\sqrt{1-r^2}}\right| \geqslant k - \frac{1}{2},$$

то по второй теореме о средней

$$|Q_0(k;t;x)| \leqslant \frac{\sqrt{x}}{k-1/2}.$$

Таким образом, при ограничениях (3.75) выполнено

$$\operatorname{ch}\pi t \cdot G_k(t;-x) \ll \frac{\sqrt{x}}{x^k(k-1/2)}. \tag{3.76}$$

Предположим теперь, что

$$(1+|t|)\sqrt{x} \leqslant 1 - \epsilon. \tag{3.77}$$

В этом случае мы для оценки функции $G_k(t;-x)$ будем использовать ее представление в виде ряда [**86**, 15.2.1]

$$G_k(t;-x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+m+it)\Gamma(k+m-it)}{\Gamma(2k+m)\Gamma(m+1)}(-x)^m. \tag{3.78}$$

Используя функциональное уравнение $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, неравенство

$$|k+m-1+it| \leqslant k+m-1+t \leqslant (k+m-1)(1+t) \tag{3.79}$$

а также оценку [**86**, 5.11.9]

$$\Gamma(1+it) \ll (1+t)^{1/2}e^{-\pi t/2}$$

получим, что

$$|\Gamma(k+m+it)| = |k+m-1+it|\cdots\|1+it||\Gamma(1+it)| \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\pi t/2}(1+t)^{k+m-1/2}(k+m-1)!. \tag{3.80}$$

Отметим, что неравенство (3.79) выполнено при условии $k+m \geqslant 2$. Однако, при $k = 1, m = 0$ оценка (3.80) также является верной. Используя (3.80) для оценки членов ряда (3.78), получаем

$$G_k(t;-x) \ll e^{-\pi t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(k+m-1)!(k+m-1)!}{(2k+m-1)!m!}(1+t)^{2k+2m-1}(-x)^m. \tag{3.81}$$

Из формулы Стирлинга сразу следует, что $\frac{(2j)!}{(j!)^2} \asymp \frac{2^{2j}}{\sqrt{j}}$. Далее

$$\frac{(2k+2m)!}{(2k+m)!m!} = \prod_{j=1}^{m}\frac{j+m}{j}\cdot\prod_{j=m+1}^{2k+m}\frac{j+m}{j} \ll \frac{(2m)!}{(m!)^2}2^{2k} \ll \frac{2^{2k+2m}}{\sqrt{m}}, \tag{3.82}$$

следовательно,

$$\frac{(k+m-1)!(k+m-1)!}{(2k+m-1)!m!} = \frac{2k+m}{(k+m)^2}\frac{(k+m)!(k+m)!}{(2k+2m)!}\frac{(2k+2m)!}{(2k+m)!m!} \ll$$
$$\ll \frac{1}{k+m}\frac{\sqrt{k+m}}{2^{2k+2m}}\frac{2^{2k+2m}}{\sqrt{m}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{3.83}$$

Подставляя оценку (3.83) в (3.81) и учитывая (3.77), получаем

$$G_k(t;-x) \ll e^{-\pi t}\frac{(1+t)^{2k-1}}{\sqrt{k}}\sum_{m=0}^{\infty}\left((1+t)\sqrt{x}\right)^{2m} \ll e^{-\pi t}\frac{(1+t)^{2k-1}}{\sqrt{k}}. \tag{3.84}$$

3.8. Доказательство теоремы 3.1.1

Мы рассмотрим только случай $k = 1$. Случай общего k доказывается аналогично. Для завершения доказательства теоремы 3.1.1 с $k = 1$ нам осталось оценить слагаемые (все, кроме первых двух) из формулы (3.60). Положим $v = it$. Чтобы оценить слагаемые $S_\beta(0,v;k)$, $C^{\pm}(0,v,k)$, достаточно воспользоваться оценками (3.66), (3.74), (3.76), (3.84) на гипергеометрическую функцию Гаусса. Получаем, что

$$|S_\beta(0,v;k)| \ll_\varepsilon \frac{(1+|t|)P^\varepsilon}{N},\ \left|C^+(0,v,k) + \cos\pi v C^-(0,v,k;)\right| \ll_\varepsilon \frac{(1+|t|)^3P^\varepsilon}{NP} \tag{3.85}$$

Чтобы оценить слагаемое $h(0,v)\mathcal{T}(v,k)$, необходимо воспользоваться представлением (3.62). Так как

$$|\zeta(1+2v)| \ll \log t, \qquad |\phi_{2v}(N)| \ll_\varepsilon N^\varepsilon,$$

$$|\phi_{1+2v}(N)| = \left|\prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^{2+2v}}\right)\right| \geqslant \prod_{p|N}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \gg 1,$$

то

$$|h(0,v)\mathcal{T}(v,k)| \ll_\varepsilon \frac{P^\varepsilon}{N}. \tag{3.86}$$

Чтобы оценить слагаемое $h(0,v)\mathcal{A}_2(0,v,k)$, необходимо воспользоваться представлением (3.57) и формулой (3.50). Используя (3.21), имеем

$$|Z_2(0,v,k)| \ll_\varepsilon N^{1/2+\varepsilon}\int_0^\infty \frac{\alpha(x)}{x^{k+1/2}} \ll_\varepsilon \frac{N^{1/2+\varepsilon}}{P^{1/2}}.$$

Следовательно, применяя (3.61), получаем

$$|h(0,v)\mathcal{A}_2(0,v,k)| \ll_\varepsilon \frac{(1+|t|)P^\varepsilon}{(PN)^{1/2}}. \tag{3.87}$$

Таким образом нам осталось оценить в формуле (3.60) только слагаемые с $\mathcal{R}^{\pm}(0,v,k)$. Используя формулу Стирлинга и (3.53), находим, что необходимо оценить величины

$$(1+|t|)e^{-\pi|t|}R^+(0,v,k), \qquad (1+|t|)R^-(0,v,k).$$

Нам достаточно рассмотреть второе выражение, так как ввиду формулы (3.46) и неравенства (3.2) выражение $(1+|t|)R^+(0,v,k)$ оценивается аналогично. Применяя (3.2), получаем

$$\begin{aligned}(1+|t|)\left|R^-(0,v,k)\right| \ll_\varepsilon \sum_{q=1}^\infty \frac{(1+|t|)}{(qN)^{3/2}}\sum_{d=1}^\infty \tau(d)(d,qN)^{1/2}\\ \times\left(g^+\left(16\pi^2\frac{d}{(qN)^2}\right)+g^-\left(16\pi^2\frac{d}{(qN)^2}\right)\right),\end{aligned} \tag{3.88}$$

где $g^{\pm}(y)$ определены в (3.47). Нам удобнее положить $v = it/2, t > 0$ и

$$\theta(x) = \alpha(x)\eta\left(\frac{d^2N}{x}\right).$$

Тогда

$$g^{\pm}(y) = \int_0^\infty k^{\pm}(v;\sqrt{xy})\theta(x)\frac{dx}{x}. \tag{3.89}$$

Заметим, что $\theta(x) \neq 0$ только при $x \geqslant \max\{P, q^2N/2\} = M$. Оценим $g^-(y)$

Лемма 3.8.1. *Положим* $a = \frac{\sqrt{My}}{t}$. *Тогда*

$$|g^-(y)| \ll \frac{e^{-t\rho(a)}}{(at)^{3/2}}, \qquad \textit{если} \qquad a > 2,$$

где $\rho(a)$ *определена после* (2.22) *и*

$$|g^-(y)| \ll \frac{1+|\log a|}{t^{1/2}} \qquad \textit{если} \qquad a \leqslant 2.$$

Доказательство. В интеграле (3.89) сделаем замену $xy = (tz)^2$ и воспользуемся (2.2). В результате получим

$$|g^-(y)| \ll e^{\pi|t|/2} \left| \int_0^\infty K_{it}(tz)\theta\left(\frac{(tz)^2}{y}\right)\frac{dz}{z}\right|.$$

Заметим, что $\theta\left(\frac{(tz)^2}{y}\right) \neq 0$ только при $z \geqslant \frac{\sqrt{My}}{t} = a$. Возможны три случая.

(1) Если $a > 2$, тогда, используя (2.22) получаем

$$|g^-(y)| \ll \int_a^\infty e^{-t\rho(z)}\frac{1}{t^{1/2}z(z^2-1)^{1/4}}dz = \frac{1}{t^{1/2}}\int_a^\infty e^{-t\rho(z)}\rho'(z)\frac{dz}{(z^2-1)^{3/4}}.$$

Применяя вторую теорему о среднем, находим

$$|g^-(y)| \ll \frac{e^{-t\rho(a)}}{(at)^{3/2}}.$$

(2) Если $1 < a \leqslant 2$, тогда, используя (2.22) получаем

$$|g^-(y)| \ll \int_1^{1+t^{-2/3}} e^{-t\rho(z)}\frac{dz}{zt^{1/3}} + \int_{1+t^{-2/3}}^\infty e^{-t\rho(z)}\frac{dz}{t^{1/2}z(z^2-1)^{1/4}} \ll \frac{1}{t}. \tag{3.90}$$

(3) Если $a \leqslant 1$, тогда, используя (2.23) и (3.90) находим

$$|g^-(y)| \ll \int_a^1 \min\left\{\frac{1}{t^{1/3}}, \frac{1}{t^{1/2}(1-z^2)^{1/4}}\right\}\frac{dz}{z} + \frac{1}{t} \ll \frac{1+|\log a|}{t^{1/2}}.$$

□

Лемма 3.8.2. *Справедливы оценки*

$$|g^+(y)| \ll \frac{1}{t^{5/2}}\begin{cases} 1+|\log a|, & \textit{если } a < 1 \\ (1+a^2)^{-5/4}, & \textit{если } a > 1. \end{cases}$$

Доказательство. □

Подставляя в (3.88) оценки из лемм 3.8.1 и 3.8.2, получаем

$$(1+|t|)\left|R^-(0,v,k)\right| \ll_\varepsilon \frac{(1+|t|)^{5/2}}{(PN)^{1/4}}P^\varepsilon. \tag{3.91}$$

Положив $P = (1+|t|)^6N^3$, из формулы (3.60) и оценок (3.85), (3.86), (3.87) и (3.91) получаем теорему 3.1.1.

3.9. Доказательство теоремы 3.1.2

Из оценок (3.85), (3.86), (3.87) и (3.91), а также выбора $P = (1+|t|)^a N^b$ с достаточно большими a, b вытекает, что для доказательства теоремы 3.1.2 нам достаточно получить оценку

$$\int_0^T |S_\beta(0, it; k)|\, dt \ll_\varepsilon \frac{T}{N}(TN)^\varepsilon.$$

Так как (см. (3.66))

$$\left| H_k\left(0, v; \frac{1}{dN+1}\right)\right| \ll 1.$$

то, следовательно,

$$\int_0^T \left|\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\tau_0(d)\tau_v(dN+1)}{dN+1} H_k\left(0, v; \frac{1}{dN+1}\right)\beta(dN+1)\right| dt \ll_\varepsilon \frac{T}{N}(TN)^\varepsilon.$$

Таким образом нам осталось доказать, что

$$\left|\int_T^{2T} \cos \pi v \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\tau_0(d)\tau_v(dN-1)}{dN-1} H_k\left(0, v; \frac{-1}{dN-1}\right)\beta(dN-1)dt\right| \ll_\varepsilon \frac{T}{N}(TN)^\varepsilon. \quad (3.92)$$

Мы рассмотрим только случай $k = 1$. Случай общего k доказывается аналогично. Разобьем сумму по d на две Σ_1, Σ_2 с условиями $dN - 1 \leqslant 100T^2$ и $dN - 1 > 100T^2$. Если $100T^2 < N$, то первая сумма пуста. При работе с первой суммой мы расписываем $\tau_v(dN-1)$ по определению (3.4) и используем интегральное представление (3.70) для $H_k(0, v; -x)$

$$\cos \pi v H_k(0, v; -x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \coth(\pi t) \int_0^1 \frac{\sin\left((2k-1)\arcsin z\right)}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+xz^2}} \sin\left(2t\kappa\left(z\sqrt{x}\right)\right) dz,$$

где $\kappa(z) = \log(z + \sqrt{1+z^2})$. В результате получаем

$$\Sigma_1 = 2 \sum_{dN-1 \leqslant T^2} \frac{\tau_0(d)}{\sqrt{dN-1}} \sum_{mn=dN-1} \int_0^1 \frac{\sin\left((2k-1)\arcsin z\right)}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+z^2/(dN-1)}} \times \\ \times I_T\left(z, \frac{m}{n}, dN-1\right) dz, \quad (3.93)$$

$$I_T\left(z, \frac{m}{n}, dN-1\right) = \int_T^{2T} \coth(\pi t) \left(\frac{m}{n}\right)^{it} \sin\left(2t\kappa\left(\frac{z}{\sqrt{dN-1}}\right)\right) dt. \quad (3.94)$$

Для упрощения записи мы опускаем константу 100 в суммировании по d, так как она (константа) не оказывает влияния на ход вычислений. Возможны несколько случаев:

(1) Если $|m-n| \ll 1$, то существует точка $z_0 \in [0,1]$ такая, что

$$\log \frac{m}{n} \pm 2\kappa\left(\frac{z_0}{\sqrt{dN-1}}\right) = 0. \quad (3.95)$$

Положим $\delta = \sqrt{dN-1}/T^{1+\epsilon}$ и разобьем интеграл по z на два I_1 и I_2 с условиями $|z-z_0| \leqslant \delta$ и $|z-z_0| > \delta$, соответственно. При $|z-z_0| \leqslant \delta$ интеграл по (3.94) оценим тривиально

$$\left| I_T\left(z, \frac{m}{n}, dN-1\right)\right| \ll T.$$

Так как $\kappa'\left(\frac{z}{\sqrt{dN-1}}\right) \asymp \frac{1}{\sqrt{dN-1}}$, то при $|z-z_0| > \delta$

$$\left| I_T\left(z, \frac{m}{n}, dN-1\right)\right| \ll \frac{\sqrt{dN-1}}{|z-z_0|}.$$

За счет выбора параметра δ мы получаем

$$I_1 + I_2 \ll T\delta + \sqrt{dN-1}\log\delta \ll \sqrt{dN-1}T^{\epsilon}. \tag{3.96}$$

Подставляя оценку (3.96) в (3.93), находим

$$\Sigma_1 \ll_\epsilon T^\epsilon \sum_{dN-1\leqslant T^2} \sum_{|c|\ll 1} \sum_{n(n+c)=dN-1} 1 = T^\epsilon \sum_{|c|\ll 1} \sum_{\substack{n(n+c)\equiv -1 (mod N)\\ n(n+c)\leqslant T^2}} 1.$$

Разбивая интервал суммирования по n на отрезки вида $[jN, (j+1)N-1]$ и учитывая то, что квадратичное сравнение имеет конечное число решений, получаем $\Sigma_1 \ll_\epsilon T^{1+\epsilon}/N$.

(2) Если $1 \ll |m-n| \ll \epsilon\sqrt{dN-1}$, то левая часть (3.95) не обнуляется, но остается достаточно малой. Для $c = m-n$

$$\left|\log\frac{m}{n} \pm 2\kappa\left(\frac{z}{\sqrt{dN-1}}\right)\right| \gg \left|\log\frac{m}{n}\right| \gg \frac{c}{n}$$

и, следовательно,

$$\left| I_T\left(z, \frac{m}{n}, dN-1\right)\right| \ll \frac{n}{c}.$$

В результате находим

$$\Sigma_1 \ll_\epsilon \sum_{dN-1\leqslant T^2} \frac{T^\epsilon}{\sqrt{dN-1}} \sum_{1\ll|c|\ll\epsilon\sqrt{dN-1}} \sum_{n(n+c)=dN-1} \frac{n}{c} \ll_\epsilon$$

$$\ll_\epsilon T^\epsilon \sum_{1\ll|c|\ll\epsilon T} \frac{1}{c} \sum_{\substack{n(n+c)\equiv -1 (mod N)\\ n(n+c)\leqslant T^2}} 1. \ll_\epsilon \frac{T^{1+\epsilon}}{N}.$$

(3) Если $|m-n| \gg \epsilon\sqrt{dN-1}$, то левая часть (3.95) становится достаточно большой, и поэтому $|I_T(\cdot)| \ll 1$. Следовательно,

$$\Sigma_1 \ll_\epsilon \sum_{dN-1\leqslant T^2} \frac{T^\epsilon}{\sqrt{dN-1}} \ll_\epsilon \frac{T^{1+\epsilon}}{N}.$$

При работе со второй суммой Σ_2 мы расписываем $\tau_v(dN-1)$ по определению (3.4) и используем представление функции $H_1\,(0,v;-x)$ в виде ряда

$$H_1\,(0,v;-x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+1+v)\Gamma(l+1-v)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)}(-x)^l.$$

Данный ряд абсолютно сходится (см. (3.84)) при $(1+t)\sqrt{x}<1$. Именно для того, чтобы это условие выполнялось, мы ввели ограничение $dN-1>100T^2$. Таким образом,

$$\Sigma_2=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)}\sum_{dN-1>100T^2}\frac{\tau_0(d)\beta(dN-1)}{(dN-1)^{l+1}}\sum_{mn=dN-1}J_T\left(\frac{m}{n};l\right),$$

$$J_T\left(\frac{m}{n};l\right)=\int_T^{2T}\left(\frac{m}{n}\right)^{it}g(t)dt,\qquad g(t)=\cosh(\pi t)\Gamma(l+1+it)\Gamma(l+1-it).$$

Отметим, что (см.[**86**, 5.4.3, 5.5.1])

$$\Gamma(l+1+it)\Gamma(l+1-it)=|\Gamma(it)|^2\prod_{j=0}^{l}(j^2+t^2)=\frac{\pi}{t\sinh\pi t}\prod_{j=0}^{l}(j^2+t^2).$$

Положив $c=m-n$, по второй теореме о среднем получаем

$$\left|J_T\left(\frac{m}{n};l\right)\right|\ll g(2T)\begin{cases}T, & \text{если } c=0\\ n/c, & \text{если } |c|\leqslant\epsilon\sqrt{dN-1}\\ 1, & \text{если } |c|>\epsilon\sqrt{dN-1}.\end{cases}$$

Рассмотрим отдельно каждый из трех случаев

(1) Если $c=0$, то

$$\Sigma_2\ll\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Tg(2T)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)}\sum_{\substack{dN-1>100T^2\\ dN-1=n^2}}\frac{\tau_0(d)\beta(dN-1)}{(dN-1)^{l+1}}\ll_\epsilon$$

$$\ll_\epsilon\sum_{\substack{100T^2<dN-1<P\\ dN-1=n^2}}\frac{1}{(dN-1)^{1-\epsilon}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{Tg(2T)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)}\frac{1}{(dN-1)^l}.$$

Используя для оценивания функцию $g(T)$ неравенство (3.80), получаем

$$\Sigma_2\ll_\epsilon T^2\sum_{\substack{100T^2<dN-1<P\\ dN-1=n^2}}\frac{1}{(dN-1)^{1-\epsilon}}\ll_\epsilon T^2\sum_{T/N\leqslant j\leqslant P/N}\sum_{\substack{Nj<n\leqslant N(j+1)\\ n^2\equiv-1(mod\,N)}}\frac{1}{n^{2-\epsilon}}\ll_\epsilon$$

$$\ll_\epsilon T^2\sum_{T/N\leqslant j\leqslant P/N}\frac{1}{(Nj)^{2-\epsilon}}\ll_\epsilon\frac{T^{1+\epsilon}}{N}.$$

(2) Если $|c| \leqslant \epsilon\sqrt{dN-1}$, то

$$\Sigma_2 \ll \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g(2T)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)} \sum_{dN-1>100T^2} \frac{\tau_0(d)\beta(dN-1)}{(dN-1)^{l+1}} \sum_{\substack{0<|c|\leqslant\epsilon\sqrt{dN-1} \\ dN-1=n(n+c)}} \frac{n}{c} \ll_\epsilon$$

$$\ll_\epsilon T \sum_{100T^2<dN-1<P} \frac{1}{(dN-1)^{1-\epsilon}} \sum_{\substack{0<|c|\leqslant\epsilon\sqrt{dN-1} \\ dN-1=n(n+c)}} \frac{n}{c} \ll_\epsilon$$

$$\ll_\epsilon T \sum_{0<|c|\leqslant\epsilon\sqrt{P}} \frac{1}{c} \sum_{\substack{T<n<P^{1/2} \\ n(n+c)\equiv -1 (mod\, N)}} \frac{1}{n^{1-\epsilon}} \ll_\epsilon \frac{TP^\epsilon}{N}.$$

(3) Если $|c| > \epsilon\sqrt{dN-1}$, то

$$\Sigma_2 \ll \sum_{l=0}^{\infty} \frac{g(2T)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+2)} \sum_{dN-1>100T^2} \frac{\tau_0(d)\beta(dN-1)}{(dN-1)^{l+1}} \ll_\epsilon$$

$$\ll_\epsilon T \sum_{100T^2<dN-1<P} \frac{1}{(dN-1)^{1-\epsilon}} \ll_\epsilon \frac{TP^\epsilon}{N}.$$

Таким образом оценка (3.92) доказана, а, следовательно, доказана и теорема 3.1.2.

ГЛАВА 4

Необнуляемость центральных значений L-функций примитивных параболических форм уровня $N = p^\nu$.

Данная глава написана на основе работ [**110**], [**6**], [**140**].

4.1. Введение

Центральные значения L-функций, ассоциированных с различными автоморфными формами, являются важным объектом исследования аналитической теории чисел, ввиду наличие большого задач, сводящихся к их изучению. Поэтому изучение асимптотического поведения как самих значений L-функций так и их средних вблизи критической прямой - является одним из важных разделов аналитической теории чисел. Особенную ценность для приложений представляют равномерные по различным параметрам формы (например, по ее весу или уровню) оценки остаточных членов в асимптотических формулах для так называемых подкрученных моментов L-функций.

В данной главе мы рассмотрим L-функции примитивных параболических форм веса $2k \geq 2$ и уровня $N = p^\nu$, где p - простое число и $\nu \geq 2$. Обозначим через $H_{2k}^*(N)$ пространство данных форм с введенным на нем скалярным произведением Петерссона

$$\langle f, g\rangle_N := \int_{F_0(N)} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{dxdy}{y^2}. \tag{4.1}$$

Здесь $F_0(N)$ обозначает фундаментальную область конгруэнцподгруппы $\Gamma_0(N)$, действующей на верхней полуплоскости

$$\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \Im z > 0\}.$$

Основным преимуществом рассмотрения именно примитивных форм $f \in H_{2k}^*(N)$ является то, что их коэффициенты Фурье

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \lambda_f(n) n^{(2k-1)/2} e(nz) \tag{4.2}$$

мультипликативны

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{\substack{d|(m,n)\\(d,N)=1}} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right). \tag{4.3}$$

Для каждой $f \in H^*_{2k}(N)$ определим ассоциированную с ней L-функцию следующим образом

$$L_f(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1. \tag{4.4}$$

Известно, что так называемая дополненная L- функция

$$\Lambda_f(s) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma\left(s + \frac{2k-1}{2}\right) L_f(s) \tag{4.5}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Lambda_f(s) = \epsilon_f \Lambda_f(1-s), \quad \epsilon_f = \pm 1 \tag{4.6}$$

и может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость. Точка $s = 1/2$, являясь точкой симметрии функционального уравнения (4.6), часто называется центральной точкой. Для достаточно большого N определим гармоническую пропорцию необнуляемости следующим образом

$$PN := \sum_{\substack{f\in H^*_{2k}(N) \\ L_f(1/2)\neq 0}}^{h} 1 \geq c - \epsilon, \quad \epsilon > 0. \tag{4.7}$$

Индекс h означает, что суммирование ведется с дополнительным весом [1]

$$\sum_{f\in H^*_{2k}(N)}^{h} := \sum_{f\in H^*_{2k}(N)} \frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}\langle f, f\rangle_N}.$$

Брумер выдвинул гипотезу, что $c = 1/2$ при $N \to \infty$. Не смотря на существенный прогресс в оценках величины (4.7), данное утверждение до сих пор не доказано. Перечислим некоторые результаты об оценке пропорции необнуляемости:

- Дьюк [**25**]: $c = A/\log^2 N$, N–простое, A-положительная константа;
- Вандеркам [**106**]: $c = 1/48$, N–простое;
- Ковальский-Мишель [**63**]: $c = 1/6$, N–простое;
- Иванец-Сарнак [**53**]: $c = 1/4$, N–свободно от квадратов и $\phi(N) \sim N$;
- Роуми [**96**]: c= $\frac{p-1}{6p}$, $N = p^\nu$, p–фиксированное простое, $\nu \to \infty$.

Считается, что пропорция необнуляемости $c = 1/4$ является неким естественным барьером в данной задаче. Это отчасти можно объяснить результатом Иванца–Сарнака [**53**], гласящим, что если неравенство (4.7) (в котором условие необнуляемости заменено на оценку $L(1/2, f) \geq 1/(\log N)^2$) выполнено при некотором $c > 1/4$, то у L-функций квадратичных примитивных характеров нет так называемых исключительных нулей Ландау–Зигеля.

[1] Метод избавления от гармонического веса описан в [**63**].

Основным результатом в данной главе является улучшение пропорции необнуляемости, полученной Роумии для L-функции, ассоциированных с формами уровня $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$. Полученная нами пропорция соответствует результату Иванца-Сарнака [**53**] для случая свободного от квадратов уровня

Теорема 4.1.1. *Пусть $N = p^\nu$ и p фиксированное простое число. Для любого $\epsilon > 0$*

$$\sum_{\substack{f \in H^*_{2k}(N) \\ L_f(1/2) \neq 0}}^{h} 1 \geq \frac{\phi(N)}{N}\frac{1}{4} - \epsilon, \quad \textit{при} \nu \to \infty.$$

Пусть $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$–фиксировано. Для любого $\epsilon > 0$

$$\sum_{\substack{f \in H^*_{2k}(N) \\ L_f(1/2) \neq 0}}^{h} 1 \geq \frac{1}{4} - \epsilon, \quad \textit{при простом} p \to \infty.$$

Доказательство данного результата базируется на асимптотических формулах для первого и второго подкрученных моментов рассматриваемых L-функций

$$M_1(l,u,v) = \sum_{f \in H^*_{2k}(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f(1/2+u+v), \tag{4.8}$$

$$M_2(l,u,v) = \sum_{f \in H^*_{2k}(N)}^{h} \lambda_f(l) L_f(1/2+u+v) L_f(1/2+u-v). \tag{4.9}$$

Наиболее точные асимптотические формулы для данных моментов в случаи свободного от квадратов уровня N были получены Роуми

Лемма 4.1.2. *(*[**96**, лемма 4 и 5]*) Пусть $k \geq 1$, $N = p^\nu$, p–простое, $\nu \geq 3$, $(l,p) = 1$. Тогда для любого $1 \leq l \leq N$ и $\epsilon > 0$ выполнено*

$$M_1(l,0,0) = \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{\phi(N)}{N} + O_{k,p}\left(\frac{\sqrt{l}\log^2(2l)}{N^{1/4-\epsilon}}\right); \tag{4.10}$$

$$M_2(l,0,0) = \frac{\tau(l)}{\sqrt{l}}\left(\frac{\phi(N)}{N}\right)^2 \times \\ \times \left(\log\left(\frac{N}{4\pi^2 l}\right) + 2\left(\frac{\log p}{p-1} + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2) + \gamma\right)\right) + O_{k,p}\left(\sqrt{l}\frac{(\log N)^4}{\sqrt{N}}\right). \tag{4.11}$$

На основе Леммы 4.1.2 и используя метод сглаживания Роуми получил следующую нижнюю оценку на пропорцию необнуляемости.

Теорема 4.1.3. *(*[**96**, теорема 1]*) Пусть $k \geq 1$ и p–фиксированное простое число. Для любых $\epsilon > 0$, $\Omega < 1/4$ существует константа $\nu_0 = \nu_0(p,k,\epsilon,\Omega)$ такая, что при $\nu \geq \nu_0$ и*

$N = p^\nu$ справедлива оценка

$$PN = \sum_{\substack{f\in H^*_{2k}(N)\\ L_f(1/2)\neq 0}}^{h} 1 \geq \frac{p-1}{p}\frac{\Omega}{1+2\Omega} - \epsilon. \tag{4.12}$$

Параметр $L := N^\Omega$ называют длинной сглаживания. При $v \to \infty$ мы можем взять $\Omega = 1/4 - \epsilon$ в (4.12), получая

$$PN \geq \frac{p-1}{p}\frac{1}{6} - \epsilon.$$

В своих статьях Роуми не рассматривал случай $N = p^\nu$, ν–фиксировано, а простое $p \to \infty$. Тем не менее, применяя лемму 4.1.4, можно получить асимптотические формулы для (4.10) и (4.18), которые будут равномерны по параметрам p и ν.

Лемма 4.1.4. *(*[**94**, теорема 2.2, стр 23]*) Пусть $k \geq 1$, $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$, $(p, mn) = 1$. Тогда*

$$\sum_{f\in H^*_{2k}(N)} \lambda_f(n)\lambda_f(n) = \phi_\nu(N)\delta(m,n) + O\left(\frac{\sqrt{mnp}\{\log(2(m,n))\}^2}{k^{4/3}N^{3/2}}\right), \tag{4.13}$$

где

$$\phi_\nu(N) = \begin{cases} 1 - p^{-1}, & \text{если } N = p^\nu,\ \nu \geq 3; \\ 1 - (p - p^{-1})^{-1}, & \text{если } N = p^\nu,\ \nu = 2. \end{cases}$$

Определим дельта-символ Кронекера

$$\delta(a,b) = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Присутствие $\sqrt{p}$ в остаточном члене в (4.13), влечет появление этого дополнительного множителя и в остатках асимптотических формул для первого и второго моментов. Это не позволяет выбрать длину сглаживания больше чем $\Omega < 1/4 - 1/(4\nu)$ для второго момента и больше чем $\Omega < 1/4 - 1/(2\nu)$ для первого. Таким образом длина сглаживания не превосходит $N^{1/4-1/(2\nu)}$. Как следствие теорема 4.1.3 не может быть напрямую перенесена на случай $N = p^2$. Если же $\nu > 2$ то мы получаем

$$\nu = 3, p \to \infty \qquad \Omega = 1/12 - \epsilon \qquad PN \geq 1/14 - \epsilon;$$

$$\nu = 4, p \to \infty \qquad \Omega = 1/8 - \epsilon \qquad PN \geq 1/10 - \epsilon.$$

Доказательство теоремы 4.1.1 основано на улучшении остатков в асимптотических формулах для подкрученных первого $M_1(l, 0, it)$ (см.(4.8)) и второго $M_2(l, 0, it)$ (см.(4.9)) моментов, что позволяет увеличить длину сглаживания до N в первом моменте и до $N^{1/2}$ во втором. Таким образом мы сможем взять $\Omega < 1/2$.

Асимптотические формулы для первых моментов (4.8) форм различных уровней и весов были получены в [**1**], [**12**], [**25**], [**29**], [**54**] и [**57**]. В случаи уровня равного степени простого числа и веса $2k = 2$ наилучший остаток в асимптотической формуле для $M_1(l, 0, it)$, равномерный по параметрам N, T и l, был получен Беттином в [**12**].

Теорема 4.1.5. *([**12**, теорема 1.1.]) Пусть $2k = 2$, $t \in \mathbf{R}$, $T = 1 + |t|$, $N = p^\nu$, p–простое и $\nu \geq 2$. Если $p|l$, то $M_1(l, 0, it) = 0$. Если $(l, p) = 1$, то справедлива следующая асимптотическая формула равномерная по N, l, T, p*

$$M_1(l, 0, it) = \frac{\phi_\nu(N)}{l^{1/2+it}} + O_\epsilon\left(\sqrt{lT}N^{-1+\epsilon}\right).$$

В параграфах 4.5 и 4.6 мы обобщим результат теоремы 4.1.5 на случай форм веса $2k > 2$ и несколько улучшим оценку остаточного члена, а именно

Теорема 4.1.6. *Пусть $2k \geq 4$, $t \in \mathbf{R}$, $T = 1 + |t|$, $N = p^\nu$, $\nu \geq 2$ и p–простое число. Если $p|l$, то $M_1(l, 0, it) = 0$. Если $(l, p) = 1$, то справедлива следующая равномерная по N, l, T, p и k асимптотическая формула*

$$M_1(l, 0, it) = \frac{\phi_\nu(N)}{l^{1/2+it}} + O\left(\mathcal{V}_N(l) + \frac{1}{p}\mathcal{V}_{N/p}(l) + \delta(N, p^2)\frac{1}{\sqrt{l}p^2}\right), \tag{4.14}$$

где

$$\mathcal{V}_N(l) \ll \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{lT}}\left(2\pi e\frac{lT}{Nk}\right)^k, & l < \frac{1}{4\pi e}\frac{Nk}{T} \\ \frac{l^{1/2}}{N}(lT)^\epsilon \max\left(\frac{\sqrt{T}}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right), & l \geq \frac{1}{4\pi e}\frac{Nk}{T}. \end{cases} \tag{4.15}$$

Из (4.15) следует, что остаток в (4.14) не превосходит

$$\mathcal{V}_N(l) + \frac{1}{p}\mathcal{V}_{N/p}(l) + \delta(N, p^2)\frac{1}{\sqrt{l}p^2} \ll_{k,\epsilon} \frac{l^{1/2+\epsilon}T^{1/2+\epsilon}}{N},$$

что совпадает с оценкой из теоремы 4.1.5 и улучшает результаты в [**43**], [**95**] и [**96**]. Отметим, что при $l = 1$ нами получена оценка остаткathe $O_{k,\epsilon}(N^{-k})$ вместо известной ранее (см. [**95**]) оценки $O_{k,p}\left(N^{-1/2}\right)$.

Отметим, что методы, используемые нами при доказательстве теоремы 4.1.6, существенно отличаются от использовавшихся ранее другими авторами при выводе аналогичных результатов. Вместо применения приближенного функционального уравнения для сведения суммы значений L-функции к изучению суммы коэффициентов Фурье автоморфных форм, мы применяем метод аналитического продолжения. А именно, мы сначала доказываем точную формулу для первого подкрученного момента в предположении, что аргумент L-функции достаточно велик, а затем доказываем возможность аналитического продолжения данной формулы в центральную точку. Преимуществом данного подхода является то, что он позволяет лучше выделить структуру остаточных членов. Особо отметим, что случай $N = p^2$ несколько отличается

от общего случая $N = p^\nu$, ввиду появления дополнительного слагаемого в остатке в (4.14). Данный остаток возникает из-за наличия полюса у дзета-функции Лерха, по этой причине мы рассматриваем случай $N = p^2$ отдельно в параграфе 4.6.

Получение асимптотической формулы для второго момента $M_2(l, 0, it)$ (см. (4.9)) является самой технически трудоемкой частью доказательства теоремы 4.1.1 Ее доказательство основывается на идеях из работ Кузнецова и Быковского [**113**], [**119**], [**115**], [**129**].

Для формулировки основного результата об асимптотическом поведении второго момента, нам потребуется ввести некоторые обозначения: γ - постоянная Эйлера, $\Lambda(n)$ - функция вон Мангольдта, $\phi(n)$ - функция Эйлера, $\mu(n)$ - функция Мёбиуса и $\psi(n)$ - логарифмическая производная Гамма-функции. Для комплексного числа s и натурального n определим

$$\tau_s(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^s = n^{-s}\sigma_{2s}(n).$$

Теорема 4.1.7. *Пусть $k \geq 1$, $t \in \mathbf{R}$, $T := 3 + |t|$, $N = p^\nu$, p простое и $\nu \geq 2$. Если $p|l$, тогда $M_2(l, 0, it) = 0$. В остальных случаях справедлива формула*

$$\begin{aligned} M_2(l,0,it) = \frac{\phi(N)\phi_\nu(N)}{N}\frac{\sigma_{-2it}(l)}{l^{1/2-it}}\times \\ \times\left(\log N + 2\gamma - 2\log 2\pi + 2\frac{\log p}{p-1} + \psi(k+it) + \psi(k-it)\right) - \\ - \frac{\phi(N)\phi_\nu(N)}{N}\frac{1}{l^{1/2-it}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_{it}(r)r^{-it}\log r + \\ + O\left(V_N(l) + \frac{1}{p}V_{N/p}(l) + \frac{1}{p^2}V_{N/p^2}(l) + \frac{(lTkp)^\epsilon}{p^2\sqrt{l}}\delta(N,p^2)\right). \quad (4.16) \end{aligned}$$

Функция в остаточном члене может быть оценена следующим образом

$$V_N(l) \ll \begin{cases} (lkT^2)^\epsilon \frac{l^{1/2}(k+T)}{N} & l \geq N/(1+T^2); \\ \left(\frac{lT^2}{4(N-l)}\right)^k \frac{N^\epsilon}{l^{1/2}T} & l < N/(1+T^2). \end{cases} \quad (4.17)$$

Данная асимптотическая формула равномерна по всем параметрам: N, p, l, k и T. При больших значениях l оценка остатка оптимизирована для параметров N и T. Зафиксировав k, получаем

$$V_N(l) + \frac{1}{p}V_{N/p}(l) + \frac{1}{p^2}V_{N/p^2}(l) \ll_{k,\epsilon} \frac{l^{1/2}T}{N}(lNT)^\epsilon.$$

Другой интересный случай: $N = 1$ и k – большой параметр, рассмотрен нами в работе [**7**], содержание которой будет изложено в одной из следующих глав.

Теорема 4.1.7 обобщает и улучшает ранее известные результаты. Во-первых, мы расширяем область применения методов работ [**113**], [**115**], [**119**] на случай примитивных форм. А именно, мы используем технику аналитического продолжения вместо приближенного функционального уравнения для доказательства формулы свёртки для второго момента на критической прямой, обобщая тем самым формулы Быковского [**113**], Иванца-Сарнака [**53**] и Быковского-Фроленкова [**119**]. Наиболее сложный случай веса $2k = 2$ изучен в работе [**119**] при помощи "трюка Гекке". Из формулы свёртки мы получаем асимптотику, которая обобщает теорему 1 работы [**17**], где был рассмотрен частный случай: N простое, $k = 1$, $t = 0$ и $l < N$. Наиболее важным здесь является снятие ограничения $l < N$. Это позволяет доказать наилучшую из известных оценок на пропорцию необнуляемых L-значений, когда $N = p^\nu$, ν - фиксированное число, а $p \to \infty$. Кроме того, равномерность по параметру t позволяет получать оценки необнуляемости в любой точке на критической прямой $1/2+it$, где $|t| < N$. Наконец, теорема 4.1.7 улучшает результат Роуми.

Теорема 4.1.8. *([**96**, лемма 5]) Пусть $k \geq 1$, $N = p^\nu$, p - простое, $\nu \geq 3$, $(l, p) = 1$. Тогда для любого $1 \leq l \leq N$*

$$M_2(l,0,0) = \frac{\tau(l)}{\sqrt{l}} \left(\frac{\phi(N)}{N}\right)^2 \times \\ \times \left(\log\left(\frac{N}{4\pi^2 l}\right) + 2\left(\frac{\log p}{p-1} + \psi(k) + \gamma\right)\right) + O_{k,p}\left(\sqrt{l}\frac{(\log N)^4}{\sqrt{N}}\right). \quad (4.18)$$

Заметим, что при $t = 0$, главный член (4.16) совпадает с главным членом в формуле (4.18). Действительно,

$$\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_0(r)\log r = \sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(r)\log\frac{d}{r}\sum_{a|\frac{d}{r}}1 = \\ = \sum_{d|l}\sum_{a|d}\sum_{r|\frac{d}{a}}\mu(r)\log\frac{d}{r} = \sum_{d|l}\left(\log d + \sum_{k|d}\Lambda(d/k)\right) = \\ = 2\sum_{d|l}\log d = \sum_{d|l}\left(\log d + \log\frac{l}{d}\right) = \tau_0(l)\log l.$$

Также можно сравнить остаточные члены в теоремах 4.1.7 и 4.1.8 при $l = 1$. Уравнение (4.18) даёт $O_{k,p}\left((\log N)^4 N^{-1/2}\right)$, а из (4.17) следует

$$V_N(1) + \frac{1}{p}V_{N/p}(1) + \frac{1}{p^2}V_{N/p^2}(1) \ll_{k,t,\epsilon} \frac{N^\epsilon}{p^2(N/p^2)^k} \ll_{k,t,\epsilon,p} N^{-k+\epsilon}.$$

Данная глава организована следующим образом. В параграфах 4.2 и 4.3 приведены основные теоретические сведения. В параграфе 4.4 мы доказываем оценку на интеграл, содержащийся в остаточном члене асимптотической формулы для первого момента.

Асимптотическая формула для первого доказывается в параграфах 4.5 и 4.6. Разделы 4.7–4.9 содержат оценки специальных функций, возникающих при изучении остаточных членов асимптотической формулы. В разделе 4.10 доказывается формула свёртки для второго момента L- функций уровня $N = p^\nu$, $\nu \geq 3$. Случай $N = p^2$ рассмотрен в разделе 4.11. В разделе 4.12 приведены оценки различных остаточных членов и доказана асимптотическая формула. В последнем разделе 4.13 мы доказываем теорему 4.1.1.

4.2. Основные теоретические сведения

Определим

$$\Gamma(u, v, \lambda; s) = \frac{\Gamma(\lambda - 1/2 + s/2)}{\Gamma(\lambda + 1/2 - s/2)}\Gamma(1/2 - u + v - s/2)\Gamma(1/2 - u - v - s/2). \tag{4.19}$$

Применяя формулу Стирлинга при $\Re v = 0$, получаем

$$\Gamma(u, v, \lambda; \sigma + it) \ll \frac{\exp(-\pi|t|/2)}{|t|^{1+2\Re u}}.$$

Гипергеометрическая функция Гаусса при $|z| < 1$ может быть определена степенным рядом

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}. \tag{4.20}$$

Введём следующий оператор

$$1_c = \begin{cases} 1 & \text{если с верно} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Для $q \in \mathbf{N}$ и $a \in \mathbf{Z}$ положим

$$\delta_q(a) = \begin{cases} 1 & a \equiv 0 \pmod q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Функция Бесселя может быть задана рядом

$$J_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+s)} \left(\frac{z}{2}\right)^{s+2n}.$$

Справедливо следующее интегральное представление

$$J_{2\lambda-1}(y) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\Re s = \Delta} \frac{\Gamma(\lambda - 1/2 + s/2)}{\Gamma(\lambda + 1/2 - s/2)} \left(\frac{y}{2}\right)^{-s} ds \tag{4.21}$$

где $1 - 2\Re\lambda < \Delta < 0$ и y-положительное действительное число. Иногда, для упрощения формул мы будем использовать обозначение

$$e(x) := \exp(2\pi i x).$$

Дзета-функция Лерха с параметрами $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ определена как

$$\zeta(\alpha, \beta; s) = \sum_{n+\alpha>0} \frac{\exp(2\pi i n\beta)}{(n+\alpha)^s}$$

при $\Re s > 1$. Это периодическая функция по β с периодом 1; $\zeta(\alpha, \beta; s)$ может быть голоморфно продолжена на всю комплексную плоскость кроме точки $s = 1$ при $\beta \in \mathbf{Z}$, где она имеет простой полюс с вычетом 1. Данная функция удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$\xi(0, \alpha; 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left(e\left(\frac{s}{4}\right) \xi(\alpha, 0; s) + e\left(-\frac{s}{4}\right) \xi(-\alpha, 0; s) \right). \tag{4.22}$$

Преобразование Меллина функции $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ определяется уравнением

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx. \tag{4.23}$$

Для классической суммы Клоостермана

$$Kl(m, n; c) = \sum_{\substack{0 \le x \le c-1 \\ (x,c)=1}} \exp\left(2\pi i \frac{mx + n\overline{x}}{c}\right), \quad x\overline{x} \equiv 1 \pmod{c}$$

справедлива оценка Вейля

$$|Kl(m, n; c)| \le \tau_0(c) \sqrt{(m, n, c)} \sqrt{c}.$$

Лемма 4.2.1. *([**97**], лемма A.12) Пусть m, n, c - три положительных целых числа и p - простое число. Пусть $p^2|c$, $p|m$ and $p \not| n$. Тогда $Kl(m, n; c) = 0$.*

4.3. Примитивные формы и формула следа Петерссона

В данном разделе мы приведём необходимые сведения из книги **[50]**. Пусть $S_{2k}(N)$ обозначает пространство параболических форм веса $2k \ge 2$ и уровня N, на котором задано прямое произведение Петерссона (5.32) Любая функция $f \in S_{2k}(N)$ имеет разложение Фурье на бесконечности

$$f(z) = \sum_{n \ge 1} a_f(n) e(nz).$$

В соответствии с теорией Аткина-Лехнера пространство параболических форм распадается на два подпространства новых и старых форм

$$S_{2k}(N) = S_{2k}^{new}(N) \oplus S_{2k}^{old}(N).$$

Пусть $H_{2k}(N)$ - это ортогональный базис для $S_{2k}(N)$, а $H_{2k}^*(N)$ - ортогональный базис для $S_{2k}^{new}(N)$, состоящий из примитивных форм с коэффициентами Фурье

$$\lambda_f(n) := a_f(n) n^{-(2k-1)/2}, \quad \lambda_f(1) = 1.$$

Коэффициенты $\lambda_f(n)$ удовлетворяют соотношению Гекке (4.3) Основным инструментом, позволяющим изучать различные свойства как самих автоморфных форм, так и их коэффициентов Фурье или ассоциированных L-функций, является формула следа Петерссона.

Теорема 4.3.1. *(Формула следа Петерссона) Для $m, n \geq 1$ справедливо, что*

$$\Delta_{2k,N}(m,n) = \sum_{f \in H_{2k}(N)}^{h} \lambda_f(m)\lambda_f(n) = \\ = \delta(m,n) + 2\pi i^{-2k} \sum_{N|c} \frac{Kl(m,n;c)}{c} J_{2k-1}(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}). \quad (4.24)$$

Точнее мы будем использовать следующее обобщение, полученное Роуми.

Теорема 4.3.2. *(замечание 4, [95]) Пусть $N = p^\nu$, p - простое, $\nu \geq 2$. Тогда*

$$\Delta^*_{2k,N}(m,n) := \sum_{f \in H^*_{2k}(N)}^{h} \lambda_f(m)\lambda_f(n) = \\ = \begin{cases} \Delta_{2k,N}(m,n) - \frac{\Delta_{2k,N/p}(m,n)}{p-p^{-1}} & \nu = 2 \ u \ (N, mn) = 1, \\ \Delta_{2k,N}(m,n) - \frac{\Delta_{2k,N/p}(m,n)}{p} & \nu \geq 3 \ u \ (N, mn) = 1, \\ 0 & (N, mn) = 1. \end{cases} \quad (4.25)$$

4.4. Оценки интегралов для первого момента

Пусть $k > 1 + \Re u \geq 1$, $\Re v = 0$, $\Im v = t$, где $t \in \mathbf{R}$ и $T := 1 + |t|$. В этом параграфе мы оценим интеграл, который возникнет в точной формуле для первого момента (4.8).

$$I_\pm(u,v,k,x) \\ = e\left(\pm\frac{1}{8} \mp \frac{k}{4}\right) x^{1/2-k} \frac{\Gamma(k-v-u)}{\Gamma(2k)} {}_1F_1\left(k-v-u, 2k; -\frac{e(\mp 1/4)}{x}\right) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta/2} \frac{\Gamma(k-1/2+s)}{\Gamma(k+1/2-s)} \Gamma(1/2-u-v-s) x^s e\left(\pm\frac{s}{4}\right) ds \quad (4.26)$$

где $1 - 2k < \Delta < -1 - 2\Re u$. Чтобы оценить $I_\pm(0,v,k,x)$ нам потребуется рассмотреть отдельно случай большой и малой переменной x.

4.4.1. Случай большого x.

Лемма 4.4.1. *При $x > Te/k$ справедлива оценка*

$$I_\pm(0,v,k,x) \ll e^{-\pi T/2} \left(\frac{x}{T}\right)^{1/2} \left(\frac{eT}{xk}\right)^k.$$

Доказательство. Так как $\Delta/2 > 1/2-k$, прямая интегрирования в (4.26) находится справа от всех полюсов $s_j = 1/2-k-j$ с $j = 0, 1, 2, \ldots$ подынтегральной функции. Так как подынтегральная функция ограничена $|\Im s|^{-1+\Re s}$, то интеграл равен сумме всех вычетов в данных точках, а именно

$$I_{\pm}(0, v, k, x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(k+j-it)}{\Gamma(2k+j)j!} x^{1/2-k-j} e(\pm 1/4(1/2-k-j)) =$$

$$= e(\pm 1/4(1/2-k)) x^{1/2-k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j-it)}{\Gamma(2k+j)j!} \left(-\frac{e(\mp 1/4)}{x}\right)^j.$$

Таким образом

$$I_{\pm}(0, v, k, x) \ll x^{1/2-k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\Gamma(k+m-it)|}{m!|\Gamma(2k+m)|} \frac{1}{x^m}.$$

Используя функциональное уравнение для гамма функции и неравенство

$$|k+j-it| \leqslant k+j+|t| \leqslant (k+j)(1+|t|) \quad \text{при } j \geq 0, \tag{4.27}$$

мы приходим к

$$|\Gamma(k+m-it)| = |\Gamma(k+it)| \prod_{j=0}^{m-1} |k+j-it| \leqslant |\Gamma(k+it)| T^m \frac{(k+m-1)!}{(k-1)!}.$$

Следовательно,

$$I_{\pm}(0, v, k, x) \ll x^{1/2-k} \frac{|\Gamma(k+it)|}{\Gamma(2k)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T^m}{x^m} \frac{(k+m-1)!(2k-1)!}{(k-1)!(2k+m-1)!m!}.$$

Чтобы оценить выражение с факториалами, мы запишем его в следующем виде

$$\frac{(k+m-1)!(2k-1)!}{(k-1)!(2k+m-1)!m!} \ll \frac{(k+m)!}{(2k+2m)!} \frac{(2k+2m)!}{(2k+m)!m!} \frac{(2k)!}{k!}.$$

Применяя формулу Стирлинга $n! \asymp \sqrt{n}(n/e)^n$, заключаем, что

$$\frac{(2k+2m)!}{(2k+m)!m!} = \prod_{j=1}^{m} \frac{j+m}{j} \prod_{j=m+1}^{2k+m} \frac{j+m}{j} \ll \frac{(2m)!}{m!m!} 2^{2m} \ll \frac{1}{\sqrt{m+1}} 2^{2k+2m},$$

$$\frac{(k+m)!}{(2k+2m)!} \ll \frac{\sqrt{k+m}}{(k+m)!2^{2k+2m}}.$$

Используя последние две оценки, находим

$$\frac{(k+m-1)!(2k-1)!}{(k-1)!(2k+m-1)!m!} \ll \frac{\sqrt{k+m}}{\sqrt{m+1}} \cdot \frac{(2k)!}{k!(k+m)!}.$$

Из этого следует, что

$$I_{\pm}(0, v, k, x) \ll x^{1/2-k} \frac{|\Gamma(k+it)|}{\Gamma(2k)} \frac{(2k)!}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T^m}{x^m} \frac{\sqrt{k+m}}{(k+m)!\sqrt{m+1}}.$$

Так как

$$\frac{(k+m)!}{k!k^m} = \prod_{j=1}^{m} \frac{k+j}{k} > 1,$$

то при $\frac{T}{k} < x$ имеем

$$I_{\pm}(0,v,k,x) \ll x^{1/2-k}\frac{|\Gamma(k+it)|}{\Gamma(2k)}\frac{(2k)!\sqrt{k}}{k!k!}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{T}{kx}\right)^m \ll x^{1/2-k}\frac{|\Gamma(k+it)|}{\Gamma(2k)}2^{2k}.$$

Применяя формулу Стирлинга, (4.27) мы при $\frac{T}{k} < x$ получаем

$$I_{\pm}(0,v,k,x) \ll e^{-\pi T/2}x^{1/2-k}T^{k-1/2}\frac{\Gamma(k)2^{2k}}{\Gamma(2k)} \ll e^{-\pi T/2}\left(\frac{x}{T}\right)^{1/2}\left(\frac{eT}{xk}\right)^k.$$

□

4.4.2. Случай малого x.

Лемма 4.4.2. *При $x \le Te/k$ имеют место следующие оценки*

$$e^{\pi T/2}I_{-}(0,v,k,x) \ll x^{-1/2}\max\left(\frac{\sqrt{T}}{k},\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

$$e^{-\pi t/2}I_{+}(0,v,k,x) \ll x^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{k+T}}.$$

Доказательство. Сдвигая прямую интегрирования в (4.26) на вертикальную прямую $\Re s = -1/2$, получаем

$$I_{\pm}(0,v,k,x) \ll x^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\Gamma(k-1+ir)|}{|\Gamma(k+1-ir)|}|\Gamma(1-i(r+t))|e^{\mp\pi r/2}dr.$$

Отметим, что

$$\frac{|\Gamma(k-1+ir)|}{|\Gamma(k+1-ir)|} = \frac{1}{\sqrt{k^2+r^2}\sqrt{(k-1)^2+r^2}} \ll \frac{1}{(k+|r|)^2}.$$

Из равенства [**35**, 8.332(3)] следует, что

$$|\Gamma(1-i(r+t))| = \sqrt{\frac{\pi|r+t|}{\sinh\pi|r+t|}} \ll e^{-\pi|r+t|/2}\left(|r+t|^{1/2}+1\right).$$

Таким образом, мы получаем

$$e^{\mp\pi t/2}I_{\pm}(0,v,k,x) \ll x^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}e^{-\pi/2(|r+t|\pm(r+t))}dr.$$

Без потери общности можно считать, что $t > 1$.

Сначала мы оценим $e^{-\pi t/2}I_{+}(0,v,k,x)$. Так как

$$|r+t|+(r+t) = \begin{cases} 2(r+t), & r \ge -t \\ 0, & r < -t \end{cases},$$

мы приходим к оценке

$$x^{1/2}e^{-\pi t/2}I_+(0,v,k,x)$$
$$\ll \int_{-\infty}^{-t}\frac{1+|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}dr+\int_{-t}^{\infty}\frac{1+|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}e^{-\pi(r+t)}dr$$
$$\ll \int_{-\infty}^{-t-1}\frac{|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}dr+\frac{1}{(t+k)^2}+\int_{-t+1}^{\infty}\frac{|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}e^{-\pi(r+t)}dr.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$\int_{-\infty}^{-t-1}\frac{|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}dr=\int_1^{\infty}\frac{r^{1/2}}{(r+k+t)^2}dr\ll\int_1^{k+t}\frac{r^{1/2}}{(k+t)^2}dr+\int_{k+t}^{\infty}\frac{dr}{r^{3/2}}\ll\frac{1}{\sqrt{k+t}}.$$

Определим две функции

$$f_1(r):=-\pi r+1/2\log r-2\log(k+t-r),$$

$$f_2(r):=-\pi r+1/2\log r-2\log(k-t+r).$$

Так как $f_1'(r),f_2'(r)<-1/2$, то

$$\int_{-t+1}^{\infty}\frac{|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}e^{-\pi(r+t)}dr=\int_1^{\infty}\frac{r^{1/2}e^{-\pi r}}{(|r-t|+k)^2}dr$$
$$=\int_1^t\frac{r^{1/2}e^{-\pi r}}{(t-r+k)^2}dr+\int_t^{\infty}\frac{r^{1/2}e^{-\pi r}}{(r-t+k)^2}dr=\int_1^t e^{f_1(r)}dr+\int_t^{\infty}e^{f_2(r)}dr$$
$$\ll\int_1^t e^{f_1(r)}f_1'(r)dr+\int_t^{\infty}e^{f_2(r)}f_2'(r)dr\ll\frac{1}{(k+t)^2}+\frac{\sqrt{t}e^{-\pi t}}{k^2}.$$

В итоге нами доказано, что

$$e^{-\pi t/2}I_+(0,v,k,x)\ll x^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{k+t}}.$$

Аналогичным способом мы получаем

$$x^{1/2}e^{\pi t/2}I_-(0,v,k,x)\ll\int_{-\infty}^{-t-1}\frac{|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}e^{\pi(r+t)}dr+\int_{-t+1}^{\infty}\frac{|r+t|^{1/2}}{(|r|+k)^2}dr+\frac{1}{(k+t)^2}.$$

Первый интеграл может быть оценен следующим образом

$$\int_{-\infty}^{-t-1}\frac{|r+t|^{1/2}}{(k+|r|)^2}e^{\pi(r+t)}dr=\int_1^{\infty}\frac{r^{1/2}}{(r+k+t)^2}e^{-\pi r}\ll\frac{1}{(k+t)^2}.$$

Второй же интеграл мы сначала разобьем на два

$$\int_{-t+1}^{\infty}\frac{|r+t|^{1/2}}{(|r|+k)^2}dr=\int_1^t\frac{r^{1/2}}{(k+t-r)^2}dr+\int_t^{\infty}\frac{r^{1/2}}{(r+k-t)^2}dr.$$

Заметим, что

$$\int_t^{\infty}\frac{r^{1/2}}{(r+k-t)^2}dr\ll\begin{cases}t^{-1/2}, & k<2t\\ k^{-1/2}, & k>2t\end{cases}$$

и

$$\int_1^t\frac{r^{1/2}}{(k+t-r)^2}dr=\frac{r^{1/2}}{k+t-r}\Big|_1^t-\int_1^t\frac{dr}{2(k+t-r)r^{1/2}}\ll\frac{\sqrt{t}}{k}.$$

Следовательно,

$$e^{\pi t} I_-(0,v,k,x) \ll x^{-1/2} \max\left(\frac{\sqrt{t}}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

□

4.5. Асимптотическая формула для первого момента, случай $\nu \geq 3$

В этом параграфе мы докажем асимптотическую формулу для первого (4.8) подкрученного момента L-функций, ассоциированных с примитивными формами веса $2k \geq 4$, уровня $N = p^\nu$, где p простое и $\nu \geq 3$.

Теорема 4.5.1. *Пусть $k \geq 2$, p–простое число, $v = it, t \in \mathbf{R}$ и $T := 1 + |t|$. Тогда для $N = p^\nu$, $\nu \geq 3$ справедливы следующее равенство*

$$M_1(l,0,v) = 1_{(l,p)=1}\left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{l^{1/2+v}} + 2\pi i^{2k} V_N(0,v,k) - \frac{2\pi i^{2k}}{p} V_{N/p}(0,v,k)\right] \tag{4.28}$$

и оценка

$$V_N(0,v,k) \ll \begin{cases} \frac{l^{1/2}(lT)^\epsilon}{N} \max\left(\frac{\sqrt{T}}{k}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right) & 4\pi elT \geq Nk, \\ \frac{1}{\sqrt{lT}}\left(2\pi e \frac{lT}{Nk}\right)^k & 4\pi elT < Nk. \end{cases} \tag{4.29}$$

Лемма 4.5.2. *Пусть $\Re u > 1/2$, $\Re v = 0$, $k \geq 2$, $N = p^\nu$ и $\nu \geq 3$, тогда*

$$M_1(l,u,v) = \left(S(l,u,v;N) - \frac{1}{p} S(l,u,v;N/p)\right) 1_{(l,p)=1},$$

$$S(l,u,v;N) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+u+v}} \Delta_{2k,N}(l,n). \tag{4.30}$$

Доказательство. Используя (4.25), получаем

$$M_1(l,u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+u+v}} \Delta^*_{2k,N}(l,n) =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ (nl,p)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+u+v}} \left(\Delta_{2k,N}(l,n) - 1/p \Delta_{2k,N/p}(l,n)\right) =$$

$$= \left(S(l,u,v;N) - \frac{1}{p} S(l,u,v;N/p)\right) 1_{(l,p)=1}.$$

□

Заметим, что можно убрать условие $(n,p) = 1$, разбив $S(l,u,v;N)$ на две суммы.

Лемма 4.5.3. *Справедливо равенство*

$$S(l,u,v;N) = S_1(l,u,v;N) - \frac{1}{p^{1/2+u+v}} S_2(l,u,v;N),$$

где

$$S_1(l,u,v;N)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2+u+v}}\Delta_{2k,N}(l,n) \tag{4.31}$$

и

$$S_2(l,u,v;N)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2+u+v}}\Delta_{2k,N}(l,np). \tag{4.32}$$

Лемма 4.5.4. *Пусть* $(l,p)=1$, $k\geq 2$, $N=p^{\nu}$ *и* $\nu\geq 3$, *тогда*

$$S_2(l,u,v;N)=S_2(l,u,v;N/p)=0.$$

Доказательство. Применяя формулу Петерссона (4.24), получаем

$$S_2(l,u,v;N)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta(l,np)}{n^{1/2+u+v}}+2\pi i^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2+u+v}}\times$$
$$\times\sum_{q\equiv 0 \pmod N}\frac{Kl(l,np;q)}{q}J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{lnp}}{q}\right).$$

Так как $(l,p)=1$,то $\delta(l,np)=0$. Отметим, что так как $N=p^{\nu}$, $\nu\geq 3$, то $N/p\geq p^2$. Следовательно, в суммах $S_2(l,u,v;N)$ и $S_2(l,u,v;N/p)$ суммирование ведется по $q\equiv 0 \pmod{p^2}$. Так как $(l,p)=1$, то по лемме 4.2.1 получаем $Kl(l,pn;q)=0$, тем самым доказывая лемму. □

Лемма 4.5.5. *Пусть* $k\geq 2$, $N=p^{\nu}$ *и* $\nu\geq 3$. *При* $\Re u>3/4$ *и* $\Re v=0$, *справедливо следующее равенство*

$$S_1(l,u,v;N)=\frac{1}{l^{1/2+u+v}}+2\pi i^{2k}V_N(u,v,k), \tag{4.33}$$

где

$$V_N(u,v,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q\equiv 0 \pmod N}\frac{Kl(l,n;q)}{n^{1/2+u+v}q}J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{ln}}{q}\right). \tag{4.34}$$

Ряды по n *и* q *в* (4.34) *сходятся абсолютно при* $\Re\lambda>3/4$, $\Re u>3/4$.

Доказательство. Равенство (4.33) непосредственно следует из формулы Петерссона (4.24). Оценивая функции Бесселя и суммы Клоостермана, получаем

$$V_N(u,v,\lambda)\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2+\Re u}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{q}}\min\left(\left(\frac{\sqrt{ln}}{q}\right)^{2\Re\lambda-1},\left(\frac{q}{\sqrt{ln}}\right)^{1/2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2+\Re u}}\sum_{q<\sqrt{ln}}\frac{1}{(ln)^{1/4}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2+\Re u}}\sum_{q>\sqrt{ln}}\frac{(ln)^{\lambda-1/2}}{q^{2\lambda-1/2}}.$$

Следовательно, ряды по q во второй сумме сходятся при $2\lambda-1/2>1$. Вычисляя сумму по q, получаем

$$V_N(u,v,\lambda)\ll_l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/4+\Re u}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\lambda-1/2}}{n^{1/2+\Re u}n^{\lambda-3/4}},$$

и значит при $\Re u > 3/4$ ряды по n также являются абсолютно сходящимися. $\square$

Доказанная в лемме 4.5.5 абсолютная сходимость обеспечивает законность перемены порядков суммирования

$$V_N(u,v,\lambda) = \sum_{q\equiv 0 \pmod N} \frac{1}{q} V_N(u,v,\lambda;q),$$

$$V_N(u,v,\lambda;q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2+u+v}} Kl(l,n;q) J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{ln}}{q}\right).$$

При $\Re s > 1 - \Re v$ определим функцию

$$g(s,v;q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Kl(l,n;q)}{n^{s+v}}.$$

Отметим, что

$$g(s,v;1) = \zeta(s+v). \tag{4.35}$$

На следующем шаге доказательства мы собираемся записать функцию Бесселя с помощью интеграла Меллина-Барнса.

Лемма 4.5.6. *При $\Re u > 3/4$, $\Re\lambda > 3/4$ справедлива формула*

$$V_N(u,v,\lambda;q) = \frac{1}{4\pi i}\int_{(\Delta)} \frac{\Gamma(\lambda - 1/2 + s/2)}{\Gamma(\lambda + 1/2 - s/2)} g(1/2+u+s/2,v;q)\left(\frac{q}{2\pi\sqrt{l}}\right)^s ds, \tag{4.36}$$

где $1 - 2\Re\lambda < \Delta < 0$, $1 - 2\Re u < \Delta < 0$.

Используя свойства дзета функции Лерха, мы собираемся доказать функциональное уравнение и получить аналитическое продолжение функции $g(s,v;q)$.

Лемма 4.5.7. *Для $q \in \mathbf{N}$ и $v \in \mathbf{C}$ функция $g(s,v;q)$, как функция комплексной переменной s, может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость. Более того если $\Re(s+v) < 0$, то выполнено*

$$g(s,v;q) = \Gamma(1-s-v)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s+v-1}\left(e\left(\frac{1-s-v}{4}\right)\times\right.$$
$$\left.\times \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{e(n^* l q^{-1})}{n^{1-s-v}} + e\left(-\frac{1-s-v}{4}\right)\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{e(-n^* l q^{-1})}{n^{1-s-v}}\right),$$

где $nn^* \equiv 1 \pmod q$.

Доказательство. Используя определение функции Лерха, получаем

$$g(s,v;q) = \sum_{a,b=1}^{q} \delta_q(ab-1) e\left(\frac{al}{q}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e(bn/q)}{n^{s+v}} == \sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-1)e\left(\frac{al}{q}\right)\zeta(0,b/q;s+v).$$

Применяя функциональное уравнение для дзета-функции Лерха, находим

$$g(s,v;q)=\frac{\Gamma(1-s-v)}{(2\pi)^{1-s-v}}e\left(\frac{1-s-v}{4}\right)\times$$
$$\times\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-1)e\left(\frac{al}{q}\right)\zeta(b/q,0;1-s-v)+\frac{\Gamma(1-s-v)}{(2\pi)^{1-s-v}}\times$$
$$\times e\left(-\frac{1-s-v}{4}\right)\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-1)e\left(\frac{al}{q}\right)\zeta(-b/q,0;1-s-v).$$

Используя соотношение

$$\zeta(b/q,0;z)=\sum_{n+b/q>0}\frac{1}{(n+b/q)^z}=q^z\sum_{\substack{n\equiv b\pmod q\\ n>0}}\frac{1}{n^z},$$

заключаем

$$\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-1)e\left(\frac{al}{q}\right)\zeta(b/q,0,1-s-v)=q^{1-s-v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s-v}}\times$$
$$\times\sum_{\substack{a,b=1\\ b\equiv n\pmod q}}^{q}\delta_q(ab-1)e\left(\frac{al}{q}\right)=q^{1-s-v}\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{e(n^*lq^{-1})}{n^{1-s-v}}.$$

Аналогично

$$\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-1)e\left(\frac{al}{q}\right)\zeta(-b/q,0,1-s-v)=q^{1-s-v}\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{e(-n^*lq^{-1})}{n^{1-s-v}}.$$

□

Теперь мы можем выразить $V_N(u,v,\lambda)$ через интегралы $I_\pm(u,v,\lambda,x)$, которые мы оценивали в параграфе 4.4.

Лемма 4.5.8. *При* $\Re\lambda-1>\Re u>3/4$ *и* $\Re v=0$ *справедливо следующее равенство*

$$V_N(u,v,\lambda)=\sum_{q\equiv 0\pmod N}\frac{1}{q^{1/2+u+v}}\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{e(n^*lq^{-1})}{n^{1/2-u-v}}(2\pi)^{u+v-1/2}\times$$
$$\times e\left(\frac{1/2-u-v}{4}\right)I_-\left(u,v,\lambda,\frac{qn}{2\pi l}\right)+\sum_{q\equiv 0\pmod N}\frac{1}{q^{1/2+u+v}}\times$$
$$\times\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{e(-n^*lq^{-1})}{n^{1/2-u-v}}(2\pi)^{u+v-1/2}e\left(-\frac{1/2-u-v}{4}\right)I_+\left(u,v,\lambda,\frac{qn}{2\pi l}\right),\quad(4.37)$$

где $1-2\Re\lambda<\Delta<-1-2\Re u$ *и*

$$I_\pm(u,v,\lambda,x)=\frac{1}{4\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u-v-s/2)\,(x)^{s/2}\,e\left(\pm\frac{s}{8}\right)ds.\qquad(4.38)$$

Доказательство. Сдвигая контур интегрирования в (4.90) на вертикальную прямую $1-2\Re\lambda<\Delta<-1-2\Re u$, получаем

$$V_N(u,v,\lambda)=\frac{1}{4\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)}\sum_{q\equiv 0 \pmod N} g(1/2+u+s/2,v;q)\frac{1}{q}\left(\frac{q}{\pi\sqrt{l}}\right)^s ds.$$

Используя лемму 4.5.7, находим

$$V_N(u,v,\lambda)=\frac{1}{4\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u-v-s/2)\times$$

$$\times\sum_{q\equiv 0 \pmod N}\frac{1}{q}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s/2+u+v-1/2}\left(\frac{q}{2\pi\sqrt{l}}\right)^s\left(e\left(\frac{1/2-u-v-s/2}{4}\right)\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{e(n^*lq^{-1})}{n^{1/2-u-s/2-v}}+\right.$$

$$\left.+e\left(-\frac{1/2-u-v-s/2}{4}\right)\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{e(-n^*lq^{-1})}{n^{1/2-u-s/2-v}}\right)ds.$$

Отметим, что при $-u+\Delta/2<0$ интеграл по s сходится абсолютно, так как

$$\frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u-v-s/2)\asymp\Re s^{-1-u+\Delta/2}e^{-\pi|\Im s|/4}.$$

Если $1/2-u-\Delta/2>1$, то ряды по n и q являются абсолютно сходящимися и, следовательно, мы можем поменять порядок суммирования и интегрирования, лемма доказана. □

Теперь точная формула (4.28) непосредственно следует из лемм 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4, 4.5.5 и 4.5.8 путем аналитического продолжения в $u=0,\lambda=k\geq 2$. Нам осталось доказать оценку (4.29).

Лемма 4.5.9. *Пусть $k\geq 2$, $t\in\mathbf{R}$ и $T:=1+|t|$. Определим $d_0=4\pi e\frac{lT}{Nk}$, тогда справедлива оценка*

$$V_N(0,it,k)\ll\begin{cases}\frac{l^{1/2}}{N}d_0^{\epsilon}\max\left(\frac{\sqrt{T}}{k},\frac{1}{\sqrt{k}}\right), & d_0\geq 1\\ \frac{1}{\sqrt{lT}}\left(\frac{d_0}{2}\right)^k, & d_0<1.\end{cases}$$

Доказательство. Оценивания (4.37), получаем

$$V_N(0,v,k)\ll\frac{1}{N^{1/2}}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{d^{\epsilon}}{d^{1/2}}e^{\pm\pi t/2}I_{\pm}\left(0,v,k,\frac{dN}{2\pi l}\right).$$

Чтобы оценить данную сумму мы применим леммы 4.4.1 и 4.4.2. Если $d_0\geq 1$, то

$$V_N(0,v,k)\ll\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{d\leq d_0}\frac{d^{\epsilon}}{d^{1/2}}\left(\frac{l}{dN}\right)^{1/2}\max\left(\frac{\sqrt{T}}{k},\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{d>d_0}\frac{d^{\epsilon}}{d^{1/2}}\left(\frac{dN}{lT}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi elT}{dNk}\right)^k\ll\frac{\sqrt{l}}{N}d_0^{\epsilon}\max\left(\frac{\sqrt{T}}{k},\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\frac{d_0^{\epsilon}\sqrt{lT}}{Nk2^k}.$$

Если $d_0 < 1$, то

$$V_N(0,v,k) \ll \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{d^{\epsilon}}{d^{1/2}} \left(\frac{dN}{lT}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi elT}{dNk}\right)^k \ll \frac{1}{\sqrt{lT}} \left(\frac{d_0}{2}\right)^k.$$

□

4.6. Асимптотическая формула для первого момента, случай $\nu = 2$

Данный параграф посвящен доказательству следующего результата

Теорема 4.6.1. *Пусть $v = it, t \in \mathbf{R}$, $k \geq 2$, $N = p^2$ и p–простое число, тогда имеет место формула*

$$M_1(l,0,v) = 1_{(l,p)=1} \Bigg[\left(1 - \frac{1}{p - p^{-1}}\right) \frac{1}{l^{1/2+v}} - \\ - \frac{(2\pi)^{2v} i^{2k}}{p - p^{-1}} \frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+v)} \frac{1}{p^{1+2v} l^{1/2-v}} + O\left(V_{p^2}(0,v,k) + \frac{1}{p} V_p(0,v,k)\right)\Bigg],$$

а на величину $V_N(0,v,k)$ выполнена оценка (4.29).

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 4.5.2.

Лемма 4.6.2. *Пусть $\Re u > 1/2$, $\Re v = 0$, $k \geq 2$, $N = p^2$, тогда справедлива формула*

$$M_1(l,u,v) = \left(S(l,u,v;p^2) - \frac{1}{p - p^{-1}} S(l,u,v;p)\right) 1_{(l,p)=1}, \tag{4.39}$$

где $S(l,u,v;N)$ определена в (4.82).

Сумма $S(l,u,v;p^2)$ может быть вычислена точно также как в предыдущем параграфе. Таким образом

$$S(l,0,v;p^2) = S_1(l,0,v;p^2) = \frac{1}{l^{1/2+v}} + 2\pi i^{2k} V_{p^2}(0,v,k), \tag{4.40}$$

где $S_1(l,u,v;p^2)$ определена (4.31). Разобьем сумму $S(l,u,v;p)$ на две

$$S(l,u,v;p) = S_1(l,u,v;p) - \frac{1}{p^{1/2+u+v}} S_2(l,u,v;p), \tag{4.41}$$

где

$$S_1(l,0,v;p) = \frac{1}{l^{1/2+v}} + 2\pi i^{2k} V_p(0,v,k) \tag{4.42}$$

и $S_2(l,u,v;p)$ определена в (4.32). Отметим, что при $N = p$ мы не можем пользоваться результатом об обнуление сумм Клоостермана (4.2.1) при вычислении $S_2(l,u,v;p)$.

Лемма 4.6.3. *При* $(l,p)=1$ *выполнено равенство*

$$S_2(l,u,v;p)=2\pi i^{2k}\widetilde{V}_p(u,v,k), \tag{4.43}$$

=где

$$\widetilde{V}_p(u,v,k)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q\equiv 0 \pmod{p}}\frac{Kl(l,np;q)}{n^{1/2+u+v}q}J_{2k-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{lnp}}{q}\right).$$

Меняя порядки суммирования, что возможно ввиду наличия абсолютной сходимости, мы доказываем следующее утверждение.

Лемма 4.6.4. *При* $\Re u>3/4$, $\Re\lambda>3/4$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{V}_p(u,v,\lambda)=\sum_{q\equiv 0 \pmod{p}}\frac{1}{q}\widetilde{V}_p(u,v,\lambda;q),$$

$$\widetilde{V}_p(u,v,\lambda;q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2+u+v}}Kl(l,np;q)J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{lnp}}{q}\right).$$

В области $\Re s>1-\Re v$ определим функцию

$$\widetilde{g}(s,v;q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Kl(l,np;q)}{n^{s+v}}.$$

Расписывая сумму Клоостермана по определнию, получаем

$$\widetilde{g}(s,v;q)=\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-1)e\left(\frac{al}{q}\right)\zeta(0,bp/q;s+v).$$

Так как $(b,qp)=1$, то у функции $\zeta(0,bp/q,s+v)$ есть полюс только при $q=1$ и $q=p$. Так как $(l,p)=1$, то

$$Kl(l,np;p)=\sum_{a,b=1}^{p}\delta_p(ab-1)e\left(\frac{al}{p}\right)=\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{al}{p}\right)=-1.$$

Следовательно,

$$\widetilde{g}(s,v;p)=-\zeta(s+v).$$

Записывая функцию Бесселя с помощью интеграла Меллина-Барнса, получаем

Лемма 4.6.5. *При* $\Re u>3/4$, $\Re\lambda>3/4$ *имеет место равенство*

$$\widetilde{V}_p(u,v,\lambda;q)=\frac{1}{4\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)}\widetilde{g}(1/2+u+s/2,v;q)\left(\frac{q}{2\pi\sqrt{lp}}\right)^s ds,$$

где $\max(1-2\Re\lambda,1-2\Re u)<\Delta<0$.

Лемма 4.6.6. *При $q \in \mathbf{N}$, $p|q$ и $v \in \mathbf{C}$ функция $\widetilde{g}(s, v; q)$, как функция комплексной переменной s, может быть мероморфно продолжена на всю комплексную плоскость. При $\Re(s+v) < 0$ имеет место соотношение*

$$\widetilde{g}(s,v;q) = \Gamma(1-s-v)\left(\frac{2\pi p}{q}\right)^{s+v-1} 1_{(q/p,p)=1} \times \\ \times \left(e\left(\frac{1-s-v}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_+(n)}{n^{1-s-v}} + e\left(-\frac{1-s-v}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_-(n)}{n^{1-s-v}}\right),$$

где

$$f_\pm(n) = 1_{(n,q/p)=1}\, e\left(\pm\frac{ln^*}{q}\right) \sum_{\substack{s=1 \\ (\pm n^* + sq/p, p)=1}}^{p} e\left(\frac{ls}{p}\right) \tag{4.44}$$

и $nn^* \equiv 1 \pmod{q/p}$. Более того, справедливы также оценки

$$|f_\pm(n)| \leq 1. \tag{4.45}$$

Доказательство. Используя функциональное уравнение для дзета-функции Лерха, приходим к

$$\widetilde{g}(s,v;q) = \frac{\Gamma(1-s-v)}{(2\pi)^{1-s-v}} e\left(\frac{1-s-v}{4}\right) \times \\ \times \sum_{a,b=1}^{q} \delta_q(ab-1) e\left(\frac{al}{q}\right) \zeta(bp/q, 0; 1-s-v) + \frac{\Gamma(1-s-v)}{(2\pi)^{1-s-v}} \times \\ \times e\left(-\frac{1-s-v}{4}\right) \sum_{a,b=1}^{q} \delta_q(ab-1) e\left(\frac{al}{q}\right) \zeta(-bp/q, 0; 1-s-v).$$

Отметим, что

$$\sum_{a,b=1}^{q} \delta_q(ab-1) e\left(\frac{al}{q}\right) \zeta(bp/q, 0; 1-s-v) = \\ = \left(\frac{q}{p}\right)^{1-s-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s-v}} \sum_{\substack{a,b=1 \\ b \equiv n \pmod{q/p}}}^{q} \delta_q(ab-1) e\left(\frac{al}{q}\right).$$

Рассмотри суммы по a, b. Так как $b \equiv n \pmod{q/p}$, то существует $t \pmod{p}$ такое, что $b = n + tq/p$. Таким образом, из $ab \equiv 1 \pmod{q}$ следует $an + atq/p \equiv 1 \pmod{q}$. Далее

$$\begin{cases} an \equiv 1 \pmod{q/p} \\ at + p(an-1)/q \equiv 0 \pmod{p} \\ (a,p) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} an \equiv 1 \pmod{q/p} \\ (a,p) = 1 \end{cases}.$$

Следовательно,

$$S := \sum_{\substack{a,b=1 \\ b\equiv n \pmod{q/p}}}^{q} \delta_q(ab-1)e\left(\frac{al}{q}\right) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{q} \delta_{q/p}(an-1)e\left(\frac{al}{q}\right).$$

Условие $an \equiv 1 \pmod{q/p}$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} (n, q/p) = 1 \\ a \equiv n^* \pmod{q/p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n, q/p) = 1 \\ a = n^* + sq/p,\ s \pmod{p} \end{cases}.$$

Следовательно,

$$S = 1_{(n,q/p)=1}\, e\left(\frac{ln^*}{q}\right) \sum_{\substack{s=1 \\ (n^*+sq/p,p)=1}}^{p} e\left(\frac{ls}{p}\right).$$

Докажем оценку (4.45).Если $(q/p, p) = 1$, то условие $(n^* + sq/p, p) = 1$ не выполнено только для одного s. Так как $(l, p) = 1$, то

$$\sum_{s=1}^{p} e\left(\frac{ls}{p}\right) = 0,$$

и значит

$$\left| \sum_{\substack{s=1 \\ (n^*+sq/p,p)=1}}^{p} e\left(\frac{ls}{p}\right) \right| \le 1.$$

Если $q/p \equiv 0 \pmod{p}$, то условие $(n^* + sq/p, p) = 1$ эквивалентно $(n^*, p) = 1$. В этом случае

$$\sum_{\substack{s=1 \\ (n^*+sq/p,p)=1}}^{p} e\left(\frac{ls}{p}\right) = 0.$$

□

Следующее утверждение доказывается аналогично лемме 4.5.8

Лемма 4.6.7. *При* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$ *выполнено*

$$\widetilde{V}_p(u, v, \lambda) = -\frac{1}{p}\frac{\Gamma(\lambda - u - v)}{\Gamma(\lambda + u + v)}\left(\frac{\sqrt{p}}{2\pi\sqrt{l}}\right)^{1-2u-2v} + \sum_{\substack{q\equiv 0 \pmod{p} \\ (q/p,p)=1}} \frac{(2\pi p)^{u+v-1/2}}{q^{1/2+u+v}}$$
$$\times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_+(n)}{n^{1/2-u-v}} e\left(\frac{1/2-u-v}{4}\right) I_-\left(u, v, \lambda, \frac{qn}{2\pi l}\right) \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_-(n)}{n^{1/2-u-v}} e\left(-\frac{1/2-u-v}{4}\right) I_+\left(u, v, \lambda, \frac{qn}{2\pi l}\right) \right), \quad (4.46)$$

где $I_\pm(u, v, \lambda, x)$ *и* $f_\pm(n)$ *определены в* (6.10) *и* (4.44), *соответственно.*

Следствие 4.6.8. *Пусть $N = p^2$, тогда*

$$\widetilde{V}_p(0,v,k) = -\frac{1}{p}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+v)}\left(\frac{\sqrt{p}}{2\pi\sqrt{l}}\right)^{1-2v} + O\left(\frac{1}{\sqrt{p}}V_p(0,v,k)\right), \tag{4.47}$$

$$S(l,0,v;p) = \frac{1}{l^{1/2+v}} + \frac{2\pi i^{2k}}{(2\pi)^{1-2v}}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+v)}\frac{l^{v-1/2}}{p^{1+2v}} + O(V_p(0,v,k)). \tag{4.48}$$

Доказательство. Сначала мы аналитически продолжаем равенство (4.46) в точку $u = 0, \lambda = k \geq 2$. Оценка (4.45) позволяет нам оценивать ряды по n в (4.46) точно так же как и в лемме 4.5.9. Действуя таким образом, мы получаем (4.47). Равенство (4.48) непосредственно следует из (4.41), (4.42), (4.43) и (4.47). □

Теорема 4.6.1 теперь сразу следует из равенств (4.39), (4.40) и (4.48).

4.7. Интегралы от функций Бесселя

Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \int_0^\infty J_{2k-1}(y)k^+(y\sqrt{z}, 1/2+it)dy, \tag{4.49}$$

где ядро Бесселя определяется как

$$k^+(y,v) = \frac{1}{2\cos\pi v}\left(J_{2v-1}(y) - J_{1-2v}(y)\right). \tag{4.50}$$

Лемма 4.7.1. *([11], страница 326) Следующее представление*

$$J_{2k-1}(y) = \frac{1}{4\pi i}\int_{\Re s=\Delta}\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\left(\frac{y}{2}\right)^{-s}ds \tag{4.51}$$

справедливо при $1-2k < \Delta < 0$.

Лемма 4.7.2. *([86, 10.9.8]) Для $|\Re v| < 1$ и $x > 0$ выполнено соотношение*

$$J_v(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\left(x\cosh y - \frac{v\pi}{2}\right)\cosh(vy)dy.$$

Следствие 4.7.3. *Если $a > 0$, $v = it$, $t \in \mathbf{R}$, тогда*

$$k^+(a,1/2+it) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(a\cosh z)\cos(2tz)dz = \\ = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos(au)}{\sqrt{u^2-1}}\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)du. \tag{4.52}$$

Теорема 4.7.4. *При $z < 1$ выполнено разложение*

$$I(z) = \frac{2}{\pi}\left(Q_0(z) + (-1)^k Q_1(z)\right),$$

$$Q_0(z) = \int_1^{1/\sqrt{z}} \frac{\cos\left(2t\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right)}{\sqrt{1-zy^2}\sqrt{y^2-1}}\cos\left[(2k-1)\arcsin(y\sqrt{z})\right]dy, \tag{4.53}$$

$$Q_1(z) = \int_{1/\sqrt{z}}^{\infty} \frac{\cos\left(2t\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right)}{\sqrt{y^2z-1}\sqrt{y^2-1}} \frac{dy}{\left(y\sqrt{z}+\sqrt{y^2z-1}\right)^{2k-1}}. \tag{4.54}$$

Следствие 4.7.5. *Для $z<1$ справедлива оценка*

$$I(z) \ll 1 + |\log z| + \frac{1}{(2k-1)\sqrt{1-z}}.$$

Доказательство. Оценивая (4.53), получаем

$$Q_0(z) \ll \int_1^{1/\sqrt{z}} \frac{dy}{\sqrt{1-zy^2}\sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \int_1^{1/\sqrt{z}} \frac{dy}{\sqrt{1/z-y^2}\sqrt{y^2-1}}.$$

Из уравнения 3.152(10) [**35**] при $a=\frac{1}{\sqrt{z}}$, $b=1$, $u=b$, $\lambda=\pi/2$ следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \int_1^{1/\sqrt{z}} \frac{dy}{\sqrt{1/z-y^2}\sqrt{y^2-1}} = F\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-z}\right),$$

где F - это эллиптический интеграл, заданный формулой 8.111(2) [**35**] или формулой 19.2.4 [**86**]. Формулы 19.2.8 и 19.9.2 [**86**] позволяют получить оценку

$$Q_0(z) \ll F\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1-z}\right) \ll \log\left(\frac{4}{\sqrt{z}}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right) \ll \log\frac{4}{\sqrt{z}}.$$

Теперь рассмотрим (4.54)

$$Q_1(z) \ll \int_{1/\sqrt{z}}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2z-1}\sqrt{y^2-1}(y\sqrt{z}+\sqrt{y^2z-1})^{2k-1}}.$$

Положив $r := y\sqrt{z}$, получаем

$$Q_1(z) \ll \frac{1}{\sqrt{z}} \int_1^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2-1}\sqrt{r^2/z-1}(r+\sqrt{r^2-1})^{2k-1}} \ll$$
$$\ll \frac{1}{\sqrt{1-z}} \int_1^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2-1}(r+\sqrt{r^2-1})^{2k-1}} \ll \frac{1}{(2k-1)\sqrt{1-z}}.$$

Из двух последних оценок и теоремы 4.7.4 следует утверждение следствия. □

4.7.1. Доказательство теоремы 4.7.4. Мы оценим интеграл

$$I(k,t,1/x) = \int_0^{\infty} J_{2k-1}(y) k^+\left(\frac{y}{\sqrt{x}}, 1/2+it\right) dy$$

при $x>1$, используя представление (4.52). Для изменения порядка интегрирования в $I(k,t,1/x)$ требуется равномерная сходимость всех интегралов. Чтобы преодолеть эту трудность, мы сделаем следующие преобразования. Во-первых, зафиксируем большое вещественное число $Z>0$ так, что

$$k^+(a,1/2+it) = \frac{2}{\pi}\int_1^Z \frac{\cos(au)}{\sqrt{u^2-1}} \cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right) du + O\left(\frac{1+|t|}{aZ}\right).$$

Во-вторых, введём дополнительный параметр $b\geq 0$ и рассмотрим

$$I_b(k,t,1/x) = \int_0^{\infty} J_{2k-1}(y) k^+\left(\frac{y}{\sqrt{x}}, 1/2+it\right) \exp(-by) dy. \tag{4.55}$$

Применяя теорему 1 на странице 695 [**138**], получаем

$$I(k,t,1/x) = \lim_{b\to 0} I_b(k,t,1/x).$$

Наконец, для некоторого $\epsilon > 0$ разобьём интеграл по u на три части

$$k^+(a,1/2+it) = \mathfrak{I}_1(a) + \mathfrak{I}_2(a) + \mathfrak{I}_3(a) + O\left(\frac{1+|t|}{aZ}\right), \tag{4.56}$$

где

$$\mathfrak{I}_1(a) = \frac{2}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}(1-\epsilon)} \frac{\cos(au)}{\sqrt{u^2-1}} \cos\Big(2t\log(u+\sqrt{u^2-1})\Big)du,$$

$$\mathfrak{I}_2(a) = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{x}(1-\epsilon)}^{\sqrt{x}(1+\epsilon)} \frac{\cos(au)}{\sqrt{u^2-1}} \cos\Big(2t\log(u+\sqrt{u^2-1})\Big)du,$$

$$\mathfrak{I}_3(a) = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{x}(1+\epsilon)}^{Z} \frac{\cos(au)}{\sqrt{u^2-1}} \cos\Big(2t\log(u+\sqrt{u^2-1})\Big)du.$$

Далее подставим уравнение (4.56) при $a := \frac{y}{\sqrt{x}}$ в выражение для $I_b(k,t,1/x)$. Вклад остаточного члена из (4.56) при подстановке в формулу (4.55) оценивается как

$$\int_0^\infty |J_{2k-1}(y)| \frac{(1+|t|)\sqrt{x}}{yZ} \exp(-by)dy \ll \frac{(1+|t|)\sqrt{x}}{Z}.$$

Лемма 4.7.6. *Интеграл $\mathfrak{I}_1(y/\sqrt{x})$ при подстановке в формулу для $I(k,t,1/x)$ даёт следующий вклад*

$$\frac{2}{\pi}Q_0(1/x) + O_k\left(\epsilon\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\mathfrak{L}_1 := \frac{2}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}(1-\epsilon)} \frac{\cos\big(2t\log(u+\sqrt{u^2-1})\big)}{\sqrt{u^2-1}} \left(\int_0^\infty \exp(-by) J_{2k-1}(y)\cos\left(\frac{u}{\sqrt{x}}y\right)dy\right)du.$$

Внутренний интеграл

$$IY_1 := \int_0^\infty \exp(-by) J_{2k-1}(y)\cos\left(\frac{u}{\sqrt{x}}y\right)dy$$

может быть вычислен при помощи представления Меллина-Барнса (4.51). Меняя порядок интегрирования, получаем

$$IY_1 = \frac{1}{4\pi i}\int_\Delta 2^s \frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)} \left(\int_0^\infty \exp(-by)\cos\left(\frac{u}{\sqrt{x}}y\right)y^{-s}dy\right)ds.$$

При $\Re s < 1$ справедливо равенство (см. [**138**] страницы $785-786$)

$$\int_0^\infty \exp(-by)\cos\left(\frac{u}{\sqrt{x}}y\right)y^{-s}dy = \frac{\Gamma(1-s)}{(u^2/x+b^2)^{(1-s)/2}}\cos\left((1-s)\arctan\frac{u}{\sqrt{x}b}\right).$$

Поэтому

$$IY_1 = \frac{1}{4\pi i}\int_\Delta \frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\Gamma(1-s)\cos\left((1-s)\arctan\frac{u}{\sqrt{x}b}\right)\frac{2^s}{(u^2/x+b^2)^{(1-s)/2}}ds.$$

Так как $b \to 0$ и $u/\sqrt{x} \le 1-\epsilon$, выполнено неравенство $u^2/x + b^2 \le 1 - \epsilon/2$. Следовательно, подынтегральное выражение - это быстро убывающая функция при $s \to \infty$. Перемещая контур интегрирования вправо, мы проходим полюса в точках $s_j = 1 + j$, $j = 0, 1, \dots$ Соответственно

$$IY_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j/2)}{\Gamma(k-j/2)} \frac{(-1)^j}{j!} \cos\left(j \arctan \frac{u}{\sqrt{x}b}\right) \frac{2^{1+j}}{(u^2/x+b^2)^{-j/2}}.$$

Далее подставляем IY_1 в формулу для $\mathfrak{L}_1$ и вычисляем предел при $b \to 0$. Поскольку $u^2/x + b^2 \le 1 - \epsilon/2$, равномерная сходимость по b следует из признака Вейерштрасса. И мы можем переставить порядок суммирования и интегрирования

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{2}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}(1-\epsilon)} \frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+j/2)}{\Gamma(k-j/2)} \frac{(-1)^j \cos(\pi j/2)}{j!} \frac{2^j du}{(u/\sqrt{x})^{-j}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}(1-\epsilon)} \frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k-m)} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{2u}{\sqrt{x}}\right)^{2m} du.$$

Из формулы 1.332(4) [**35**] следует

$$\frac{\cos\left((2k-1)\arcsin c\right)}{\sqrt{1-c^2}} = (-1)^k \sum_{n=1}^{k} \frac{\Gamma(2k-n)}{\Gamma(n)(2k-2n)!}(-1)^n c^{2k-2n}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{2}{\pi} Q_0(1/x) - E_1,$$

где $Q_0(x)$ определяется формулой (4.53) и

$$E_1 := \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{x}(1-\epsilon)}^{\sqrt{x}} \frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(k-m)} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{2u}{\sqrt{x}}\right)^{2m} du.$$

Оценивая подынтегральное выражение по модулю, получаем

$$E_1 \ll_k \frac{\epsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}.$$

□

Лемма 4.7.7. *Вклад интеграла $\mathfrak{I}_2(y/\sqrt{x})$ при подстановке в формулу для $I(k,t,1/x)$ равен*

$$O\left(\epsilon^{1/3}\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \epsilon\frac{x}{x-1}\left(t + \sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)\right).$$

Доказательство. Интегрирование по частям даёт

$$\mathfrak{I}_2(a) = \mathfrak{I}_{2,1}(a) - \mathfrak{I}_{2,2}(a),$$

где

$$\mathfrak{I}_{2,1}(a) := \frac{\sin au}{a} \frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}}\Bigg|_{\sqrt{x}(1-\epsilon)}^{\sqrt{x}(1+\epsilon)},$$

$$\mathfrak{I}_{2,2}(a) := \int_{\sqrt{x}(1-\epsilon)}^{\sqrt{x}(1+\epsilon)} \frac{\sin au}{a} \left(\frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}} \right)' du.$$

Дифференцируя по переменной u, получаем

$$\left(\frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}} \right)' \ll \frac{t}{u^2-1} + \frac{u}{(u^2-1)^{3/2}}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{I}_{2,2}(a) \ll \frac{\epsilon\sqrt{x}}{a} \left(\frac{t}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^{3/2}} \right).$$

С одной стороны, внеинтегральный член может быть оценен тривиально

$$\mathfrak{I}_{2,1}(a) \ll \frac{1}{a\sqrt{x-1}}.$$

С другой стороны, возможно применить оценку

$$\left(\frac{\sin au}{a} \frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}} \right)' \ll \frac{1}{(u^2-1)^{1/2}} + \frac{t}{a(u^2-1)} + \frac{u}{a(u^2-1)^{3/2}}.$$

Тогда из теоремы о среднем следует

$$\mathfrak{I}_{2,1}(a) \ll \epsilon\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{t}{a(x-1)} + \frac{\sqrt{x}}{a(x-1)^{3/2}} \right).$$

Комбинируя все результаты, получаем

$$\mathfrak{I}_2(a) \ll \frac{\epsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \min\left(1, \frac{1}{a\epsilon\sqrt{x}}\right) + \frac{\epsilon\sqrt{x}}{a(x-1)} \left(t + \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right).$$

Оценим

$$\frac{\epsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \min\left(1, \frac{1}{a\epsilon\sqrt{x}}\right) \ll \frac{(\epsilon\sqrt{x})^{1/3}}{a^{2/3}\sqrt{x-1}}$$

и подставим $a := y/\sqrt{x}$. Тогда

$$\mathfrak{I}_2(y/\sqrt{x}) \ll \frac{\epsilon^{1/3}\sqrt{x}}{y^{2/3}\sqrt{x-1}} + \frac{\epsilon}{y}\frac{x}{x-1} \left(t + \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right).$$

Поэтому вклад $\mathfrak{I}_2(y/\sqrt{x})$ при подстановке в формулу $I(k,t,1/x)$ равен

$$O\left(\epsilon^{1/3}\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \epsilon\frac{x}{x-1} \left(t + \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right) \right).$$

□

Лемма 4.7.8. *Вклад интеграла $\mathfrak{I}_3(y/\sqrt{x})$ при подстановке в формулу для $I(k,t,1/x)$ равен*

$$\frac{2}{\pi}(-1)^k Q_1(1/x) + O\left(\epsilon^{1/2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \frac{x^k}{Z^{2k}} \right).$$

Доказательство. Мы должны оценить следующее выражение при $b \to 0$

$$\mathfrak{L}_2 := \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{x}(1+\epsilon)}^{Z} \frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}}\left(\int_0^\infty \exp\left(-by\right)J_{2k-1}(y)\cos\left(\frac{u}{\sqrt{x}}y\right)dy\right)du.$$

Вычисляя интеграл по y аналогично лемме 4.7.6, получаем

$$IY_2 = \frac{1}{4\pi i}\int_\Delta \frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\Gamma(1-s)\cos\left((1-s)\arctan\frac{u}{\sqrt{x}b}\right)\frac{2^s ds}{(u^2/x+b^2)^{(1-s)/2}}.$$

Заметим, что сейчас $u^2/x + b^2 > 1$ и, поэтому, мы двигаем контур интегрирования влево, проходя полюса в точках $s = 1-2k-2j$, $j = 0, 1, \ldots$ Следовательно,

$$IY_2 = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2k+2j)}{\Gamma(2k+j)}\frac{(-1)^j}{j!}\cos\left((2k+2j)\arctan\frac{u}{\sqrt{xb}}\right)\frac{2^{1-2k-2j}}{(u^2/x+b^2)^{k+j}}.$$

Подставляя это в выражение для $\mathfrak{L}_2$ и устремляя b к нулю, получаем

$$\mathfrak{L}_2 := \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{x}(1+\epsilon)}^{Z} \frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)}{\sqrt{u^2-1}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2k+2j)}{\Gamma(2k+j)}\frac{(-1)^k}{j!}\frac{2^{1-2k-2j}}{(u/\sqrt{x})^{2k+2j}}du.$$

Напомним, что

$$\Gamma(2k+2j) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2k+2j-1}\Gamma(k+j)\Gamma(k+j+1/2)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+j)\Gamma(k+j+1/2)}{\Gamma(j+2k)j!}\frac{(-1)^k}{c^{2j+2k}} = \frac{(-1)^k}{c^{2k}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(k)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(2k)}\times$$

$$\times\, {}_2F_1(k, k+1/2, 2k; 1/c^2) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{c^2-1}(c+\sqrt{c^2-1})^{2k-1}}.$$

Последнее равенство следует из формулы 2.8(6) [**10**]. Поэтому

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{x}(1+\epsilon)}^{Z} \frac{\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)(-1)^k du}{\sqrt{u^2-1}\sqrt{u^2/x-1}\left(u/\sqrt{x}+\sqrt{u^2/x-1}\right)^{2k-1}}.$$

Наконец, мы разбиваем интеграл на три части

$$\int_{\sqrt{x}(1+\epsilon)}^{Z} = \int_{\sqrt{x}(1+\epsilon)}^{\infty} - \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}(1+\epsilon)} - \int_Z^\infty.$$

Первая часть вносит вклад равный $\frac{2}{\pi}(-1)^k Q_1(1/x)$, а вторая и третья части оцениваются как

$$O\left(\epsilon^{1/2}\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \frac{x^k}{Z^{2k}}\right).$$

□

Устремляя $Z \to \infty$, $\epsilon \to 0$ в леммах 4.7.6, 4.7.7 и 4.7.8, получаем утверждение теоремы 4.7.4.

4.8. Равномерные асимптотические формулы для гипергеометрической функции

В этом параграфе мы докажем равномерную по k и t асимптотическую формулу для функции $G_k(t;-x)$, где

$$G_k(t;x)=\frac{\Gamma(k+it)\Gamma(k-it)}{\Gamma(2k)}{}_2F_1(k+it,k-it;2k;x). \tag{4.57}$$

Теорема 4.8.1. *Для любого натурального k и действительных t и $x>0$*

$$G_k(t;-x)=\frac{|\Gamma(k+it)|^2}{\Gamma(2k)}\left(1+O\left(\frac{k+t}{\sqrt{k}}\sqrt{x}\right)\right). \tag{4.58}$$

4.8.1. Сведение задачи к оценке интегралов. Отметим, что, используя неравенства [**86**, ф. 5.6.6, ф.5.6.7]

$$\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{\cosh(\pi y)}}\leqslant|\Gamma(x+iy)|\leqslant\Gamma(x),$$

а также формулы (4.20) и (4.57), можно свести случай $|t|\leqslant 1$ к случаю $t=0$. Поэтому далее считаем $t>1$.

Доказательство теоремы 4.8.1 базируется на интегральном представлении Меллина—Барнса [**86**, ф. 15.6.6] гипергеометрической функции

$$G_k(t;-x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(k+it+s)\Gamma(k-it+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(2k+s)}x^s ds,$$

где интегрирование ведется по вертикальной оси $\Re s=c,\ -k<c<0$. Сдвигая контур на прямую $\Re s=1/2$, мы пройдем полюс в точке $s=0$ и получим

$$G_k(t;-x)=\frac{|\Gamma(k+it)|^2}{\Gamma(2k)}+$$
$$+O\left(\sqrt{x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\Gamma(k+\frac12+i(r+t))\Gamma(k+\frac12+i(r-t))\Gamma(-\frac12-ir)|}{|\Gamma(2k+\frac12+ir)|}dr\right). \tag{4.59}$$

Обозначим интеграл в (4.59) через I. Используя соотношения

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\quad\text{и}\quad|\Gamma(1/2+iy)|^2=\frac{\pi}{\cosh(\pi y)}$$

— см. [**86**, ф. 5.4.4, ф.5.5.1], находим

$$I\ll\int_0^\infty\frac{\sqrt{P^-P^+}}{\sqrt{P}}\frac{dr}{\sqrt{\cosh(2\pi r)+\cosh(2\pi t)}\sqrt{1/4+r^2}}, \tag{4.60}$$

где

$$P^\pm=\prod_{n=0}^{k-1}\left((n+1/2)^2+(r\pm t)^2\right),\quad P=\prod_{n=0}^{2k-1}\left((n+1/2)^2+r^2\right).$$

Обозначим целую часть числа y через $[y]$ и положим

$$a = \left[|r-t| - \frac{1}{2}\right], \quad b = \left[|r+t| - \frac{1}{2}\right], \quad c = \left[|r| - \frac{1}{2}\right].$$

Тогда

$$P^- = P_1^- P_2^- R_1^- R_2^-, \quad \text{где}$$

$$P_1^- = \prod_{n=0}^{a} (r-t)^2 = (r-t)^{2a+2}, \quad P_2^- = \prod_{n=a+1}^{k-1} (n+1/2)^2 = \frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma^2(a+3/2)},$$

$$R_1^- = \prod_{n=0}^{a} \left(1 + \frac{(n+1/2)^2}{(r-t)^2}\right), \quad R_2^- = \prod_{n=a+1}^{k-1} \left(1 + \frac{(r-t)^2}{(n+1/2)^2}\right). \tag{4.61}$$

Аналогичные разложения справедливы и для P^+, P

$$P^+ = P_1^+ P_2^+ R_1^+ R_2^+, \quad P = P_3 P_4 R_3 R_4.$$

Заметим, что при $0 \leqslant a < k-1$

$$P_1^- P_2^- = (r-t)^{2a+2} \frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma^2(a+3/2)} \asymp \Gamma^2(k+1/2) e^{2a}. \tag{4.62}$$

Обозначим

$$g_1(z) = \int_0^z \log(1+x^2) \frac{dx}{x^2} = 2\arctan z - \frac{\log(1+z^2)}{z},$$

$$g_2(z) = \int_0^z \log(1+x^2) dx = z\log(1+z^2) - 2z + 2\arctan z.$$

Из определения функций $g_{1,2}(z)$ сразу следует

$$g_1(z) + z g_1'(z) = 2\arctan z, \quad g_2(z) - z g_2'(z) = 2\arctan z - 2z. \tag{4.63}$$

Логарифмируя $R_1^- R_2^-$, применяя формулу суммирования Эйлера—Маклорена и учитывая соотношение $g_1(1) + g_2(1) = \pi - 2$, получаем лемму 4.8.2.

Лемма 4.8.2. *Положим $y^\pm = |r \pm t|$ и $\kappa = k - 1/2$, тогда*

$$R_1^\pm R_2^\pm \asymp \begin{cases} e^{y^\pm(\pi - 2 - g_1(y^\pm/\kappa))}, & \text{если } 0 \leqslant y^\pm \leqslant \kappa, \\ e^{y^\pm g_2(\kappa/y^\pm))}, & \text{если } \kappa < y^\pm. \end{cases} \tag{4.64}$$

Аналогичная доказывается следующее утверждение

Лемма 4.8.3. *Положим $y = |r|$ и $\kappa = 2k - 1/2$, тогда*

$$R_3 R_4 \asymp \begin{cases} e^{y(\pi - 2 - g_1(y/\kappa))}, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant \kappa, \\ e^{y g_2(\kappa/y))}, & \text{если } \kappa < y. \end{cases} \tag{4.65}$$

4.8.2. Разбиение интегралов. Следующим шагом в доказательстве теоремы 4.8.1 является разбиение интеграла из (4.60) в зависимости от значений t и k. Сначала оценим интеграл

$$I_0 = \int_0^{1/2} \frac{|\Gamma(k+\frac{1}{2}+i(r+t))\Gamma(k+\frac{1}{2}+i(r-t))\Gamma(-\frac{1}{2}-ir)|}{|\Gamma(2k+\frac{1}{2}+ir)|}dr \ll$$
$$\ll \frac{\left|\Gamma(k+\frac{1}{2}+it)\right|^2}{\left|\Gamma(2k+\frac{1}{2})\right|}.$$

Используя (4.62) и (4.65), получаем

$$I_0 \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} \begin{cases} \Gamma^2(k+1/2)e^{2t}e^{t(\pi-2-g_1(t/(k-1/2)))}, & t \leqslant k-1/2; \\ t^{2k}e^{tg_2((k-1/2)/t))}, & k-1/2 < t. \end{cases} \tag{4.66}$$

Таким образом, нам остается оценить интеграл

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{\infty} \frac{\sqrt{P^-P^+}}{\sqrt{P}} \frac{dr}{r\sqrt{\cosh(2\pi r)+\cosh(2\pi t)}}. \tag{4.67}$$

Чтобы применить разбиения (4.61), необходимо рассмотреть отдельно случаи

$$a < 0, \quad 0 \leqslant a < k-1, \quad k-1 \leqslant a.$$

При разбиении $I_{1/2}$ мы не будем каждый раз писать подынтегральную функцию для сокращения записи . Вместо этого мы будем указывать, равны ли $P_1^{\pm}$, $P_2^{\pm}$, P_3, P_4 единице. Обозначим

$$\mathfrak{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{1,2}^- \neq 1, \\ 1, & \text{если } P_1^- = 1, \\ 2, & \text{если } P_2^- = 1. \end{cases} \mathfrak{b} = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{1,2}^+ \neq 1, \\ 1, & \text{если } P_1^+ = 1, \\ 2, & \text{если } P_2^+ = 1. \end{cases} \mathfrak{c} = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{3,4} \neq 1, \\ 2, & \text{если } P_4 = 1. \end{cases} \tag{4.68}$$

А вместо записи $\mathfrak{a} = *$, $\mathfrak{b} = \star$, $\mathfrak{c} = \diamond$ будем в интеграле писать три числа $(*, \star, \diamond)$. Сначала разбиваем область интегрирования на подобласти

$$|r-t| < 1/2, \quad 1/2 \leqslant |r-t| < k-1/2, \quad k-1/2 \leqslant |r-t|,$$

возникающие для P^-. Затем разбиваем область интегрирования на подобласти

$$r+t < k-1/2, \quad k-1/2 \leqslant r+t,$$

возникающие для P^+. В конце разбиваем область интегрирования на подобласти

$$r < 2k-1/2, \quad 2k-1/2 \leqslant r,$$

возникающие для P. В итоге получаем следующие разбиения в зависимости от значений t и k :

(1) Если $t > 3k-1$, то

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{2k-1/2}(2,2,0) + \int_{2k-1/2}^{t-k+1/2}(2,2,2) + \int_{t-k+1/2}^{t-1/2}(0,2,2) + \int_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,2) + \\ + \int_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,2) + \int_{t+k-1/2}^{\infty}(2,2,2) = \sum_{j=1}^{6} I_{1,j}. \tag{4.69}$$

(2) Если $2k < t \leqslant 3k-1$, то

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{t-k+1/2}(2,2,0) + \int_{t-k+1/2}^{2k-1/2}(0,2,0) + \int_{2k-1/2}^{t-1/2}(0,2,2) + \int_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,2) + \\ + \int_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,2) + \int_{t+k-1/2}^{\infty}(2,2,2) = \sum_{j=1}^{6} I_{2,j}. \tag{4.70}$$

(3) Если $2k-1 < t \leqslant 2k$, то

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{t-k+1/2}(2,2,0) + \int_{t-k+1/2}^{t-1/2}(0,2,0) + \int_{t-1/2}^{2k-1/2}(1,2,0) + \int_{2k-1/2}^{t+1/2}(1,2,2) + \\ + \int_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,2) + \int_{t+k-1/2}^{\infty}(2,2,2) = \sum_{j=1}^{6} I_{3,j}.$$

(4) Если $k < t \leqslant 2k-1$, то

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{t-k+1/2}(2,2,0) + \int_{t-k+1/2}^{t-1/2}(0,2,0) + \int_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,0) + \int_{t+1/2}^{2k-1/2}(0,2,0) + \\ + \int_{2k-1/2}^{t+k-1/2}(0,2,2) + \int_{t+k-1/2}^{\infty}(2,2,2) = \sum_{j=1}^{6} I_{4,j}.$$

(5) Если $k-1 < t \leqslant k$, то

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{t-1/2}(0,2,0) + \int_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,0) + \int_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,0) + \\ + \int_{t+k-1/2}^{2k-1/2}(2,2,0) + \int_{2k-1/2}^{\infty}(2,2,2) = \sum_{j=1}^{5} I_{5,j}.$$

(6) Если $k/2 < t \leqslant k-1$, то

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{k-t-1/2}(0,0,0) + \int_{k-t-1/2}^{t-1/2}(0,2,0) + \int_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,0) + \int_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,0) + \\ + \int_{t+k-1/2}^{2k-1/2}(2,2,0) + \int_{2k-1/2}^{\infty}(2,2,2) = \sum_{j=1}^{6} I_{6,j}.$$

(7) Если $(k-1)/2 < t \leqslant k/2$, то

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{t-1/2}(0,0,0) + \int_{t-1/2}^{k-t-1/2}(1,0,0) + \int_{k-t-1/2}^{t+1/2}(1,2,0) + \int_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,0) + \\ + \int_{t+k-1/2}^{2k-1/2}(2,2,0) + \int_{2k-1/2}^{\infty}(2,2,2) = \sum_{j=1}^{6} I_{7,j}.$$

(8) Если $1 < t \leqslant (k-1)/2$, то

$$I_{1/2} = \int_{1/2}^{t-1/2} (0,0,0) + \int_{t-1/2}^{t+1/2} (1,0,0) + \int_{t+1/2}^{k-t-1/2} (0,0,0) + \int_{k-t-1/2}^{t+k-1/2} (0,2,0) + \\ + \int_{t+k-1/2}^{2k-1/2} (2,2,0) + \int_{2k-1/2}^{\infty} (2,2,2) = \sum_{j=1}^{6} I_{8,j}. \tag{4.71}$$

4.8.3. Оценки интегралов. В дальнейших вычислениях ключевую роль играет следующее утверждение

Лемма 4.8.4. *Если $h(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[x_1, x_2]$, то*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} e^{h(x)} dx \right| \ll \frac{\max\left(e^{h(x_1)},\ e^{h(x_2)}\right)}{\min\limits_{x \in [x_1, x_2]} |h'(x)|}.$$

Введем обозначения для аргументов функций $g_{1,2}(z)$ из лемм 4.8.2 и 4.8.3:

$$\theta_1 = \frac{k}{|r-t|}, \quad \theta_2 = \frac{k}{|r+t|}, \quad \theta_3 = \frac{2k}{r},\ \vartheta_1 = \theta_1^{-1},\ \vartheta_2 = \theta_2^{-1},\ \vartheta_3 = \theta_3^{-1}.$$

Отметим, что мы заменили $(k-1/2)$ на k. Такая замена даст погрешность $O(1)$. Для демонстрации метода мы оценим интегралы из формулы (4.69). Остальные семь случаев доказываются аналогично.

(1) Оценим $I_{1,1}$. Из (4.67), (4.68), (4.69), (4.61) и (4.65) следует, что

$$I_{1,1} \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} \int_{1/2}^{2k-1/2} (t-r)^k (t+r)^k P(r) \frac{dr}{re^r},$$

$$P^2(r) = e^{(t-r)g_2(\theta_1) + (t+r)g_2(\theta_2) - r(\pi - 2 - g_1(\vartheta_3))}.$$

Чтобы применить лемму 4.8.4, запишем оценку для $I_{1,1}$ в виде

$$I_{1,1} \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} \int_{1/2}^{2k-1/2} e^{f_{1,1}(r)} dr,$$

$$f_{1,1}(r) = k\log(t-r) + k\log(t+r) - \log r - r + \log P(r).$$

Используя (4.63), находим

$$f'_{1,1}(r) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{r} - \arctan\theta_1 + \arctan\theta_2 + \arctan\vartheta_3 < \\ < -\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{3} + \arctan 1 < 0.$$

Применяя лемму 4.8.4 и используя неравенство (4.66), получаем

$$I_{1,1} \ll \frac{e^{f_{1,1}(1/2)}}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} \ll \frac{t^{2k}}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} e^{tg_2(k/t)} \ll I_0.$$

Мы хотим доказать, что $I_{1,j} \leqslant I_{1,j-1}$. Заметим, что для этого достаточно показать, что $f'_{1,j}(r) < 0$ и $|f'_{1,j}(r)| \gg 1$.

(2) Оценим $I_{1,2}$. Из (4.67), (4.68),(4.69), (4.61) и (4.65) следует, что

$$I_{1,2} \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)} \int_{2k-1/2}^{t-k+1/2} (t-r)^k (t+r)^k P(r) \frac{dr}{r^{2k+1}} =$$
$$= \frac{1}{\cosh(\pi t)} \int_{2k-1/2}^{t-k+1/2} e^{f_{1,2}(r)} dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(t-r)g_2(\theta_1)+(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$

$$f_{1,2}(r) = k\log(t-r) + k\log(t+r) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Используя (4.63), получаем

$$f'_{1,2}(r) = -\frac{1}{r} - \arctan\theta_1 + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 <$$
$$< -\arctan\frac{2k}{r} - \arctan\frac{2kr}{t^2+k^2-r^2} < 0.$$

Следовательно, $I_{1,2} \leqslant I_{1,1}$.

(3) Оценим $I_{1,3}$. Из (4.67), (4.68),(4.69), (4.61), (4.62) и (4.65) следует, что

$$I_{1,3} \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)} \int_{t-k+1/2}^{t-1/2} \Gamma(k+1/2) e^{t-r} (t+r)^k P(r) \frac{dr}{r^{2k+1}} =$$
$$= \frac{\Gamma(k+1/2)}{\cosh(\pi t)} \int_{t-k+1/2}^{t-1/2} e^{f_{1,3}(r)} dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(t-r)(\pi-2-g_1(\vartheta_1))+(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$

$$f_{1,3}(r) = t - r + k\log(t+r) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Применяя (4.63), находим

$$f'_{1,3}(r) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{r} + \arctan\vartheta_1 + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 <$$
$$< -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{k}{2t-k+1/2} < 0.$$

Следовательно, $I_{1,3} \leqslant I_{1,2}$.

(4) Оценим $I_{1,4}$. Из (4.67), (4.68), (4.69), (4.61), (4.62) и (4.65) следует, что

$$I_{1,4} \ll \frac{\Gamma(k+1/2)}{\cosh(\pi t)} \int_{t-1/2}^{t+1/2} (t+r)^k P(r) \frac{dr}{r^{2k+1}} = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\cosh(\pi t)} \int_{t-1/2}^{t+1/2} e^{f_{1,4}(r)} dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$

$$f_{1,4}(r) = k\log(t+r) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Используя (4.63), получаем

$$f'_{1,4}(r) = -\frac{1}{r} + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 < 0.$$

Следовательно, $I_{1,4} \leqslant I_{1,3}$.

(5) Оценим $I_{1,5}$. Из (4.67), (4.68), (4.69), (4.61), (4.62) и (4.65) следует, что

$$I_{1,5} \ll \int_{t+1/2}^{t+k-1/2} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\cosh(\pi r)}(t+r)^k e^{r-t} P(r)\frac{dr}{r^{2k+1}} = \Gamma(k+1/2)\int_{t+1/2}^{t+k-1/2} e^{f_{1,5}(r)}dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(r-t)(\pi-2-g_1(\vartheta_1))+(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$

$$f_{1,5}(r) = -\pi r + r - t + k\log(t+r) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Применяя (4.63), находим

$$f'_{1,5}(r) = -\frac{1}{r} - \frac{\pi}{2} - \arctan\vartheta_1 + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 < -\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{k}{2t} < 0.$$

Следовательно, $I_{1,5} \leqslant I_{1,4}$.

(6) Оценим $I_{1,6}$. Из (4.67), (4.68), (4.69),(4.61) и (4.65) следует, что

$$I_{1,6} \ll \int_{t+k-1/2}^{\infty} \frac{(r+t)^k(r-t)^k}{\cosh(\pi r)}P(r)\frac{dr}{r^{2k+1}} = \int_{t+k-1/2}^{\infty} e^{f_{1,6}(r)}dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(r-t)g_2(\theta_1)+(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$

$$f_{1,6}(r) = -\pi r + k\log(r+t) + k\log(r-t) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Используя (4.63), получаем

$$f'_{1,6}(r) = -\frac{1}{r} - \pi + \arctan\theta_1 + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 < 0.$$

Следовательно, $I_{1,6} \leqslant I_{1,5}$.

Итак, мы доказали, что $I_{1/2} \ll I_0$ при $t > 3k-1$. Доказательство того, что $I_{1/2} \ll I_0$ в остальных случаях (4.70)–(4.71) аналогично приведенному. Подставляя оценку (4.66) в (4.59), получаем

$$G_k(t;-x) = \frac{\left|\Gamma(k+it)\right|^2}{\Gamma(2k)} + O\left(\sqrt{x}\frac{\left|\Gamma(k+\frac{1}{2}+it)\right|^2}{\left|\Gamma(2k+\frac{1}{2})\right|}\right). \tag{4.72}$$

Обозначим $d = [\,|t|\,]$. Применяя соотношения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{и} \quad |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{y\sinh(\pi y)},$$

получаем $|\Gamma(k+it)|^2 = P_5P_6R_5R_6|\Gamma(it)|^2$, где

$$P_5 = \prod_{n=0}^{d} t^2 = t^{2d+2}, \quad P_6 = \prod_{n=d+1}^{k-1} n^2 = \frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma^2(d+1)},$$

$$R_5 = \prod_{n=0}^{d} \left(1+\frac{n^2}{t^2}\right), \quad R_6 = \prod_{n=d+1}^{k-1} \left(1+\frac{t^2}{n^2}\right).$$

Для произведения R_5R_6 справедлива оценка из леммы 4.8.2 с $y = |t|$ и $\kappa = k-1$. Заметим, что при $0 < d < k-1$

$$P_5P_6 = t^{2d+2}\frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma^2(d+1)} \asymp \Gamma^2(k)de^{2d}.$$

Таким образом, мы получаем

$$|\Gamma(k+it)|^2 \asymp e^{-\pi|t|} \begin{cases} \Gamma^2(k)e^{2t}e^{t(\pi-2-g_1(t/(k-1)))}, & t \leqslant k-1; \\ t^{2k-1}e^{tg_2((k-1)/t))}, & k-1 < t. \end{cases} \tag{4.73}$$

Тогда формула (4.58) следует из (4.73), (4.72) и (4.66) и оценки

$$\Gamma(n+1/2) \asymp \Gamma(n)\sqrt{n}.$$

Теорема 4.8.1 доказана.

4.9. Различные оценки на гипергеометрические функции

Пусть $\Re\lambda > 1 + \Re u \geq 1$, $\Re v = 0$, $\Im v = t$, $t \in \mathbf{R}$ и $T := 3 + |t|$. В данном разделе мы рассмотрим функцию, заданную при помощи двух интегралов

$$H_\lambda(u,v,z) = \begin{cases} 1/(2\cos\pi(\lambda-u))z^{1/2-\lambda}I_1(1/z) & z > 0 \\ 1/2(-z)^{1/2-\lambda}I_2(-1/z) & z < 0 \end{cases},$$

где

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=\Delta} \Gamma(u,v,\lambda;s)\sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right)z^{s/2}ds, \tag{4.74}$$

$$I_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Re s=\Delta} \Gamma(u,v,\lambda;s)z^{s/2}ds$$

с $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$, а функция $\Gamma(u,v,\lambda;s)$ определена в (4.19).

Лемма 4.9.1. *Для $z \leq 1$, $z \neq 0$, $\Re u \geq 0$*

$$H_\lambda(u,v;z) = \frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(2\lambda)}{}_2F_1(\lambda-u+v,\lambda-u-v,2\lambda;z). \tag{4.75}$$

Доказательство. Данная формула доказывается подсчетом вычетов при перемещении контура интегрирования влево.

□

Из (4.57), (4.75) и доказанной нами ранее теоремы 4.8.1 можно получить следующую оценку.

Лемма 4.9.2. *Для $z > 0$, $k \geq 1$ справедлива оценка*

$$\cosh(\pi t) H_k(0, v, -z) \ll \frac{T^{2k-1}}{2^{2k}\sqrt{k}} \left[1 + O\left(z^{1/2}\frac{k+T}{\sqrt{k}}\right)\right]. \tag{4.76}$$

Из (4.75), (3.65) и (3.74) следует, что

Лемма 4.9.3. *Для $z > 0$, $k \geq 1$*

$$\cosh(\pi t) H_k(0, v, -z) \ll z^{-k+1/2}. \tag{4.77}$$

Лемма 4.9.4. *Для $z > 0$, $k \geq 1$*

$$\cosh(\pi t) H_k(0, v, -z) \ll \frac{z^{-k}}{\sqrt{T}} \left[1 + \log(zk) + O\left(z^{-1/2}\frac{k+T}{\sqrt{T}}\right)\right]. \tag{4.78}$$

Доказательство. Из представления Меллина-Барнса(формула 15.6.6 [**86**]) следует

$$H_k(0, v, -z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re s = c} \frac{\Gamma(k+it+s)\Gamma(k-it+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(2k+s)} x^s ds$$

при $-k < c < 0$. Перемещая контур интегрирования на прямую $-k - 1/2$, получаем

$$H_k(0, v, -z) = z^{-k+it}\Gamma(2it)\frac{\Gamma(k-it)}{\Gamma(k+it)} + z^{-k-it}\Gamma(-2it)\frac{\Gamma(k+it)}{\Gamma(k-it)} + O\left(z^{-k-1/2}J\right),$$

где

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\Gamma(-1/2 + i(r+t))\Gamma(-1/2 + i(r-t))\Gamma(k+1/2-ir)}{\Gamma(k-1/2+ir)}\right| dr.$$

Оценка на последний интеграл следует из стандартных соотношений для Гамма функции

$$J \ll \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^2+r^2}(\cosh 2\pi r + \cosh 2\pi t)^{-1/2}}{\sqrt{1/4+(r-t)^2}\sqrt{1/4+(r+t)^2}} dr \ll \frac{k+t}{T}\frac{\log T}{\exp(\pi t)}.$$

Поэтому для $t \neq 0$ справедливо неравенство

$$\cosh \pi t H_k(0, v, -z) \ll \frac{z^{-k}}{\sqrt{T}}\left(1 + O\left(\frac{z+t}{\sqrt{zT}}\right)\right).$$

Вычисляем предел при $t \to 0$

$$H_k(0, 0, -z) = z^{-k}(\log z - 2\gamma - 2\psi(k)) + O(z^{-k-1/2}k).$$

Две последние оценки дают результат леммы. □

Лемма 4.9.5. *Для $0 < z < 1$, $k \geq 1$*

$$z^k H_k(0, v, z) \ll \sqrt{\frac{z}{1-z}}\frac{1}{k+t}. \tag{4.79}$$

Доказательство. Применяя соотношение

$$ {}_1F_2(a,b,c;z) = (1-z)^{-a}\,{}_1F_2(a,c-b,c;z/(z-1)), $$

получаем

$$ z^k H_k(0,v,z) = \frac{\Gamma(k-v)\Gamma(k+v)}{\Gamma(2k)}\frac{z^k}{(1-z)^{k-v}} \times {}_1F_2\left(k-v,k-v,2k;-\frac{z}{1-z}\right) = $$
$$ = \frac{\Gamma(k+v)}{\Gamma(k-v)}\frac{z^k}{(1-z)^{k-v}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re s=c}\frac{\Gamma^2(k-v+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(2k+s)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^s ds, $$

где $-k < c < 0$. Передвигаем контур интегрирования на прямую $c = -k + 1/2$

$$ z^k H_k(0,v,z) \ll \sqrt{\frac{z}{1-z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dr}{\cosh\pi(r-t)\sqrt{r^2+(k-1/2)^2}}. $$

Далее оцениваем последний интеграл, разбивая его на две части $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty}$. Для $t \geq 0$ имеем

$$ \int_{-\infty}^{0}\frac{dr}{\cosh\pi(r-t)\sqrt{r^2+(k-1/2)^2}} \ll \frac{\exp(-\pi t)}{k}. $$

Для $t < k - 1/2$ справедлива оценка

$$ \int_0^{+\infty}\frac{dr}{\cosh\pi(r-t)\sqrt{r^2+(k-1/2)^2}} \ll \frac{1}{k}, $$

а для $t > k - 1/2$ выполнено неравенство

$$ \int_0^{+\infty}\frac{dr}{\cosh\pi(r-t)\sqrt{r^2+(k-1/2)^2}} \ll \frac{1}{t}. $$

Доказательство завершено. □

На основе (4.75), (3.65) и (3.66) получаем, что

Лемма 4.9.6. *Для* $0 < z \leq 1/2$, $k \geq 1$

$$ z^k H_k(0,v,z) \ll \frac{z^k}{2^k}. \tag{4.80} $$

Лемма 4.9.7. *Пусть* $\Re v = 0$ *и* $\Re\lambda > \Re u > 0$. *Для* $0 < z < 1$

$$ 2\cos\pi(\lambda-u)H_\lambda(u,v,1/z) = $$
$$ = 2\pi 2^{2u} z^{\lambda-u}\int_0^\infty J_{2\lambda-1}(x)k^+(x\sqrt{z},1/2+v)x^{-2u}dx. \tag{4.81} $$

Доказательство. По определению

$$ 2\cos\pi(\lambda-u)H_\lambda(u,v,1/z) = z^{\lambda-1/2}I_1(z). $$

Из представления (4.51) следует, что преобразование Меллина от J-функции Бесселя равно

$$ \widehat{J}_{2\lambda-1}(s) = 2^{s-1}\frac{\Gamma(\lambda-1/2+s/2)}{\Gamma(\lambda+1/2-s/2)}, \quad 1-2\lambda < \Re s < 3/2. $$

Пусть

$$\gamma(1/2-u-s/2,1/2+v):=\frac{2^{-2u-s}}{\pi}\Gamma(1/2-u-s/2+v)\Gamma(1/2-u-s/2-v),$$

$$g_1(x)=:x^{-2u}k^+(x\sqrt{z},1/2+v),$$

где k^+ определяется формулой (4.50). Тогда

$$z^{s/2}\gamma(1/2-u-s/2,1/2+v)\sin\pi(u+s/2)=z^{1/2-u}\widehat{g}_1(1-s).$$

Следовательно,

$$I_1(z)=z^{1/2-u}\frac{2\pi 2^{2u}}{2\pi i}\int_{\Re s=\Delta}\widehat{J}_{2\lambda-1}(s)\widehat{g}_1(1-s)ds.$$

Заметим, что для $1/2-2\Re u<\Delta<1-2u$ выполнено

$$\int_0^\infty|g_1(x)x^{-\Delta}|dx<\infty,$$

и для $\Delta<0$ справедливо

$$\int_{\Re s=\Delta}\left|\widehat{J}_{2\lambda-1}(s)\right|ds<\infty.$$

Поэтому для $\Re u>1/4$ и $\Re v=0$ верно равенство

$$I_1(z)=2\pi 2^{2u}z^{1/2-u}\int_0^\infty g_1(x)J_{2\lambda-1}(x)dx.$$

Так как обе части уравнения (4.81) являются голоморфными функциями в большей области $\Re\lambda>\Re u>0$, результат леммы также является справедливым в этой области. □

4.10. Второй момент: $\nu\geq 3$

В данном разделе теорема 4.1.7 будет доказана для $k\geq 2$. Наиболее сложный случай $k=1$ может быть доказан применением методов главы 3 к результатам данной главы. Мы пропустим детали доказательства и заметим, что случай $k=1$ требует лишь незначительных изменений в сравнении с главой 3.

Лемма 4.10.1. *Пусть* $\Re u>1/2$, $\Re v=0$, $k\geq 2$, $N=p^\nu$ *and* $\nu\geq 3$. *Тогда*

$$M_2(l,u,v)=S(l,u,v;N)-\frac{1}{p}S(l,u,v;N/p),$$

$$S(l,u,v;N)=1_{(l,p)=1}\frac{1}{l^{1/2+u-v}}\sum_{d|l}d^{1/2+u-v}\sum_{\substack{m,n=1\\(mn,p)=1}}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\Delta_{2k,N}\left(md,n\right), \tag{4.82}$$

где $\Delta_{2k,N}$ *задан формулой* (4.24).

Доказательство. По определению

$$M_2(l,u,v)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v\sum_{f\in H_{2k}^*(N)}^{h}\lambda_f(l)\lambda_f(m)\lambda_f(n).$$

Из свойств мультипликативности (4.3) следует, что

$$M_2(l,u,v)=\sum_{\substack{d|l\\(d,p)=1}}\sum_{m\equiv 0\pmod d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v\Delta_{2k,N}^*\left(\frac{ml}{d^2},n\right)=$$

$$=\sum_{\substack{d|l\\(d,p)=1}}\frac{1}{d^{1/2+u-v}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v\Delta_{2k,N}^*\left(\frac{ml}{d},n\right).$$

В соответствии с теоремой 4.3.2

$$\Delta_{2k,N}^*\left(\frac{ml}{d},n\right)\neq 0 \text{ только если } \left(\frac{ml}{d}n,p\right)=1.$$

Поэтому $\left(\frac{l}{d},p\right)=1$. Так как $(d,p)=1$, получаем $(l,p)=1$. Заметим, что условие $(d,p)=1$ в суммирование по d выполнено при $(l,p)=1$, поскольку $d|l$. Следовательно,

$$M_2(l,u,v)=\sum_{d|l}\frac{1_{(l,p)=1}}{d^{1/2+u-v}}\sum_{\substack{m,n=1\\(mn,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v\Delta_{2k,N}^*\left(\frac{ml}{d},n\right)=$$

$$=\frac{1_{(l,p)=1}}{l^{1/2+u-v}}\sum_{d|l}d^{1/2+u-v}\sum_{\substack{m,n=1\\(mn,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v\Delta_{2k,N}^*\left(md,n\right).$$

Применяя теорему 4.3.2, получаем результат леммы. □

Определим

$$T_1(l,u,v;N)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v\Delta_{2k,N}\left(md,n\right),\tag{4.83}$$

$$T_2(l,u,v;N)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(pmn)^{1/2+u}}\left(\frac{pm}{n}\right)^v\Delta_{2k,N}\left(pmd,n\right),\tag{4.84}$$

$$T_3(l,u,v;N)=\sum_{\substack{m,n=1\\(m,p)=1}}^{\infty}\frac{1}{(pmn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{pn}\right)^v\Delta_{2k,N}\left(md,pn\right),$$

и для $i=1,2,3$ положим

$$S_i(l,u,v;N)=\frac{1_{(l,p)=1}}{l^{1/2+u-v}}\sum_{d|l}d^{1/2+u-v}T_i(l,u,v;N).\tag{4.85}$$

Лемма 4.10.2. *Справедливо следующее разложение*

$$S(l,u,v;N)=S_1(l,u,v;N)-S_2(l,u,v;N)-S_3(l,u,v;N).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{\substack{m,n=1\\(mn,p)=1}}^{\infty} f(m,n) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f(m,n) - \sum_{m,n=1}^{\infty} f(pm,n) - \sum_{\substack{m,n=1\\(m,p)=1}}^{\infty} f(m,pn).$$

Применяя данное равенство к $S(l,u,v;N)$, получаем требуемый результат.

□

Лемма 4.10.3. *Суммы $S_3(l,u,v;N)$ и $S_3(l,u,v;N/p)$ обнуляются.*

Доказательство. рассмотрим

$$\Delta_{2k,N}(dm,pn) = \delta(dm,pn) + 2\pi i^{-2k} \sum_{q\equiv \pmod N} \frac{Kl(dm,pn;q)}{q} J_{2k-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{dmpn}}{q}\right).$$

Из условий $(d,p)=1$ и $(m,p)=1$ следует, что $\delta(dm,pn)=0$. Так как $q\equiv 0 \pmod{p^2}$, из леммы 4.2.1 получаем $Kl(dm,pn;q)=0$ и, поэтому, $T_3(l,u,v;N)=0$. □

Введём

$$D_N^*(u,v;\lambda) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(mn)^{1/2+u}} \left(\frac{m}{n}\right)^v \sum_{q\equiv 0 \pmod N} \frac{Kl(dm,n;q)}{q} J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{dmn}}{q}\right). \tag{4.86}$$

Формула следа Петерссона 4.3.1 позволяет получить следующее представление для (4.83).

Лемма 4.10.4. *Пусть $\Re u > 3/4$ and $\Re v = 0$. Тогда*

$$T_1(l,u,v;N) = \frac{\zeta(1+2u)}{d^{1/2+u+v}} + 2\pi i^{2k} D_N^*(u,v;\lambda). \tag{4.87}$$

Для $\Re s > 1 + |\Re v|$ пусть

$$G^*(s,v;d,q) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{Kl(md,n;q)}{(mn)^s} \left(\frac{m}{n}\right)^v.$$

Это обобщение функции $G(s,v;q)$, определенной в (3.12), а именно, $G^*(s,v;1,q) = G(s,v;q)$.

Лемма 4.10.5. *Для $q\in\mathbf{N}$ и $v\in\mathbf{C}$ функция $G^*(s,v;d,q)$ может быть голоморфно продолжена на всю комплексную плоскость как функция комплексной переменной s. Кроме того, для $\Re s < -|\Re v|$ выполнено*

$$G^*(s,v;d,q) = 2\Gamma(1-s+v)\Gamma(1-s-v)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2s-2} \times$$
$$\times \left(-\cos\pi s \sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn-d)}{(mn)^{1-s}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v} + \cos\pi v \sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn+d)}{(mn)^{1-s}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v}\right).$$

Доказательство. Это может быть доказано аналогично лемме 3.2.1 при помощи соотношения

$$\sum_{\substack{a,b=0\\ ad\equiv m \pmod q\\ b\equiv n \pmod q}}^{q-1} \delta_q(ab-1) = \sum_{\substack{a=0\\ ad\equiv m \pmod q}}^{q-1} \delta_q(an-1) = \delta_q(mn-d)\,1_{(n,q)=1}\,.$$

□

Применяя лемму 4.10.5 и повторяя схему доказательства лемм 3.3.3-3.3.5, получаем следующую лемму.

Лемма 4.10.6. *Пусть* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$. *Тогда*

$$D_N^*(u,v;\lambda) = \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i} \int\limits_{\Re s=\Delta} \Gamma(u,v,\lambda;s)\times$$
$$\times \left(\sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right) \sum_{q\equiv 0 \pmod N} \sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn-d)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v} + \right.$$
$$\left. + \cos\pi v \sum_{q\equiv 0 \pmod N} \sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn+d)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v} \right) \frac{ds}{d^{s/2}}, \quad (4.88)$$

где $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$.

Лемма 4.10.7. *Для* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$ *выполнено соотношение*

$$D_N^*(u,v;\lambda) = \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i N^{2u}} \int\limits_{\Re s=\Delta} \Gamma(u,v,\lambda;s)\times$$
$$\times \left(\zeta(2u)\sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right) \sum_{r|d} \frac{\mu(d/r)}{d^{1/2+u-v-s/2}} \frac{\tau_v(r)}{r^{v-2u}} + \right.$$
$$+ \sin\pi\left(u+\frac{s}{2}\right) \sum_{r|d} \frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{1/2+u-v-s/2}} \sum_{\substack{n\geq(1-r)/N\\ n\neq 0}} \frac{\tau_u(|n|)\tau_v(nN+r)}{|n|^u(nN+r)^{1/2-u-s/2}} +$$
$$\left. + \cos\pi v \sum_{r|d} \frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{1/2+u-v-s/2}} \sum_{n\geq(1+r)/N} \frac{\tau_u(n)\tau_v(nN-r)}{n^u(nN-r)^{1/2-u-s/2}} \right) \frac{ds}{d^{s/2}},$$

где $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$.

Доказательство. Рассмотрим

$$P(z) := \sum_{q\equiv 0 \pmod N} \sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn-d)}{q^{2u}(mn)^z} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v} = \frac{1}{N^{2u}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,n=1\\(n,qN)=1}}^{\infty} \frac{\delta_{qN}(mn-d)}{q^{2u}(mn)^z} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v}.$$

Напомним, что $(d,N)=1$. Поэтому из условия $mn \equiv d \pmod{qN}$ следует, что $(n,N)=1$. Соответственно, $(n,qN)=1$ может быть заменено на $(n,q)=1$ в сумме по n. Избавимся от

последнего условия взаимной простоты применением формулы обратного преобразования Мёбиуса

$$P(z)=\frac{1}{N^{2u}}\sum_{m,n,q=1}^{\infty}\frac{\delta_{qN}(mn-d)}{q^{2u}(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}\sum_{k|(n,q)}\mu(k)=$$

$$=\frac{1}{N^{2u}}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\sum_{q\equiv 0\pmod k}\frac{1}{q^{2u}}\sum_{\substack{m,n=1\\ n\equiv 0\pmod k}}^{\infty}\frac{\delta_{qN}(mn-d)}{(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}=$$

$$=\frac{1}{N^{2u}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^{2u+z-v}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_{qkN}(mnk-d)}{(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}.$$

Из условия $mnk\equiv d\pmod{qNk}$ следует, что $k|d$. Заменяя переменную $r:=\frac{d}{k}$, получаем

$$P(z)=\frac{1}{N^{2u}}\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{2u+z-v}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_{qN}(mn-r)}{(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}.$$

Пусть $mn:=r+aN$ и $a\in\mathbf{Z}$. Тогда

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_{qN}(mn-r)}{(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}=$$

$$=\zeta(2u)\frac{\tau_v(r)}{r^z}+\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{a\geq(1-r)/N\\ a\neq 0}}\frac{\delta_{qN}(aN)}{q^{2u}(r+aN)^z}\sum_{mn=r+aN}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}=$$

$$=\zeta(2u)\frac{\tau_v(r)}{r^z}+\sum_{\substack{a\geq(1-r)/N\\ a\neq 0}}\frac{\tau_v(r+aN)\tau_u(|a|)}{(r+aN)^z|a|^u}.$$

Аналогично

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_{qN}(mn+r)}{(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}=\sum_{a\geq(1+r)/N}\frac{\tau_v(aN-r)\tau_u(a)}{(aN-r)^z a^u}.$$

Применяя последние три формулы к (4.88), получаем утверждение. $\square$

Лемма 4.10.8. *Для* $\Re\lambda > 1$, $\Re u = 0$, $\Re v = 0$ *и* $u \neq 0$

$$D_N^*(u,v;\lambda) = \frac{2(2\pi)^{2u-1}}{N^{2u}}\zeta(2u)\Gamma(2u)\cos\pi(\lambda-u)\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\lambda-u+v)\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(\lambda+u+v)\Gamma(\lambda+u-v)}\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{d^{1/2+u-v}}\frac{\tau_v(r)}{r^{v-2u}}+$$
$$+\frac{2(2\pi)^{2u-1}}{N^{2u}}\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{d^{1/2+u-v}r^{-\lambda-u+v}}\times$$
$$\times\left(\cos\pi(\lambda-u)\sum_{\substack{n\geq(1-r)/N\\ n\neq 0}}\frac{\tau_u(|n|)\tau_v(nN+r)}{|n|^u(nN+r)^{\lambda-u}}H_\lambda\left(u,v;\frac{r}{nN+r}\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\pi v\sum_{n\geq(1+r)/N}\frac{\tau_u(n)\tau_v(nN-r)}{n^u(nN-r)^{\lambda-u}}H_\lambda\left(u,v;\frac{-r}{nN-r}\right)\right). \quad (4.89)$$

Доказательство. Доказательство аналогично лемме 3.3.7. □

Пусть

$$V_N(l) = \frac{2(-1)^k}{l^{1/2-v}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\left(V_{N,1}(r)+V_{N,2}(r)+V_{N,3}(r)\right), \quad (4.90)$$

где

$$V_{N,1}(r) = \frac{\cos\pi v}{r^{-k+v}}\sum_{n\geq(1+r)/N}\frac{\tau_0(n)\tau_v(nN-r)}{(nN-r)^k}H_k\left(0,v;\frac{-r}{nN-r}\right), \quad (4.91)$$

$$V_{N,2}(r) = \frac{(-1)^k}{r^{-k+v}}\sum_{(1-r)/N\leq n\leq -1}\frac{\tau_0(|n|)\tau_v(nN+r)}{(nN+r)^k}H_k\left(0,v;\frac{r}{nN+r}\right), \quad (4.92)$$

$$V_{N,3}(r) = \frac{(-1)^k}{r^{-k+v}}\sum_{n\geq 1}\frac{\tau_0(n)\tau_v(nN+r)}{(nN+r)^k}H_k\left(0,v;\frac{r}{nN+r}\right). \quad (4.93)$$

Лемма 4.10.9. *Предположим, что* $\Re v = 0$ *и* $(l,p) = 1$. *Тогда*

$$S_1(l,0,v;N) = \frac{\sigma_{-2v}(l)}{l^{1/2-v}}\left(\log N + 2(\gamma-\log 2\pi)+\psi(k+v)+\psi(k-v)\right)-$$
$$-\frac{1}{l^{1/2-v}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu\left(\frac{d}{r}\right)\tau_v(r)r^{-v}\log r + V_N(l) \quad (4.94)$$

и

$$S_2(l,0,v;N) = \frac{1}{p}\frac{\sigma_{-2v}(l)}{l^{1/2-v}}\times$$
$$\times\left(\log(N/p)+2\gamma-2\log 2\pi+\psi(k+v)+\psi(k-v)\right)-$$
$$-\frac{1}{pl^{1/2-v}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu\left(\frac{d}{r}\right)\tau_v(r)r^{-v}\log r+\frac{1}{p}V_{N/p}(l). \quad (4.95)$$

Доказательство. Подставим (4.89) в (4.87) и продолжим $S_1(l,u,v;N)$ голоморфно в точку $u=0$. Заметим, что вычисление $H_\lambda(u,v;z)$ при $z>1$ требует дополнительных пояснений. Во-первых, мы используем представление $H_\lambda(u,v;z)$ (для $\Re u>0$) из леммы 4.9.7. Но из теоремы 4.7.4 следует, что интеграл в правой части (4.81) сходится при $u=0$, и поэтому мы можем положить $u=0$ в конечном итоге. Это позволяет использовать (4.81) при $u=0$, чтобы вычислить $H_\lambda(0,v;z)$ при $z>1$.

Так как $k\geq 2$ все ряды сходятся, и мы можем положить $\lambda=k$. Чтобы показать, что $S_1(l,u,v;N)$ не имеет полюса в точке $u=0$, мы рассмотрим его слагаемые

$$\left(\frac{d}{l}\right)^u\left(\frac{\zeta(1+2u)}{d^{1/2+u+v}}+\left(\frac{4\pi^2}{N}\right)^{2u}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+u-v)}\zeta(1-2u)\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{d^{1/2+u-v}}\frac{\tau_v(r)}{r^{v-2u}}\right).$$

Из преобразования Мёбиуса получаем

$$\sum_{r|d}\mu(r)\sigma_{-2v}(d/r)=d^{-2v}.$$

Следовательно,

$$d^{-1/2-v}=\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{d^{1/2-v}}\frac{\tau_v(r)}{r^v}$$

и особенность в точке $u=0$ исчезает. Вычисляя предел $S_1(l,u,v;N)$ при $u\to 0$, получаем (4.94). Равенство (4.95) может быть доказано аналогично. □

Используя леммы 4.10.1, 4.10.2, 4.10.3 и 4.10.9, доказываем следующую теорему.

Теорема 4.10.10. *Для* $\Re v=0$

$$\begin{aligned}M_2(l,0,v)=\left(\frac{\phi(N)}{N}\right)^2\frac{\sigma_{-2v}(l)}{l^{1/2-v}}\times\\ \times\left(\log N+2\gamma-2\log 2\pi+2\frac{\log p}{p-1}+\psi(k+v)+\psi(k-v)\right)-\\ -\left(\frac{\phi(N)}{N}\right)^2\frac{1}{l^{1/2-v}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_v(r)r^{-v}\log r+\\ +O\left(V_N(l)+\frac{1}{p}V_{N/p}(l)+\frac{1}{p^2}V_{N/p^2}(l)\right).\end{aligned}$$

4.11. Второй момент: $\nu=2$

В данном разделе мы рассмотрим наиболее сложный случай $N=p^2$.

Лемма 4.11.1. *Предположим, что* $\Re u>1/2$, $\Re v=0$, $k\geq 2$, $N=p^2$, p *- простое число. Тогда*

$$M_2(l,u,v)=S(l,u,v;p^2)-\frac{1}{p-p^{-1}}S(l,u,v;p),$$

где $S(l,u,v;N)$ *определяется формулой* (4.82).

Применяя леммы 4.10.2, 4.10.3 и 4.10.9, получаем, что для $S(l,0,v;p^2)$ справедлива асимптотическая формула при $N=p^2$

$$S(l,0,v;p^2)=\frac{\phi(N)}{N}\frac{\sigma_{-2v}(l)}{l^{1/2-v}}\times$$
$$\times\left(\log N+2\gamma-2\log 2\pi+\frac{\log p}{p-1}+\psi(k+v)+\psi(k-v)\right)-$$
$$-\frac{\phi(N)}{N}\frac{1}{l^{1/2-v}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_v(r)r^{-v}\log r+O\left(V_N(l)+\frac{1}{p}V_{N/p}(l)\right). \quad (4.96)$$

Сумма $S(l,u,v;p)$ является наиболее сложной, поскольку в этом случае мы не можем применить свойство сумм Клоостемана из леммы 4.2.1.

Лемма 4.11.2. *Справедливо следующее разложение*

$$S(l,u,v;p)=S_1-S_2-S_3+S_4,$$

где $S_i=S_i(l,u,v;p)$ *удовлетворяют* (4.85), $T_i(l,u,v;p)$ *определяются формулами* (4.83), (4.84), *если* $i=1,2$,

$$T_3(l,u,v;p)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(pmn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{pn}\right)^v\Delta_{2k,p}\left(md,pn\right),$$

$$T_4(l,u,v;p)=\frac{1}{p^{1+2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{(mn)^{1/2+u}}\left(\frac{m}{n}\right)^v\Delta_{2k,p}(mdp,np).$$

Асимптотика для $S_1(l,0,v;p)$ следует из уравнения (4.94). Далее мы вычислим S_2, S_3 и S_4. Главное отличие от предыдущего раздела - это наличие в асимптотической формуле для S_i, $i=2,3,4$ при $N=p$ дополнительных слагаемых, обусловленных полюсами дзета-функции Лерха, а именно,

$$E_p^2(u,v,\lambda)=\frac{1}{p}\sum_{q|d}\frac{1}{q}\left(\frac{q}{2\pi\sqrt{d/p}}\right)^{1-2u+2v}\sum_{\substack{b=1\\(b,qp)=1}}^{qp}\zeta(0,b/qp;1+2v)\frac{\Gamma(\lambda-u+v)}{\Gamma(\lambda+u-v)}, \quad (4.97)$$

$$E_p^3(u,v,\lambda)=\frac{p^{2v}-1}{p}\frac{\zeta(1-2v)}{(2\pi\sqrt{d/p})^{1-2u-2v}}\frac{\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(\lambda+u+v)}, \quad (4.98)$$

$$E_p^4(u,v,\lambda)=\frac{1}{p}\sum_{\substack{q|d\\q\neq 1}}\frac{1}{q}\left(\frac{q}{2\pi\sqrt{d}}\right)^{1-2u+2v}\sum_{\substack{b=1\\(b,qp)=1}}^{qp}\zeta(0,b/q,1+2v)\frac{\Gamma(\lambda-u+v)}{\Gamma(\lambda+u-v)}+$$
$$+\frac{p-1}{p}\left(\frac{\zeta(1+2v)}{(2\pi\sqrt{d})^{1-2u+2v}}\frac{\Gamma(\lambda-u+v)}{\Gamma(\lambda+u-v)}+\frac{\zeta(1-2v)}{(2\pi\sqrt{d})^{1-2u-2v}}\frac{\Gamma(\lambda-u-v)}{\Gamma(\lambda+u+v)}\right). \quad (4.99)$$

Кроме того, асимптотические формулы для S_2 и S_3 содержат слагаемые следующего вида

$$W_p(l) = \frac{2i^{2k}}{l^{1/2-v}} \sum_{d|l} \sum_{r|d} \mu(d/r) r^{\lambda - v} \left(\cos \pi\lambda \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\tau_v(a)\tau_0(|pa-r|)}{(ap)^{\lambda}} H_{\lambda}\left(0, v, \frac{r}{ap}\right) + \right.$$
$$\left. + \cos \pi v \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\tau_v(a)\tau_0(pa+r)}{(ap)^{\lambda}} H_{\lambda}\left(0, v, -\frac{r}{ap}\right) \right). \quad (4.100)$$

Вычисляя S_2, S_3 и S_4, мы докажем, что

$$S(l,0,v,p) = -\frac{1-1/p}{l^{1/2-v}} \sum_{d|l} \sum_{r|d} \mu(d/r)\tau_v(r) r^{-v} \log r + \frac{\sigma_{-2v}(l)}{l^{1/2-v}} \times$$
$$\times \left[(1+1/p^2)\log p + (1-1/p)(2\gamma - 2\log 2\pi + \psi(k+v) + \psi(k-v)) \right] +$$
$$+ 2\pi i^{2k} \sum_{d|l} \left(\frac{d}{l}\right)^{1/2-v} \left[-\frac{E_p^2(0,v,\lambda)}{p^{1/2-v}} - \frac{E_p^3(0,v,\lambda)}{p^{1/2+v}} + \frac{E_p^4(0,v,\lambda)}{p} \right] +$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) V_p(l) - \frac{p+1}{p^2} V_1(l) - \left(\frac{1}{p^{1+v}} + \frac{1}{p^{1-v}} \right) W_p(l).$$

Тогда из леммы 4.11.1 и уравнения (4.96) следует основной результат.

Теорема 4.11.3. *Пусть* $\Re v = 0$, $k \geq 2$, $N = p^2$, p - *простое число. Если* $p|l$, *тогда* $M_2(l,0,v) = 0$. *В остальных случаях*

$$M_2(l,0,v) = \frac{\sigma_{-2v}(l)}{l^{1/2-v}} \left[2\left(1 - \frac{p}{p^2-1}\right)\log p + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)(2\gamma - 2\log 2\pi + \psi(k+v) + \psi(k-v)) \right] -$$
$$- \frac{1 - 1/p - 1/(p+1)}{l^{1/2-v}} \sum_{d|l} \sum_{r|d} \mu(d/r)\tau_v(r) r^{-v} \log r +$$
$$+ \frac{2\pi i^{2k}}{p - p^{-1}} \sum_{d|l} \left(\frac{d}{l}\right)^{1/2-v} \left(-\frac{E_p^2(0,v,\lambda)}{p^{1/2-v}} - \frac{E_p^3(0,v,\lambda)}{p^{1/2+v}} + \frac{E_p^4(0,v,l)}{p} \right) +$$
$$+ O\left(V_{p^2}(l) + \frac{1}{p} V_p(l) + \frac{1}{p^2} V_1(l) + \frac{1}{p^2} W_p(l) \right). \quad (4.101)$$

4.11.1. Сумма S_4. Вычислим асимптотику $S_4(u,v,\lambda;p)$ при $u \to 0$.

Теорема 4.11.4. *Для* $\Re v = 0$

$$S_4(0,v,\lambda;p) = -\frac{1}{pl^{1/2-v}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_v(r)r^{-v}\log r + \\ + \frac{\sigma_{-2v}(l)}{pl^{1/2-v}}\left(\frac{\log p}{p} + 2\gamma - 2\log 2\pi + \psi(k+v) + \psi(k-v)\right) + \\ + \frac{p-1}{p^2}V_1(l) + \frac{1}{p^2}V_p(l) + \frac{2\pi i^{2k}}{p}\sum_{d|l}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/2-v} E_p^4(0,v;\lambda).$$

По формуле следа (4.3.2)

$$T_4(l,u,v;p) = \frac{1}{p^{1+2u}}\left(\frac{\zeta(1+2u)}{d^{1/2+u}} + 2\pi i^{2k} D_p^4(u,v;\lambda)\right),$$

где

$$D_p^4(u,v;\lambda) = \frac{1}{p}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{Kl(dpm,pn;qp)}{q}J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{dmn}}{q}\right). \tag{4.102}$$

Для $\Re s > 1 + |\Re v|$ положим

$$G_4^*(s,v;d,q) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{Kl(dpm,pn;qp)}{(mn)^s}\left(\frac{m}{n}\right)^v = \\ = \sum_{a,b=1}^{qp}\delta_{qp}(ab-1)\zeta(0,ad/q,s-v)\zeta(0,b/q,s+v).$$

В частности, если $q|d$

$$G_4^*(s,v;d,q) = \zeta(s-v)\sum_{\substack{b=1\\(b,qp)=1}}^{qp}\zeta(0,b/q,s+v),$$

$$G_4^*(s,v;d,1) = \phi(p)\zeta(s-v)\zeta(s+v).$$

Заметим, что $\zeta(0,ad/q,s-v)$ имеет полюс при $q|d$. Так как $(b,qp)=1$, у функции $\zeta(0,b/q,s+v)$ есть полюс в точке $q=1$.

Лемма 4.11.5. *Для* $q \in \mathbf{N}$ *и* $v \in \mathbf{C}$ *функция* $G_4^*(s,v;d,q)$ *может быть мероморфно продолжена на всю комплексную плоскость как функция переменной* s. *Кроме того, для* $\Re s < -|\Re v|$ *выполнено функциональное уравнение*

$$G_4^*(s,v;d,q) = 2\Gamma(1-s+v)\Gamma(1-s-v)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2s-2}(p-1+\delta_p(q))\times \\ \times\left(-\cos\pi s\sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-d)}{(mn)^{1-s}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v} + \cos\pi v\sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn+d)}{(mn)^{1-s}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}\right). \tag{4.103}$$

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 3.2.1, получаем

$$\sum_{a,b=1}^{qp} \delta_{qp}(ab-1)\zeta(ad/q,0,1-s+v)\zeta(b/q,0,1-s-v) =$$

$$= q^{2-2s} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(mn)^{1-s}} \left(\frac{n}{m}\right)^{v} \sum_{\substack{a,b=1 \\ b\equiv n \pmod q \\ ad\equiv m \pmod q}}^{qp} \delta_{qp}(ab-1).$$

Оценим последнюю сумму. Существует значение $j \pmod p$ такое, что $b = n+jq$. Поскольку $ab \equiv 1 \mod qp$, получаем $an + ajq \equiv 1 \pmod{qp}$. Из условий $(a, qp) = 1$, $aj + \frac{an-1}{q} \equiv 0 \pmod p$, $an \equiv 1 \pmod q$ следует, что j определяется единственным образом. Нам остаётся сосчитать количество решений системы

$$\begin{cases} (a,qp) = 1 \\ an \equiv 1 \pmod q \\ m \equiv ad \pmod q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,qp) = 1 \\ a \equiv n^{-1} \pmod q \\ (n,q) = 1 \\ m \equiv ad \pmod q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n,q) = 1 \\ mn \equiv d \pmod q \\ (n^{-1}+wq, qp) = 1 \end{cases}$$

при $w \pmod p$. Из условия $(n^{-1}, q) = 1$ получаем $(n^{-1} + wq, p) = 1$. Число значений w таких, что $n^{-1} + wq \equiv 0 \pmod p$, равно одному для $(q, p) = 1$ и равно нулю в противном случае. Поэтому

$$\sum_{\substack{a,b=1 \\ b\equiv n \pmod q \\ ad\equiv m \pmod q}}^{qp} \delta_{qp}(ab-1) = (p-1+\delta_p(q))\, 1_{(n,q)=1}\, \delta_q(mn-d).$$

Дальнейшее доказательство аналогично лемме 3.2.1.

□

Далее применим функциональное уравнение (4.103) для вычисления (4.102).

Лемма 4.11.6. *Пусть* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$. *Для* $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$ *получаем*

$$D_p^4(u,v;\lambda) = \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i} \int_{\Re s=\Delta} \Gamma(u,v,\lambda;s) \times$$

$$\times \left(\sin\pi(u+s/2) \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn-d)}{(mn)^{1/2-u-s/2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v} \frac{p-1+\delta_p(q)}{pq^{2u}} + \right.$$

$$\left. + \cos\pi v \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{m,n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn+d)}{(mn)^{1/2-u-s/2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{-v} \frac{p-1+\delta_p(q)}{pq^{2u}} \right) \frac{ds}{d^{s/2}} + E_p^4(u,v;\lambda),$$

где последнее слагаемое, соответствующее вкладу полюсов, определяется формулой (4.99).

Из леммы 4.11.6 следует, что

$$D_p^4(u,v;\lambda)=\frac{p-1}{p}D_1^*(u,v;\lambda)+\frac{1}{p}D_p^*(u,v;\lambda)+E_p^4(u,v;\lambda), \tag{4.104}$$

где функция $D_N^*(u,v;\lambda)$, заданная уравнением (4.86), удовлетворяет (4.89). Применяя (4.104), (4.89) при $u\to 0$, вычисляем асимптотику для $S_4(u,v,\lambda;p)$. Теорема 4.11.4 следует.

4.11.2. Сумма S_3. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.11.7. *Для* $\Re v=0$

$$\begin{aligned}S_3(l,0,\lambda;p)=&-\frac{1}{pl^{1/2-v}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_v(r)r^{-v}\log r+\\&+\frac{\sigma_{-2v}(l)}{pl^{1/2-v}}\left(2\gamma-2\log 2\pi+\psi(k+v)+\psi(k-v)\right)+\\&+\frac{1}{p}V_1(l)+\frac{1}{p^2}V_p(l)+\frac{1}{p^{1+v}}W_p(l)+\frac{2\pi i^{2k}}{p}\sum_{d|l}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/2-v}E_p^3(0,v;\lambda).\end{aligned}$$

Из формулы следа (4.3.2) получаем

$$S_3(l,u,v;p)=\sum_{d|l}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/2-v}\frac{1}{p^{1/2+v}}\left(\frac{d}{pl}\right)^u\left(\frac{\zeta(1+2u)}{p^{1/2+u-v}d^{1/2+u+v}}+2\pi i^{2k}D_p^3(u,v;\lambda)\right),$$

где

$$D_p^3(u,v;\lambda)=\frac{1}{p}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{Kl(dm,pn;qp)}{q}J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{dmn/p}}{q}\right). \tag{4.105}$$

Для $\Re s>1+|\Re v|$ положим

$$\begin{aligned}G_3^*(s,v;d,q)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{Kl(dm,pn;qp)}{(mn)^s}\left(\frac{m}{n}\right)^v=\\=\sum_{a,b=1}^{qp}\delta_{qp}(ab-1)\zeta(0,ad/qp,s-v)\zeta(0,b/q,s+v).\end{aligned}$$

Так как $(d,p)=1$, $(a,qp)=1$, функция $\zeta(0,ad/qp,s-v)$ не имеет полюсов. Вторая функция $\zeta(0,b/q,s+v)$ имеет полюс при $q=1$. А именно,

$$G_3^*(s,v;d,1)=(p^{1-s+v}-1)\zeta(s-v)\zeta(s+v)$$

имеет полюс в точке $s=1+v$.

Лемма 4.11.8. *Для $q \in \mathbf{N}$ and $v \in \mathbf{C}$ функция $G_3^*(s, v; d, q)$ может быть мероморфно продолжена на всю комплексную плоскость как функция переменной s. Кроме того, для $\Re s < -|\Re v|$ выполнено*

$$G_3^*(s,v;d,q) = 2\Gamma(1-s+v)\Gamma(1-s-v)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2s-2} p^{1-s+v}\times$$
$$\times\left(-\cos\pi s \sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1\\(m,p)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn-d)}{(mn)^{1-s}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v} + \cos\pi v \sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1\\(m,p)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn+d)}{(mn)^{1-s}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}\right). \quad (4.106)$$

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 3.2.1, нам необходимо вычислить сумму

$$\sum_{q,b=1}^{qp} \delta_{qp}(ab-1)\zeta(ad/(qp),0,1-s+v)\zeta(b/q,0,1-s-v) =$$
$$= q^{2-2s}p^{1-s+v}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(n/m)^v}{(mn)^{1-s}} \sum_{\substack{a,b=1\\ad\equiv m \pmod{qp}\\ b\equiv n \pmod{q}}}^{qp} \delta_{qp}(ab-1).$$

Последняя сумма сводится к подсчёту решений a, b системы уравнений

$$\begin{cases} ab \equiv 1 \pmod{qp} \\ ad \equiv m \pmod{qp} \\ b = n + wq, \quad w \pmod{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} an + awq \equiv 1 \pmod{qp} \\ (a,p) = 1 \\ ad \equiv m \pmod{qp} \end{cases}.$$

Поскольку $aw + \frac{an-1}{q} \equiv 0 \pmod{p}$, значение w определяется единственным образом. Поэтому

$$\begin{cases} an \equiv 1 \pmod{q} \\ ad \equiv m \pmod{qp} \\ (a,p) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,p) = 1 \\ (n,q) = 1 \\ ad \equiv m \pmod{qp} \\ a = n^{-1} + jq, \quad j \pmod{p} \end{cases}.$$

Получаем $(n,q) = 1$, $(n^{-1} + jq, p) = 1$, $dn^{-1} + djq \equiv m \pmod{qp}$. Соответственно, $dj + \frac{dn^{-1}-m}{q} \equiv 0 \pmod{p}$. Из условия $(d,p) = 1$ следует $j = \frac{m-dn^{-1}}{q}d^* \pmod{p}$, где $nn^{-1} \equiv 1 \pmod{q}$, $dd^* \equiv 1 \pmod{p}$. Далее считаем число $j_0 = \frac{m-dn^{-1}}{q}d^* \pmod{p}$, для которых выполнено условие $(n^{-1} + j_0 q, p) = 1$. Если $n^{-1} + j_0 q \equiv 0 \pmod{p}$, то $n^{-1} + (m - dn^{-1})d^* \equiv 0 \pmod{p}$. Поэтому $md^* \equiv 0 \pmod{p}$ и, так как $(d,p) = 1$, получаем $m \equiv 0 \pmod{p}$. Следовательно, решений нет при $m \equiv 0 \pmod{p}$ и существует одно решение j_0 если $(m,p) = 1$. Окончательно получаем следующие условия: $(n,q) = 1$, $(m,p) = 1$, $mn \equiv d \pmod{q}$. Лемма доказана.

□

Далее применим (4.106) для вычисления (4.105).

Лемма 4.11.9. *Пусть* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$. *Для* $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$ *справедливо*

$$D_p^3(u,v;\lambda) = E_p^3(u,v;\lambda) + \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i}\int_{\Re s=\Delta}\Gamma(u,v,\lambda;s)\times$$
$$\times\left(\sin\pi(u+s/2)\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(m,p)=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-d)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}+\right.$$
$$\left.+\cos\pi v\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(m,p)=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn+d)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}\right)\frac{p^{1/2-u-s/2+v}ds}{p(\sqrt{d/p})^s}.$$

Лемма 4.11.10. *Пусть* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$. *Для* $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$ *справедливо*

$$D_p^3(u,v;\lambda) = \frac{1}{p^{1/2+u-v}}D_1^*(u,v,\lambda) + E_p^3(u,v;\lambda) + \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i}\int_{\Re s=\Delta}\Gamma(u,v,\lambda;s)\times$$
$$\times\left(\sin\pi(u+s/2)\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{1/2+u-v-s/2}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)\tau_u(|pa-r|)}{a^{1/2-u-s/2}|pa-r|^u}+\right.$$
$$\left.+\cos\pi v\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{1/2+u-v-s/2}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)\tau_u(pa+r)}{a^{1/2-u-s/2}(pa+r)^u}\right)\frac{ds}{p(d/p)^{s/2}}. \quad (4.107)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(m,p)=(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-d)}{q^{2u}(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v} := A_1 - A_2,$$

где

$$A_1 = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-d)}{q^{2u}(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v},$$

$$A_2 = \frac{1}{p^{z+v}}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(pmn-d)}{q^{2u}(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}.$$

Сумма A_1 соответствует первому слагаемому в формуле (4.107).

Применяя преобразование Мёбиуса, преобразуем вторую сумму

$$A_2 = \frac{1}{p^{z+v}}\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{z+2u-v}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_q(pmn-r)}{(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}.$$

Из условия $r|d$ получаем $(r,p)=1$. Следовательно, не существует таких m,n, что $pmn=r$. Таким образом,

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\delta_q(pmn-r)}{(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2u}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\delta_q(pa-r)}{a^z}\tau_v(a)=$$

$$=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)}{a^z}\sigma_{-2u}(|pa-z|)=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)\tau_u(|pa-r|)}{a^z|pa-r|^u}$$

и

$$A_2=\frac{1}{p^{z+v}}\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{z+2u-v}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)\tau_u(|pa-r|)}{a^z|pa-r|^u}.$$

□

Интегрируя по переменной s, доказываем формулу

$$D_p^3(u,v;\lambda)=\frac{1}{p^{1/2+u-v}}D_1^*(u,v;\lambda)+E_p^3(u,v;\lambda)+\frac{2(2\pi)^{2u-1}}{p^{\lambda+1/2}}\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)r^{\lambda+u-v}}{d^{1/2+u-v}}\times$$

$$\times\left(\cos\pi(\lambda-u)\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)\tau_u(|pa-r|)}{a^{\lambda-u}|pa-r|^u}H_\lambda\left(u,v,\frac{r}{ap}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\pi v\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)\tau_u(pa+r)}{a^{\lambda-u}(pa+r)^u}H_\lambda\left(u,v,-\frac{r}{ap}\right)\right),$$

где функция $D_1^*(u,v;\lambda)$, заданная уравнением (4.86), удовлетворяет условию (4.89). Устремляя $u\to 0$, доказываем теорему 4.11.7.

4.11.3. Сумма S_2. Данный раздел посвящен доказательству следующей формулы.

Теорема 4.11.11. *Для* $\Re v=0$

$$S_2(l,0,\lambda;p)=-\frac{1}{pl^{1/2-v}}\sum_{d|l}\sum_{r|d}\mu(d/r)\tau_v(r)r^{-v}\log r+$$

$$+\frac{\sigma_{-2v}(l)}{pl^{1/2-v}}\left(2\gamma-2\log 2\pi+\psi(k+v)+\psi(k-v)\right)+$$

$$+\frac{1}{p}V_1(l)+\frac{1}{p^{1-v}}W_p(l)+\frac{2\pi i^{2k}}{p^{1/2-v}}\sum_{d|l}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/2-v}E_p^2(0,v,\lambda).$$

Применяя формулу следа (4.3.2), получаем

$$S_2(l,u,v;p)=\sum_{d|l}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/2-v}\frac{1}{p^{1/2-v}}\left(\frac{d}{pl}\right)^u\left(\frac{\zeta(1+2u)}{(dp)^{1/2+u+v}}+2\pi i^{2k}D_p^2(u,v;\lambda)\right),$$

где

$$D_p^2(u,v;\lambda)=\frac{1}{p}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{Kl(dmp,n;qp)}{q}J_{2\lambda-1}\left(4\pi\frac{\sqrt{dmn/p}}{q}\right). \qquad (4.108)$$

Для $\Re s > 1 + |\Re v|$ положим

$$G_2^*(s,v;d,q) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{Kl(dpm,n;qp)}{(mn)^s} \left(\frac{m}{n}\right)^v =$$

$$= \sum_{a,b=1}^{qp} \delta_q(ab-1)\zeta(0,ad/q,s-v)\zeta(0,b/(qp),s+v).$$

Заметим, что $\zeta(0,ad/q;s-v)$ имеет полюс, если $q|d$, а $\zeta(0,b/(qp),s+v)$ не имеет полюсов.

Лемма 4.11.12. *Для $q \in \mathbf{N}$ и $v \in \mathbf{C}$ функция $G_2^*(s,v;d,q)$ может быть мероморфно продолжена на всю комплексную плоскость как функция переменной s. Кроме того, для $\Re s < -|\Re v|$ справедливо функциональное уравнение*

$$G_2^*(s,v;d,q) = 2\Gamma(1-s+v)\Gamma(1-s-v)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2s-2} p^{1-s-v}\times$$

$$\times\left(-\cos\pi s \sum_{\substack{m,n=1\\(n,qp)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn-d)}{(mn)^{1-s}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v} + \cos\pi v \sum_{\substack{m,n=1\\(n,qp)=1}}^{\infty} \frac{\delta_q(mn+d)}{(mn)^{1-s}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}\right). \quad (4.109)$$

Доказательство. Мы повторим доказательство леммы 3.2.1 лишь с той разницей, что сейчас нам нужно вычислить

$$\sum_{a,b=1}^{qp} \delta_q(ab-1)\zeta(ad/q,0,1-s+v)\zeta(b/(qp),0,1-s-v) =$$

$$= q^{2-2s}p^{1-s-v} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(n/m)^v}{(mn)^{1-s}} \sum_{\substack{a,b=1\\ad\equiv m \pmod q\\ b\equiv n \pmod{qp}}}^{qp} \delta_{qp}(ab-1).$$

Для упрощения суммы по a,b рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} ab \equiv 1 \pmod{qp} \\ ad \equiv m \pmod q \\ b \equiv n \pmod{qp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} an \equiv 1 \pmod{qp} \\ ad \equiv m \pmod q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} an \equiv 1 \pmod{qp} \\ adp \equiv mp \pmod{qp} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n,qp) = 1 \\ dp \equiv mnp \pmod{qp} \end{cases}.$$

Таким образом, мы получаем условие $(n,qp)=1$, $mn \equiv d \pmod q$ в конечной формуле. □

Далее вопользуемся функциональным уравнением (4.109) для преобразования (4.108).

Лемма 4.11.13. *Пусть* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$. *Для* $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$ *получаем*

$$D_p^2(u,v;\lambda) = E_p^2(u,v;\lambda) + \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i}\int_{\Re s=\Delta}\Gamma(u,v,\lambda;s)\times$$
$$\times\left(\sin\pi(u+s/2)\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(n,qp)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-d)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}+\right.$$
$$\left.+\cos\pi v\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(n,qp)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn+d)}{q^{2u}(mn)^{1/2-u-s/2}}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}\right)\frac{p^{1/2-u-s/2-v}ds}{p(\sqrt{d/p})^s}.$$

Лемма 4.11.14. *Пусть* $\Re\lambda - 1 > \Re u > 3/4$ *и* $\Re v = 0$. *Для* $1 - 2\Re\lambda < \Delta < -1 - 2\Re u$ *справедлива формула*

$$D_p^2(u,v;\lambda) = \frac{1}{p^{1/2+u+v}}D_1^*(u,v,\lambda) + E_p^2(u,v;\lambda) + \frac{(2\pi)^{2u-1}}{2\pi i}\int_{\Re s=\Delta}\Gamma(u,v,\lambda;s)\times$$
$$\times\left(\sin\pi(u+s/2)\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{1/2+u-v-s/2}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)\tau_u(|pa-r|)}{a^{1/2-u-s/2}|pa-r|^u}+\right.$$
$$\left.+\cos\pi v\sum_{r|d}\frac{\mu(d/r)}{(d/r)^{1/2+u-v-s/2}}\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\tau_v(a)\tau_u(pa+r)}{a^{1/2-u-s/2}(pa+r)^u}\right)\frac{ds}{p(d/p)^{s/2}}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(n,qp)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-d)}{q^{2u}(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v} = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(mn-d)}{q^{2u}(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v} -$$
$$-\frac{1}{p^{z-v}}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{m,n=1\\(pn,q)=1}}^{\infty}\frac{\delta_q(pmn-d)}{q^{2u}(mn)^z}\left(\frac{m}{n}\right)^{-v}.$$

Так как $pmn \equiv d \pmod q$ и $(d,p) = 1$, то выполнено $(q,p) = 1$, и условие взаимной простоты $(pn,q) = 1$ во второй сумме может быть заменено на $(n,q) = 1$. Дальнейшее доказательство аналогично лемме 4.11.10. □

Интегрируя по s и устремляя $u \to 0$, доказываем теорему 4.11.11.

4.12. Оценки остатков в асимптотической формуле для второго момента

В данном разделе мы оценим остаточные члены, заданные уравнениями (4.90), (4.91), (4.92), (4.93), (4.97), (4.98), (4.99) и (4.100). Пусть

$$v := it, \quad t \in \mathbf{R}, \quad T := 3 + |t|, \quad \lambda := k,$$
$$n_0 := \left[\frac{r+1}{N}\right] + 1, \quad n_1 := 5n_0, \quad n_2 := \frac{r}{N}(1+T^2).$$

Лемма 4.12.1. *Справедливы следующие оценки*

$$V_{N,1}(r) \ll \begin{cases} \frac{r}{N}(rkT^2)^{\epsilon}(k+T) & r \geq N/(1+T^2); \\ \left(\frac{rT^2}{4(N-r)}\right)^k \frac{N^{\epsilon}}{T} & r < N/(1+T^2). \end{cases} \tag{4.110}$$

Доказательство. Оценивая (4.91), получаем

$$V_{N,1}(r) \ll \cosh \pi t \sum_{n \geq n_0} \frac{n^{\epsilon}(nN-r)^{\epsilon} r^k}{(nN-r)^k} H_k\left(0, v; \frac{-r}{nN-r}\right). \tag{4.111}$$

(1) Пусть $r \geq N/2$. Разобьём сумму по n в уравнении (4.111) на три части: $n_0 \leq n < n_1$, $n_1 \leq n < n_2$ and $n \geq n_2$. Из неравенства (4.78) следует что первая сумма оценивается как

$$\sum_{n_0 \leq n < n_1} (nN)^{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{T}} \left[(rk)^{\epsilon} + \frac{k+T}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{nN-r}{r}}\right] \ll$$

$$\ll \frac{(rT)^{\epsilon}}{\sqrt{T}} \left[n_1 k^{\epsilon} + \frac{k+T}{\sqrt{T}} \frac{r}{N} \sqrt{\frac{n_1 N - r}{r}}\right] \ll (rkT)^{\epsilon} \frac{r}{N} \frac{k+T}{T}.$$

Из неравенства (4.77) получаем оценку для второй суммы

$$\sum_{n_1 \leq n < n_2} (nN)^{\epsilon} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{nN-r}} \ll (rT)^{\epsilon} r^{1/2} \left(\frac{1}{(n_1 N - r)^{1/2}} + \frac{(n_2 N - r)^{1/2}}{N}\right) \ll (Tr)^{\epsilon} \frac{rT}{N}.$$

Применяя (4.76), оцениваем третью сумму

$$\sum_{n \geq n_2} (nN-r)^{\epsilon} \frac{r^k}{(nN-r)^k} \frac{T^{2k-1}}{4^k \sqrt{k}} \left[1 + \frac{k+T}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{r}{nN-r}}\right] \ll$$

$$\ll \frac{r^k T^{2k-1}}{4^k \sqrt{k}} \left[\frac{(n_2 N - r)^{\epsilon}}{N(n_2 N - r)^{k-1}} + \frac{k+T}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{r}(n_2 N - r)^{\epsilon}}{N(n_2 N - r)^{k-1/2}}\right] \ll$$

$$\ll (rT^2)^{\epsilon} \frac{rT}{4^k N}. \tag{4.112}$$

Объединяя все результаты, получаем

$$V_{N,1}(r) \ll \frac{r}{N}(rkT^2)^{\epsilon}(k+T) \quad \text{for } r \geq N/2.$$

(2) Пусть $N/(1+T^2) \leq r < N/2$. Разобьём сумму по n в (4.111) на две части: $n_0 \leq n < n_2$ and $n \geq n_2$. Из неравенства (4.77) следует, что первая сумма оценивается как

$$\sum_{n_0 \leq n < n_2} (nN)^{\epsilon} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{nN-r}} \ll (rT)^{\epsilon} r^{1/2} \left(\frac{1}{(n_0 N - r)^{1/2}} + \frac{(n_2 N - r)^{1/2}}{N}\right) \ll (Tr)^{\epsilon} \frac{rT}{N}.$$

Применяя последнюю оценку и неравенство (4.112), доказываем

$$V_{N,1}(r) \ll \frac{r}{N}(rkT^2)^{\epsilon}(k+T) \quad \text{for } N/(1+T^2) \leq r < N/2.$$

(3) Пусть $r < N/(1+T^2)$. Из неравенства (4.76) следует оценка (аналогично (4.112))

$$V_{N,1}(r) \ll \left(\frac{rT^2}{4(N-r)}\right)^k \frac{N^\epsilon}{T} \quad \text{for } r < N/(1+T^2).$$

□

Лемма 4.12.2. *Для любого $\epsilon > 0$, $r > N$*

$$V_{N,2}(r) \ll_\epsilon \frac{r^{1+\epsilon}}{N}. \tag{4.113}$$

Доказательство. Применяя лемму 4.9.7, оцениваем

$$V_{N,2}(r) \ll \sum_{(1-r)/N \le n \le -1} \frac{\tau_0(|n|)\tau_v(nN+r)}{r^v} \int_0^\infty J_{2k-1}(x) \times$$
$$\times k^+\left(x\sqrt{\frac{nN+r}{r}}, 1/2+v\right) dx \ll \sum_{1 \le n \le (r-1)/N} \left| I\left(\frac{r-nN}{r}\right)\right|,$$

где $I(z)$ определяется уравнением (4.49). Из следствия 4.7.5 получаем неравенство (4.113).

□

Лемма 4.12.3. *Для любого $\epsilon > 0$*

$$V_{N,3}(r) \ll \begin{cases} \frac{(rT^2)^\epsilon r}{N} & r \ge N/(1+T^2); \\ \left(\frac{r}{2(N+r)}\right)^k N^\epsilon & r < N/(1+T^2). \end{cases}$$

Доказательство. Первая оценка следует из неравенства (4.79), а вторая из неравенства (4.80). □

Теорема 4.12.4. *Для любого $\epsilon > 0$*

$$V_N(l) \ll \begin{cases} (lkT^2)^\epsilon \frac{l^{1/2}(k+T)}{N} & l \ge N/(1+T^2); \\ \left(\frac{lT^2}{4(N-l)}\right)^k \frac{N^\epsilon}{l^{1/2}T} & l < N/(1+T^2). \end{cases} \tag{4.114}$$

Доказательство. Применяя леммы 4.12.1, 4.12.2 и 4.12.3, оцениваем

$$V_N(l) \ll \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{r|l} \left(V_{N,1}(r) + V_{N,2}(r) + V_{N,3}(r)\right) \ll \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{r|l} V_{N,1}(r).$$

Если $l < N/(1+T^2)$, мы применяем вторую оценку в (4.110) и получаем (4.114). Пусть $l \ge N/(1+T^2)$. Тогда для $N^{1-10\epsilon}/(1+T^2) < r < N/(1+T^2)$ выполнено неравенство

$$\left(\frac{rT^2}{4(N-r)}\right)^k \frac{N^\epsilon}{T} \ll \frac{r}{N}(rkT^2)^\epsilon(k+T).$$

Далее разобьём сумму по r на две части. Результат теоремы следует из оценок(4.110), а именно, мы применяем первую оценку при $r > N^{1-10\epsilon}/(1+T^2)$ и вторую оценку при $r < N^{1-10\epsilon}/(1+T^2)$.

□

Лемма 4.12.5. *Справедлива следующая оценка*

$$\frac{1}{p^2}W_p(l) \ll \frac{1}{p}V_p(l).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$W_p(l) = \frac{2(-1)^k}{l^{1/2-v}} \sum_{d|l} \sum_{r|d} \mu(d/r) \left(W_{p,1}(r) + W_{p,2}(r) + W_{p,3}(r)\right),$$

где

$$W_{p,1}(r) = \frac{\cos \pi v}{r^{-k+v}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\tau_v(a)\tau_0(pa+r)}{(ap)^k} H_k\left(0, v; \frac{-r}{ap}\right),$$

$$W_{p,2}(r) = \frac{(-1)^k}{r^{-k+v}} \sum_{a \geq r/p} \frac{\tau_v(a)\tau_0(pa-r)}{(ap)^k} H_k\left(0, v; \frac{r}{ap}\right),$$

$$W_{p,3}(r) = \frac{(-1)^k}{r^{-k+v}} \sum_{a < r/p} \frac{\tau_v(a)\tau_0(|pa-r|)}{(ap)^k} H_k\left(0, v; \frac{r}{ap}\right).$$

Аналогично лемме 4.12.1 получаем

$$W_{p,1}(r) \ll \begin{cases} \frac{r}{p}(rkT^2)^{\epsilon}(k+T), & r \geq p/T^2 \\ \left(\frac{rT^2}{4p}\right)^k \frac{1}{T\sqrt{k}}, & r < p/T^2. \end{cases}$$

Таким образом, $W_{p,1}(r) \ll V_{p,1}(r)$. Далее оцениваем $W_{p,2}(r)$. Для удобства разобьём сумму по a на две части

$$\sum_{a \geq r/p} = \sum_{a \geq 2r/p} + \sum_{r/p \leq a < 2r/p}.$$

В соответствии с неравенством (4.80) первая сумма оценивается как

$$\frac{(-1)^k}{r^{-k+v}} \sum_{a \geq 2r/p} \frac{\tau_v(a)\tau_0(pa-r)}{(ap)^k} H_k\left(0, v; \frac{r}{ap}\right) \ll$$

$$\ll \sum_{a \geq 2r/p} (ap)^{\epsilon} \frac{r^k}{(2ap)^k} \ll \begin{cases} (r/(2p))^k p^{\epsilon}, & r < p/2 \\ rp^{\epsilon}/(p2^k), & r > p/2. \end{cases}$$

Поэтому вклад данного слагаемого не превосходит $V_{p,3}(r)$. Если $r > p/2$, мы оценим вторую сумму при помощи неравенства (4.79) и положим $r = r_0 + sp, \quad 0 \leq r_0 \leq p-1$. Поскольку $r|l$, $(l,p) = 1$, выполнено условие $r_0 \neq 0$. Из $a \geq r/p$ следует, что $a \geq s+1$, и $ap - r \geq p - r_0$. Следовательно,

$$\frac{(-1)^k}{r^{-k+v}} \sum_{r/p \leq a < 2r/p} \frac{\tau_v(a)\tau_0(pa-r)}{(ap)^k} H_k\left(0, v; \frac{r}{ap}\right) \ll \frac{(rp)^{\epsilon}}{k+T} \sum_{r/p \leq a < 2r/p} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{ap-r}} \ll$$

$$\ll \frac{(rp)^{\epsilon}}{k+T}\sqrt{r}\left(\frac{1}{\sqrt{p-r_0}} + \frac{\sqrt{r}}{p}\right) \ll \frac{(rp)^{\epsilon}}{k+T}\sqrt{r}(1 + \frac{\sqrt{r}}{p}).$$

Последнее слагаемое $W_{p,3}(r)$ может быть оценено при помощи следствия 4.7.5

$$W_{p,3}(r) \ll \sum_{a<r/p} |I(ap/r)| \ll \sum_{a<r/p} \frac{1}{\sqrt{1-ap/r}} \ll \sqrt{r}\left(1+\frac{\sqrt{r}}{p}\right).$$

Получаем

$$W_p(l) \ll V_p(l) + l^{\epsilon}\left(1+\sqrt{l}/p\right)1_{l>p}.$$

Из неравенства (4.114) следует утверждение леммы. □

Лемма 4.12.6. *Справедлива оценка*

$$E_p^3(0,v,\lambda) \ll \frac{\log pT}{\sqrt{dp}}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$E_p^3(0,v,\lambda) \ll \frac{1}{\sqrt{dp}}(p^{2v-1}-1)\log(1-2v).$$

Получаем

$$E_p^3(0,v,\lambda) \ll \begin{cases} \frac{\log T}{\sqrt{dp}} & v \neq 0, \\ \frac{\log p}{\sqrt{dp}} & v = 0. \end{cases}$$

□

Лемма 4.12.7. *Справедлива оценка*

$$E_p^4(0,v,\lambda) \ll \frac{(dTk)^{\epsilon}}{\sqrt{d}}.$$

Доказательство. Оценим второе слагаемое в уравнении (4.99). При $v \neq 0$ оно ограничено величиной $\log T/\sqrt{d}$. В противном случае, при $v \to 0$, все полюса сокращаются и слагаемое оценивается как $\log kd/\sqrt{d}$. Комбинируя оценки, получаем $\log kdT/\sqrt{d}$.

Первое слагаемое в (4.99) содержит сумму дзета функций Лерха

$$\sum_{\substack{b=1\\(b,qp)=1}}^{qp} \zeta(0,b/q,1+2v) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2v}} \sum_{\substack{b=1\\(b,qp)=1}}^{qp} \exp\left(\frac{bpn}{qp}\right) =$$

$$= \phi(qp)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(q/(n,q))}{n^{1+2v}\phi(q/(n,q))} = \phi(qp)\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{\phi(m)}\frac{1}{(q/m)^{1+2v}}\sum_{\substack{n=1\\(n,m)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2v}}.$$

Заметим, что

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,m)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\sum_{a|(n,m)}\mu(a) = \zeta(z)\sum_{a|m}\frac{\mu(a)}{a^z}.$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{b=1\\(b,qp)=1}}^{qp} \zeta(0,b/q,1+2v) = \zeta(1+2v)\phi(qp)\sum_{m|q}\frac{\mu(m)}{\phi(m)}\frac{1}{(q/m)^{1+2v}}\sum_{a|m}\frac{\mu(a)}{a^{1+2v}}.$$

Так как при $q > 1$

$$\sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \frac{m}{q} \sum_{a|m} \frac{\mu(a)}{a} = \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{q} = 0,$$

в точке $v = 0$ нет полюсов. Если $v = it \neq 0$, мы применяем неравенство

$$|\zeta(1 + 2v)| < \log T$$

и получаем

$$\sum_{\substack{b=1 \\ (b,qp)=1}}^{qp} \zeta(0, b/q, 1 + 2v) \ll p(Tq)^{\epsilon}.$$

Если $v = 0$, то

$$\sum_{\substack{b=1 \\ (b,qp)=1}}^{qp} \zeta(0, b/q, 1) = \frac{\phi(qp)}{2} \sum_{m|q} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \frac{m}{q} \sum_{a|m} \frac{\mu(a)}{a} 2 \log \frac{m}{aq},$$

и, следовательно,

$$\sum_{\substack{b=1 \\ (b,qp)=1}}^{qp} \zeta(0, b/q, 1) \ll p(Tq)^{\epsilon}.$$

Комбинируя все результаты, получаем

$$E_p^4(0, v, \lambda) \ll \frac{(dTk)^{\epsilon}}{\sqrt{d}}.$$

□

Лемма 4.12.8. *Справедлива оценка*

$$E_p^2(0, v, \lambda) \ll \frac{1}{\sqrt{dp}} (Tdp)^{\epsilon}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$E_p^2(0, v, \lambda) \ll \frac{1}{p} \sum_{q|d} \frac{1}{2\pi\sqrt{d/p}} \left| \sum_{\substack{b=1 \\ (b,qp)=1}}^{qp} \zeta(0, b/qp, 1 + 2v) \right|.$$

Так же как в доказательстве леммы 4.12.7

$$\sum_{\substack{b=1 \\ (b,qp)=1}}^{qp} \zeta(0, b/qp, 1 + 2v) = \zeta(1 + 2v)\phi(qp) \sum_{m|qp} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \left(\frac{m}{qp} \right)^{1+2v} \sum_{a|m} \frac{\mu(a)}{a^{1+2v}}.$$

Полюс в точке $v = 0$ сокращается при $qp > 1$, и справедлива оценка

$$\sum_{\substack{b=1 \\ (b,qp)=1}}^{qp} \zeta(0, b/qp, 1 + 2v) \ll (Tqp)^{\epsilon}.$$

Утверждение леммы доказано. □

Следствие 4.12.9. *Вклад* $E_p^j(0,v,\lambda)$, $j=2,3,4$ *в формуле* (4.101) *оценивается как*

$$\frac{2\pi i^{2k}}{p-p^{-1}}\sum_{d|l}\left(\frac{d}{l}\right)^{1/2-v}\left(-\frac{E_p^2(0,v,\lambda)}{p^{1/2-v}}-\frac{E_p^3(0,v,\lambda)}{p^{1/2+v}}+\frac{E_p^4(0,v,l)}{p}\right)\ll\frac{(lpTk)^{\epsilon}}{p^2\sqrt{l}}.$$

4.13. Сглаживание моментов

В этом параграфе мы на основе техники сглаживания моментов и теорем 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 докажем нижнюю оценку на пропорцию необнуляемости значений $L_f(1/2)$. Отметим, что так как все полученные нами асимптотические формулы равномерны по t, то рассуждая похожим способом можно доказать нижнюю оценку на пропорцию необнуляемости значений $L_f(1/2+it)$, если $|t|<N$.

Стандартный сглаживающий множитель имеет следующий вид

$$X(f)=\sum_{l\leq L}\frac{x_l\lambda_f(l)}{\sqrt{l}},$$

где (x_l) некие действительные коэффициенты. Напомним, что величина $L=N^{\Omega}$ называется длиной сглаживания. Определим сглаженные первый и второй моменты формулами

$$M_1^h=\sum_{f\in H_{2k}^*(N)}^{h}L_f(1/2)X(f)=\sum_{l\leq L}\frac{x_l}{\sqrt{l}}M_1(l,0,0)$$

и

$$M_2^h=\sum_{f\in H_{2k}^*(N)}^{h}L_f^2(1/2)X^2(f)=\sum_{\substack{d\leq L\\ l_1d\leq L\\ l_2d\leq L}}\frac{x_{dl_1}x_{dl_2}}{d\sqrt{l_1l_2}}M_2(l_1l_2,0,0).$$

Из теорем 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 следует, что мы можем получить асимптотическую формулу для M_1^h, если $\Omega<1$, а для второго момента M_2^h, если $\Omega<1/2$. Таким образом, длина сглаживания не превосходит $N^{1/2}$. Как показано **[96]** коэффициенты (x_l) стоит выбирать следующим образом

$$x_l=\sum_{lm\leq N^{\Omega}}\frac{\mu*\mu(m)}{m}y_{lm},$$

где

$$y_n=\begin{cases}n\mu(n)/\phi(n) & \text{if } n\leq N^{\Omega} \text{ and } p\not|n,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского (см. подробности в **[96]**)

$$\sum_{\substack{f\in H_{2k}^*(N)\\ L_f(1/2)\neq 0}}1\geq\frac{(M_1^h)^2}{M_2^h}\geq\frac{p-1}{p}\frac{\Omega}{1+2\Omega}-\epsilon.$$

Полагая $\Omega=1/2-\epsilon$, мы при условии $N\to\infty$ завершаем доказательство теоремы 4.1.1.

ГЛАВА 5

Необнуляемость центральных значений L-функций примитивных параболических форм большого веса.

Данная глава написана на основе работ [**5**], [**7**], [**141**].

5.1. Введение

Как и в главе 4 мы будем обозначать через $H_{2k} = H^*_{2k}(1)$ базис Гекке пространства голоморфных параболических форм уровня один и веса $2k \geq 2$. Любая функция $f(z) \in H_{2k}$ разлагается в ряд Фурье (4.2), а ее коэффициенты Фурье мультипликативны (4.3). Для каждой $f \in H_{2k}$ ассоциированная с ней L-функция определяется как (4.4), а так называемая дополненная L-функция определяется как в (4.5). Единственное отличие от случая форм уровня $N \neq 1$ заключается в том, что мы знаем явный вид множителя ϵ_f в функциональном уравнении (5.30). А именно, дополненная L-функция формы $f \in H_{2k}$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$\Lambda_f(s) = \epsilon_f \Lambda_f(1-s), \quad \epsilon_f = i^{2k}. \tag{5.1}$$

Из (5.30) сразу следует, что $L(f, 1/2) = 0$ если k нечетно. Поэтому мы будем рассматривать только случай четного k. Результаты о необнуляемости центральных значений L-функций не только представляют большой теоретический интерес, но также имеют ряд важных приложений Как уже отмечалось в главе 4, результаты о необнуляемости центральных значений L-функций не только представляют большой теоретический интерес, но также тесно связаны со многими теоретико-числовыми задачами, например см. результаты работ [**29**], [**53**], [**63**], [**66**], [**106**]. Например, для случая форм большого веса Иванец и Сарнак [**53**] доказали, что для любого $\epsilon > 0$ выполнено

$$\liminf_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k\leq K} \frac{\#\{f \in H_{4k}(1), \quad L_f(1/2) \geq 1/(\log k)^2\}}{\#\{f \in H_{4k}(1)\}} \geq \frac{1}{2}. \tag{5.2}$$

Более того, если пропорция необнуляемости (5.2) строго больше $1/2$, то у L-функции действительного примитивного характера нет исключительных нулей Ландау-Зигеля. Вопрос о необнуляемости L-функций для форм фиксированного веса (т.е. без дополнительного усреднения по k в (5.2)) был впервые изучен Иванцом, Луо и Сарнаком в [**52**]. Им удалось доказать [**52**, след. 1.6], в предположении справедливости расширенной

гипотезы Римана, что в этом случае пропорция необнуляемости L-функций не меньше 1/4. Первый безусловный результат в данной задаче был получен независимо Фоменко [**139**] и позднее Лау и Цангом [**67**]. В данных работах, на основе вычислений первого и второго моментов данных L-функций, показано, что пропорция необнуляемости не меньше $1/\log k$. Впоследствии, Луо [**73**] доказал, что пропорция необнуляемости больше некоторой очень малой, но фиксированной, не зависящей от k, положительной константы. Однако, в его работе не приведены никакие численные значения данной постоянной. По-видимому, методы работы [**73**] позволяет доказать лишь существование такой постоянной, но не ее численной значение. Одной из причин этого является то, что для получения количественной оценки нужно доказать асимптотическую формулу для подкрученного второго момента. В работе [**73**] получена только верхняя оценка на данный момент, чего оказывается недостаточно, для получения некой количественной оценки снизу на пропорцию необнуляемости.

В этой главе мы докажем следующую численную оценку снизу на пропорцию необнуляемости L-функций голоморфных параболических форм большого веса, а именно:

Теорема 5.1.1. *Для любого $\epsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\epsilon)$ такое, что для любого $k \geq k_0$ и $k \equiv 0 \pmod 2$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{|H_{2k}|} \sum_{\substack{f \in H_{2k} \\ L_f(1/2) \geq (\log k)^{-2}}} 1 \geq \frac{1}{5} - \epsilon. \tag{5.3}$$

Основным шагом для доказательства теоремы 5.1.1 является получение асимптотических формул для первого и второго подкрученных моментов

$$M_j(l) = \sum_{f \in H_{2k}}^{h} \lambda_f(l) L_f^j(1/2), \quad j = 1, 2. \tag{5.4}$$

Более того, чем больше значение l для которого удается доказать, что остаток в асимптотической формуле меньше главного члена, тем лучше оценка на необнуляемость. Так, если удалось доказать асимптотическую формулу для первого момента при $l \ll M^{\Delta}$, а для второго момента при $l \ll M^{2\Delta}$, то можно показать (см. параграф 5.8 и формулу (5.149)), что пропорция необнуляемость не меньше величины $\frac{\Delta}{1+\Delta}$. Для доказательства этой оценки мы используем методы, разработанные в статьях Ковальского-Мишеля [**63**] и Ковальского-Мишеля-Ван дер Кама [**66**]. Отметим, что так как в (5.4) присутствует гармоническое суммирование то, чтобы получить оценку на "чистую"пропорцию в (5.3), на последнем шаге доказательства (см. параграф 5.8.6) нам необходимо избавиться от гармонического суммирования. Для этого мы используем подход, предложенный в работах Ковальского [**62**] и Ковальского-Мишеля [**63**].

Таким образом все сводится к изучению моментов (5.4). Асимптотическая формула для первого момента при $l \ll k$ является прямым следствием теоремы 4.1.6. Основной отправной точкой нашего доказательства новой асимптотической формулы для $M_2(l)$ можно считать теорему 5.4.2 (см. параграф 5.4), доказанную Кузнецовым в препринте [**130**]. Данный результат позже независимо передоказали Иванец и Сарнак [**53**, теорема 17]. Результатом теоремы 5.4.2 является точная формула, выражающая второй подкрученный момент рассматриваемых L-функций через две свертки функций числа делителей

$$E_1(l) := \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{l-1} \tau(n)\tau(l-n)\phi_k\left(\frac{n}{l}\right), \tag{5.5}$$

$$E_2(l) := \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\tau(n+l)\Phi_k\left(\frac{l}{n+l}\right), \tag{5.6}$$

где, как и прежде, $\tau(n)$-функция числа делителей, а $\phi_k(x)$, $\Phi_k(x)$ функции, выражающиеся через гипергеометрические функции Гаусса (4.20). Различные свертки функций числа делителей уже изучались нами в главе 1 и в параграфе 2.4. К сожалению методы, использованные там, не позволяют получить требуемые оценки на (5.5), (5.6). Дело в том, что в случае применения методов из главы 1 суммы (5.5), (5.6) будут выражены в том числе через второй момент L-функций голоморфных параболических форм. А так как мы сейчас как раз пытаемся оценить эти вторые моменты, то тем самым произойдет зацикливание, не позволяющее оценить (5.5), (5.6). Применение методов из параграфа 2.4 наталкивается на необходимость детального изучения свойств функций $\phi_k(x)$ и $\Phi_k(x)$, для которых необходимо доказать равномерные по x и k асимптотические разложения. Существенная часть настоящей главы (параграф 5.5) посвящена получению этих асимптотических формул. Для их вывода мы используем метод Лиувилля-Грина, так же известный как ВКБ метод. Данный метод, наряду с методом перевала, является одним из основных способов получения различных асимптотических разложений. В его основе лежит наблюдение, что если функция является решением некого дифференциального уравнения второго порядка, то, несколько преобразовав и упростив данное дифференциальное уравнение так, чтобы его решениями стали функции, чье асимптотическое разложение уже известно, мы можем приблизить изначальную функцию с помощью решений нового упрощенного уравнения. Изначально данный метод получил широкое распространение в физике (особенно в квантовой механике). Применять метод Лиувилля-Грина к специальным функциям, возникающим в теории чисел, по-видимому, впервые предложил Н.В.Кузнецов в 80-х годах. В нашем случае асимптотическое разложение функции $\Phi_k(x)$ основано (теорема 5.5.17) на K-функции

Бесселя, а функция $\phi_k(x)$ аппроксимируется (теорема 5.5.14) комбинацией J и Y функций Бесселя (см. параграф 5.5). После получения равномерных по x и k асимптотических разложений для функций $\phi_k(x)$ и $\Phi_k(x)$ мы оцениваем (5.5), (5.6) по модулю и доказываем асимптотическую формулу (теорема 5.6.4, параграф 5.6) для второго подкрученного момента L-функций голоморфных параболических модулярных форм

$$M_2(l) = \frac{2\tau(l)}{\sqrt{l}}(2\log k - \log l - 2\log 2\pi + 2\gamma) + O\left(\frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}\right). \tag{5.7}$$

Таким образом остаток в асимптотической формуле меньше главного члена при $l \ll k^{1/2-\epsilon}$ и, следовательно, мы можем взять $\Delta = 1/4 - \epsilon$, получая следующую оценку снизу на пропорцию необнуляемости $\frac{\Delta}{1+\Delta} = \frac{1}{5} - \epsilon$. Из свойств функций Бесселя следует, что функция $\Phi_k(x)$ экспоненциально мала при интересующих нас значениях x. В тоже время функция $\phi_k(x)$ является осциллирующей. Оценивая (5.5), (5.6) по модулю, мы теряем все эти сокращения и получаем не оптимальный результат. Для того, чтобы учесть эти осцилляции можно, например, усреднить функцию $\phi_k(x)$ по k, то есть рассмотреть второй момент L-функций модулярных форм с дополнительным усреднением по весу форм. Для исследования моментов усредненных по весу форм возьмем какую-нибудь неотрицательную бесконечно гладкую функцию $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ с компактным носителем $[\theta_1, \theta_2]$ (где $\theta_2 > \theta_1 > 0$) такую, что

$$\|h^{(n)}\|_1 \ll 1 \text{ для всех } n \geq 0. \tag{5.8}$$

Введем следующее обозначение для усредненного первого и второго подкрученного момента

$$A_j(l) := \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{f \in H_{4k}(1)}^{h} \lambda_f(l) L_f^j(1/2). \tag{5.9}$$

Для первого момента $A_1(l)$ можно, используя асимптотику для $M_1(l)$, тривиально получить асимптотическую формулу, справедливую при $l \ll K^{1-\epsilon}$. Этого достаточно ровно для того, чтобы доказать оценку (5.2). Возникает естественный вопрос, является ли вычисление первого подкрученного момента барьером для улучшения оценки (5.2). Оказывается, что нет. В параграфе 5.3 мы выводим асимптотическую формулу для $A_1(l)$, справедливую при $l \ll K^{2-\epsilon}$. Доказательство основано на более детальном анализе специальных функций из точной формулы для первого момента (теорема 4.1.6). Будучи изначально выраженными через вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), они могут быть сведены (через J-функции Бесселя) к интегралам от полиномов Лежандра $P_k(y)$. Использование равномерной асимптотической формулы

[**9**] для полиномов Лежандра, позволяет получить очень хорошие оценки на их средние значения $\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) P_k(y)$.

Для второго момента $A_2(l)$, используя осциллирующий характер функции $\phi_k(x)$, мы в параграфе 5.7 (теорема 5.7.4) доказываем асимптотическую формулу, справедливую при $l \ll K^{2-\epsilon}$. Таким образом мы можем взять $\Delta = 1 - \epsilon$ и получить, что в среднем по весу пропорция необнуляемость ограничена снизу величиной $\frac{\Delta}{1+\Delta} = \frac{1}{2} - \epsilon$, тем самым передоказывая результат Иванца-Сранака (5.2).

Улучшение остатка в асимптотических формулах как для $M_2(l)$ так и для $A_2(l)$, по-видимому, является очень трудной задачей. Как уже упоминалось, Иванец и Сарнак [**53**] установили, что чтобы показать отсутствие нулей Ландау-Зигеля достаточно доказать асимптотическую формулу для усредненного второго подкрученного момента для $l \gg K^{2+\epsilon}$. Поэтому значение $l = k^2$ является естественным барьером в данной задаче. Естественно, предположить что для его преодоления необходимо не оценивать (5.5), (5.6) тривиально, а использовать методы из главы 1. Стоит также отметить, что при переходе параметра l через значение k^2 существенным образом меняется поведение остатков $E_j(l)$. Так, при $l \ll k^2$ из леммы 5.6.2 следует

$$\frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right) \ll \exp\left(-\frac{ck}{\sqrt{l}}\right)\left(\frac{l^{\epsilon}}{l^{1/4}k^{1/2}} + \frac{l^{1/2+\epsilon}}{k^{3/2}}\right), \tag{5.10}$$

и, соответственно, слагаемое $E_2(l)$ является пренебрежимо малым. Однако, при $l > k^2$ данное слагаемое уже не является столь малым. Этот факт следует из того, что при больших x функция $\Phi_{2k}(x)$ убывает экспоненциально, тогда как при x очень близких к 1 такого убывания уже не наблюдается (см. параграф 5.5.3)! Следовательно, при $l > k^2$ левая часть (5.10) уже не будет пренебрежимо малой. Так как $\Phi_{2k}(x)$ не является осциллирующей функцией, введение дополнительного усреднения по k также не уменьшает $E_2(l)$. В последствии нами будет показано, что

$$\frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right) \approx \frac{\sqrt{l}}{k^2}.$$

Соответственно, естественно предположить наличие второго главного члена в (5.7) при $l > k^2$. Проблема заключается в том, что он оказывается больше главного члена в (5.7). На первый взгляд, может показаться, что этот феномен делает невозможным улучшение результата Иванца-Сарнака о 50% необнуляемости, так как структура первого момента не меняется при $l > k$ (напомним, что при доказательстве результатов о необнуляемости параметр подкрутки во втором моменте должен расти как квадрат параметра подкрутки

в первом моменте). Тем не менее, считается, что процент необнуляемости все же должен быть равен 100% и, соответственно, имеет смысл изучить данный второй главный член.

Точная формула для $M_2(l)$, полученная в теореме 5.4.2, содержит три формулы свертки, каждая из которых является одной из двух аддитивных бинарных проблем делителей

$$A_f(\alpha,\beta;W) := \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_\alpha(n)\sigma_\beta(n+f)W\left(\frac{n}{f}\right), \tag{5.11}$$

$$B_N(\alpha,\beta;W_0) := \sum_{n=1}^{N}\sigma_\alpha(n)\sigma_\beta(N-n)W_0\left(\frac{n}{N}\right), \tag{5.12}$$

см. [**77**, стр. 531, 533]. Данные суммы достаточно хорошо изучены (см. библиографию в главе 1). Для них Кузнецовым была доказана точная формула с явным видом как главного члена, так и остаточных членов. Нас будут интересовать исключительно главные члены. В обозначениях [**77**, стр.554] асимптотические формулы для сверток (5.11), (5.12) имеют следующий вид

$$A_f(\alpha,\beta;W) = U(\alpha,\beta;W) + E(\alpha,\beta;W), \tag{5.13}$$

$$B_N(\alpha,\beta;W_0) = V(\alpha,\beta;W_0) + E(\alpha,\beta;W_0), \tag{5.14}$$

где $E(\alpha,\beta;W), E(\alpha,\beta;W_0)$ остаточные члены и

$$U(\alpha,\beta;W) = \int_0^\infty W(x)\mu_f(x;\alpha,\beta)dx, \tag{5.15}$$

$$V(\alpha,\beta;W_0) = \int_0^1 W_0(x)\rho_N(x;\alpha,\beta)dx, \tag{5.16}$$

$\mu_f(x;\alpha,\beta) =$

$$\sigma_{1+\alpha+\beta}(f)\frac{\zeta(1+\alpha)\zeta(1+\beta)}{\zeta(2+\alpha+\beta)}x^\alpha(1+x)^\beta + f^\alpha\sigma_{1-\alpha+\beta}(f)\frac{\zeta(1-\alpha)\zeta(1+\beta)}{\zeta(2-\alpha+\beta)}(1+x)^\beta +$$
$$f^\beta\sigma_{1+\alpha-\beta}(f)\frac{\zeta(1+\alpha)\zeta(1-\beta)}{\zeta(2+\alpha-\beta)}x^\alpha + f^{\alpha+\beta}\sigma_{1-\alpha-\beta}(f)\frac{\zeta(1-\alpha)\zeta(1-\beta)}{\zeta(2-\alpha-\beta)}, \tag{5.17}$$

$\rho_N(x;\alpha,\beta) =$

$$\sigma_{1+\alpha+\beta}(N)\frac{\zeta(1+\alpha)\zeta(1+\beta)}{\zeta(2+\alpha+\beta)}x^\alpha(1-x)^\beta + N^\alpha\sigma_{1-\alpha+\beta}(N)\frac{\zeta(1-\alpha)\zeta(1+\beta)}{\zeta(2-\alpha+\beta)}(1-x)^\beta +$$
$$N^\beta\sigma_{1+\alpha-\beta}(N)\frac{\zeta(1+\alpha)\zeta(1-\beta)}{\zeta(2+\alpha-\beta)}x^\alpha + N^{\alpha+\beta}\sigma_{1-\alpha-\beta}(N)\frac{\zeta(1-\alpha)\zeta(1-\beta)}{\zeta(2-\alpha-\beta)}. \tag{5.18}$$

Предположим, что мы можем применить данные формулы к каждой формуле свертки $E_i(l;u,v)$ из теоремы 5.4.2. Для $i=1,2,3$ запишем

$$E_i(l;u,v)=MT_i(l;u,v)+ET_i(l;u,v),$$

где $MT_i(l;u,v)$-главный член.

Гипотеза 1. *Для $E_1(l;u,v)$ главный член $MT_1(l;u,v)$ может быть вычислен с помощью* (5.16). *При $i=2,3$ для $E_i(l;u,v)$ главный член $MT_i(l;u,v)$ может быть вычислен с помощью* (5.15).

В предположении справедливости данной гипотезы становится возможным для каждой $E_i(l;u,v)$ вычислить предполагаемые главные члены $MT_i(l;u,v)$. Используя результаты работы [**77**], можно выписать и остаточные члены, однако нам не удалось получить на них какие-либо осмысленные оценки. Это объясняется тем, что, к сожалению, применение результатов из [**77**] приводит к некоторому зацикливанию и мы получаем в итоге изначальный второй момент. В итоге нами доказано (параграф 5.9), что для больших значений l в асимптотической формуле (5.7) не появляется второй главный член.

Теорема 5.1.2. *В предположении справедливости гипотезы 1 выполнено следующее равенство*

$$MT_1(l;0,0)+MT_2(l;0,0)+MT_3(l;0,0)=0.$$

В заключении, отметим, что асимптотические формулы для подкрученных моментов применяются не только при доказательстве результатов о необнуляемости центральных значений L-функций. Например, Хаф [**42**] доказал асимптотическую формулу для второго момента с остатком $O(l^{3/4}k^{-1/2+\epsilon})$ (аналогичный результат другими методами был также получен Нг [**81**]) и, используя ее, получил результат о плотности нулей L-функций модулярных форм.

5.2. Обозначения и некоторые вспомогательные результаты

С целью сделать материал данной главы относительно самодостаточным, мы в этом параграфе не только определим новые объекты, но и напомним некоторые из обозначений уже введенных в предыдущих главах.

Для начала мы напомним определения и некоторые свойства гамма функции и гипергеометрической функции Гаусса. Приведенная ниже информация, а также другие свойства данных функций, содержатся в [**86**, гл.5 и 15].

Для $\Re z > 0$ гамма функция $\Gamma(z)$ определяется с помощью интеграла Эйлера [**86**, (5.2.1)].

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Гамма функция является мероморфной функцией с простыми полюсами в не положительных целых числах $z = 0, -1, -2, \ldots$. Она удовлетворяет следующим функциональным уравнениям [**86**, (5.5.1)]

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

и [**86**, (5.5.3)]

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.19}$$

Для $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ может быть определена пси-функция $\psi(z)$

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Данная функция является мероморфной с простыми полюсами в не положительных целых числах $z = 0, -1, -2, \ldots$. Пси-функция удовлетворяет следующему функциональному уравнению [**86**, (5.5.2)]

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}. \tag{5.20}$$

Для $|z| < 1$ гипергеометрическая функция Гаусса определяется [**86**, 15.2.1] с помощью абсолютно сходящегося ряда

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+j)\Gamma(b+j)}{\Gamma(c+j)j!} z^j.$$

Данная функция может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость. При $z = 1$ и $\Re(c-a-b) > 0$ гипергеометрическая функция Гаусса может быть выражена через гамма функции [**86**, 15.4.20]

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \tag{5.21}$$

Лемма 5.2.1. *Для $d < 0$ и $-1 < c < -1 - d$ выполнено*

$$\int_0^\infty x^c (1+x)^d dx = \frac{\Gamma(c+1)\Gamma(-1-c-d)}{\Gamma(-d)}. \tag{5.22}$$

Для $c, d > -1$ справедливо равенство

$$\int_0^1 x^c (1-x)^d dx = \frac{\Gamma(c+1)\Gamma(d+1)}{\Gamma(2+c+d)}. \tag{5.23}$$

Доказательство. Равенство (5.22) следует из [**86**, 5.12.3]. Для того чтобы доказать (5.23) достаточно воспользоваться [**86**, 5.12.1]. □

Как и прежде для комплексного v положим

$$\tau_v(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^v = n^{-v}\sigma_{2v}(n), \quad \text{где} \quad \sigma_v(n) = \sum_{d|n} d^v. \tag{5.24}$$

Заметим, что $\tau_v(n) = \tau_{-v}(n)$. Пусть $e(x) = \exp(2\pi i x)$, тогда Классические суммы Клоостермана определяются следующим образом

$$S(n,m;c) = \sum_{\substack{a \pmod c \\ (a,c)=1}} e\left(\frac{an + a^* m}{c}\right), \quad aa^* \equiv 1 \pmod c.$$

Справедлива оценка Вейля (см. [**50**, теорема 4.5])

$$|S(m,n;c)| \le \tau_0(c)\sqrt{(m,n,c)}\sqrt{c}.$$

Для $\Re s > 1$, $m \ge 1$ (см. [**102**, 1.5.4]) выполнено

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(0,m;c)}{c^s} = \frac{\sigma_{1-s}(m)}{\zeta(s)}, \tag{5.25}$$

где $\zeta(s)$-дзета функция Римана.

Через H_{2k} мы обозначаем множество примитивных уровня 1 и веса $2k \ge 12$. Каждая $f \in H_{2k}$ может быть разложена в ряд Фруье

$$f(z) = \sum_{n \ge 1} \lambda_f(n) n^{(2k-1)/2} e(nz),$$

при этом коэффициенты Фурье мультпликативны

$$\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_f\left(\frac{mn}{d^2}\right). \tag{5.26}$$

Для каждой $f \in H_{2k}$ определим ассоциированную с ней L-функцию следующим образом

$$L_f(s) = \sum_{n \ge 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1. \tag{5.27}$$

Симметричная квадратичная L-функция определяется как

$$L(\mathrm{sym}^2 f, s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_f(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1. \tag{5.28}$$

Из соотношения (5.26) следует, что при $Re u > 1/2$, $\Re v = 0$ выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_v(n)\lambda_f(n)}{n^{1/2+u}} = \frac{1}{\zeta(1+2u)} L_f(1/2+u+v) L_f(1/2+u-v). \tag{5.29}$$

Дополненная L-функция определяется как

$$\Lambda_f(s) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^s \Gamma\left(s + \frac{2k-1}{2}\right) L_f(s),$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Lambda_f(s) = \epsilon_f \Lambda_f(1-s), \quad \epsilon_f = i^{2k} \tag{5.30}$$

и может быть аналитические продолжена на всю комплексную плоскость. Из функционального уравнения (5.30) следует, что $L_f(1/2) = 0$ при нечетных k.

Гармонический вес определяется следующим образом (см. [**52**, лемма 2.5])

$$\omega_f = \frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}\langle f, f\rangle_1} = \frac{12\zeta(2)}{(2k-1)L(\mathrm{sym}^2 f, 1)}, \tag{5.31}$$

где $\langle f, f\rangle_1$ скалярное произведение Петерссона на пространстве голоморфных модулярных форм уровня один. Определим так называемое гармоническое суммирование

$$\sum_{f\in H_{2k}}^{h} \alpha_f := \sum_{f\in H_{2k}} \omega_f \alpha_f.$$

Функции Бесселя обозначаются стандартным образом как $J_v(x)$, $Y_v(x)$, $K_v(x)$.

Теорема 5.2.2. *(формула суммирования Петерссона,* [**50**, теорема 4.5]*) Для* $2k \geq 12$ *и целых* $l, n \geq 1$ *справедлива следующая формула*

$$\sum_{f\in H_{2k}}^{h} \lambda_f(l)\lambda_f(n) = \delta_{l,n} + 2\pi i^{2k} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(l,n;c)}{c} J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{ln}}{c}\right). \tag{5.32}$$

Определим ядра Бесселя

$$k^+(x,v) = \frac{1}{2\cos(\pi(1/2+v))}\left(J_{2v}(x) - J_{-2v}(x)\right), \tag{5.33}$$

$$k^-(x,v) = \frac{2}{\pi}\sin(\pi(1/2+v))K_{2v}(x).$$

Лемма 5.2.3. *Пусть*

$$\gamma(u,v) = \frac{2^{2u-1}}{\pi}\Gamma(u+v)\Gamma(u-v), \tag{5.34}$$

тогда при $3/2 > Rew > 2|\Re v|$ *справедливо равенство*

$$\int_0^\infty k^+(x,v)x^{w-1}dx = \gamma(w/2,v)\cos(\pi w/2), \tag{5.35}$$

а при $Rew > 2|\Re v|$

$$\int_0^\infty k^-(x,v)x^{w-1}dx = \gamma(w/2,v)\sin(\pi(1/2+v)). \tag{5.36}$$

Доказательство. Равенство (5.36) следует из [**35**, 6.561.16]. Докажем (5.35). Применяя [**35**, 6.561.14], мы при $3/2 > Rew > 2|\Re v|$ получаем

$$\int_0^\infty k^+(x,v)x^{w-1}dx = \frac{2^{w-1}}{2\cos(\pi(1/2+v))}\left(\frac{\Gamma(v+w/2)}{\Gamma(1+v-w/2)} - \frac{\Gamma(-v+w/2)}{\Gamma(1-v-w/2)}\right).$$

Используя (5.19), находим

$$\int_0^\infty k^+(x,v)x^{w-1}dx = \frac{2^{w-1}}{2\pi\cos(\pi(1/2+v))}\Gamma(v+w/2)\Gamma(w/2-v)$$
$$\times\left[\sin(\pi(w/2-v))-\sin(\pi(w/2+v))\right].$$

Теперь пользуясь [**86**, 4.21.7], мы приходим к (5.35). □

Рассмотрим ряд

$$D_v(s,x) := \sum_{n\geq 1}\frac{\tau_v(n)}{n^s}e(nx), \quad \Re s > 1. \tag{5.37}$$

Пусть x рациональное число и $x = \frac{d}{c}$, $(d,c) = 1$, $c \geq 1$. Тогда функция $D_v(s,x)$ двух комплексных переменных s и v является мероморфной на всей комплексной плоскости. Рассмотрим v такое, что $\Re v = 0$ и $v \neq 0$. Тогда функция $D_v(s,d/c)$ одной комплексной переменной s имеет два простых полюса в точках $s = 1+v$ и $s = 1-v$, вычеты в которых соответственно равны $c^{-1-2v}\zeta(1+2v)$ и $c^{-1+2v}\zeta(1-2v)$, а в остальных точках $D_v(s,d/c)$ голоморфна. Эта функция также удовлетворяет функциональному уравнению (см. [**78**, лемму 3.7])

$$D_v\left(s,\frac{d}{c}\right) = \left(\frac{4\pi}{c}\right)^{2s-1}\gamma(1-s,v)\times$$
$$\left\{-\cos(\pi s)D_v\left(1-s,-\frac{d^*}{c}\right)+\sin(\pi(1/2+v))D_v\left(1-s,\frac{d^*}{c}\right)\right\}, \tag{5.38}$$

где $dd^* \equiv 1 \pmod c$, а $\gamma(u,v)$ определена в (5.34). При $\Re s < 0$ справедлива оценка (см.[**78**, 3.3.24])

$$|D_v(s,d/c)| \ll (c|s|)^{1-2\Re s}(\log|s|)^2. \tag{5.39}$$

Отметим, что

$$D_v(s,d/c) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\tau_v(n)}{n^s}e\left(n\frac{d}{c}\right) = \frac{1}{c^{2s}}\sum_{a,b=1}^c e\left(ab\frac{d}{c}\right)\zeta(a/c;s-v)\zeta(b/c;s+v), \tag{5.40}$$

где

$$\zeta(\alpha;s) = \sum_{n+\alpha>0}\frac{1}{(n+\alpha)^s}, \quad \Re s > 1$$

дзета функция Лерха. Применяя формулу Эйлера-Маклорена, получаем (см. [**121**, лемму 3, стр. 25])

$$\zeta(\alpha;s) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(n+\alpha)^s}+\frac{1}{s-1}(N+1/2+\alpha)^{1-s}+s\int_{N+1/2}^\infty \frac{1/2-\{u\}}{(u+\alpha)^{s+1}}du, \tag{5.41}$$

здесь $\{u\}$–дробная часть числа u. Оценивая по модулю (5.41), мы для любого $\epsilon > 0$ получаем

$$|\zeta(\alpha;\sigma+iT)| \ll_\epsilon \begin{cases} 1 & \sigma \geq 1+\epsilon \\ \log T & 1 \leq \sigma \leq 1+\epsilon \\ T^{1-\sigma} & \epsilon \leq \sigma < 1 \end{cases}. \tag{5.42}$$

Преобразование Меллина функции f задается интегралом

$$\hat{f}(z) = \int_0^\infty t^{z-1} f(t) dt.$$

Доказательство следующего классического утверждения можно найти, например в [**87**, параграф 3.1.3].

Лемма 5.2.4. *(неравенство Парсеваля) Пусть для некоторого $a \in \mathbf{R}$ выполнено*

$$\int_0^\infty |g(x)| x^{-a} dx < \infty, \quad \int_{(a)} |\hat{\phi}(z)| dz < \infty, \tag{5.43}$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \hat{\phi}(z) \hat{g}(1-z) dz = \int_0^\infty \phi(x) g(x) dx.$$

Рассмотри вырожденную гипергеометрическую функцию, называемую также функцией Куммера [**86**, (13.2.2)],

$$ {}_1F_1(a,b;x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} \frac{x^k}{k!}.$$

Лемма 5.2.5. *Для $\epsilon = \pm 1$ имеет место выражение*

$$ {}_1F_1\left(k, 2k; 2z\right) = \Gamma(k+1/2) \exp(z) \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2-k} e\left(\epsilon \frac{1/2-k}{4}\right) J_{k-1/2}\left(ze\left(\frac{\epsilon}{4}\right)\right). \tag{5.44}$$

Доказательство. Применяя [**86**, (13.2.2)] и [**86**, (13.6.9)] мы получаем представление функции ${}_1F_1(a,b;x)$ через I-функцию Бесселя. Используя [**86**, (10.27.6)], мы доказываем (5.44).

□

Полиномы Лежандра могут быть определены с помощью следующей формулы Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n\right].$$

Отметим [**86**, (14.7.17)], что эти многочлены являются четной или нечетной функции в зависимости от четности n

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{5.45}$$

Следующая теорема получается из [**9**, (1.1-1.3)] при $\alpha = \beta = 0$.

Теорема 5.2.6. *(Барателла, Гаттеши[9]) Пусть* $N := n + 1/2$, *тогда*

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\left(J_0(N\theta)\sum_{s=0}^{m}\frac{A_s(\theta)}{N^{2s}} + \theta J_1(N\theta)\sum_{s=0}^{m-1}\frac{B_s(\theta)}{N^{2s+1}} + E_m \right),$$

при этом для некоторых фиксированных положительных константах c *и* δ *выполнено*

$$E_m \ll \begin{cases} \theta^{1/2}N^{-2m-3/2} & \text{если } c/N \le \theta \le \pi - \delta \\ \theta^2 N^{-2m} & \text{если } 0 < \theta \le c/N \end{cases}.$$

Функции $A_s(\theta)$, $B_s(\theta)$ *аналитичны* $0 \le \theta < \pi$ *и могут быть определены рекурсивно следующим образом:* $A_0(\theta) = 1$ *и далее*

$$\theta B_s(\theta) = -\frac{1}{2}A_s'(\theta) - \frac{1}{2}\int_0^\theta \frac{A_s'(t)}{t}dt + \frac{1}{2}\int_0^\theta f(t)A_s(t)dt, \tag{5.46}$$

$$A_{s+1}(\theta) = \frac{1}{2}\theta B_s'(\theta) - \frac{1}{2}\int_0^\theta tf(t)B_s(t)dt + \lambda_{s+1}, \tag{5.47}$$

здесь

$$f(t) = \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{16\sin^2(t/2)} - \frac{1}{16\cos^2(t/2)}.$$

Полиномы Лежандра тесно связаны с функцией Бесселя, являясь частью одно из ее интегральных представлений.

Лемма 5.2.7. *Для любого неотрицательного целого* n *справедливо равенство*

$$J_{n+1/2}(z) = (-i)^n\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\int_0^\pi \exp(iz\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{5.48}$$

Доказательство. Данная формула следует из [**86**, (10.47.3)] и [**86**, (10.54.2)]. □

Лемма 5.2.8. *Пусть* $|\arg z| < \pi$. *Для фиксированного* $\nu \ge 0$ *и* $z \to \infty$ *имеет место следующая асимптотическая формула*

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\cos(z - \pi\nu/2 - \pi/4)\left[\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^s\frac{a_{2j}(\nu)}{z^{2j}} + R_1\right] - \right.$$
$$\left. \sin(z - \pi\nu/2 - \pi/4)\left[\sum_{j=0}^{d-1}(-1)^s\frac{a_{2j+1}(\nu)}{z^{2j+1}} + R_2\right]\right), \tag{5.49}$$

где

$$a_j(\nu) = \frac{\Gamma(j + 1/2 + \nu)}{2^j j!\Gamma(-j + 1/2 + \nu)} \text{ for } j \ge 0,$$

$$R_1 = O\left(\frac{1}{(2z)^{2d}}\right), \quad R_2 = O\left(\frac{1}{(2z)^{2d+1}}\right)$$

при условии, что $d \ge \max(\nu/2 - 1/4, 1)$.

Доказательство. Данный результат приведен в [**35**, (8.451.1)] и [**86**, пар.10.17(iii), (10.17.3)].

□

5.3. Первый момент

Следующая асимптотическая формула для первого подкрученного момента является следствием теоремы 4.1.6.

Теорема 5.3.1. *При $2k \geq 12$, $l < k/4\pi e$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\sum_{f \in H_{2k}}^{h} \lambda_f(l) L_f(1/2) = l^{-1/2}(1 + i^{2k}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\left(2\pi e \frac{l}{k}\right)^k\right).$$

Главный член в асимптотической формуле для первого момента, усредненного по весу форм (5.9), выражается через величины

$$H := \int_0^\infty h(y)dy, \quad H_1 := \int_0^\infty h(y)\log y dy, \tag{5.50}$$

где функция h определена в (5.8). Используя результат теоремы 5.3.1 сразу получаем следующую асимптотическую формулу

Теорема 5.3.2. *Существуют абсолютные постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что при $l \ll K$ выполнено*

$$A_1(l) = \frac{2}{\sqrt{l}}\frac{HK}{4} + O\left(\frac{K}{\sqrt{l}}\left(c_1\frac{l}{K}\right)^{c_2 K}\right). \tag{5.51}$$

Данный результат может быть существенно улучшен, а именно.

Теорема 5.3.3. *Для любого натурального $l \ll K^{2-\epsilon}$ имеем*

$$A_1(l) = \frac{2}{\sqrt{l}}\frac{HK}{4} + O\left(K\frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^2}\right). \tag{5.52}$$

5.3.1. Точная формула для первого момента. В параграфах 4.5 и 4.6 мы доказали точные формулу для первых подкрученных моментов (4.8) форм уровня $N = p^\nu$. Действуя аналогичным образом можно получить точную формулу и для первого подкрученного момента форм уровня один.

Для $\epsilon_1 = \pm 1$ определим

$$I_{\epsilon_1}(u, v, k; x) := e\left(\frac{\epsilon_1}{8} - \frac{\epsilon_1 k}{4}\right) x^{1/2-k}\frac{\Gamma(k-v-u)}{\Gamma(2k)} \times {}_1F_1\left(k-v-u, 2k, -\frac{e(-\epsilon_1/4)}{x}\right). \tag{5.53}$$

Теорема 5.3.4. *При $2k \geq 12$, $\Re v = 0$, $|\Re u| < k-1$ справедливо следующее равенство*

$$\sum_{f\in H_{2k}(1)}^{h} \lambda_f(l)L_f(1/2+u+v) = \frac{1}{l^{1/2+u+v}} + i^{2k}\frac{(2\pi)^{2u+2v}\Gamma(k-u-v)}{l^{1/2-u-v}\Gamma(k+u+v)} + 2\pi i^{2k}V_1(l;u,v,k), \quad (5.54)$$

где остаточный член выражается в виде

$$V_1(l;u,v,k) = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{1/2+u+v}}\sum_{\substack{n=1\\(n,c)=1}}^{\infty}\frac{e(n^*lc^{-1})}{n^{1/2-u-v}}(2\pi)^{u+v-1/2} \times e\left(\frac{1/2-u-v}{4}\right)I_{-1}\left(u,v,k;\frac{cn}{2\pi l}\right) + \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{1/2+u+v}}\sum_{\substack{n=1\\(n,c)=1}}^{\infty}\frac{e(-n^*lc^{-1})}{n^{1/2-u-v}} \times (2\pi)^{u+v-1/2}e\left(-\frac{1/2-u-v}{4}\right)I_{+1}\left(u,v,k;\frac{cn}{2\pi l}\right), \quad (5.55)$$

c $nn^* \equiv 1 \pmod c$.

Доказательство. Единственное отличие доказательства формулы (5.54) от вывода равенства (4.28) заключается в том, что при $N = 1$ подынтегральная функция в (4.90), в силу (4.35), имеет полюс при $q = 1$. Соответственно, при сдвиге контура интегрирования в лемме 4.5.8 мы пройдем этот полюс, и вычет в нем даст нам дополнительное слагаемое

$$i^{2k}\frac{(2\pi)^{2u+2v}\Gamma(k-u-v)}{l^{1/2-u-v}\Gamma(k+u+v)},$$

которое и появляется в (5.54). □

Так как мы исследуем моменты значений L-функций в центральной точке $1/2$, то положим $u = v = 0$.

Лемма 5.3.5. *Для $\epsilon_1 = \pm 1$ выполнено*

$$e(-\epsilon_1/8)I_{\epsilon_1}(0,0,k;x) = \sqrt{\pi}e\left(\frac{\epsilon_1}{4\pi x}\right)e\left(\frac{-\epsilon_1 k}{4}\right)J_{k-1/2}\left(\frac{1}{2x}\right). \quad (5.56)$$

Доказательство. Подставляя представление (5.44) в равенство (5.53), получаем

$$e(-\epsilon_1/8)I_{\epsilon_1}(0,0,k;x) = e\left(\frac{-\epsilon_1 k}{4}\right)x^{1/2-k}\frac{\Gamma(k)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(2k)}2^{2k-1}\exp\left(-\frac{e(-\epsilon_1/4)}{2x}\right)\times \left(-\frac{e(-\epsilon_1/4)}{x}\right)^{1/2-k}e\left(\epsilon_2\frac{1/2-k}{4}\right)J_{k-1/2}\left(-\frac{e(-\epsilon_1/4)e(\epsilon_2/4)}{2x}\right),$$

где $\epsilon_2 = \pm 1$. Заметим, что $-e(-\epsilon_1/4) = \epsilon_1 i$. Выбирая $\epsilon_2 = -\epsilon_1$, находим

$$-e(-\epsilon_1/4)e(\epsilon_2/4) = -\exp(\pi i) = 1.$$

Следовательно, мы приходим к равенству

$$e(-\epsilon_1/8)I_{\epsilon_1}(0,0,k;x)=\frac{\Gamma(k)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(2k)}2^{2k-1}e\left(\frac{\epsilon_1}{4\pi x}\right)e\left(\frac{-\epsilon_1 k}{4}\right)J_{k-1/2}\left(\frac{1}{2x}\right).$$

Используя [**86**, (5.5.5)], получаем

$$e(-\epsilon_1/8)I_{\epsilon_1}(0,0,k;x)=\sqrt{\pi}e\left(\frac{\epsilon_1}{4\pi x}\right)e\left(\frac{-\epsilon_1 k}{4}\right)J_{k-1/2}\left(\frac{1}{2x}\right).$$

□

Следствие 5.3.6. *При $\epsilon_1=\pm 1$ имеет место оценка*

$$I_{\epsilon_1}(0,0,k;x)\ll\frac{(4x)^{-k+1/2}}{\Gamma(k+1/2)}.$$

Доказательство. Из [**86**, (10.14.4)] следует, что

$$|J_{k-1/2}(z)|\le\frac{(z/2)^{k-1/2}}{\Gamma(k+1/2)}.$$

Полагая $z=1/(2x)$, мы доказываем требуемую оценку. □

Докажем интегральное представление функции I_{ϵ_1} через полиномы Лежандра .

Лемма 5.3.7. *При $k\equiv 0 \pmod 2$, $\epsilon_1=\pm 1$ справедливо равенство*

$$I_{\epsilon_1}\left(0,0,k;\frac{1}{2z}\right)=-e\left(\frac{\epsilon_1}{8}\right)e\left(\frac{\epsilon_1 z}{2\pi}\right)\sqrt{2z}\int_0^{\pi/2}\sin\left(z\cos\theta\right)P_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное представление (5.56) с $z:=(2x)^{-1}$. Применяя (5.48) с $n=k-1$, мы находим

$$e(-\epsilon_1/8)I_{\epsilon_1}\left(0,0,k;\frac{1}{2z}\right)=e\left(\frac{-\epsilon_1 k}{4}\right)e\left(-\frac{k}{4}+\frac{1}{4}\right)e\left(\frac{\epsilon_1 z}{2\pi}\right)\times$$
$$\sqrt{\frac{z}{2}}\int_0^{\pi}\exp(iz\cos\theta)P_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

Так как k четно, то $e(-\epsilon_1 k/4)e(-k/4)=1$ и

$$e(-\epsilon_1/8)I_{\epsilon_1}\left(0,0,k;\frac{1}{2z}\right)=e(1/4)e\left(\frac{\epsilon_1 z}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{z}{2}}\int_0^{\pi}\exp(iz\cos\theta)P_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

Разобьем интеграл на два $\int_0^{\pi}=\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}$ и во втором интеграле сделаем замену $\phi:=\pi-\theta$. Используя свойство (5.45), получаем для четного k

$$P_{k-1}(-\cos\phi)=(-1)^{k-1}P_{k-1}(\cos\phi)=-P_{k-1}(\cos\phi)$$

Следовательно, так как $e(1/4) = \exp(\pi i/2) = i$ мы приходим к равенству

$$e(1/4)\int_0^{\pi} \exp(iz\cos\theta)P_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = i\int_0^{\pi/2} P_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta\left[\exp(iz\cos\theta) - \exp(-iz\cos\theta)\right]d\theta = -2\int_0^{\pi/2} \sin(z\cos\theta)P_{k-1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

Лемма доказана. □

5.3.2. Усреднение по весу. В этом параграфе мы докажем теорему 5.3.3. Напомним, что $h \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^+)$ неотрицательная, бесконечно гладкая функция с компактным носителем $[\theta_1, \theta_2]$ (здесь $\theta_2 > \theta_1 > 0$) и удовлетворяющая условию

$$\|h^{(n)}\|_1 \ll 1 \quad \text{для всех} \quad n \geq 0.$$

Применяя формулу суммирования Пуассона и интегрирую по частям $a \geq 2$ раз интегралы, возникающие после ее применения, получаем

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) = \frac{HK}{4} + O\left(\frac{1}{K^a}\right), \tag{5.57}$$

с H определенной в (5.50).

Главный член в (5.52) получается из главного члена теоремы 5.3.4 при подстановке $u = v = 0$ и усреднении по k с помощью (5.57). Отметим, что в (5.9) мы сразу положили вес форм равным $4k$, следовательно, при применении теоремы 5.3.4 нам нужно в ней заменить k на $2k$. Эту замену мы будем проводить во всех результатах параграфа 5.3.1, при их использовании.

Рассмотрим (5.55) с $u = v = 0$. Положим $z := \pi l/(cn)$ и разобьем остаток V_1 на две части

$$V_1(l; 0, 0, 2k) = W_1(l, k) + W_2(l, k) \tag{5.58}$$

так, что суммирование в $W_1(l, k)$ ведется по c, n таким, что $z < k/5$, а в $W_2(l, k)$ при условии $z \geq k/5$.

Лемма 5.3.8. *Существует абсолютная константа $C > 1$ такая, что*

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) W_1(l, k) \ll \frac{l^{1/2+\epsilon}K^{\epsilon}}{C^K}.$$

Доказательство. Положим $d := cn$. Так как $z < k/5$, то выполняется оценка $d > d_0$ с $d_0 := 5\pi l/k$. Применяя следствие 5.3.6, получаем оценку

$$W_1(l,k) \ll \frac{1}{\Gamma(2k+1/2)} \sum_{d>d_0} d^{-1/2+\epsilon} \left(\frac{\pi l}{2d}\right)^{2k-1/2} \ll$$

$$\frac{e^{2k}}{(2k)^{2k}} \left(\frac{\pi l}{2}\right)^{2k-1/2} \int_{d_0}^{\infty} x^{-2k+\epsilon} dx \ll$$

$$d_0^{1/2+\epsilon} \frac{e^{2k}}{(2k)^{2k}} \left(\frac{\pi l}{2d_0}\right)^{2k-1/2} \ll l^{1/2+\epsilon} k^{-1} \left(\frac{e}{20}\right)^{2k}.$$

Суммируя результат по k, мы завершаем доказательство леммы. □

При $l \ll K$ с достаточно малой постоянной в знаке $\ll$ суммы по c и n в $W_2(l,k)$ оказываются пустыми и остаток в формуле (5.51) оценивается как в лемме 5.3.8. Если же $l \gg K$, то сумма $W_2(l,k)$ дает больший вклад в остаток в формуле (5.51).

Лемма 5.3.9. *Для любого $\epsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) W_2(l,k) \ll K \frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^2}.$$

Доказательство. Из леммы 5.3.7 следует, что

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) W_2(l,k) \ll \sum_{cn \ll l/k} \frac{\sqrt{l}}{cn} \int_0^{\pi/2} \left| \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) P_{2k-1}(\cos\theta) \right| \times$$

$$\sin\theta d\theta \ll l^{1/2+\epsilon} \int_0^{\pi/2} \left| \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) P_{2k-1}(\cos\theta) \right| \sin\theta d\theta. \quad (5.59)$$

Для вычисления полиномов Лежандра мы воспользуемся теоремой 5.2.6 с $m = 1$ и $N = 2k - 1/2$, т.е.

$$P_{2k-1}(\cos\theta) \quad = \quad \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}} \left(J_0(N\theta) \left(1 + \frac{A_1(\theta)}{N^2}\right) \quad + \quad \theta J_1(N\theta) \frac{B_0(\theta)}{N} \quad + \quad E_1 \right), \quad (5.60)$$

где $B_0(\theta)$ и $A_1(\theta)$ определены (5.46), (5.47).

Сначала оценим вклад остатка E_1

$$l^{1/2+\epsilon} \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\theta \sin\theta} |E_1| d\theta \ll l^{1/2+\epsilon} \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \times$$

$$\left(\int_0^{c/N} \frac{\theta^3 d\theta}{N^2} + \int_{c/N}^{\pi/2} \frac{\theta^{3/2} d\theta}{N^{7/2}} \right) \ll l^{1/2+\epsilon} \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \frac{1}{k^{7/2}} \ll K \frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^{7/2}}.$$

Что касается главных членов в (5.60), то первый из них дает наибольший вклад в (5.59), так как два оставшихся главных члена имеют туже осцилляцию (см. (5.49)), но меньше по модулю, ввиду

$$\theta B_0(\theta) = O(\theta), \quad A_1(\theta) = O(\theta^2).$$

Таким образом вклад от главных членов не превосходит

$$MT := l^{1/2+\epsilon} \int_0^{\pi/2} \left| \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) J_0(N\theta) \right| \sqrt{\theta \sin\theta} d\theta.$$

Так как осцилляция в функции Бесселя возникает только при $N\theta \gg 1$, мы разобьем интеграл по θ на два в точке $t := C/K$ (где $C > 1$ некая большая абсолютная константа) . Первую часть оценим следующим образом

$$M_1 := l^{1/2+\epsilon} \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \int_0^t \theta d\theta \ll K \frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^2}.$$

Нам осталось оценить вторую часть

$$M_2 := l^{1/2+\epsilon} \int_t^{\pi/2} \left| \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) J_0(N\theta) \right| \sqrt{\theta \sin\theta} d\theta.$$

Для J-функции Бесселя мы воспользуемся асимптотической формулой (5.49). При $d \geq 1$ вклады слагаемых R_1, R_2 не превосходят

$$M_{2,1} := l^{1/2+\epsilon} \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \frac{1}{k^{1/2+2d}} \int_t^{\pi/2} \frac{\theta}{\theta^{1/2+2d}} d\theta \ll l^{1/2+\epsilon} \frac{K}{K^{1/2+2d}} \frac{t^2}{t^{1/2+2d}} \ll l^{1/2+\epsilon} \frac{K}{K^2}.$$

Так как $N\theta \gg 1$, то нам достаточно оценить лишь вклад первого слагаемого из (5.49) (остальные члены разложения (5.49) имеют тот же характер осцилляции, но меньше по абсолютному значению), а именно

$$M_{2,2} := l^{1/2+\epsilon} \int_t^{\pi/2} \sqrt{\theta} \left| \sum_k \frac{h\left(4k/K\right)}{\sqrt{2k-1/2}} \cos\left((2k-1/2)\theta - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\theta.$$

Применяя к сумме по k формулу суммирования Пуассона, получаем

$$\sum_{u \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{4y}{K}\right) \frac{\exp(i2y\theta)}{\sqrt{y}} \exp(-2\pi i y u) dy = \frac{K}{\sqrt{K}} \sum_{u \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(4y)}{\sqrt{y}} \exp\left(iyK(2\theta - 2\pi u)\right) dy.$$

Так как $0 < \theta \leq \pi/2$, то при $u \neq 0$ выполнено $|2\theta - 2\pi u| \gg u$. Интегрирую по частям $a \geq 2$, приходим к оценке

$$M_{2,2} \ll l^{1/2+\epsilon} \int_t^{\pi/2} \sqrt{\theta} \frac{K}{\sqrt{K}} \left(\frac{1}{(\theta K)^a} + \sum_{u \neq 0} \frac{1}{(Ku)^a} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^a}{\partial y^a} \left(\frac{h(y)}{\sqrt{y}} \right) \right| dy d\theta.$$

Из определения и свойств функции h следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^a}{\partial y^a} \left(\frac{h(y)}{\sqrt{y}} \right) \right| dy \ll 1.$$

Следовательно,

$$M_{2,2} \ll l^{1/2+\epsilon} \frac{K}{\sqrt{K}} \int_t^{\pi/2} \sqrt{\theta} \frac{d\theta}{(\theta K)^a} \ll l^{1/2+\epsilon} \frac{K}{K^{a+1/2}} \frac{t^{3/2}}{t^a} \ll K \frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^2}.$$

Таким образом, объединяя все полученные нами оценки, мы заключаем

$$MT \ll M_1 + M_2 \ll M_1 + M_{2,1} + M_{2,2} \ll K\frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^2}.$$

Лемма доказана. □

Теперь теорема 5.3.3 следует из (5.54), (5.58), лемм 5.3.8 и 5.3.9.

5.4. Второй момент

5.4.1. Формула суммирования Вороного. Обычно, для упрощения доказательства, формула суммирования Вороного формулируется для тестовой функции ϕ с компактным носителем. Однако, для доказательства формулы свертки для второго момента нам требуется применить формулу Вороного с функцией, не обладающей компактным носителем. Данная версия формулы Вороного получена Кузнецовым, в его докторской диссертации 1981 года. Для полноты изложения мы приводим ее доказательство.

Лемма 5.4.1. *(Кузнецов,* 1981*) Пусть функция* $\phi : [0, \infty) \to \mathbf{C}$ *такова, что ее преобразование Меллина* $\hat{\phi}(s)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(1) $\hat{\phi}(2s)$ *регулярно в области* $\sigma_0 < \Re s < \sigma_1$ *для некоторых* $\sigma_1 > 1$ *и* $\sigma_0 < 0$*;*

(2) *существует* $\epsilon > 0$ *такое, что при* $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$ *функция*

$$\left((1 + |t|)^{1-2\sigma+\epsilon} + 1\right)|\hat{\phi}(2\sigma + 2it)|$$

интегрируема на $(-\infty, +\infty)$*.*

Тогда для любого v *такого, что* $\Re v = 0$, $v \neq 0$ *и любых взаимно простых* $c, d \geq 1$ *справедливо равенство*

$$\frac{4\pi}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\tau_v(n)e\left(\frac{nd}{c}\right)\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right) = 2\frac{\zeta(1+2v)}{(4\pi)^{1+2v}}\hat{\phi}(2+2v) + 2\frac{\zeta(1-2v)}{(4\pi)^{1-2v}}\hat{\phi}(2-2v)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\tau_v(n)\int_0^{\infty}\left(e\left(-\frac{nd^*}{c}\right)k^+(x\sqrt{n}, v) + e\left(\frac{nd^*}{c}\right)k^-(x\sqrt{n}, v)\right)\phi(x)xdx, \quad (5.61)$$

где $dd^* \equiv 1 \pmod{c}$.

В основе доказательства леммы 5.4.1 лежат базовые свойства функции $D_v(s, x)$, определенной в (5.37). Запишем весовую функцию в левой части (5.61) через ее преобразование Меллина

$$\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right) = \frac{1}{i\pi}\int_{(b)}\hat{\phi}(2s)\left(\frac{c}{4\pi}\right)^{2s}\frac{1}{n^s}ds,\ 1 < b < \sigma_1.$$

Следовательно,

$$\frac{4\pi}{c}\sum_{m=1}^{\infty} e\left(\frac{md}{c}\right)\tau_v(m)\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{m}}{c}\right) = \frac{1}{i\pi}\int_{(b)}\left(\frac{c}{4\pi}\right)^{2s-1} D_v\left(s,\frac{d}{c}\right)\hat{\phi}(2s)ds.$$

Изменение порядков суммирования и интегрирование законно, так как $\int_{(b)}|\hat{\phi}(2s)|ds<\infty$, а ряды $D_v(s,d/c)$ сходятся абсолютно при $\Re s = b > 1$.

Сдвигая контур интегрирования на $\Re s = \delta$ с $\sigma_0 < \delta < 0$, мы проходим через простые полюса функции $D_v\left(s,\frac{d}{c}\right)$ в точках $1+v$ и $1-v$. Вычеты в этих двух точках пораждают первые два слагаемые в правой части (5.61). Чтобы обосновать законность сдвига контура интегрирования, нам достаточно показать, что функция

$$f(s) := \left(\frac{c}{4\pi}\right)^{2s-1} D_v\left(s,\frac{d}{c}\right)\hat{\phi}(2s)$$

удовлетворяет условиям

$$\int_{\Re s=b,|\Im s|>T} f(s)ds \to 0 \quad \text{при} \quad T\to\infty, \tag{5.62}$$

$$\int_{\Re s=\delta,|\Im s|>T} f(s)ds \to 0 \quad \text{при} \quad T\to\infty, \tag{5.63}$$

$$\int_{\delta}^{b} f(\sigma \pm iT)d\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad T\to\infty. \tag{5.64}$$

Условие (5.62) выполнено, так как

$$\int_{T}^{\infty}|\hat{\phi}(2b+2iy)|dy \to 0 \quad \text{as} \quad T\to\infty.$$

Что касается условия (5.63), то его выполнимость следует из (5.39) и

$$\int_{(\delta)}(|s|+1)^{1-2\delta+\epsilon}|\phi(\hat{2}s)|ds<\infty.$$

Чтобы показать, что функция удовлетворяет и третьему условию (5.64) мы разобьем в нем интеграл на два $\int_{\delta}^{\epsilon}+\int_{\epsilon}^{b}$. В первом интеграле мы воспользуемся функциональным уравнением (5.38) и после оценим все по модулю, используя (5.40), (5.42). Для оценки второго интеграла мы воспользуемся (5.40) и (5.42), таким образом завершая проверку выполненности условия (5.64).

Для завершения доказательства формулы Вороного нам осталось вычислить

$$\frac{1}{i\pi}\int_{(\delta)}\left(\frac{c}{4\pi}\right)^{2s-1} D_v\left(s,\frac{d}{c}\right)\hat{\phi}(2s)ds.$$

С этой целью мы опять применим функциональное уравнение (5.38) и после этого, так как $\Re(1-s)>1$, поменяем снова порядки суммирования и интегрирования. В итоге мы приходим к

$$\sum_{m\geq 1}\tau_v(m)\frac{1}{i\pi}\int_{(\delta)}\gamma(1-s,v)\hat{\phi}(2s)m^{s-1}\times$$
$$\left(-e\left(-\frac{md^*}{c}\right)\cos(\pi s)+e\left(\frac{md^*}{c}\right)\sin(\pi(1/2+v))\right)ds.$$

Теперь мы можем сдвинуть прямую интегрирования на $\Re s=\alpha$ с $3/4<\alpha<1$ и вычислить получившиеся интегралы, используя леммы 5.2.4 и 5.2.3. Положим

$$g_1(x):=xk^+(x\sqrt{m},v),$$

тогда

$$\hat{g_1}(1-2s)=-\gamma(1-s,v)\cos(\pi s)m^{s-1}$$

и значит

$$-\frac{1}{i\pi}\int_{(\alpha)}\gamma(1-s,v)\cos(\pi s)\hat{\phi}(2s)m^{s-1}ds=\int_0^\infty k^+(x\sqrt{m},v)\phi(x)xdx.$$

Отметим, что мы сдвигаем контур интегрирования на $\Re s=\alpha$ так, чтобы для функции $g_1(x)$ были выполнены условия (5.43), а именно

$$\begin{cases}1-2\alpha>-1 & \text{as } x\to 0,\\ 1/2-2\alpha<-1 & \text{as } x\to\infty.\end{cases}$$

Аналогично доказывается формула

$$\frac{1}{i\pi}\int_{(\alpha)}\gamma(1-s,v)\sin(\pi(1/2+v))\hat{\phi}(2s)m^{s-1}ds=\int_0^\infty k^-(x\sqrt{m},v)\phi(x)xdx.$$

Таким образом лемма 5.4.1 доказана.

5.4.2. Формула свертки для второго момента. Сформулированная ниже теорема была впервые доказана Кузнецовым в 1994 году в препринте [**130**], и позднее пере открыта независимо Иванцом и Сарнаком (см.[**53**, теорема 17]). В теореме выводится точная формула (по-этому мы часто вместо названия формула свертки, которое использовали Кузнецов и Быковский, называем такие формулы "точными формулами") для второго подкрученного момента, которая является отправной точкой самой сложной части данной главы.

Теорема 5.4.2. *(Кузнецов* **[130]***) При* $\Re v = 0$, $\Im v \neq 0$, $|\Re u| < k-1$ *справедливо тождество*

$$M_2(l;u,v) := \sum_{f\in H_{2k}(1)}^{h} \lambda_f(l)L_f(1/2+u+v)L_f(1/2+u-v) =$$
$$\tau_v(l)\left(\frac{\zeta(1+2u)}{l^{1/2+u}} + \frac{(2\pi)^{4u}}{l^{1/2-u}}\zeta(1-2u)\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+u-v)}\right) +$$

$$(-1)^k\tau_u(l)\frac{\zeta(1+2v)}{(2\pi)^{-2u+2v}l^{1/2+v}}\frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)} +$$
$$(-1)^k\tau_u(l)\frac{\zeta(1-2v)}{(2\pi)^{-2u-2v}l^{1/2-v}}\frac{\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+v+u)} + \sum_{i=1}^{3} E_i(l;u,v), \quad (5.65)$$

где слагаемые $E_i(l;u,v)$ *являются различными свертками функции числа делителей с гипергеометрических функций в качестве весовой*

$$E_1(l;u,v) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}\sum_{1\leq n\leq l-1}\tau_v(n)\tau_u(l-n)\phi_k\left(\frac{n}{l};u,v\right), \quad (5.66)$$

$$E_2(l;u,v) = \frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n\geq l+1}\tau_v(n)\tau_u(n-l)\Phi_k\left(\frac{l}{n};u,v\right), \quad (5.67)$$

$$E_3(l;u,v) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}\sum_{n\geq 1}\tau_v(n)\tau_u(n+l)\psi_k\left(\frac{l}{n};u,v\right), \quad (5.68)$$

$$\phi_k(x;u,v) = \tilde{\phi}_k(x;u,v) + \tilde{\phi}_k(x;u,-v), \quad (5.69)$$

$$\tilde{\phi}_k(x;u,v) = \frac{(2\pi)^{2u+1}}{2\cos\left(\pi(1/2+v)\right)}\frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(2v+1)\Gamma(k+u-v)}\times$$
$$x^v(1-x)^{-u}F(k-u+v,1-k-u+v,1+2v;x), \quad (5.70)$$

$$\Phi_k(x;u,v) = 2(2\pi)^{2u}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(2k)}\times$$
$$\sin\left(\pi(1/2+u)\right)x^k(1-x)^{-u}F(k-u+v,k-u-v,2k;x), \quad (5.71)$$

$$\psi_k(x;u,v) = 2(2\pi)^{2u}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(2k)}\times$$
$$\sin\left(\pi(1/2+v)\right)x^k(1+x)^{-u}F(k-u+v,k-u-v,2k;-x). \quad (5.72)$$

Доказательство. Предположим сначала, что $k-1 > \Re u > 3/4$. Тогда, умножая обе части формулы Петерссона (5.32) на

$$n^{-1/2-u}\tau_v(n)\zeta(1+2u),$$

суммируя по $n \geq 1$ и используя соотношение (5.29), мы получаем первое слагаемое в правой части (5.65) и внедиагональное слагаемое следующего вида

$$M_2(l;u,v) = \zeta(1+2u)\tau_v(l)l^{-1/2-u} + M^{ND},$$

$$M^{ND} = 2\pi i^{2k}\zeta(1+2u)\sum_{n\geq 1}\sum_{c\geq 1}\frac{S(l,n;c)}{c}\frac{\tau_v(n)}{n^{1/2+u}}J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{ln}}{c}\right).$$

Применяя стандартные оценки на J-функции Бесселя и оценку Вейля на суммы Клоостермана, приходим к следующей оценке двойного ряда

$$l^{\epsilon}\sum_{n\geq 1}\sum_{c\geq 1}c^{-1/2+\epsilon}n^{-\Re u-1/2+\epsilon}\min\left(\left(\frac{\sqrt{ln}}{c}\right)^{2k-1},\frac{\sqrt{c}}{(ln)^{1/4}}\right) \ll l^{1/4+\epsilon}\sum_{n\geq 1}n^{-\Re u-1/4+\epsilon}.$$

Таким образом, при $\Re u > 3/4$ данный двойной ряд сходится абсолютно и мы можем изменить порядки суммирования.в M^{ND}. После этого, расписывая суммы Клоостермана по определению, находим

$$M^{ND} = 2\pi i^{2k}\zeta(1+2u)(4\pi)^{2u}\sum_{c\geq 1}\frac{1}{c^{1+2u}}\sum_{\substack{a \pmod c\\(a,c)=1}}e\left(\frac{al}{c}\right) \times \frac{4\pi}{c}\sum_{n\geq 1}\tau_v(n)e\left(\frac{a^*n}{c}\right)\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right),$$

с

$$\phi(x) = x^{-1-2u}J_{2k-1}(x\sqrt{l}). \tag{5.73}$$

Из [**35**, (6.561.14)] следует, что при $1-k+\Re u < \Re s < 5/4+\Re u$ преобразование Меллина функции $\phi(x)$ равно

$$\hat{\phi}(2s) = 2^{2s-2-2u}l^{-s+1/2+u}\frac{\Gamma(k+s-1-u)}{\Gamma(k-s+1+u)}.$$

Оценивая гамма функции с помощью [**86**, (5.11.9)], получаем

$$|\hat{\phi}(2\sigma+2it)| \ll (1+|t|)^{-2\sigma-2-2\Re u}, \quad |t|\to\infty.$$

Следовательно, функция $\phi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5.4.1, после применения которой мы приходим к

$$M^{ND}=2\pi i^{2k}(4\pi)^{2u}\zeta(1+2u)\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{1+2u}}\Bigg(2S(0,l;c)\frac{\zeta(1+2v)}{(4\pi)^{1+2v}}\hat{\phi}(2+2v)$$
$$+2S(0,l;c)\frac{\zeta(1-2v)}{(4\pi)^{1-2v}}\hat{\phi}(2-2v)+\sum_{n=1}^{\infty}\tau_v(n)S(0,l-n;c)\int_0^{\infty}k^{+}(x\sqrt{n},v)\phi(x)xdx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\tau_v(n)S(0,l+n;c)\int_0^{\infty}k^{-}(x\sqrt{n},v)\phi(x)xdx\Bigg).$$

Используя тождество Рамануджана (5.25) и [**35**, (6.561(14))], получаем при $-1/4<\Re u<k$, что первые два слагаемых в M^{ND} равны третьему и четвертому слагаемому в правой части (5.65). Второе слагаемое из правой части (5.65) возникает при вычислении третьего слагаемого из M^{ND} с $n=l$. Для этого мы используем формулу [**35**, (6.574(2))] справедливую при $0<\Re u<k$. Рассмотрим

$$2\pi i^{2k}(4\pi)^{2u}\zeta(1+2u)\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{1+2u}}\sum_{\substack{n=1\\n\neq l}}^{\infty}\tau_v(n)S(0,l-n;c)\int_0^{\infty}k^{+}(x\sqrt{n},v)\phi(x)xdx. \tag{5.74}$$

Из (5.33) и (5.73) следует, что

$$\int_0^{\infty}k^{+}(x\sqrt{n},v)\phi(x)xdx=\frac{1}{2\cos(\pi(1/2+v))} \tag{5.75}$$
$$\times\left(\int_0^{\infty}J_{2v}(x\sqrt{n})J_{2k-1}(x\sqrt{l})x^{-2u}dx-\int_0^{\infty}J_{-2v}(x\sqrt{n})J_{2k-1}(x\sqrt{l})x^{-2u}dx\right).$$

Если $n<l$, то применяя [**35**, (6.574(1))] (с параметрами равными $\alpha=\sqrt{n}$, $\beta=\sqrt{l}$, $\nu=2v$, $\mu=2k-1$) и (5.70), мы при $-1/2<\Re u<k$ получаем, что

$$\int_0^{\infty}J_{2v}(x\sqrt{n})J_{2k-1}(x\sqrt{l})x^{-2u}dx=\frac{n^v}{2^{2u}l^{v-u+1/2}}\frac{\Gamma(k+v-u)}{\Gamma(k-v+u)\Gamma(1+2v)} \tag{5.76}$$
$$\times F(k+v-u,1-k+v-u,1+2v;n/l)=\frac{2\cos(\pi(1/2+v))\tilde{\phi}_k(n/l;u,v)}{2^{2u}(2\pi)^{2u+1}(1-n/l)^{-u}l^{1/2-u}}.$$

Подставляя (5.76) в (5.75) и используя (5.69), мы приходим к

$$\int_0^{\infty}k^{+}(x\sqrt{n},v)\phi(x)xdx=\frac{\phi_k(n/l;u,v)}{2^{2u}(2\pi)^{2u+1}(1-n/l)^{-u}l^{1/2-u}}. \tag{5.77}$$

Напомним, что сейчас мы рассматриваем часть (5.74) с $n<l$. Подставляя (5.77) в (5.74) и применяя тождество Рамануджана (5.25) для вычисления суммы по c, мы получаем слагаемое (5.66).

Аналогично, при $n>l$ мы, используя [**35**, (6.574(1))] с параметрами $\alpha=\sqrt{l}$, $\beta=\sqrt{n}$, $\nu=2k-1$, $\mu=2v$, получаем второе слагаемое (5.67)

Третье слагаемое (5.68) возникает при вычислении следующего выражения

$$2\pi i^{2k}(4\pi)^{2u}\zeta(1+2u)\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{1+2u}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau_v(n)S(0,l+n;c)\int_0^{\infty}k^-(x\sqrt{n},v)\phi(x)xdx.$$

Применяя (5.25) и [**35**, (6.576(3))], мы при $\Re u < k$ приходим к (5.68).

Таким образом, мы доказали (5.65) в предположении, что $k-1 > \Re u > 3/4$. Чтобы расширить область справедливости формулы (5.65) заметим, что левая часть формулы свертки (5.65) является целой функцией комплексных переменных u и v. Так как

$$|\tau_u(n\pm l)| \ll n^{|\Re u|+\epsilon}, \quad |\Phi_k(x;u,v)|, |\psi_k(x;u,v)| \ll x^k \text{ при } x\to 0,$$

то правая часть (5.65) является регулярной функцией при $|\Re v| + |\Re u| < k-1$. Это завершает доказательство теоремы. □

Лемма 5.4.3. *Для* $0<x<1$ *и* $\Re v = 0$, $0 < \Re u < k-1$ *выполнено*

$$\phi_k(x;u,v) = (2\pi)^{2u}x^{-1/2+u}(1-x)^{-u}I_1(x), \tag{5.78}$$

$$\Phi_k(x;u,v) = (-1)^k(2\pi)^{2u}x^{1/2}(1-x)^{-u}I_1(1/x), \tag{5.79}$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\Gamma(k,u,v;s)\sin(\pi(u+s/2))x^{s/2}ds, \tag{5.80}$$

где $1-2k<\sigma<1-2\Re u$ u

$$\Gamma(k,u,v;s) = \frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u+v-s/2)\Gamma(1/2-u-v-s/2).$$

Доказательство. Из (5.77) следует, что

$$\phi_k(x;u,v) = 2\pi(4\pi)^{2u}(1-x)^{-u}\int_0^{\infty}k^+(y\sqrt{x},v)J_{2k-1}(y)y^{-2u}dy. \tag{5.81}$$

Точно так же получаем

$$\Phi_k(x;u,v) = (-1)^k 2\pi(4\pi)^{2u}(1/x-1)^{-u}\int_0^{\infty}k^+(y/\sqrt{x},v)J_{2k-1}(y)y^{-2u}dy. \tag{5.82}$$

Чтобы преобразовать правые части (5.81) и (5.82) мы воспользуемся леммой 4.9.7 и получим

$$\phi_k(x;u,v) = x^{-1/2+u}(1-x)^{-u}(2\pi)^{2u}I_1(x),$$

$$\Phi_k(x;u,v) = (-1)^k x^{1/2}(1-x)^{-u}(2\pi)^{2u}I_1(1/x),$$

где $I_1(x)$ определено в (4.74) и совпадает с (5.80). □

5.5. Метод Лиувилля-Грина

Данный параграф существенным образом опирается на результаты статьи Бойда-Данстера и 12 главы книги Олвера [**85**]. Введение в метод Лиувилля-Грина и детальное описание различных его вариантов приведено в главах 6, 10-12 книги [**85**]. Всюду далее мы предполагаем, что k-четно.

5.5.1. Некоторые свойства функции ϕ_k. Для действительного $0 < x < 1$ рассмотрим функцию

$$\phi_k(x) = \lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} \phi_k(x;u,v),$$

где $\phi_k(x;u,v)$ определена в (5.69). Полагаю $u=0$ и вычисляя предел при $v\to 0$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\phi_k(x) = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{-2\Gamma(k+v)x^v}{\Gamma(1+2v)\Gamma(k-v)}F(k+v,1-k+v,1+2v;x)\right]\Bigg|_{v=0}. \tag{5.83}$$

Дифференцируя по v, приходим к следующей формуле

$$\phi_k(x) = 2\left(-\log x - 2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k) + 2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1)\right)F(k,1-k,1;x) - 2\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}+2\frac{\partial}{\partial c}\right)F(a,b,c;x)\Bigg|_{\substack{a=k\\ b=1-k\\ c=1}}. \tag{5.84}$$

Лемма 5.5.1. *Справедливо следующее соотношение*

$$\phi_k(x) = (-1)^k\phi_k(1-x). \tag{5.85}$$

Доказательство. Напомним, что

$$\phi_k(x;u,v) = \tilde{\phi}_k(x;u,v) + \tilde{\phi}_k(x;u,-v),$$

где $\tilde{\phi}_k(x;u,v)$ определена в (5.70). Используя [**10**, ф. 33, стр. 107] и (5.19), получаем

$$\tilde{\phi}_k(x;u,v) = (-1)^k\frac{(2\pi)^{2u}\pi}{\sin(\pi v)}\left(\frac{\Gamma(k+v-u)\Gamma(k-v-u)}{\Gamma(k+v+u)\Gamma(k-v+u)}\times\right.$$
$$\frac{\sin(\pi(v+u))}{\Gamma(1-2u)\sin(2\pi u)}x^v(1-x)^{-u}F(k+v-u,1-k+v-u,1-2u;1-x)+$$
$$\left.\frac{\sin(\pi(v-u))}{\Gamma(1+2u)\sin(-2\pi u)}x^v(1-x)^{u}F(k+v+u,1-k+v+u,1+2u;1-x)\right).$$

Для упрощения записи формул обозначим

$$F(v,u) := x^v(1-x)^uF(k+v+u,1-k+v+u,1+2u;1-x),$$

тогда

$$\tilde{\phi}_k(x;u,v) = (-1)^k \frac{(2\pi)^{2u}\pi}{2\sin(\pi u)} \left(\frac{\Gamma(k+v-u)\Gamma(k-v-u)}{\Gamma(k+v+u)\Gamma(k-v+u)} \frac{F(v,-u)}{\Gamma(1-u)} - \frac{F(v,u)}{\Gamma(1+2u)} \right)$$
$$+ (-1)^k \frac{(2\pi)^{2u}\pi}{2\sin(\pi v)} \frac{\cos(\pi v)}{\cos(\pi u)} \left(\frac{\Gamma(k+v-u)\Gamma(k-v-u)}{\Gamma(k+v+u)\Gamma(k-v+u)} \frac{F(v,-u)}{\Gamma(1-2u)} + \frac{F(v,u)}{\Gamma(1+2u)} \right).$$

Вычисляя по правилу Лопиталя предел при $u \to 0$, приходим к

$$\lim_{u\to 0} \tilde{\phi}_k(x;u,v) = (-1)^k \frac{\pi\cos(\pi v)}{\sin(\pi v)} F(v,0)$$
$$+ \frac{(-1)^k}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\Gamma(k+v-u)\Gamma(k-v-u)}{\Gamma(k+v+u)\Gamma(k-v+u)} \frac{F(v,-u)}{\Gamma(1-2u)} - \frac{F(v,u)}{\Gamma(1+2u)} \right) \Bigg|_{u=0}.$$

Из [**10**, ур. 1-2, стр. 105] имеем, что $F(-v,0) = F(v,0)$. Следовательно.

$$\lim_{u\to 0} \left(\tilde{\phi}_k(x;u,v) + \tilde{\phi}_k(x;u,-v) \right) =$$
$$\frac{(-1)^k}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\Gamma(k+v-u)\Gamma(k-v-u)}{\Gamma(k+v+u)\Gamma(k-v+u)} \frac{F(v,-u)}{\Gamma(1-2u)} - \frac{F(v,u)}{\Gamma(1+2u)} \right) \Bigg|_{u=0} + \right.$$
$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\Gamma(k-v-u)\Gamma(k+v-u)}{\Gamma(k-v+u)\Gamma(k+v+u)} \frac{F(-v,-u)}{\Gamma(1-2u)} - \frac{F(-v,u)}{\Gamma(1+2u)} \right) \Bigg|_{u=0} \right].$$

Полагая $v = 0$, мы приходим к

$$\phi_k(x) = (-1)^k 4 \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k) \right) F(0,0) - (-1)^k 2 F_u'(0,0),$$

где

$$F_u'(0,0) = \log(1-x) F(k,1-k,1;1-x) + \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + 2\frac{\partial}{\partial c} \right) F(a,b,c;1-x) \Bigg|_{\substack{a=k \\ b=1-k \\ c=1}}.$$

Теперь из формулы (5.84) заключаем, что $\phi_k(x) = (-1)^k \phi_k(1-x)$. □

Следствие 5.5.2. *Для любого четного k выполнено равенство $\phi_k'(1/2) = 0$.*

Лемма 5.5.3. *Для функции $\phi_k(x)$ справедливо следующее представление в виде ряда*

$$\phi_k(x) = -F(k,1-k,1;x) 2\log x + 2(-1)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k)\Gamma(n-k+1)x^n}{\Gamma^2(n+1)}$$
$$- 2\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n \Gamma(k+n)}{\Gamma(k-n)\Gamma^2(n+1)} \left(-2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(n+1) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k+n) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(k-n) \right). \quad (5.86)$$

Доказательство. Из (5.83) и (5.19) следует, что

$$\phi_k(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial v} \left(x^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi(k-v))\Gamma(1-k+v+n)\Gamma(k+v+n)}{\Gamma(1+2v+n)} \frac{x^n}{n!} \right) \Bigg|_{v=0}.$$

Так как

$$\Gamma(1-k+v+n)=\begin{cases}\Gamma(1-k+v+n) & n\geq k\\ \frac{\pi}{\sin(\pi(k-v-n))\Gamma(k-n-v)} & n\leq k-1\end{cases},$$

то

$$\phi_k(x)=2(-1)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\Gamma(n+k)\Gamma(n-k+1)x^n}{\Gamma(n+1)n!}+\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^nx^n}{n!}\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k-n)\Gamma(n+1)}$$
$$\times\left(-2\log x+4\frac{\Gamma'}{\Gamma}(n+1)-2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k+n)-2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k-n)\right). \quad (5.87)$$

Из [**86**, (15.2.4)] следует, что

$$F(-m,b,c;z)=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^nz^n}{n!}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(m-n+1)\Gamma(c+n)}$$

и значит

$$F(1-k,k,1;x)=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^nx^n}{n!}\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k-n)\Gamma(n+1)}. \quad (5.88)$$

Подставляя (5.88) в (5.87), мы доказываем (5.86). □

Лемма 5.5.4. *Функция $\phi_k(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению*

$$(x-x^2)\phi_k^{''}(x)+(1-2x)\phi_k^{'}+k(k-1)\phi_k(x)=0. \quad (5.89)$$

Доказательство. Заметим, что функция $F(k,1-k,1;x)$ является решением дифференциального уравненеия (5.89). Перепишем представление (5.86)в следующем виде

$$\phi_k(x)=-2\alpha_1-2\alpha_2+2(-1)^k\alpha_3,$$

где

$$\alpha_1:=F(k,1-k,1;x)\log x,$$
$$\alpha_2:=\sum_{n=0}^{k-1}A(n)B(n)x^n,\quad \alpha_3:=\sum_{n=k}^{\infty}C(n)x^n,$$

а коэффициенты $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ определяются следующим образом

$$A(n):=(-1)^n\frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma^2(n+1)\Gamma(k-n)},$$
$$B(n):=\frac{\Gamma'}{\Gamma}(n+k)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(n-k)-2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(n+1),$$
$$C(n):=\frac{\Gamma(n+k)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma^2(n+1)}.$$

Данные коэффициенты удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$A(n+1)=-\frac{(k+n)(k-n-1)}{(n+1)^2}A(n),$$

$$B(n+1) = B(n) + \frac{1}{k+n} - \frac{1}{k-n-1} - \frac{2}{n+1},$$

$$C(n+1) = \frac{(n+k)(n-k+1)}{(n+1)^2} C(n).$$

Введем следующий дифференциальный оператор

$$D(f) := (x - x^2)f'' + (1-2x)f' + k(k-1)f.$$

Используя рекуррентные соотношения на коэффициенты, мы вычисляем $D(\alpha_1)$, $D(\alpha_2)$, $D(\alpha_3)$. Утверждение леммы следует из следующего соотношения, проверяемого явно

$$D(\alpha_1) + D(\alpha_2) = (-1)^k D(\alpha_3).$$

□

Лемма 5.5.5. *Пусть $y = y(x)$ решение дифференциального уравнения*

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0.$$

Тогда функция $z(x) = y(x)/\alpha(x)$ является решением уравнения

$$A_1(x)z''(x) + B_1(x)z'(x) + C_1(x)z(x) = 0,$$

где

$$A_1(x) = A(x)\alpha(x), \quad B_1(x) = 2A(x)\alpha'(x) + B(x)\alpha(x),$$

$$C_1(x) = A(x)\alpha''(x) + B(x)\alpha'(x) + C(x)\alpha(x).$$

Следствие 5.5.6. *На интервале $0 < x < 1$ функция $Y(x) := \sqrt{x(1-x)}\phi_k(x)$ является решение дифференциального уравнения*

$$Y''(x) + \left(\frac{1}{4x^2(1-x)^2} + \frac{k(k-1)}{x(1-x)}\right) Y(x) = 0. \tag{5.90}$$

Доказательство. Данной утверждение следует из (5.89) и леммы 5.5.5 при выборе в ней $\alpha(x) = 1/\sqrt{x(1-x)}$. □

Лемма 5.5.7. *При четном k выполнены равенства*

$$F(k, 1-k, 1; 1/2) = 0, \tag{5.91}$$

$$\frac{d}{dx}\left(F(k, 1-k, 1; x)\right)\Big|_{x=1/2} = (-1)^{k/2} \frac{4\Gamma(1/2)\Gamma((k+1)/2)}{\pi\Gamma(k/2)}. \tag{5.92}$$

Доказательство. Используя формулы [**86**, (15.8.25), (5.5.3)], получаем для произвольного a следующее равенство

$$F(a,1-a,1;x)=\frac{\Gamma(1/2)}{\pi}\frac{\Gamma(a/2)\sin(\pi a/2)}{\Gamma((a+1)/2)}F\left(\frac{a}{2},\frac{1-a}{2},\frac{1}{2};(1-2x)^2\right)$$
$$-(1-2x)\frac{2\Gamma(1/2)}{\pi}\frac{\Gamma((a+1)/2)\sin(\pi(a+1)/2)}{\Gamma(a/2)}F\left(\frac{a+1}{2},1-\frac{a}{2},\frac{3}{2};(1-2x)^2\right)$$

Выбирая $a=k$, приходим к

$$F(k,1-k,1;x)=-(-1)^{k/2}\frac{2\Gamma(1/2)\Gamma((k+1)/2)}{\pi\Gamma(k/2)}(1-2x)\times$$
$$F\left(\frac{k+1}{2},1-\frac{k}{2},\frac{3}{2};(1-2x)^2\right).$$

Равенство (5.91) теперь сразу получается при выборе $x=1/2$.

Чтобы вывести формулу (5.92) необходимо продифференцировать следующий ряд, представляющий функцию $F(k,1-k,1;x)$, по x

$$F\left(\frac{k+1}{2},1-\frac{k}{2},\frac{3}{2};(1-2x)^2\right)=$$
$$\sum_{n=0}^{k/2-1}(-1)^n\binom{k/2-1}{n}\frac{\Gamma(k/2+1/2+n)\Gamma(3/2)}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(3/2+n)}(1-2x)^{2n}.$$

Данная формула при четном k является следствием [**86**, (15.2.4)]. □

Лемма 5.5.8. *При четном k выполнено равенство*

$$\phi_k(1/2)=2\sqrt{\pi}(-1)^{k/2}\frac{\Gamma(k/2)}{\Gamma((k+1)/2)}. \tag{5.93}$$

Доказательство. Используя (5.84) и (5.91), мы получаем

$$\phi_k(1/2)=-2\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}+2\frac{\partial}{\partial c}\right)F(a,b,c;1/2)\Big|_{\substack{a=k\\b=1-k\\c=1}}.$$

Определим две функции

$$G_1:=F(k+2\epsilon,1-k,1+\epsilon;z),$$
$$G_2:=F(k-\epsilon,1-k+\epsilon,1+\epsilon;z).$$

Преобразуя гипергеометрическую функцию при помощи квадратичного соотношения [**86**, (15.8.26)], приходим к равенству

$$G_1=\frac{\Gamma(1/2)}{\pi}(1-z)^{\epsilon}\frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(k/2-\epsilon)}{\Gamma(k/2+1/2)}\sin\left(\frac{\pi}{2}(k-2\epsilon)\right)g_{1,1}+$$
$$\frac{\Gamma(-1/2)}{\pi}(1-2z)(1-z)^{\epsilon}\frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(k/2+1/2-\epsilon)}{\Gamma(k/2)}\sin\left(\frac{\pi}{2}(k+1-2\epsilon)\right)g_{1,2},$$

где

$$g_{1,1} = F(1/2 - k/2 + \epsilon, k/2, 1/2; (1-2z)^2),$$

$$g_{1,2} = F(1 - k/2 + \epsilon, k/2 + 1/2, 3/2; (1-2z)^2).$$

Аналогично с помощью квадратичного соотношения [**86**, (15.8.25)], находим

$$G_2 = -\frac{2(-1)^{k/2}\Gamma(1/2)}{\pi}(1-2z)\frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(k/2+1/2)}{\Gamma(k/2+\epsilon)}g_{2,2},$$

где

$$g_{2,2} = F(k/2 + 1/2 + \epsilon, 1 - k/2, 3/2; (1-2z)^2).$$

Дифференцируя G_1 и G_2 по ϵ и полагая $\epsilon = 0$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + 2\frac{\partial}{\partial c}\right) F(a,b,c;z)\Big|_{\substack{a=k\\ b=1-k\\ c=1}} = -(1-2z)\log(1-z)\times$$

$$(-1)^{k/2}F(k/2, 1/2-k/2, 1/2; (1-2z)^2)\frac{2\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(1/2)}{\pi\Gamma(k/2)} -$$

$$(-1)^{k/2}F(k/2, 1/2-k/2, 1/2; (1-2z)^2)\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2+1/2)} -$$

$$\frac{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(1/2)}{\pi\Gamma(k/2)}(1-2z)\Bigg(F(k/2+1/2, 1-k/2, 3/2; (1-2z)^2)\times$$

$$(-1)^{k/2}\left(4\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1) - 2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2+1/2) - 2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k/2)\right) +$$

$$2(-1)^{k/2}\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b}\right)F(a,b,3/2;(1-2z)^2)\Big|_{\substack{a=(k+1)/2\\ b=1-k/2}}\Bigg).$$

Выбирая $z = 1/2$, мы завершаем доказательство леммы. □

5.5.2. Асимптотическая формула для ϕ_k. Для того, чтобы получить равномерное по k и x асимптотическое разложение функции $\phi_k(x)$, мы применим метод Лиувилля-Грина и приблизим функцию $\phi_k(x)$ линейной комбинацией J и Y функций Бесселя. Итоговая асимптотическая формула сформулирована в теореме 5.5.14, которая является основным результатом данного параграфа, и приведена в его конце. В следствии 5.5.6 нами было доказано, что функция we showed that $y(x) = \sqrt{x(1-x)}\phi_k(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5.90), которое имеет вид, рассмотренный в [**16**, (1.1)], если положить там $\alpha = 0$. Пусть

$$u := k - 1/2, \quad f(x) := -\frac{1}{x(1-x)}, \tag{5.94}$$

$$g(x) := -\frac{1}{4x^2(1-x)^2} + \frac{1}{4x(1-x)}.$$

Тогда уравнение (5.90) может быть переписано в виде

$$y''(x) = (u^2 f(x) + g(x))y(x). \tag{5.95}$$

Отметим, что $x^2 f(x) \to 0$ и $x^2 g(x) \to -1/4$ при $x \to 0$. Аналогичные условия на функции $f(x)$ и $g(x)$ наложены и в работе [**16**, стр. 1]. Как показано в книге [**85**] и в [**16**, (2.4), (2.6)] данное уравнение необходимо путем различных замен свести в

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} + \left[\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2} - \frac{\psi(\xi)}{\xi}\right] Z = 0. \tag{5.96}$$

Пусть $\alpha(x)$, $\eta(x)$ некие функции, которые будут определены позднее. В уравнении (5.95) с помощью леммы 5.5.5 сделаем замену

$$Z(x) := \frac{y(x)}{\alpha(x)}.$$

После этого сделаем еще и замену переменных

$$\xi := \int \eta(x)dx.$$

В итоге получаем

$$\alpha(x)\eta^2(x)\frac{d^2 Z}{d\xi^2} + (\alpha(x)\eta'(x) + 2\alpha'(x)\eta(x))\frac{dZ}{d\xi} + \\ \left(\alpha''(x) - \alpha(x)(u^2 f(x) + g(x))\right) Z(\xi) = 0. \tag{5.97}$$

Чтобы получить уравнение вида (5.96) мы зануляем коэффициент при $\frac{dZ}{d\xi}$. Для этого необходимо потребовать, чтобы

$$\alpha^2(x)\eta(x) = 1. \tag{5.98}$$

и чтобы $-\alpha^4(x)f(x) = 1/(4\xi)$. Из этих условий следует, что

$$\xi = 4\arcsin^2\left(\sqrt{x}\right), \quad \alpha(x) = \frac{(x - x^2)^{1/4}}{2(\arcsin\left(\sqrt{x}\right))^{1/2}}. \tag{5.99}$$

Используя (5.98) и (5.99), получаем, что уравнение (5.97) может быть преобразовано в (5.96) с

$$\psi(\xi) := -\frac{1}{16\sin^2\left(\sqrt{\xi}\right)} + \frac{1}{16\xi}.$$

При этом функция $\psi(\xi)$ регулярна за исключением полюсов в точках $\xi = (\pi m)^2$, $m \neq 0$. Так как

$$\psi(\xi) = -\frac{1}{48} + O(\xi) \text{ as } \xi \to 0,$$

то функция $\psi(\xi)$ является ограниченной, дифференцируемой в интервале $[0, \delta]$ при любом $0 < \delta < \pi^2$.

Если убрать слагаемое $\psi(\xi)/\xi$ из уравнения (5.96), то мы придем к уравнению

$$\frac{d^2Z}{d\xi^2} + \left[\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2}\right] Z = 0. \tag{5.100}$$

Решениями данного уравнения (5.100) являются функции

$$Z_C = \sqrt{\xi}\Upsilon_0(u\sqrt{\xi}),$$

где Υ_i это либо J либо Y функция Бесселя индекса i. Заметим, что

$$\frac{d}{dz}\Upsilon_0(z) = -\Upsilon_1(z).$$

По методу Лиувилля-Грина, описанному в [**85**, глава 12], мы должны построить решения дифференциального уравнения (5.96) в виде степенных рядов вида

$$Z_C(\xi) = \sqrt{\xi}\Upsilon_0(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A(n;\xi)}{u^{2n}} - \frac{\xi}{u}\Upsilon_1(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n;\xi)}{u^{2n}}. \tag{5.101}$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты $A(n;\xi)$ и $B(n;\xi)$, мы получим на них рекуррентные соотношения. Положим

$$W(\xi) := \sqrt{\xi}\Upsilon_0(u\sqrt{\xi}), \quad V(\xi) := \xi\Upsilon_1(u\sqrt{\xi}).$$

Эти функции удовлетворяют [**35**, (8.491(3))] дифференциальному уравнению

$$W''(\xi) + \left(\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2}\right) W(x) = 0,$$

$$V''(\xi) - \frac{1}{\xi}V'(\xi) + \left(\frac{u^2}{4\xi} + \frac{3}{4\xi^2}\right) V(x) = 0.$$

Отметим, что

$$W'(\xi) = \frac{1}{2\xi}W(\xi) - \frac{u}{2\xi}V(\xi), \tag{5.102}$$

$$V'(\xi) = \frac{1}{2\xi}V(\xi) + \frac{u}{2}W(\xi). \tag{5.103}$$

Теперь, подставляя (5.101) в уравнение (5.96), мы получаем

$$W(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n(\xi)}{u^{2n}} - V(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n(\xi)}{u^{2n-1}} = 0,$$

где

$$C_n(\xi) := A''(n;\xi) + \frac{1}{\xi}A'(n;\xi) - \frac{\psi(\xi)}{\xi}A(n;\xi) - B'(n;\xi) - \frac{B(n;\xi)}{2\xi},$$

$$D_n(\xi) := B''(n-1;\xi) + \frac{1}{\xi}B'(n-1;\xi) - \frac{\psi(\xi)}{\xi}B(n-1;\xi) + \frac{1}{\xi}A'(n;\xi).$$

Приравнивая коэффициенты к нулю $C_n(\xi) = D_n(\xi) = 0$, приходим к

$$\sqrt{\xi}(\sqrt{\xi}B(n;\xi))' = \xi A''(n;\xi) + A'(n;\xi) - \psi(\xi)A(n;\xi),$$

$$A'(n;\xi) = -(\xi B'(n-1;\xi))' + \psi(\xi)B(n-1;\xi).$$

Следовательно, нами найдены рекуррентные соотношения на $A(n;\xi)$ и $B(n;\xi)$

$$A(n;\xi) = -\xi B'(n-1;\xi) + \int_0^\xi \psi(x)B(n-1;x)dx + \lambda_n, \tag{5.104}$$

$$\sqrt{\xi}B(n;\xi) = \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{x}}\left(xA''(n;x) + A'(n;x) - \psi(x)A(n;x)\right)dx \tag{5.105}$$

где λ_n некоторые константы интегрирования, явный вид которых мы укажем позднее. Пусть $A(0;\xi) = 1$, тогда

$$B(0;\xi) = -\frac{1}{8\sqrt{\xi}}\left(\cot\sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right), \tag{5.106}$$

$$A(1;\xi) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{\cot\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}} - \frac{1}{2\sin^2\left(\sqrt{\xi}\right)}\right) - \frac{1}{128}\left(\cot\left(\sqrt{\xi}\right) - \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)^2 + \lambda_1. \tag{5.107}$$

Применяя [**85**, теорему 4.1, стр. 444] или [**16**, теорему 1], мы получаем приближение функции ϕ_k частичными суммами.

Теорема 5.5.9. *Пусть $\xi_2 = \pi^2/4$. Для достаточно большого u и любого натурального N следующие, бесконечно дифференцируемые по ξ в интервале $(0,\xi_2)$, функции $Z_Y(\xi)$, $Z_J(\xi)$ являются решениями уравнения* (5.96)

$$Z_Y(\xi) = \sqrt{\xi}Y_0(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N}\frac{A_Y(n;\xi)}{u^{2n}} - \frac{\xi}{u}Y_1(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_Y(n;\xi)}{u^{2n}} + \epsilon_{2N+1,1}(u,\xi), \tag{5.108}$$

$$Z_J(\xi) = \sqrt{\xi}J_0(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N}\frac{A_J(n;\xi)}{u^{2n}} - \frac{\xi}{u}J_1(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_J(n;\xi)}{u^{2n}} + \epsilon_{2N+1,2}(u,\xi), \tag{5.109}$$

где

$$\epsilon_{2N+1,1}(u,\xi) \ll \frac{\sqrt{\xi}|Y_0(u\sqrt{\xi})|}{u^{2N+1}}\sqrt{\xi_2-\xi}, \tag{5.110}$$

$$\epsilon_{2N+1,2}(u,\xi) \ll \frac{\sqrt{\xi}|J_0(u\sqrt{\xi})|}{u^{2N+1}}\min\left(\sqrt{\xi},1\right)$$

а коэффициенты $(A_Y(n;\xi),B_Y(n;\xi))$, $(A_J(n;\xi),B_J(n;\xi))$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (5.104)-(5.105).

Доказательство. Единственное отличие теоремы 5.5.9 от [**85**, теоремы 4.1, стр. 444] (или [**16**, теоремы 1]) заключается в некотором упрощении оценки остатков $\epsilon_{2N+1,i}(u,\xi)$. Для достижения этого мы применили [**85**, (1.22)-(1.24), стр. 437]. Также мы использовали то (см. (5.106)), что

$$\mathrm{Var}_{0,\xi}(\sqrt{x}B(0;x)) \ll 1, \quad \mathrm{Var}_{\xi,\xi_2}(\sqrt{x}B(0;x)) \ll 1,$$

$$\mathrm{Var}_{0,\xi}(\sqrt{x}B(n;x)) = \int_0^\xi |(\sqrt{x}B(n;x))'|dx \ll \min\left(\sqrt{\xi},1\right),$$

$$\mathrm{Var}_{\xi,\xi_2}(\sqrt{x}B(n;x)) = \int_\xi^{\xi_2} |(\sqrt{x}B(n;x))'|dx \ll \sqrt{\xi_2-\xi}.$$

Последние две оценки доказываются по индукции. □

Отметим, что в теореме 5.5.9 за границу ξ_2 можно взять любое число меньшее чем π^2, так как функция $\psi(\xi)$ является гладкой на отрезке $[0,\delta]$ при $0<\delta<\pi^2$. Выбор точки $\xi_2=\pi^2/4$ обусловлен тем, что она соответствует точке $x=1/2$. С помощью теоремы 5.5.9 мы получим следующее асимптотическое разложение функции $\phi_k(x)$ в интервале $0<x<1/2$.

Теорема 5.5.10. *Существуют константы $C_Y=C_Y(u)$ и $C_J=C_J(u)$ такие, что для ξ в интервале $(0,\xi_2)$ выполнено равенство*

$$\xi^{1/4}(\sin(\sqrt{\xi}))^{1/2}\phi_k\left(\sin^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\right)=C_YZ_Y(\xi)+C_JZ_J(\xi). \tag{5.111}$$

Чтобы получить асимптотическое разложение функции $\phi_k(x)$ в интервале $1/2<x<1$ достаточно будет воспользоваться функциональным уравнением (5.85). Остаток данного параграф будет посвящен доказательству теоремы 5.5.10 и вычислению констант C_Y и C_J.

При $\xi\to 0$ и функция $F(k,1-k,1;\sin^2(\sqrt{\xi}/2))$, и функция $Z_J(\xi)$ являются подчиненным (рецессивными) решениями дифференциального уравнения, а $\phi_k\left(\sin^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\right)$ и $Z_Y(\xi)$ доминирующими (определения и необходимую теоретическую информацию о подчиненных и доминирующих решениях дифференциального уравнения можно найти, например, в [**85**, §5.7]). Это следует из поведения данных функциях на концах интервала, а именно

$$\begin{gathered}\phi_k(\xi)\sim\log\xi,\quad F(k,1-k,1;\xi)\sim 1 \text{ при } \xi\to 0,\\ Z_Y(\xi)\xi^{-1/2}\sim\log\xi,\quad Z_J(\xi)\xi^{-1/2}\sim 1 \text{ при } \xi\to 0.\end{gathered} \tag{5.112}$$

Следовательно, с некоторой константы c_0 выполняется равенство

$$\xi^{1/4}(\sin(\sqrt{\xi}))^{1/2}F(k,1-k,1;\sin^2(\sqrt{\xi}/2))=c_0Z_J(\xi). \tag{5.113}$$

Для того чтобы найти c_0, мы сравним поведение левой и правой части при малых ξ. Из представления гипергеометрической функции в виде ряда сразу получаем

$$\lim_{\xi\to 0}F(k,1-k,1;\sin^2(\sqrt{\xi}/2))=1.$$

Из [**86**, (10.2.2)] следуют асимптотические формулы $J_0(x)=1+O(x^2)$ и $J_1(x)=x/2+O(x^3)$ и, следовательно,

$$Z_J(\xi)=\sqrt{\xi}\sum_{n=0}^{N}\frac{A_J(n;\xi)}{u^{2n}}+O(\xi) \text{ при } \xi\to 0.$$

Выбирая константы интегрирования λ_n в (5.104) так, чтобы выполнялось $A_J(0;0)=1$ и $A_J(n;0)=0$ при $n\geq 1$, мы приходим к $\lim_{\xi\to 0}Z_J(\xi)=\sqrt{\xi}$, и значит $c_0=1$.

Так как и $\phi_k\left(\sin^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\right)$ и $Z_Y(\xi)$ являются доминирующими решениями в любой точке $\xi \in (0, \xi_2)$, то они не являются пропорциональными друг другу как в (5.113). Существуют различные методы для преодоления данного препятствия, мы воспользуемся подходом, описанном в [**85**, §12.5].

Ввиду (5.112) функции $\phi_k(\xi)$ и $F(k, 1-k, 1; \xi)$ являются двумя линейно независимыми решениями , дифференциального уравнения (5.96). Следовательно, Z_Y может быть представлена как их линейная комбинация

$$Z_Y(\xi) = \xi^{1/4}(\sin(\sqrt{\xi}))^{1/2}\left(\phi_k\left(\sin^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\right)c_1 + F\left(k, 1-k, 1; \sin^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\right)c_2\right) \tag{5.114}$$

с некоторыми константами c_1, c_2.

Так как $c_1 \neq 0$, то подставляя равенство (5.113), в котором $c_0 = 1$, в (5.114), получаем

$$\xi^{1/4}(\sin(\sqrt{\xi}))^{1/2}\phi_k\left(\sin^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\right) = \frac{1}{c_1}Z_Y(\xi) - \frac{c_2}{c_1}Z_J(\xi), \tag{5.115}$$

Чтобы найти константы c_1, c_2, мы вычислим $Z_Y(\xi)$ и ее производные в точке $\xi_2 = \pi^2/4$. Используя леммы 5.5.7, 5.5.8 и следствие 5.5.2, находим

$$Z_Y(\xi_2) = \xi_2^{1/4}c_1\phi_k(1/2),$$

$$Z_Y'(\xi_2) = \frac{Z_Y(\xi_2)}{4\xi_2} + \frac{c_2}{4\xi_2^{1/4}}\frac{\partial}{\partial x}F(k, 1-k, 1; x)\Big|_{x=1/2}.$$

Применяя лемму 5.5.8, получаем

$$c_1 = (-1)^{k/2}\frac{\Gamma(k/2+1/2)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)}\frac{Z_Y(\xi_2)}{\xi_2^{1/4}}, \tag{5.116}$$

$$c_2 = (-1)^{k/2}\frac{\pi\Gamma(k/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k/2+1/2)}\xi_2^{1/4}\left(Z_Y'(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{4\xi_2}\right). \tag{5.117}$$

Таким образом, нам осталось вычислить значения $Z_Y(\xi_2)$ и $Z_Y'(\xi_2)$. Следующая лемма является результатом наших вычислений.

Лемма 5.5.11. *Пусть $\xi_2 = \pi^2/4$, тогда справедливы следующие асимптотические формулы*

$$Z_Y(\xi_2) = \frac{(-1)^{k/2+1}}{\sqrt{u}}\left(1 + \frac{1}{u^2}(\lambda_1 - 1/16) + O(u^{-4})\right), \tag{5.118}$$

$$Z_Y'(\xi_2) = \frac{(-1)^{k/2+1}}{\sqrt{u}\pi^2}\left(1 + \frac{1}{u^2}\left[\frac{5\lambda_1}{4} - \frac{5}{64} - \frac{405}{128\pi^2}\right]\right) + O(u^{-5/2}). \tag{5.119}$$

Доказательство. Из [**16**, (3.9)] следует, что

$$\epsilon_{2N+1,1}(u;\xi_2)\to 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial\xi}\epsilon_{2N+1,1}(u;\xi)\to 0 \text{ при } \xi\to\xi_2.$$

Наличие таких свойств у остаточных членов асимптотических разложений, полученных методом Лиувилля-Грина, хорошо известно специалистам. Например, для дифференциального уравнения более простого типа в они приведены в [**85**, ф. (2.19), стр.196]. Следовательно,

$$Z_Y(\xi_2)=\sqrt{\xi_2}Y_0(u\sqrt{\xi_2})\sum_{n=0}^{N}\frac{A_Y(n;\xi_2)}{u^{2n}}-\frac{\xi_2}{u}Y_1(u\sqrt{\xi_2})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_Y(n;\xi_2)}{u^{2n}}.$$

Используя соотношение (5.102) и (5.103), получаем

$$\begin{aligned}Z'_Y(\xi_2)=\sqrt{\xi_2}Y_0(u\sqrt{\xi_2})\left(\frac{1}{2\xi_2}\sum_{n=0}^{N}\frac{A_Y(n;\xi_2)}{u^{2n}}+\sum_{n=0}^{N}\frac{A'_Y(n;\xi_2)}{u^{2n}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_Y(n;\xi_2)}{u^{2n}}\right)\\ -\xi_2Y_1(u\sqrt{\xi_2})\left(\frac{u}{2\xi_2}\sum_{n=0}^{N}\frac{A_Y(n;\xi_2)}{u^{2n}}+\frac{1}{2\xi_2u}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_Y(n;\xi_2)}{u^{2n}}+\frac{1}{u}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B'_Y(n;\xi_2)}{u^{2n}}\right).\end{aligned}$$

Выберем $N=1$. Из [**86**, (10.17.1), (10.17.4)] и [**35**, (8.451(1,7,8))] следует разложение Ханкеля для функций Бесселя

$$\sqrt{\xi_2}Y_0(u\sqrt{\xi_2})=\frac{(-1)^{k/2+1}}{\sqrt{u}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{a_{2j}(0)}{(\pi u/2)^{2j}},$$

$$\xi_2Y_1(u\sqrt{\xi_2})=\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^{k/2+1}}{\sqrt{u}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{a_{2j+1}(1)}{(\pi u/2)^{2j+1}},$$

где

$$a_j(v)=\frac{\Gamma(v+j+1/2)}{2^jj!\Gamma(v-j+1/2)}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\xi_2}Y_0(u\sqrt{\xi_2})=\frac{(-1)^{k/2+1}}{\sqrt{u}}\left(1-\frac{a_2(0)}{(\pi u/2)^2}+O(u^{-4})\right),$$

$$\xi_2Y_1(u\sqrt{\xi_2})=\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^{k/2+1}}{\sqrt{u}}\left(\frac{a_1(1)}{\pi u/2}+O(u^{-3})\right).$$

Выбирая $N=1$, мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned}Z_Y(\xi_2)=\frac{(-1)^{k/2+1}}{\sqrt{u}}\Bigg(A_Y(0;\xi_2)+\frac{1}{u^2}\left(A_Y(1;\xi_2)-\frac{A_Y(0;\xi_2)a_2(0)}{(\pi/2)^2}-B_Y(0;\xi_2)a_1(1)\right)\\ +O(u^{-4})\Bigg).\end{aligned}$$

Напомним (см. (5.106) и (5.107)), что

$$A_Y(0;\xi_2)=1,\quad A_Y(1;\xi_2)=-\frac{1}{16}+\frac{15}{32\pi^2}+\lambda_1,\quad B_Y(0;\xi_2)=\frac{1}{2\pi^2},$$

а так как $a_2(0) = 9/128$, $a_1(1) = 3/8$, то (5.118) доказано.

Найдем асимптотическое разложение для производной функции $Z_Y(\xi)$ в точке $\xi = \xi_2 = \pi^2/4$. Из рекурсивных соотношений (5.104) и (5.105) следует, что

$$A'_Y(1;\xi_2) = -\frac{15}{8\pi^4} + \frac{3}{32\pi^2}.$$

Полагая $N = 1$, применяя разложение Ханкеля для функций Бесселя (несложно найти, что $a_3(1) = -105/1024$),мы приходим к (5.119). □

Лемма 5.5.12. *Пусть* $\lambda_1 = \frac{1}{16} + \frac{405}{32\pi^2}$, *тогда*

$$C_J = -\pi^2 \frac{\Gamma^2(k/2)}{\Gamma^2(k/2+1/2)} \frac{1}{Z_Y(\xi_2)} \left(Z'_Y(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{\pi^2} \right), \tag{5.120}$$

$$C_J = O(k^{-5}). \tag{5.121}$$

Доказательство. Отметим, что при таком выборе λ_1 константа c_1 получается отличной от нуля. Следовательно, используя (5.111), (5.115), (5.116), (5.117), мы приходи к

$$C_J = -\frac{c_2}{c_1} = -\pi^2 \frac{\Gamma^2(k/2)}{\Gamma^2(k/2+1/2)} \frac{1}{Z_Y(\xi_2)} \left(Z'_Y(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{\pi^2} \right).$$

Применяя лемму 5.5.11, находим

$$Z'_Y(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{\pi^2} = \frac{(-1)^{k/2+1}}{u^{5/2}} \left(\frac{\lambda_1}{4\pi^2} - \frac{405}{128\pi^4} - \frac{1}{64\pi^2} \right) + O(u^{-9/2}).$$

Так как $\lambda_1 = \frac{1}{16} + \frac{405}{32\pi^2}$, то первое слагаемое обнуляется и мы полуспем

$$Z'_Y(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{\pi^2} = O(u^{-9/2}).$$

Применяя формулу Стрилинга [**86**, (5.5.5)]Б находим

$$\frac{\Gamma^2(k/2)}{\Gamma^2(k/2+1/2)} = \left(\frac{2^{k-1}\Gamma^2(k/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)} \right)^2 = O(k^{-1})$$

и значит $C_J = O(u^{-5}) = O(k^{-5})$. □

Лемма 5.5.13. *Пусть* $\lambda_1 = \frac{1}{16} + \frac{405}{32\pi^2}$ *и* $u = k - 1/2$, *тогда*

$$C_Y = (-1)^{k/2} \frac{2\Gamma(1/2)\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2+1/2)} \frac{\xi_2^{1/4}}{Z_Y(\xi_2)}. \tag{5.122}$$

Для любого $n \geq 1$ *существуют константы* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *такие, что*

$$C_Y = -2\pi \left(1 + \frac{d_1}{u} + \frac{d_2}{u^2} + \ldots \frac{d_n}{u^n} + O(u^{-n-1}) \right). \tag{5.123}$$

Доказательство. Применяя формулы (5.111), (5.115), (5.116), мы доказываем (5.122). Асимптотика (5.123) сразу следует из (5.118), формулы Стирлинга и [**86**, (5.5.5)]. □

Из доказанных выше результатов следует итоговое утверждение.

Теорема 5.5.14. *Пусть $\xi_2 = \pi^2/4$, тогда для $\xi \in (0, \xi_2)$ справедливо равенство* (5.111) *с Z_Y, Z_J, C_Y, C_J определенными соответственно в given by* (5.108), (5.109), (5.122), (5.120).

5.5.3. Асимптотические разложения ψ_k и Φ_k. Этот параграф посвящен изучению асимптотического поведения функций (5.71) и (5.72) при $u = v = 0$, то есть функций

$$\psi_k(x) = \psi_k(x; 0; 0) = 2\frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(2k)} x^k F(k, k, 2k; -x),$$
$$\Phi_k(x) = \Phi_k(x; 0; 0) = 2\frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(2k)} x^k F(k, k, 2k; x).$$

Также как и в предыдущем параграфе для получения асимптотического разложения мы применим метод Лиувилля-Грина. Основным результатом является теорема 5.5.17, в которой и приводятся асимптотические разложениях данных функций. В отличие от предыдущего параграфа теперь это разложение строится на основе K-функций Бесселя.

Из [**86**, (15.8.1)] находим, что

$$\psi_k(x) = \frac{2\Gamma^2(k)}{\Gamma(2k)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k F\left(k, k, 2k; \frac{x}{1+x}\right) = \Phi_k\left(\frac{x}{1+x}\right).$$

Следовательно,

$$\psi_k\left(\frac{l}{n}\right) = \Phi_k\left(\frac{l}{n+l}\right) \tag{5.124}$$

и значит нам достаточно получить асимптотическое разложение только для функции Φ_k.

Пусть $u := k - 1/2$ и

$$f(x) := \frac{1}{x^2(1-x)}, \quad g(x) := -\frac{1}{4x^2(1-x)^2} + \frac{1}{4x(1-x)}. \tag{5.125}$$

Лемма 5.5.15. *Функция $y(x) = F(k, k, 2k; x)x^k\sqrt{1-x}$ является решением следующего дифференциального уравнения*

$$y''(x) - (u^2 f(x) + g(x))y(x) = 0. \tag{5.126}$$

Доказательство. Известно, что гипергеометрическая функция $F(x) = F(k, k, 2k; x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x(1-x)F''(x) + (2k - (2k+1)x)F'(x) - k^2 F(x) = 0.$$

Применяя лемму 5.5.5 с

$$\alpha(x) = x^{-k}(1-x)^{-1/2},$$

мы находим

$$y''(x) + \left(\frac{1-(2k-1)^2}{4x^2} + \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{1-(2k-1)^2}{4x(1-x)}\right)y(x) = 0.$$

После некоторых небольших преобразований мы приходим к (6.42). □

Отметим, что дифференциальные уравнения (6.42) и (5.95) совпадают с точностью до знака в функциях $f(x)$, определенных в (5.125) и (5.94). Согласно теории, разработанной в [**85**, главе 12] это означает, что в данном случае приближение по методу Лиувилля-Грина строится на основе I и K функций Бесселя (вместо Y и J функций как в предыдущем случае). Соответственно, мы собираемся свести(6.42) к виду

$$\frac{d^2Z}{d\xi^2} + \left[-\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2} - \frac{\psi(\xi)}{\xi}\right] Z = 0, \tag{5.127}$$

где

$$\psi(\xi) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sinh^2(\sqrt{\xi})}\right).$$

Это может быть проделано также как и в предыдущем параграфе. Положим

$$Z(x) := \frac{y(x)}{\alpha(x)}, \quad \alpha(x) := \frac{(x^2 - x^3)^{1/4}}{2(\operatorname{atanh}(\sqrt{1-x}))^{1/2}}$$

и пусть

$$\xi := 4\operatorname{atanh}^2(\sqrt{1-x}).$$

Отметим, что при $\xi \to 0$ функция $\psi(\xi)$ является аналитической. Отбрасывая в (5.127) слагаемое $\psi(\xi)/\xi$, мы получаем дифференциальное уравнение

$$Z'' + \left(-\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi}\right) Z = 0,$$

решения которого [**86**, (10.13.2)] являются функции

$$Z_L = \sqrt{\xi} L_0(u\sqrt{\xi}).$$

Здесь L_0 любая из функций K_0 или I_0. Определим,

$$L_v := \begin{cases} I_v \\ e^{\pi i v} K_v \end{cases}.$$

Тогда, следуя [**85**, (2.09), гл. 12], решение дифференциального уравнения (5.127) следует искать в виде

$$Z_L = \sqrt{\xi} L_0(u\sqrt{\xi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n;\xi)}{u^{2n}} + \frac{\xi}{u} L_1(u\sqrt{\xi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n;\xi)}{u^{2n}}. \tag{5.128}$$

Чтобы вычислить коэффициенты $A(n;\xi)$ и $B(n;\xi)$, мы определим две функции

$$W(\xi) := \sqrt{\xi} L_0(u\sqrt{\xi}), \quad V(\xi) := \xi L_1(u\sqrt{\xi}),$$

которые удовлетворяют [**86**, (10.13.2), (10.13.5), (10.36)] следующим дифференциальным уравнениям

$$W'' + \left(-\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2}\right) W = 0,$$
$$V'' - \frac{1}{\xi}V' + \left(-\frac{u^2}{4\xi} + \frac{3}{4\xi^2}\right) V = 0.$$

Из [**86**, (10.29.2),(10.29.3)] следует, что

$$V' = \frac{1}{2\xi}V + \frac{u}{2}W, \quad W' = \frac{1}{2\xi}W + \frac{u}{2\xi}V.$$

Подставляя n (5.128) в (5.127), получаем

$$W(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C(n;\xi)}{u^{2n}} + V(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D(n;\xi)}{u^{2n+1}} = 0,$$

где

$$C(n;\xi) = A''(n;\xi) + \frac{A'(n;\xi)}{\xi} - \frac{\psi(\xi)}{\xi}A(n;\xi) + B'(n;\xi) + \frac{B(n;\xi)}{2\xi},$$
$$D(n;\xi) = B''(n-1;\xi) + \frac{B'(n-1;\xi)}{\xi} - \frac{\psi(\xi)}{\xi}B(n-1;\xi) + \frac{A'(n;\xi)}{\xi}.$$

Приравнивая $C(n;\xi)$ и $D(n;\xi)$ к нулю, приходим к рекурсивным соотношениям

$$\sqrt{\xi}B(n;\xi) = -\sqrt{\xi}A'(n;\xi) + \int_0^{\xi}\left(\psi(x)A(n;x) - \frac{1}{2}A'(n;x)\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}, \tag{5.129}$$
$$A(n;\xi) = -\xi B'(n-1;\xi) + \int_0^{\xi}\psi(x)B(n-1;x)dx + \lambda_n$$

где λ_n-произвольные константы интегрирования.

Пусть $A(0;\xi) = 1$, тогда

$$B(0;\xi) = \frac{1}{8}\left(\frac{\coth\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} - \frac{1}{\xi}\right), \tag{5.130}$$

$$A(1;\xi) = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{\coth\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}} - \frac{1}{2\sinh^2(\sqrt{\xi})}\right) + \frac{1}{128}\left(\coth\sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)^2 + \lambda_1.$$

Отметим, что

$$B(0;\xi) = \frac{1}{24} + O(\xi), \quad A(1;\xi) = \lambda_1 + O(\xi) \text{ as } \xi \to 0,$$
$$\lim_{\xi\to\infty}\sqrt{\xi}B(0;\xi) = \frac{1}{8}, \quad \lim_{\xi\to\infty}A(1;\xi) = \frac{1}{128} + \lambda_1.$$

Теорема 5.5.16. *Для любого $u = k - 1/2$ и неотрицательного N, бесконечно дифференцируемая по ξ в интервале $(0,\infty)$ функция $Z_K(\xi)$*

$$Z_K(\xi) = \sqrt{\xi}K_0(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N}\frac{A_K(n;\xi)}{u^{2n}} - \frac{\xi}{u}K_1(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_K(n;\xi)}{u^{2n}} + \epsilon_{2N+1,3}(u,\xi) \tag{5.131}$$

является решением уравнение я (5.127). *При этом*

$$|\epsilon_{2N+1,3}(u,\xi)| \le \frac{\sqrt{\xi}K_0(u\sqrt{\xi})}{u^{2N+1}}V_{\xi,\infty}(\sqrt{\xi}B_K(N;\xi))\exp\left(\frac{1}{u}V_{\xi,\infty}(\sqrt{\xi}B_K(0;\xi))\right).$$

В частности, если $N = 1$, *то*

$$\epsilon_{3,3}(u,\xi) \ll \frac{\sqrt{\xi}K_0(u\sqrt{\xi})}{u^3}\min\left(\sqrt{\xi},\frac{1}{\xi}\right). \tag{5.132}$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы почти дословно повторяет доказательство [**85**, теоремы 3.1, стр.441]. Первое отличие состоит в том, что в [**85**, теореме 3.1, р.441] мы выбираем $\beta = \infty$. Как отмечено на [**85**, стр.442], это законно, если вариация функций $\sqrt{x}B(0;x)$ и $\sqrt{x}B(n;x)$ сходятся на бесконечности. Для функции $\sqrt{x}B(0;x)$ это непосредственно следует из (5.130). Так как

$$\psi^{(s)}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{s+1}}\right),$$

то для $n > 1$ вариация

$$\mathrm{Var}_{\xi,\infty}(\sqrt{x}B(n;x)) = \int_{\xi}^{\infty} |(\sqrt{x}B(n;x))'|dx$$

сходится на бесконечности по [**85**, упр 4.2, стр.445]. Чтобы доказать (5.132) нам надо оценить вариацию функции $\sqrt{x}B(1;x)$ на бесконечности. Используя рекуррентное соотношение (5.129), находим

$$(\sqrt{x}B(1;x))' = -\frac{1}{\sqrt{x}}\left(xA''(1;x) + A'(1;x) - \psi(x)A(1;x)\right).$$

Следовательно,

$$(\sqrt{x}B(1;x))' = O(x^{-1/2}) \text{ при } x \to 0$$

и

$$(\sqrt{x}B(1;x))' = O(x^{-2}) \text{ при } x \to \infty.$$

Таким образом

$$\mathrm{Var}_{\xi,\infty}(\sqrt{x}B(1;x)) = \int_{\xi}^{\infty} |(\sqrt{x}B(1;x))'|dx \ll \min\left(\sqrt{\xi},\frac{1}{\xi}\right)$$

и теорема доказана.

□

Решение

$$Z(\xi) = \left(\Phi_k(x)\frac{\sqrt{1-x}}{\alpha(x)}\right)\Big|_{x=1/\cosh^2\left(\sqrt{\xi}/2\right)} = \Phi_k\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\sqrt{\xi}/2\right)}\right)\left(\xi\sinh^2\left(\sqrt{\xi}\right)\right)^{1/4}$$

дифференциального уравнения (5.127) является подчиненным при $\xi \to \infty$. Другим подчиненным решением является функция $Z_K(\xi)$, определенная в (5.128) с $L_v = e^{\pi i v}K_v$. Следовательно, существует константа $C_K = C_K(u)$ такая, что

$$\Phi_k\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\sqrt{\xi}/2\right)}\right)\left(\xi\sinh^2\left(\sqrt{\xi}\right)\right)^{1/4}=C_KZ_K(\xi). \tag{5.133}$$

Вычисляя и приравнивая пределы левой и правой части уравнения (5.133) при $\xi\to\infty$, приходим к

$$C_K=2\frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(2k)}\frac{2^{2k}\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{u^{2n}}-\sum_{n=0}^{N-1}\frac{b_n}{u^{2n+1}}\right]^{-1}, \tag{5.134}$$

где

$$a_n=\lim_{\xi\to\infty}A(n;\xi),\quad b_n=\lim_{\xi\to\infty}B(n;\xi)\sqrt{\xi},$$
$$a_0=1,\quad a_1=\frac{1}{128}+\lambda_1,\quad b_0=\frac{1}{8}.$$

Так как

$$\frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(2k)}=\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}2^{2k}}(1+O(k^{-1})),$$

то

$$C_K=4+O(k^{-1}). \tag{5.135}$$

Таким образом нами доказана следующая теорема.

Теорема 5.5.17. *При $\xi\in(0,\infty)$ справедливо равенство* (5.133)*, где Z_K, C_K определены в* (5.131)*,* (5.134) *, соответственно.*

5.6. Оценки остатков. Случай форм фиксированного веса.

Лемма 5.6.1. *Справедлива следующая точная формула*

$$M_2(l;0,0)=\sum_{f\in H_{2k}}^{h}\lambda_f(l)L_f^2(1/2)=$$
$$=(1+(-1)^k)\left(\frac{\tau(l)}{\sqrt{l}}\left[2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k)-\log l-2\log(2\pi)+2\gamma\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(l-n)\phi_k\left(\frac{n}{l}\right)+\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_k\left(\frac{l}{n+l}\right)\right).$$

Доказательство. Данное утверждение является непосредственным следствием теоремы 5.4.2, после вычисления предела от (5.65) при $u\to 0$, $v\to 0$. После вычисления предела мы еще немного упрощаем вид внедиагональных слагаемых. Во-первых, используя (5.85), находим

$$\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(l-n)\phi_k\left(\frac{n}{l}\right)=(-1)^k\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(l-n)\phi_k\left(\frac{n}{l}\right).$$

Во-вторых, из (5.124) следует

$$\psi_k\left(\frac{l}{n}\right)=\Phi_k\left(\frac{l}{n+l}\right).$$

Таким образом мы получаем

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=l+1}^{\infty}\tau(n)\tau(n-l)\Phi_k\left(\frac{l}{n}\right)+\frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}\sum_{n=0}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\psi_k\left(\frac{l}{n}\right)=$$
$$\frac{1+(-1)^k}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_k\left(\frac{l}{n+l}\right).$$

□

Лемма 5.6.2. *Для любого $\epsilon>0$ и $l\ll k^2$ справедлива оценка*

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right)\ll\exp\left(-\frac{ck}{\sqrt{l}}\right)\left(\frac{l^{\epsilon}}{l^{1/4}k^{1/2}}+\frac{l^{1/2+\epsilon}}{k^{3/2}}\right),$$

где $c>0$ некая абсолютная константа.

Доказательство. Оценивая сумму по модулю, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right)\ll\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\epsilon}\left|\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right)\right|\ll$$
$$\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\int_1^{\infty}x^{\epsilon}\left|\Phi_{2k}\left(\frac{l}{x+l}\right)\right|dx+O\left(\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\Phi_{2k}\left(\frac{l}{1+l}\right)\right).\quad(5.136)$$

Оценим сначала интеграл

$$I:=\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\int_1^{\infty}x^{\epsilon}\left|\Phi_{2k}\left(\frac{l}{x+l}\right)\right|dx.$$

Пусть

$$x:=l\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right),\quad a:=2\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right),$$

тогда

$$I=\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}l\int_{a^2}^{\infty}\sinh^{\epsilon}\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\left|\Phi_{2k}\left(\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)}\right)\right|\frac{\sinh\left(\sqrt{\xi}\right)}{\sqrt{\xi}}d\xi.$$

Применяя (5.133) получаем, что интеграл равен

$$I=l^{1/2+\epsilon}C_K\int_{a^2}^{\infty}\sinh^{\epsilon}\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)|Z_K(\xi)|\,\frac{(\sinh(\sqrt{\xi}))^{1/2}}{\xi^{3/4}}d\xi,$$

а для C_K справедлива асимптотика (5.135). Так как

$$\sqrt{\xi}\geq 2\,\mathrm{arcsinh}\,(l^{-1/2})\gg 1/\sqrt{l},$$

то

$$(2k-1/2)\sqrt{\xi}\gg k/\sqrt{l}\gg 1\text{ for any }l\ll k^2.$$

Используя теорему 5.5.16 с $N=0$, мы получаем оценку

$$Z_K(\xi)\ll\sqrt{\xi}K_0((2k-1/2)\sqrt{\xi}).$$

Из этой оценки и [**86**, (10.40.2)] следует, что

$$I \ll l^{1/2+\epsilon}\int_{a^2}^{\infty}\left|K_0((2k-1/2)\sqrt{\xi})\right|\frac{(\sinh(\sqrt{\xi}))^{1/2+\epsilon}}{\xi^{1/4}}d\xi \ll \frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{2k-1/2}}\int_{a^2}^{\infty}\exp(-(2k-1/2)\sqrt{\xi})\frac{(\sinh(\sqrt{\xi}))^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{\xi}}d\xi.$$

Совершая замену переменных $\xi = x^2$ и разбивая интеграл на две части, получаем оценку

$$I \ll \frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}\int_{a}^{\infty}\exp(-(2k-1/2)x)(\sinh(x))^{1/2+\epsilon}dx \ll \frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}\left(\int_{a}^{1}\exp(-(2k-1/2)x)x^{1/2+\epsilon}dx+ \int_{1}^{\infty}\exp(-(2k-1/2)x)\exp(x(1/2+\epsilon))dx\right) \ll \frac{l^{1/2+\epsilon}}{k^{3/2}}\exp\left(-\frac{ck}{\sqrt{l}}\right)$$

где $c>0$. Оценим остаток в (5.136), обозначим его через

$$E := \frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right).$$

Пусть

$$\xi_0 := \left(2\,\mathrm{atanh}\left(\frac{1}{\sqrt{l+1}}\right)\right)^2,$$

тогда, используя (5.133), находим

$$E = \frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}C_K\frac{Z_K(\xi_0)}{(\xi_0\sinh^2(\sqrt{\xi_0}))^{1/4}}.$$

Отметим, что $\xi_0 \sim l^{-1}$, и значит при $l \ll k^2$ имеем

$$Z_K(\xi_0) \ll \sqrt{\xi_0}K_0((2k-1/2)\sqrt{\xi_0}) \ll \frac{\xi_0^{1/4}}{\sqrt{k}}\exp\left(-(2k-1/2)\sqrt{\xi_0}\right).$$

Следовательно, справедлива следующая оценка Finally, for some constant $c>0$ independent of k

$$E \ll \frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\frac{\exp\left(-(2k-1/2)\sqrt{\xi_0}\right)}{\sqrt{k}(\sinh(\sqrt{\xi_0}))^{1/2}} \ll \frac{l^{\epsilon}}{l^{1/4}k^{1/2}}\exp\left(-\frac{ck}{\sqrt{l}}\right),$$

в которой $c>0$ это некая, независящая от k константа. □

Лемма 5.6.3. *Для любого $\epsilon>0$ и $l \ll k^2$ справедлива оценка*

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(n-l)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right) \ll \frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}.$$

Доказательство. Пусть $n/l =: \sin^2\left(\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)$, тогда, применяя (5.111), получаем

$$\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right) = \frac{C_Y Z_Y(\xi)+C_J Z_J(\xi)}{(2\arcsin(\sqrt{n/l}))^{1/2}(2n/l)^{1/4}(1-n/l)^{1/4}}.$$

Используя свойство (5.85), находим

$$\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(n-l)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)\ll\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\sum_{n\leq l/2}\left|\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)\right|.$$

Так как $n/l\leq 1/2$, то $\xi\leq\pi^2/4$, а так как $n/l\geq 1/l$, то к тому же и $\xi\gg 1/l$. Следовательно,

$$(2k-1/2)\sqrt{\xi}\gg k/\sqrt{l}\gg 1 \text{ when } l\ll k^2.$$

Применяя теорему 5.5.9 с $N=0$, теорему 5.5.10 и стандартные оценки на функции Бесселя, находим

$$C_Y Z_Y(\xi)\ll\sqrt{\xi}Y_0((2k-1/2)\sqrt{\xi})\ll\frac{\xi^{1/4}}{k^{1/2}},$$

и так как по лемме 5.5.12 $C_J=O(k^{-5})$, то

$$C_J Z_J(\xi)\ll C_J J_0((2k-1/2)\sqrt{\xi})\ll\frac{\xi^{1/4}}{k^{11/2}}$$

Следовательно,

$$\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)\ll\frac{1}{\sqrt{k}(n/l)^{1/4}(1-n/l)^{1/4}}.$$

Используя эту оценку, заключаем

$$\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\sum_{n\leq l/2}\left|\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)\right|\ll\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{l}}\sum_{n\leq l/2}\frac{(l/n)^{1/4}}{\sqrt{k}}\ll\frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}.$$

□

Таким образом нами доказана следующая асимптотическая формула

Теорема 5.6.4. *Для любых $\epsilon>0$, $l\ll k^2$, $k\equiv 0 \pmod 2$ справедлива асимптотическая формула*

$$M_2(l;0,0)=\frac{2\tau(l)}{\sqrt{l}}(2\log k-\log l-2\log 2\pi+2\gamma)+O\left(\frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}\right).$$

5.7. Оценки остатков в среднем по весу

В этом параграфе мы покажем, что асимптотические формулы, полученные нами методом Лиувилля-Грина, позволяют очень хорошо оценить остаток во втором подрученном моменте при наличии дополнительного усреднения по весу форм. Как следствие, мы передокажем результат Иванца-Сарнака (5.2). Для этого нам необходимо получить асимптотические формулы на моменты $A_j(l)$, определенные в (5.9). Напомним, что сглаживающая функция h определена в (5.8), а ее среднее значение H в (5.50).

Лемма 5.7.1. *Справедлива следующая точная формула*

$$A_2(l) = \frac{2\tau(l)}{\sqrt{l}}\frac{HK}{4}\left(2\log K - \log l - 2\log 8\pi + 2\gamma + 2\frac{H_1}{H}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right) + 2\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right) + \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(l-n)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right),$$

Доказательство. Просуммируем по k результат леммы 5.6.1. Для вычисления главного члена мы воспользуемся [**86**, (5.11.2)], получая

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k) \sim \log k - \frac{1}{2k} - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}}{2rk^{2r}}, \tag{5.137}$$

где B_{2r} числа Бернулли. Отметим, что

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{1}{k} \ll 1.$$

Вычисляя главный член с помощью формулы суммирования Пуассона, находим

$$2\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\log k = 2\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{4x}{K}\right)\log x \exp(-2\pi i n x)dx = 2\frac{K}{4}\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h(y)(\log y + \log K - \log 4)\exp\left(\frac{-2\pi i n y K}{4}\right)dy.$$

В последнем выражении слагаемое с $n = 0$ равно

$$2\left(\frac{HK}{4}(\log K - \log 4) + \frac{H_1 K}{4}\right).$$

Если $n \neq 0$, мы интегрируем по частям $a \geq 2$ раз и оцениваем результат по модулю, получая

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^a}{\partial y^a}\left(h(y)\log\frac{yK}{4}\right)\frac{1}{(nK)^a}dy \ll \frac{\log K}{(nK)^a}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) = \frac{HK}{4} + O\left(\frac{1}{K^a}\right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.7.2. *Пусть $l \ll K^{2-\epsilon}$, тогда для любого $A > 0$ справедлива оценка*

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right) \ll K^{-A}.$$

Доказательство. Усредняя по k результат леммы 5.6.2, получаем

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\tau(n+l)\Phi_{2k}\left(\frac{l}{n+l}\right)\ll$$
$$l^{\epsilon}\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\left(\frac{1}{l^{1/4}k^{1/2}}+\frac{l^{1/2}}{k^{3/2}}\right)\exp\left(-ck/\sqrt{l}\right)\ll K^{-A}.$$

□

Лемма 5.7.3. *Для любых $\epsilon>0$, $a\geq 2$ и $l\ll K^{2-\epsilon}$ справедлива оценка*

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(l-n)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)\ll\frac{l^{a/2-1/4+\epsilon}}{K^{a+1/2}}K+\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{lK}}K+\frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^{7/2}}K.$$

Доказательство. Из (5.85) следует, что

$$\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)=\phi_{2k}\left(\frac{l-n}{l}\right).$$

Для нечетного l имеем

$$\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(l-n)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)=2\sum_{n=1}^{l/2}\tau(n)\tau(l-n)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right),$$

если же l четно, то справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{l-1}\tau(n)\tau(l-n)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)=2\sum_{n=1}^{l/2}\tau(n)\tau(l-n)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)-\phi_{2k}(1/2)\tau^2(l/2).$$

Для оценки вклада от слагаемого $\phi_{2k}(1/2)\tau^2(l/2)$ достаточно воспользоваться (5.93):

$$\frac{\tau^2(l/2)}{\sqrt{l}}\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\phi_{2k}(1/2)=(-1)^k\frac{\tau^2(l/2)}{\sqrt{l}}\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(k)}{\Gamma(k+1/2)}$$
$$\ll l^{-1/2+\epsilon}\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}\ll l^{-1/2+\epsilon}\frac{1}{\sqrt{K}}\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\ll\frac{l^{\epsilon}}{l^{1/2}K^{1/2}}K.$$

Нам осталось оценить сумму

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{n=1}^{l/2}\tau(n)\tau(l-n)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)\ll\frac{l^{\epsilon}}{l^{1/2}}\sum_{n=1}^{l/2}\left|\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right)\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)\right|.$$

Применяя (5.111), мы приходим к

$$\phi_{2k}\left(\frac{n}{l}\right)=\frac{C_Y Z_Y(4\arcsin^2(\sqrt{n/l}))+C_J Z_J(4\arcsin^2(\sqrt{n/l}))}{(2\arcsin(\sqrt{n/l}))^{1/2}(2n/l)^{1/4}(1-n/l)^{1/4}}.$$

Пусть $u:=2k-1/2$, $\xi:=4\arcsin^2(\sqrt{n/l})$, тогда используя (5.109) и (5.121), находим

$$C_J Z_J(\xi)=O\left(\frac{\sqrt{\xi}J_0(u\sqrt{\xi})}{k^5}\right).$$

Так как $l\ll K^{2-\epsilon}$, то $u\sqrt{\xi}=(4k-1)\arcsin(\sqrt{n/l})\gg K/\sqrt{l}\gg 1$ и значит

$$J_0(u\sqrt{\xi})\ll\frac{1}{(u\sqrt{\xi})^{1/2}}\ll\frac{1}{\sqrt{k}(\arcsin(\sqrt{n/l}))^{1/2}}.$$

Следовательно, вклад от слагаемого с $C_J Z_J$ оценивается как

$$\frac{l^\epsilon}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{l/2} \frac{(l/n)^{1/4}}{(\arcsin(\sqrt{n/l}))^{1/2}} \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \frac{\arcsin(\sqrt{n/l})|J_0(u\sqrt{\xi})|}{k^5} \ll$$

$$\frac{l^\epsilon}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{l/2} \left(\frac{l}{n}\right)^{1/4} \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \frac{1}{k^{11/2}} \ll \frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^{11/2}} K.$$

Оценим вклад от слагаемого $C_Y Z_Y$, а именно

$$\frac{l^\epsilon}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{l/2} \frac{(l/n)^{1/4}}{(\arcsin(\sqrt{n/l}))^{1/2}} \left| \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) C_Y Z_Y(\xi) \right|.$$

Для этого мы воспользуемся разложением C_Y в ряд (5.123), при этом мы выбираем n достаточно большим, чтобы получить очень хорошую оценку остатка. Все главные члены имеют одинаковую структуру и значит достаточно рассмотреть первый из них -2π.

Напомним, что функция $Z_Y(\xi)$ определена в (5.108). Применяя (5.110), остаток в (5.108) оценивается как

$$\epsilon_{3,1}(u,\xi) \ll \frac{\sqrt{\xi}|Y_0(u\sqrt{\xi})|}{u^3},$$

и следовательно его вклад не превосходит

$$\frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^{7/2}} K.$$

В интервале $(0, \pi^2/4)$ функции $B_0(\xi)$, $A_1(\xi)$, независящие от параметра k, являются ограниченными и не осциллирующими (см. (5.106), (5.107)), а Y-функция Бесселя напротив имеет осциллирующий характер поведения, что следует из следующей асимптотической формулы (см. **[35**, (8.451(2))])

$$Y_v(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(\sum_{s=0}^{s_1-1} \frac{(-1)^s \Gamma(v+2s+1/2)}{(2z)^{2s}(2s)!\Gamma(v-2s+1/2)} + R_1 \right)$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(\sum_{s=0}^{s_1-1} \frac{(-1)^s \Gamma(v+2s+3/2)}{(2z)^{2s+1}(2s+1)!\Gamma(v-2s-1/2)} + R_2 \right),$$

при чем (см. **[35**, (8.451(7,8))])$R_1 = O(z^{-2s_1})$, $R_2 = O(z^{-2s_1-1})$. Так как $u\sqrt{\xi} > 1$, то единственным отличием $Y_0(u\sqrt{\xi})$ от $Y_1(u\sqrt{\xi})$ является слагаемое $\pi/2$ в аргументах тригонометрических функций, что нисколько не влияет на дальнейший анализ. По этому мы ограничимся рассмотрением вклада от $Y_0(u\sqrt{\xi})$.

Вклад от остатков R_1, R_2 может быть оценен следующим образом

$$\frac{l^\epsilon}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{l/2} \sum_k \frac{h(4k/K)}{(k\sqrt{n/l})^{2s_1+1/2}} \ll \frac{l^\epsilon}{\sqrt{l}} \left(\frac{l}{K^2}\right)^{s_1+1/4} K \quad \text{for } s_1 \geq 2.$$

Таким образом нам осталось оценить следующее выражение

$$E := \frac{l^\epsilon}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{l/2} \left(\frac{l}{n}\right)^{1/4} \left| \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \frac{\sin\left((4k-1)\arcsin(\sqrt{n/l}) - \pi/4\right)}{\sqrt{4k-1}} \right|.$$

Применяя формулу суммирования Пуассона (см. [**51**, теорема 4.4]), получаем

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \frac{\sin\left((4k-1)\arcsin(\sqrt{n/l}) - \pi/4\right)}{\sqrt{4k-1}} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} I(m),$$

где

$$I(m) := \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(\frac{4y}{K}\right) \frac{\sin\left((4y-1)\arcsin(\sqrt{n/l}) - \pi/4\right)}{\sqrt{4y-1}} e^{-2\pi i y m} dy.$$

Пусть $g(y) := \frac{1}{4}Ky(-2\pi m \pm 4\arcsin(\sqrt{n/l}))$, тогда, расписывая синус в виде комбинаций экспонент, находим

$$I(m) \ll K \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{ig(y)} \frac{dy}{\sqrt{yK-1}} \right|.$$

Интегрирования по частям $a \geq 2$ раз приводит к оценке

$$I(m) \ll \sqrt{K} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^a}{\partial y^a} \left(\frac{h(y)}{\sqrt{y-1/K}} \right) \frac{e^{ig(y)} dy}{K^a \left| -\pi m/2 \pm \arcsin(\sqrt{n/l}) \right|^a} \right|.$$

Заметим, что $0 < \arcsin(\sqrt{n/l}) \leq \pi/4$, следовательно, если $m \neq 0$ то

$$I(m) \ll \sqrt{K}(Km)^{-a}$$

а если $m = 0$, то

$$I(0) \ll \sqrt{K}(K\arcsin(\sqrt{n/l}))^{-a}.$$

Таким образом мы показали, что

$$E \ll l^{-1/2+\epsilon} K^{1/2-a} \sum_{n=1}^{l/2} \left(\frac{l}{n}\right)^{1/4} \left(1 + \frac{1}{(\arcsin(\sqrt{n/l}))^a}\right) \ll$$

$$l^{-1/2+\epsilon} K^{1/2-a} \sum_{n=1}^{l/2} \left(\frac{l}{n}\right)^{1/4+a/2} \ll l^{a/2-1/4+\epsilon} K^{-a+1/2}.$$

Лемма доказана. □

Собирая воедино все полученные нами оценки, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.7.4. *Для любого $\epsilon > 0$, и любых натуральных $a \geq 2$ и $l \ll K^2$ справедлива асимптотическая формула*

$$A_2(l)=\frac{2\tau(l)}{\sqrt{l}}\frac{HK}{4}(2\log K-\log l-2\log 8\pi+2\gamma+2H_1/H)+$$
$$O\left(K\left(\frac{l^{a/2-1/4+\epsilon}}{K^{a+1/2}}+\frac{l^{\epsilon}}{\sqrt{lK}}+\frac{l^{1/2+\epsilon}}{K^{7/2}}\right)\right).$$

5.8. Сглаживание моментов и необнуляемость центральных значений

В этом параграфе мы докажем основной результат (Теорему 5.1.1) о пропорции ненулевых центральных значений рассматриваемых L-функций. Для этого мы применим метод сглаживания моментов, восходящий к Сельбергу, а для L-функций автоморфных форм описанный в работах Ковальского-Мишеля и Ковальского-Мишеля-Ван дер Кама [**63, 66**].

5.8.1. Выбор сглаживающего множителя. В работах [**53, 66**] в качестве сглаживающего множителя предлагается взять следующий короткий ряд Дирихле

$$M(f)=\sum_{m\le M}x_m\lambda_f(m)m^{-1/2}, \tag{5.138}$$

где

$$x_m=\frac{\mu(m)}{\rho(m)}P\left(\frac{\log M/m}{\log M}\right), \tag{5.139}$$
$$\rho(m)=\prod_{p|m}(1+1/p),\quad P(x)=x^2.$$

Отметим, что если M не является целым число, то (см. [**66**, лемма 2.1]) выполняется следующее равенство

$$\delta_{m<M}P\left(\frac{\log M/m}{\log M}\right)=\frac{2}{2\pi i}(\log M)^{-2}\int_{(3)}\frac{M^s}{m^s}\frac{ds}{s^3}. \tag{5.140}$$

Лемма 5.8.1. *Пусть $k\equiv 0 \pmod 2$, $M=k^{\Delta}$, тогда для любого $\epsilon>0$ существует $k_0=k_0(\epsilon)$ такое, что при $k\ge k_0$ и $\Delta<1-\epsilon$ справедлива оценка*

$$\sum_{f\in H_{2k}}^{h}M^2(f)\ll\log M. \tag{5.141}$$

Доказательство. Из (5.138) следует, что

$$\sum_{f\in H_{2k}}^{h}M^2(f)=\sum_{m_1,m_2\le M}\frac{x_{m_1}x_{m_2}}{\sqrt{m_1m_2}}\sum_{f\in H_{2k}}^{h}\lambda_f(m_1)\lambda_f(m_2).$$

Вычисляя внутреннюю сумму с помощью формулы Петерссона [**98**, лемма 2.1], получаем

$$\sum_{f\in H_{2k}}^{h}\lambda_f(m_1)\lambda_f(m_2)=\delta(m_1,m_2)+O(e^{-k})\text{ for }m_1m_2<\frac{k^2}{10^4}.$$

Так как $x_m \ll 1$, то

$$\sum_{f\in H_{2k}}^{h} M^2(f) \ll \sum_{m\le M} \frac{1}{m} \ll \log M.$$

□

В случае наличия дополнительного усреднения по k предыдущая лемма превращается в следующее утверждение.

Лемма 5.8.2. *Пусть $M = K^{\Delta}$. Для любого $\epsilon > 0$ существует $K_0 = K_0(\epsilon)$ такое, что при $K \ge K_0$ и $\Delta < 1 - \epsilon$. справедлива оценка*

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} M^2(f) \ll K \log M. \tag{5.142}$$

5.8.2. Первый сглаженный момент.

Лемма 5.8.3. *Пусть $k \equiv 0 \pmod 2$, $M = k^{\Delta}$, тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\epsilon)$ такое, что при $k \ge k_0$ и $\Delta < 1 - \epsilon$ справедлива асимптотическая формула*

$$M_1 := \sum_{f\in H_{2k}}^{h} M(f)L_f(1/2) = \frac{4\zeta(2)}{\log M} + O((\log M)^{-2}) \tag{5.143}$$

Доказательство. Из (5.138) и теоремы 5.3.1 следует, что

$$\sum_{f\in H_{2k}}^{h} M(f)L_f(1/2) = 2\sum_{m\le M} \frac{x_m}{m} + O\left(\sum_{m\le M} \frac{x_m}{m}\left(\frac{2\pi em}{k}\right)^k\right).$$

Так как

$$\sum_{m\le M} \frac{x_m}{m}\left(\frac{2\pi em}{k}\right)^k \ll (2\pi eM/k)^k = (2\pi e)^k k^{k(\Delta-1)},$$

то остаточный член пренебрежимо мал при $\Delta < 1-\epsilon$. Используя (5.139) и (5.140), получаем что главный член равен

$$2\sum_{m\le M} \frac{x_m}{m} = \frac{4}{(\log M)^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{(3)} \frac{M^s}{s^3}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{\rho(m)m^{1+s}} ds.$$

Преобразуем сумму по m следующим образом

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{\rho(m)m^{1+s}} = \frac{\alpha(s)}{\zeta(s+1)},$$

где $\alpha(0) = \zeta(2)$ и при $\Re s > -1$

$$\alpha(s) = \prod_p \frac{1 + 1/p - 1/p^{s+1}}{(1+1/p)(1-1/p^{s+1})}.$$

Таким образом, главный член равен

$$\frac{4}{(\log M)^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{(3)} \frac{M^s\alpha(s)}{s^3\zeta(s+1)} ds.$$

Сдвинем прямую интегрирования на линию

$$\Re s = -\frac{c}{\log(3+|\Im s|)},$$

где $c > 0$ некая малая константа, выбранная таким образом, чтобы при сдвиге контура мы не прошли через нули $\zeta(s+1)$. При этом мы пройдем через полюс второго порядка в точке $s = 0$, вычет в котором равен

$$\frac{4\zeta(2)}{\log M} + O((\log M)^{-2}).$$

Оставшийся интеграл можно оценить как

$$\int_0^\infty M^{-c/\log(3+t)}(3+t)^{-3+\epsilon}dt = \int_{\log 3}^\infty e^{x(-2+\epsilon)-cx^{-1}\log M}dx.$$

Применяя метод перевал получаем следующую оценку

$$(\log M)^{1/4}e^{-c'\sqrt{\log M}}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.8.4. *Пусть $M = K^\Delta$. Для любого $\epsilon > 0$ существует $K_0 = K_0(\epsilon)$ такое, что при $K \geq K_0$ и $\Delta < 1 - \epsilon$ справедлива асимптотическая формула*

$$A_1 := \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} M(f)L_f(1/2) = \frac{HK}{4}\frac{4\zeta(2)}{\log M} + O(K(\log M)^{-2}) \tag{5.144}$$

Доказательство. Из теоремы 5.3.2 следует, что при некоторых абсолютных константах $c_1, c_2 > 0$ выполнено

$$A_1 = \frac{HK}{4}2\sum_{m\leq M}\frac{x_m}{m} + O\left(K\left(\frac{c_1 M}{K}\right)^{c_2 K}\right).$$

Так как остаточный член пренебрежимо мал при $\Delta < 1 - \epsilon$, а главный член вычисляется так же как в лемме 5.8.3, то формула (5.144) доказана. □

5.8.3. Второй сглаженный момент.

Лемма 5.8.5. *Пусть $k \equiv 0 \pmod 2$, $M = k^\Delta$, тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\epsilon)$ такое, что при $k \geq k_0$ и $\Delta < 1/4 - \epsilon$ справедлива асимптотическая формула*

$$M_2 := \sum_{f\in H_{2k}}^{h} M^2(f)L_f^2(1/2) = \frac{16\zeta^2(2)}{(\log M)^2}(1 + 1/\Delta) + O((\log M)^{-3}). \tag{5.145}$$

Доказательство. Используя свойство мультипликативности (5.26), находим

$$\sum_{f\in H_{2k}}^{h} M^2(f)L_f^2(1/2) = \sum_{b\leq M}\frac{1}{b}\sum_{m_1,m_2\leq M/b}\frac{x_{m_1 b}x_{m_2 b}}{\sqrt{m_1 m_2}}M_2(m_1 m_2).$$

По теореме 5.6.4 вклад от остаточного члена из асимптотической формулы для $M_2(m_1m_2)$ равен

$$\sum_{b\leq M}\frac{1}{b}\sum_{m_1,m_2\leq M/b}\frac{(m_1m_2)^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{m_1m_2k}}\ll\frac{M^{2+\epsilon}}{\sqrt{k}}=k^{2\Delta-1/2+\epsilon}.$$

Таким образом, он меньше остатка в (5.148) при $\Delta<1/4-\epsilon$ Напомним, что главный член из асимптотической формулы для $M_2(m_1m_2)$ имеет вид

$$2\frac{\tau(m_1m_2)}{\sqrt{m_1m_2}}\left(2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(k)-\log(m_1m_2)+2\gamma-2\log(2\pi)\right). \tag{5.146}$$

Из (5.137), следует что старший член асимптотического разложения (5.146) по степеням k равен

$$2\frac{\tau(m_1m_2)}{\sqrt{m_1m_2}}\log\frac{k^2}{m_1m_2}.$$

Следовательно, нам достаточно вычислить

$$2\sum_{b\leq M}\frac{1}{b}\sum_{m_1,m_2\leq M/b}\frac{\tau(m_1m_2)x_{m_1b}x_{m_2b}}{m_1m_2}\log\frac{k^2}{m_1m_2}.$$

Используя соотношение

$$\tau(m_1m_2)=\sum_{d|(m_1,m_2)}\mu(d)\tau(m_1/d)\tau(m_2/d),$$

мы получаем

$$2\sum_{n\leq M}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{m_1,m_2\leq M/n}\frac{\tau(m_1)\tau(m_2)x_{m_1n}x_{m_2n}}{m_1m_2}\log\frac{k^2}{d^2m_1m_2}.$$

Разобьем последнее выражение на две части

$$P_1:=4\sum_{n\leq M}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{m_1,m_2\leq M/n}\frac{\tau(m_1)\tau(m_2)x_{m_1n}x_{m_2n}}{m_1m_2}\log k/m_1,$$

$$P_2:=-4\sum_{n\leq M}\frac{1}{n}\sum_{d|n}\frac{\mu(d)\log d}{d}\sum_{m_1,m_2\leq M/n}\frac{\tau(m_1)\tau(m_2)x_{m_1n}x_{m_2n}}{m_1m_2}.$$

Оказывается, главный член правой части (5.148) полностью содержится в P_1, тогда как P_2 оказывается достаточно малой. Это обусловлено наличие в P_1 дополнительного множителя $\log k/m_1$. По формуле Коши получаем

$$\log k/m_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta}\frac{k^z}{m_1^zz^2}dz,$$

где C_δ-круг радиуса δ с центром в точке 0. Используя (5.139) и (5.140), находим

$$P_1=\frac{16}{(\log M)^4}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{(3)}\int_{(3)}\int_{C_\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^{2+s_1+s_2}}M^{s_1+s_2}\times$$

$$\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\frac{\tau(m_1)\tau(m_2)\mu(m_1n)\mu(m_2n)}{\rho(m_1n)\rho(m_2n)m_1^{s_1+z+1}m_2^{s_2+1}}\frac{k^zdz}{z^2}\frac{ds_1}{s_1^3}\frac{ds_2}{s_2^3}.$$

Пусть

$$\alpha_1(s) := \prod_p \frac{(1+1/p-2p^{-s-1})(1-1/p)}{(1-p^{-s-1})^2},$$

и

$$\beta_n(s) := \prod_{p|n} \frac{1+1/p}{1+1/p-2p^{-s-1}}.$$

Тогда сумма по m_1 может быть вычислена следующим образом

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{\tau(m_1)\mu(m_1 n)}{\rho(m_1 n) m_1^{s_1+z+1}} = \frac{\mu(n)}{\rho(n)} \sum_{(m_1,n)=1} \frac{\tau(m_1)\mu(m_1)}{\rho(m_1) m_1^{s_1+z+1}} =$$

$$\frac{\mu(n)}{\rho(n)} \prod_{(p,n)=1} \left(1 - \frac{2}{p^{s_1+z+1}(1+1/p)}\right) = \frac{\mu(n)}{\rho(n)} \frac{\zeta(2)}{\zeta^2(s_1+z+1)} \beta_n(s_1+z)\alpha_1(s_1+z).$$

Аналогично получаем

$$\sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{\tau(m_2)\mu(m_2 n)}{\rho(m_2 n) m_2^{s_2+1}} = \frac{\mu(n)}{\rho(n)} \frac{\zeta(2)}{\zeta^2(s_2+1)} \beta_n(s_2)\alpha_1(s_2).$$

В результате сумма по n принимает следующий вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^{2+s_1+s_2}} \frac{\mu^2(n)}{\rho^2(n)} \beta_n(s_1+z)\beta_n(s_2) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)\mu^2(n)}{n^{2+s_1+s_2}} \prod_{p|n} (1+1/p-2p^{-s_1-z-1})^{-1}(1+1/p-2p^{-s_2-1})^{-1} =$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{(1-\frac{1}{p})(1+\frac{1}{p}-2p^{-s_1-z-1})^{-1}}{p^{s_1+s_2+1}(1+\frac{1}{p}-2p^{-s_2-1})}\right) = \zeta(s_1+s_2+1)\alpha_2(s_1,s_2,z),$$

где

$$\alpha_2(s_1,s_2,z) = \prod_p \left(1 + \frac{(1-\frac{1}{p})(1+\frac{1}{p}-\frac{2}{p^{s_1+z+1}})^{-1}}{p^{s_1+s_2+1}(1+\frac{1}{p}-\frac{2}{p^{s_2+1}})}\right)\left(1 - \frac{1}{p^{s_1+s_2+1}}\right).$$

Таким образом, мы получили

$$P_1 = \frac{16\zeta^2(2)}{(\log M)^4} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{(3)}\int_{(3)}\int_{C_\delta} \frac{\alpha(s_1,s_2,z)\zeta(s_1+s_2+1)}{\zeta^2(s_1+z+1)\zeta^2(s_2+1)} M^{s_1+s_2} \frac{k^z dz}{z^2} \frac{ds_1}{s_1^3} \frac{ds_2}{s_2^3}, \tag{5.147}$$

где

$$\alpha(s_1,s_2,z) := \alpha_1(s_1+z)\alpha_1(s_2)\alpha_2(s_1,s_2,z).$$

Заметим, что для некоторого $\epsilon > 0$ $\alpha(s_1,s_2,z)$ сходится абсолютно при $\Re s_1, \Re s_2, \Re z > -\epsilon$. Так же отметим, что $\alpha(0,0,0) = 1$. Обозначим через γ_i следующий кривую

$$\Re s_i = -\frac{c}{\log(3+|\Im s_i|)}.$$

Определим так же функцию

$$f(s_1,s_2,z) := M^{s_1+s_2}\alpha(s_1,s_2,z) \frac{\zeta(s_1+s_2+1)}{\zeta^2(s_1+z+1)\zeta^2(s_2+1)} \frac{k^z}{z^2 s_1^3 s_2^3}.$$

Вычислим сначала интеграл по z из (5.147)

$$I := \frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{(3)}\int_{(3)}\int_{C_\delta} f(s_1,s_2,z)dzds_1ds_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{(3)}\int_{(3)} \operatorname{res}_{z=0} f(s_1,s_2,z)ds_2ds_1.$$

После этого мы деформируем контур интегрирования на кривую $(-\infty,-\delta)\cup c_\delta \cup (\delta,\infty)$, где $\delta>0$ и c_δ-полуокружность в правой полуплоскости радиуса δ. Отметим, что функция $f(s_1,s_2,z)$ имеет полюс не только в $s_1=0$, но и в точках $s_1+s_2=0$. Деформируя контур интегрирования на кривую γ_1, мы пройдем только через полюс $s_1=0$ и, следовательно, придем к формуле (см. [**20**, следствие 2.4.2, стр. 55])

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{(3)} \operatorname*{res}_{\substack{s_1=0\\ z=0}} f(s_1,s_2,z)ds_2 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \operatorname*{res}_{\substack{s_2=-s_1\\ z=0}} f(s_1,s_2,z)ds_1 + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_1}\int_{(3)} \operatorname{res}_{z=0} f(s_1,s_2,z)ds_2ds_1.$$

Теперь мы деформируем контур интегрирования по переменной s_2 на кривую γ_2 и получаем

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \operatorname*{res}_{\substack{s_2=0\\ z=0}} f(s_1,s_2,z)ds_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \operatorname*{res}_{\substack{s_1=0\\ z=0}} f(s_1,s_2,z)ds_2 + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \operatorname{res}_{z=0} f(s_1,s_2,z)ds_2ds_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \operatorname*{res}_{\substack{s_2=-s_1\\ z=0}} f(s_1,s_2,z)ds_1 + \operatorname{res}_{s_1=s_2=z=0} f(s_1,s_2,z).$$

Вклад первых трех интегралов мал и может быть оценен так же как в лемме 5.8.3. Четвертый интеграл оценивается константой и, следовательно, его вклад в P_1 равен $O((\log M)^{-4})$. Таким образом, главный член для P_1 содержится в вычете в точке $s_1=s_2=z=0$. Так как функция $f(s_1,s_2,z)$ имеет простой полюс в точке $s_2=0$, то

$$\operatorname{res}_{s_1=s_2=z=0} f(s_1,s_2,z) = 2\pi i \operatorname{res}_{s_1=z=0} \frac{k^z M^{s_1}\zeta(s_1+1)\alpha(s_1,0,z)}{z^2 s_1^3 \zeta^2(s_1+z+1)}.$$

Теперь мы сначала вычисляем вычет точке $z=0$, где у функции полюс второго порядка, а затем вычисляем вычет в точке $s_1=0$ (где у функции будет полюс третьего порядка). В итоге мы приходим к формуле

$$P_1 = \frac{16\zeta^2(2)}{(\log M)^4}(\log k\log M + (\log M)^2) + O((\log M)^{-3}) = \frac{16\zeta^2(2)}{(\log M)^2}(\Delta^{-1}+1) + O((\log M)^{-3}).$$

Аналогично, используя интегральное представление

$$\log d = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta} \frac{d^z}{z^2}dz,$$

можно показать, что $P_2 = O((\log M)^{-3})$. □

Лемма 5.8.6. *Пусть $M = K^{\Delta}$. Для любого $\epsilon > 0$ существует $K_0 = K_0(\epsilon)$ такое, что при $K \geq K_0$ и $\Delta < 1 - \epsilon$ справедлива асимптотическая формула*

$$A_2 := \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{f \in H_{4k}(1)}^{h} M^2(f) L_f^2(1/2) = \frac{HK}{4} \frac{16\zeta^2(2)}{(\log M)^2}(1 + 1/\Delta) + O(K(\log M)^{-3}). \quad (5.148)$$

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме из свойства мультипликативности (5.26), находим

$$A_2 = \sum_{b \leq M} \frac{1}{b} \sum_{m_1, m_2 \leq M/b} \frac{x_{m_1 b} x_{m_2 b}}{\sqrt{m_1 m_2}} A_2(m_1 m_2).$$

Подставим асимптотическую формулу для $A_2(m_1 m_2)$ из теоремы 5.7.4. Вклад остаточного члена оценивается следующим образом

$$K M^{\epsilon} \left(\frac{M^{a+1/2}}{K^{a+1/2}} + \frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{M^2}{K^{7/2}} \right)$$

где $a \geq 2$. Несложно убедиться, что при $\Delta < 1 - \epsilon$ данное выражение меньше чем остаток в (5.148). Главный же член вычисляется точно также как в лемме 5.8.5. □

5.8.4. Необнуляемость L-функций форм фиксированного веса.

Теорема 5.8.7. *Пусть $k \equiv 0 \pmod 2$, тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\epsilon)$ такое, что при $k \geq k_0$ справедлива оценка*

$$\sum_{\substack{f \in H_{2k} \\ L_f(1/2) \geq (\log k)^{-2}}}^{h} 1 \geq \frac{1}{5} - \epsilon.$$

Доказательство. Асимптотические формулы для сглаженных первого и второго моментов приведены в (5.143) и (5.148). При этом логарифмическая длина Δ сглаживающего множителя не превосходит $\Delta < 1/4 - \epsilon$. Применяя неравенство (5.141), мы получаем

$$\widetilde{M_1} := \sum_{f \in H_{2k}}^{h} M(f) L_f(1/2) \delta_{L_f(1/2) < b(k)(\log k)^{-1/2}} \leq \left(\sum_{\substack{f \in H_{2k} \\ L_f(1/2) < b(k)(\log k)^{-1/2}}}^{h} L_f^2(1/2) \right)^{1/2} \left(\sum_{f \in H_{2k}}^{h} M^2(f) \right)^{1/2} \leq b(k)(\log k)^{-1/2} \left(\sum_{f \in H_{2k}}^{h} M^2(f) \right)^{1/2} \leq b(k).$$

Выбирая $b(k) = (\log k)^{-3/2}$, приходим к оценке

$$\sum_{\substack{f\in H_{2k}\\ L_f(1/2)\geq(\log k)^{-2}}}^{h} 1 \geq \frac{(M_1-\widetilde{M_1})^2}{M_2} \geq \frac{\Delta}{1+\Delta},$$

справедливой при $\Delta < 1/4 - \epsilon$. □

5.8.5. Необнуляемость L-функций при усреднении по весу.

Теорема 5.8.8. *Для любого $\epsilon > 0$ существует $K_0 = K_0(\epsilon)$ такое, что при $K \geq K_0$ справедлива оценка*

$$\frac{4}{HK}\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{\substack{f\in H_{4k}(1)\\ L_f(1/2)\geq(\log k)^{-2}}}^{h} 1 \geq \frac{1}{2} - \epsilon.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sim \frac{HK}{4} \text{ при} K \to \infty.$$

Из неравенства Коши-Буняковского и оценки (5.142) следует, что

$$\widetilde{A}_1 := \sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{\substack{f\in H_{4k}(1)\\ L_f(1/2)<b(k)(\log k)^{-1/2}}}^{h} M(f)L_f(1/2) \ll Kb(k).$$

Выбирая $b(k) = (\log k)^{-3/2}$ и применяя повторно неравенство Коши-Буняковского, приходим к

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} L_f(1/2)\delta_{L_f(1/2)\geq(\log k)^{-2}} \leq$$

$$\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sqrt{\sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} L_f^2(1/2)} \sqrt{\sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} \delta_{L_f(1/2)\geq(\log k)^{-2}}} \leq$$

$$\left(\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{f\in H_{4k}(1)}^{h} L_f^2(1/2)\right)^{1/2} \left(\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{\substack{f\in H_{4k}(1)\\ L_f(1/2)\geq(\log k)^{-2}}}^{h} 1\right)^{1/2}.$$

Следовательно, по леммам 5.8.4 и 5.8.6 мы $\Delta < 1 - \epsilon$ получаем оценку

$$\frac{4}{HK}\sum_k h\left(\frac{4k}{K}\right) \sum_{\substack{f\in H_{4k}(1)\\ L_f(1/2)\geq(\log k)^{-2}}}^{h} 1 \geq \frac{\left(\frac{4}{HK}A_1 - \frac{4}{HK}\widetilde{A}_1\right)^2}{\frac{4}{HK}A_2} \geq \frac{\Delta}{1+\Delta}. \tag{5.149}$$

□

5.8.6. Избавление от гармонического суммирования. Чтобы избавиться от гармонического суммирования в теореме 5.8.7 и тем самым доказать теорему 5.1.1 мы воспользуемся методами, разработанными Ковальским и Мишелем в работах [**62**], [**63**].

Лемма 5.8.9. *Пусть α_f последовательность комплексных чисел такая, что*

$$\sum_{f\in H_{2k}^h} |\alpha_f| \ll (\log k)^A, \quad \text{с некоторым} \quad A>0, \tag{5.150}$$

$$\max_{f\in H_{2k}} |\omega_f \alpha_f| \ll k^{-\delta}, \quad \text{для некоторого} \quad \delta>0. \tag{5.151}$$

Пусть $x=k^\epsilon$ и

$$\omega_f(x) := \sum_{n\leqslant x} \frac{\rho_f(n)}{n} = \sum_{dl^2\leqslant x} \frac{\lambda_f(d^2)}{dl^2}, \tag{5.152}$$

где величина $\rho_f(n)$ определена в (5.28)*. Тогда существует число $\kappa=\kappa(\epsilon,\delta)>0$ такое, что*

$$\sum_{f\in H_{2k}^h} \alpha_f = \frac{|H_{2k}|}{\zeta(2)} \sum_{f\in H_{2k}^h} \omega_f(x)\alpha_f + O(k^{1-\kappa}).$$

Доказательство. Из соотношения

$$|H_{2k}| = (2k-1)/12 + O(1),$$

формулы (5.31) и оценок Хоффстейна-Локарта [**40**] на $L(\mathrm{sym}^2 f,1)$ следует, что

$$\frac{1}{\omega_f} = \frac{L(\mathrm{sym}^2 f,1)}{\zeta(2)}|H_{2k}| + O((\log k)^3). \tag{5.153}$$

Используя (5.153) и (5.150), мы получаем

$$\sum_{f\in H_{2k}^h} \alpha_f = \sum_{f\in H_{2k}^h} \frac{\alpha_f}{\omega_f} = \frac{|H_{2k}|}{\zeta(2)} \sum_{f\in H_{2k}^h} \alpha_f L(\mathrm{sym}^2 f,1) + O(k^{1-\kappa}). \tag{5.154}$$

Нам осталось избавиться от $L(\mathrm{sym}^2 f,1)$. Оказывается, достаточно просто заменить $L(\mathrm{sym}^2 f,1)$ на короткий ряд Дирихле с коэффициентами $\omega_f(x)$ определенными в (5.152). Положим

$$\omega_f(x,y) := \sum_{x<n\leqslant y} \frac{\rho_f(n)}{n} = \sum_{x<dl^2\leqslant y} \frac{\lambda_f(d^2)}{dl^2}.$$

Из [**68**, леммы 2.3] следует, что при достаточно большом a (например, можно взять $a=10$) и $y=k^a$ справедлива следующая асимптотика

$$L(\mathrm{sym}^2 f,1) = \omega_f(x) + \omega_f(x,y) + O(k^{-1+\epsilon}). \tag{5.155}$$

Подставляя (5.155) в (5.154), мы получаем

$$\sum_{f\in H_{2k}^h} \alpha_f = \frac{|H_{2k}|}{\zeta(2)} \sum_{f\in H_{2k}^h} \alpha_f\omega_f(x) + \frac{|H_{2k}|}{\zeta(2)} \sum_{f\in H_{2k}^h} \alpha_f\omega_f(x,y) + O(k^{1-\kappa}).$$

Повторяя рассуждения из [**63**, предложение 2], применяя (5.150) и (5.151), и заменяя в рассуждениях [**63**, лемма 3] на ее аналог для форм большого веса [**68**, лемма 2.5], приходим к

$$\frac{|H_{2k}|}{\zeta(2)} \sum_{f \in H_{2k}}^{h} \alpha_f \omega_f(x,y) \ll k^{1-\kappa}.$$

Лемма доказана. □

Так как главный член в асимптотических формулах подкрученных моментов форм большого веса имеет ту же структуру что и для форм большого уровня, мы можем почти дословно повторять рассуждения из [**65**, пар. 5].

Теорема 5.8.10. *Для любого $\epsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\epsilon)$ такое, что для любого $k \geq k_0$ и $k \equiv 0 \pmod 2$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{|H_{2k}|} \sum_{\substack{f \in H_{2k} \\ L_f(1/2) \geq (\log k)^{-2}}} 1 \geq \frac{1}{5} - \epsilon.$$

Доказательство. Доказательство данного результата идейно очень близко к выводу теоремы 5.8.7 и точно так же основывается на асимптотических формулах для первого и второго сглаженных моментов. Применяя теоремы 5.3.1 и 5.6.4, лемму 5.8.9 и используя такой же сглаживающий множитель, как и в [**65**, пар. 5], мы при $\Delta < 1/4 - \epsilon$ получаем

$$\sum_{f \in H_{2k}} M(f) L_f(1/2) = 2\zeta(2)|H_{2k}| \left(1 + O(k^{-\epsilon_2})\right),$$

$$\sum_{f \in H_{2k}} M^2(f) L_f^2(1/2) = 2\zeta^2(2)|H_{2k}| \frac{\log k^2 + 2\log M}{\log M} \left(1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right).$$

Здесь, как и раньше, $M = k^{\Delta}$-длина сглаживающего множителя и $\epsilon, \epsilon_2 > 0$. Заметим, что мы можем применять к первому и второму сглаженным моментам лемму 5.8.9 только, если $\alpha_f = M(f)L_f(1/2)$ и $\alpha_f = M^2(f)L_f^2(1/2)$ удовлетворяют условиям (5.150), (5.151). Для того, чтобы проверить выполнимость условия (5.150) для случая первого момента, мы применяем неравенство Коши-Буняковского , оценку (5.141) и теорему 5.6.4. При рассмотрении второго момента мы рассуждаем так же как в лемме 5.8.5. Чтобы проверить выполнимость условия (5.151) мы используем оценку $L_f(1/2) \ll k^{1/3+\epsilon}$, доказанную Пенгом [**88**] (см. также работу Мотохаши и Ютилы [**56**]). Из этой оценки следует, что условие (5.151) выполнено при $\Delta < 1/3$.

□

5.9. Второй главный член в асимптотической формуле для второго подкрученного момента

В этом параграфе мы докажем (в предположении справедливости гипотезы 1) теорему 5.1.2 об отсутствии второго главного члена в асимптотической формуле для второго подкрученного момента при больших значениях параметра подкрутки. Для этого мы вычислим главные члены (5.15), (5.16) в точных формулах для сверток (5.66)-(5.68).

5.9.1. Вычисление главного члена для $E_2(l;0,0)$. Подставляя (5.79) в (5.67) и используя (5.24), мы получаем

$$E_2(l;u,v)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}(2\pi)^{2u}l^{u+v}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{-2u}(n)\sigma_{-2v}(n+l)\left(1+\frac{n}{l}\right)^{-1/2+u+v}I_1\left(1+\frac{n}{l}\right). \quad (5.156)$$

В предположении справедливости гипотезы 1 главный член $MT_2(l;u,v)$ суммы (5.156) равен (см. (5.11), (5.13),(5.14), (5.15))

$$MT_2(l;u,v)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}(2\pi)^{2u}l^{u+v}\int_0^{\infty}(1+x)^{-1/2+u+v}I_1(1+x)\mu_l(x;-2u,-2v)dx. \quad (5.157)$$

Пусть

$$Q_1(u,v)=\frac{\Gamma(1-2u)\cos(\pi u)}{(k-1+u-v)(k-u+v)}, \quad (5.158)$$

$$Q_2(u,v)=\Gamma(1+2u)\cos(\pi u)\frac{\Gamma(k-1-u-v)\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+1+u+v)\Gamma(k+u-v)}. \quad (5.159)$$

Лемма 5.9.1. *Справедливо следующее равенство*

$$\begin{aligned}MT_2(l;u,v)=\frac{2}{\sqrt{l}}(2\pi)^{2u}l^{u+v}\Bigg(&\sigma_{1-2u-2v}(l)\frac{\zeta(1-2u)\zeta(1-2v)}{\zeta(2-2u-2v)}Q_1(u,-v)+\\ &l^{-2u}\sigma_{1+2u-2v}(l)\frac{\zeta(1+2u)\zeta(1-2v)}{\zeta(2+2u-2v)}Q_2(u,-v)+\\ &l^{-2v}\sigma_{1-2u+2v}(l)\frac{\zeta(1-2u)\zeta(1+2v)}{\zeta(2-2u+2v)}Q_1(u,v)+\\ &l^{-2u-2v}\sigma_{1+2u+2v}(l)\frac{\zeta(1+2u)\zeta(1+2v)}{\zeta(2+2u+2v)}Q_2(u,v)\Bigg). \quad (5.160)\end{aligned}$$

Доказательство. Чтобы доказать утверждение леммы мы подставляем (5.80) и (5.17) в (5.157). В результате получаются четыре слагаемых, каждое из которых вычисляется схожим образом. Мы рассмотрим первое и второе слагаемое. Первое из них равно

$$\begin{aligned}\sigma_{1-2u-2v}(l)\frac{\zeta(1-2u)\zeta(1-2v)}{\zeta(2-2u-2v)}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\Gamma(k,u,v;s)\sin(\pi(u+s/2))\times\\ \int_0^{\infty}x^{-2u}(1+x)^{-1/2+u-v+s/2}dxds. \quad (5.161)\end{aligned}$$

Для вычисления интеграла по x воспользуемся (5.22), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\Gamma(k,u,v;s)\sin(\pi(u+s/2))\int_0^\infty x^{-2u}(1+x)^{-2v}(1+x)^{-1/2+u-v+s/2}dxds=$$
$$\frac{\Gamma(1-2u)}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\sin(\pi(u+s/2))\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}$$
$$\times\Gamma(1/2-u-v-s/2)\Gamma(-1/2+u+v-s/2)ds.$$

Сдвигая путь интегрирования влево и вычисляя вычеты в точках $s=1-2k-2j$, где $j=0,1,\ldots$, мы приходим к

$$2(-1)^k\Gamma(1-2u)\cos(\pi u)\sum_{j=0}^\infty\frac{\Gamma(k-u-v+j)\Gamma(k-1+u+v+j)}{\Gamma(2k+j)j!}=$$
$$2(-1)^k\Gamma(1-2u)\cos(\pi u)\frac{\Gamma(k-u-v)\Gamma(k-1+u+v)}{\Gamma(2k)}F(k-u-v,k-1+u+v,2k;1)=$$
$$\frac{2(-1)^k\Gamma(1-2u)\cos(\pi u)}{(k-1+u+v)(k-u-v)}=2(-1)^kQ_1(u,-v),\quad(5.162)$$

где для вычисления гипергеометрической функции мы воспользовались (5.21). Подставляя (5.162) в (5.161), мы получаем первое слагаемое из (5.160).

Теперь мы кратко опишем, как может быть получено второе слагаемое в (5.160). Для его вычисления необходимо сосчитать

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\Gamma(k,u,v;s)\sin(\pi(u+s/2))\int_0^\infty(1+x)^{-1/2+u-v+s/2}dxds.$$

Для вычисления интеграла по x мы воспользуемся (5.22). Следовательно, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\sin(\pi(u+s/2))\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u-v-s/2)\Gamma(-1/2-u+v-s/2)ds.$$

Сдвигая контур интегрирования влево и вычисляя вычеты в полюсах $s=1-2k-2j$, где $j=0,1,\ldots$, мы приходим к

$$2(-1)^k\cos(\pi u)\sum_{j=0}^\infty\frac{\Gamma(k-u-v+j)\Gamma(k-1-u+v+j)}{\Gamma(2k+j)j!}=$$
$$2(-1)^k\cos(\pi u)\frac{\Gamma(k-u-v)\Gamma(k-1-u+v)}{\Gamma(2k)}F(k-u-v,k-1-u+v,2k;1)=$$
$$2(-1)^k\Gamma(1+2u)\cos(\pi u)\frac{\Gamma(k-u-v)\Gamma(k-1-u+v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+1+u-v)}=2(-1)^kQ_2(u,-v),$$

где для вычисления гипергеометрической функции мы воспользовались (5.21). □

Наша следующая цель - вычисление $MT_2(l;0,0)$ с помощью (5.160). Для этого необходимо изучить свойства функций $Q_1(u,v)$ и $Q_2(u,v)$.

Лемма 5.9.2. *Справедливы следующие равенства*

$$Q_1(0,0) = Q_2(0,0) = \frac{1}{k(k-1)} := Q, \tag{5.163}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} Q_1(0,v)\Big|_{v=0} = \frac{\partial}{\partial v} Q_2(0,v)\Big|_{v=0} = Q^2, \tag{5.164}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} Q_1(u,0)\Big|_{u=0} = -2Q\psi(1) - Q^2 := Qq_1^u, \tag{5.165}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} Q_2(u,0)\Big|_{u=0} = Q\left(2\psi(1) - 4\psi(k) + Q\right) := Qq_2^u, \tag{5.166}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} Q_1(u,v)\Big|_{u,v=0} = -2\psi(2)Q^2 - 2Q^3 := Qq_1^{u,v}, \tag{5.167}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} Q_2(u,v)\Big|_{u,v=0} = Q^2\left(2\psi(1) - 4\psi(k) + Q\right) + Q^3\left(k^2 + (k-1)^2\right) =: Qq_2^{u,v}. \tag{5.168}$$

Доказательство. Из (5.158) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial v} Q_1(u,v) = \Gamma(1-2u)\cos(\pi u)\frac{1-2u+2v}{(k-1+u-v)^2(k-u+v)^2}, \tag{5.169}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} Q_1(u,0)\Big|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Gamma(1-2u)\cos(\pi u)}{(k-u)(k-1+u)}\right)\Big|_{u=0} = -2Q\psi(1) - Q^2.$$

Таким образом, (5.165) и часть (5.164) доказаны. Вычисляя производную от (5.169) по u, мы получаем (5.167).

Формула

$$\frac{\partial}{\partial u} Q_2(u,0)\Big|_{u=0} = Q\left(2\psi(1) - \psi(k-1) - \psi(k+1) - 2\psi(k)\right)$$

непосредственно следует из (5.159). Так как $\psi(k+1) + \psi(k-1) = 2\psi(k) - Q$ (см. (5.20)), то мы получаем (5.166).

Также из (5.159) следует

$$\frac{\partial}{\partial v} Q_2(u,v) = \Gamma(1+2u)\cos(\pi u)\frac{\Gamma(k-1-u-v)\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+1+u+v)\Gamma(k+u-v)}\times$$
$$\left(-\psi(k-1-u-v) + \psi(k-u+v) - \psi(k+1+u+v) + \psi(k+u-v)\right). \tag{5.170}$$

Полагая в правой части (5.170) $u = v = 0$, находим

$$\frac{\partial}{\partial v} Q_2(0,v)\Big|_{v=0} = Q\left(\psi(k) - \psi(k-1) - \left(\psi(k+1) - \psi(k)\right)\right).$$

Так как $\psi(z+1) - \psi(z) = 1/z$ (см. (5.20)), это завершает доказательство (5.164). Полагая $v = 0$ в (5.170) и вычисляя затем производную по u от (5.170), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} Q_2(u,v)\Big|_{u,v=0} = Q\left(\psi(k) - \psi(k-1) - \psi(k+1) + \psi(k)\right)\times$$
$$\left(2\psi(1) - \psi(k-1) - \psi(k+1) - 2\psi(k)\right) + Q\left(\psi'(k-1) - \psi'(k) - \psi'(k+1) + \psi'(k)\right).$$

Тем самым мы доказали (5.168), так как $\psi'(z+1)-\psi'(z)=-1/z^2$. □

Обозначим

$$D(u)=\frac{1}{\zeta(2+2u)}\left(\log\frac{d^2}{l}+2\gamma-2-2\frac{\zeta'(2+2u)}{\zeta(2+2u)}\right),$$

$$D_1=2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}, \tag{5.171}$$

$$D_2=-2D_1\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-4\left(\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)'. \tag{5.172}$$

Тогда

$$D(0)=\frac{1}{\zeta(2)}\left(\log\frac{d^2}{l}+D_1\right),\quad D'(0)=-\frac{2}{\zeta(2)}\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\log\frac{d^2}{l}+\frac{D_2}{\zeta(2)}. \tag{5.173}$$

Теперь все готово для того, чтобы вывести из (5.160) формулу для $MT_2(l;0,0)$

Теорема 5.9.3. *Справедливо следующее равенство*

$$MT_2(l;0,0)=\frac{2Q}{\zeta(2)\sqrt{l}}\sum_{d|l}d\log^2\frac{d^2}{l}+\frac{2Q}{\zeta(2)\sqrt{l}}\left(2D_1+2\psi(1)-2\psi(k)+2Q\right)\sum_{d|l}d\log\frac{d^2}{l}+$$
$$\frac{2Q}{\zeta(2)\sqrt{l}}\left(D_1(D_1+2\psi(1)-2\psi(k))-4\left(\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)'+\right.$$
$$\left.+Q\left(2D_1+\psi(1)+\psi(2)+1-2\psi(k)+2Q\right)\right)\sum_{d|l}d, \tag{5.174}$$

где $Q=1/(k^2-k)$, *а* D_1 *определено в* (5.171).

Доказательство. Сначала мы аналитически продолжим (5.160) в точку $v=0$. Для этого запишем (5.160) в виде

$$MT_2(l;u,v)=\frac{2}{\sqrt{l}}(2\pi)^{2u}l^u\zeta(1-2u)\sum_{d|l}d^{1-2u}\left(d^{2v}l^{-v}\frac{\zeta(1+2v)}{\zeta(2-2u+2v)}Q_1(u,v)+\right.$$
$$\left.d^{-2v}l^v\frac{\zeta(1-2v)}{\zeta(2-2u-2v)}Q_1(u,-v)\right)+\frac{2}{\sqrt{l}}(2\pi)^{2u}l^{-u}\zeta(1+2u)\times$$
$$\sum_{d|l}d^{1+2u}\left(d^{2v}l^{-v}\frac{\zeta(1+2v)}{\zeta(2+2u+2v)}Q_2(u,v)+d^{-2v}l^v\frac{\zeta(1-2v)}{\zeta(2+2u-2v)}Q_2(u,-v)\right).$$

Теперь нам необходимо вычислить пределы в точке $v=0$ от выражений в скобках в (5.9.1). Для этого мы используем разложение дзета-функции Римана в ряд Лорана

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+O(|s-1|), \tag{5.175}$$

см.[**86**, 25.2.4]. Вычислим предел от первой скобки из (5.9.1). Применяя (5.175), мы получаем, что этот предел равен

$$2\gamma\frac{Q_1(u,0)}{\zeta(2-2u)}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(\frac{d^2}{l}\right)^v\frac{Q_1(u,v)}{\zeta(2-2u+2v)}\right)\Big|_{v=0}= \\ Q_1(u,0)D(-u)+\frac{1}{\zeta(2-2u)}\frac{\partial}{\partial v}Q_1(u,v)\Big|_{v=0}. \quad (5.176)$$

Используя (5.9.1) и (5.176), мы приходим к

$$MT_2(l;u,0)=\frac{2}{\sqrt{l}}\sum_{d|l}d\Bigg[\\ \zeta(1+2u)\left(\frac{2\pi d}{\sqrt{l}}\right)^{2u}\left(Q_2(u,0)D(u)+\frac{1}{\zeta(2+2u)}\frac{\partial}{\partial v}Q_2(u,v)\Big|_{v=0}\right)+ \\ \zeta(1-2u)\left(\frac{2\pi\sqrt{l}}{d}\right)^{2u}\left(Q_1(u,0)D(-u)+\frac{1}{\zeta(2-2u)}\frac{\partial}{\partial v}Q_1(u,v)\Big|_{v=0}\right)\Bigg]. \quad (5.177)$$

Необходимо проверить голоморфность правой части (5.177) в точке $u=0$. Для этого достаточно доказать

$$Q_2(0,0)D(0)+\frac{1}{\zeta(2)}\frac{\partial}{\partial v}Q_2(0,v)\Big|_{v=0}=Q_1(0,0)D(0)+\frac{1}{\zeta(2)}\frac{\partial}{\partial v}Q_1(0,v)\Big|_{v=0}, \quad (5.178)$$

а это следует из (5.163) and (5.164). Применяя правило Лопиталя и (5.175), мы вычисляем предел от правой части (5.177) в точке $u=0$:

$$MT_2(l;0,0)=\frac{4\gamma}{\sqrt{l}}\sum_{d|l}d\left(Q_2(0,0)D(0)+\frac{1}{\zeta(2)}\frac{\partial}{\partial v}Q_2(0,v)\Big|_{v=0}\right)+ \\ \frac{2}{\sqrt{l}}\sum_{d|l}\frac{d}{2}\frac{\partial}{\partial u}\Bigg[\left(\frac{2\pi d}{\sqrt{l}}\right)^{2u}\left(Q_2(u,0)D(u)+\frac{1}{\zeta(2+2u)}\frac{\partial}{\partial v}Q_2(u,v)\Big|_{v=0}\right)- \\ \left(\frac{2\pi\sqrt{l}}{d}\right)^{2u}\left(Q_1(u,0)D(-u)+\frac{1}{\zeta(2-2u)}\frac{\partial}{\partial v}Q_1(u,v)\Big|_{v=0}\right)\Bigg]\Bigg|_{u=0}.$$

Вычисляя производные, применяя (5.178) и производя некоторые преобразования, мы получаем

$$MT_2(l;0,0)=\frac{2}{\sqrt{l}}\sum_{d|l}d\log\frac{d^2}{l}\left(Q_2(0,0)D(0)+\frac{1}{\zeta(2)}\frac{\partial}{\partial v}Q_2(0,v)\Big|_{v=0}\right)+$$
$$\frac{2}{\sqrt{l}}\sum_{d|l}dD(0)\left[2\gamma Q_2(0,0)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}Q_2(u,0)\Big|_{u=0}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}Q_1(u,0)\Big|_{u=0}\right]+$$
$$\frac{2}{\sqrt{l}}\sum_{d|l}dD'(0)\frac{Q_1(0,0)+Q_2(0,0)}{2}+\frac{2}{\sqrt{l}}\sum_{d|l}d\left[\frac{2\gamma}{\zeta(2)}\frac{\partial}{\partial v}Q_2(0,v)\Big|_{v=0}-\right.$$
$$\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}\frac{\partial}{\partial v}Q_2(0,v)\Big|_{v=0}+\frac{1}{2\zeta(2)}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}Q_2(u,v)\Big|_{v=0}-$$
$$\left.\frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}\frac{\partial}{\partial v}Q_1(0,v)\Big|_{v=0}-\frac{1}{2\zeta(2)}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}Q_1(u,v)\Big|_{v=0}\right].$$

Подставляя (5.173) и применяя (5.163), (5.164), получаем

$$MT_2(l;0,0)=\frac{2}{\sqrt{l}}\frac{Q_2(0,0)}{\zeta(2)}\sum_{d|l}d\log^2\frac{d^2}{l}+$$
$$\frac{2}{\sqrt{l}}\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|l}d\log\frac{d^2}{l}\left[Q_2(0,0)\left(D_1+2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)+\frac{\partial}{\partial v}Q_2(0,v)\Big|_{v=0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}Q_2(u,0)\Big|_{u=0}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}Q_1(u,0)\Big|_{u=0}\right]+\frac{2}{\sqrt{l}}\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|l}d\left[D_1\Big(2\gamma Q_2(0,0)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}Q_2(u,0)\Big|_{u=0}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}Q_1(u,0)\Big|_{u=0}\Big)+\right.$$
$$+D_2Q_2(0,0)+\left(2\gamma-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)\frac{\partial}{\partial v}Q_2(0,v)\Big|_{v=0}+$$
$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}Q_2(u,v)\Big|_{u=v=0}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}Q_1(u,v)\Big|_{u=v=0}\right].\quad(5.179)$$

Используя (5.164)-(5.168), приходим к

$$MT_2(l;0,0)=\frac{2}{\sqrt{l}}\frac{Q}{\zeta(2)}\sum_{d|l}d\log^2\frac{d^2}{l}+$$
$$\frac{2}{\sqrt{l}}\frac{Q}{\zeta(2)}\sum_{d|l}d\log\frac{d^2}{l}\left[2D_1+Q+\frac{1}{2}q_2^u-\frac{1}{2}q_1^u\right]+$$
$$\frac{2}{\sqrt{l}}\frac{Q}{\zeta(2)}\sum_{d|l}d\left[D_1\left(2\gamma+\frac{1}{2}q_2^u-\frac{1}{2}q_1^u\right)+D_2+D_1Q++\frac{1}{2}q_2^{u,v}-\frac{1}{2}q_1^{u,v}\right].$$

Подставляя (5.171),(5.172) и (5.165)-(5.168), мы получаем (5.174). □

5.9.2. Вычисление главного члена для $E_1(l;0,0)$. Подставляя (5.78) в (5.66) и используя (5.24), мы получаем

$$E_1(l;u,v)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}(2\pi)^{2u}l^{u+v}\sum_{n=1}^{l-1}\sigma_{-2v}(n)\sigma_{-2u}(l-n)\left(\frac{n}{l}\right)^{-1/2+u+v}I_1\left(\frac{n}{l}\right). \tag{5.180}$$

В предположении справедливости гипотезы 1 главный член $MT_1(l;u,v)$ суммы (5.180) равен (см. (5.12), (5.14), (5.16))

$$MT_1(l;u,v)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}(2\pi)^{2u}l^{u+v}\int_0^1 x^{-1/2+u+v}I_1(x)\rho_l(x;-2v,-2u)dx. \tag{5.181}$$

Определим

$$S_1(u,v)=-\frac{2\Gamma(1-2u)}{(k-1+u-v)(k-u+v)}\Big((-1)^k\cos(\pi u)+ \\ +\cos(\pi v)\frac{\Gamma(1+2v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(1-2u)\Gamma(k+u+v)}\Big), \tag{5.182}$$

$$S_2(u,v)=-2(-1)^k\Gamma(1+2u)\cos(\pi u)\frac{\Gamma(k-1-u-v)\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+1+u+v)\Gamma(k+u-v)}- \\ -2\Gamma(1+2v)\cos(\pi v)\frac{\Gamma(k-1-u-v)}{\Gamma(k+1+u+v)}. \tag{5.183}$$

Лемма 5.9.4. *Справедливо следующее равенство*

$$MT_1(l;u,v)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}(2\pi)^{2u}l^{u+v}\Bigg(\sigma_{1-2u-2v}(l)\frac{\zeta(1-2u)\zeta(1-2v)}{\zeta(2-2u-2v)}S_1(u,-v)+ \\ l^{-2v}\sigma_{1-2u+2v}(l)\frac{\zeta(1-2u)\zeta(1+2v)}{\zeta(2-2u+2v)}S_1(u,v)+ \\ l^{-2u}\sigma_{1+2u-2v}(l)\frac{\zeta(1+2u)\zeta(1-2v)}{\zeta(2+2u-2v)}S_2(u,-v)+ \\ l^{-2u-2v}\sigma_{1+2u+2v}(l)\frac{\zeta(1+2u)\zeta(1+2v)}{\zeta(2+2u+2v)}S_2(u,v)\Bigg). \tag{5.184}$$

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично лемме 5.9.1. Подставляя (5.80) и (5.18) в (5.181), мы получаем четыре слагаемых, которые вычисляются схожим образом. Мы рассмотрим первое и четвертое слагаемые. Первое слагаемое равно

$$\sigma_{1-2u-2v}(l)\frac{\zeta(1-2u)\zeta(1-2v)}{\zeta(2-2u-2v)}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\Gamma(k,u,v;s)\sin(\pi(u+s/2))\times \\ \int_0^1 x^{-1/2+u-v+s/2}(1-x)^{-2u}dxds. \tag{5.185}$$

Для вычисления интеграла по x мы используем (5.23)и получаем

$$\frac{\Gamma(1-2u)}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\sin(\pi(u+s/2))\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u-v-s/2)\times$$
$$\Gamma(1/2-u+v-s/2)\frac{\Gamma(1/2+u-v+s/2)}{\Gamma(3/2-u-v+s/2)}ds.$$

Сдвигая контур интегрирования влево и вычисляя вычеты в точках $s=1-2k-2j$, $s=-1-2u+2v-2j$ для $j=0,1,\ldots$, мы приходим к

$$2(-1)^k\Gamma(1-2u)\cos(\pi u)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-u+v+j)\Gamma(k-u-v+j)\Gamma(1-k+u-v-j)}{\Gamma(2k+j)\Gamma(2-k-u-v-j)j!}-$$
$$-2\Gamma(1-2u)\cos(\pi v)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-1-u+v-j)\Gamma(1-2v+j)\Gamma(1+j)}{\Gamma(k+1+u-v+j)\Gamma(1-2u-j)j!}. \quad (5.186)$$

Сначала мы рассмотрим первую сумму из (5.186). Дважды применяя (5.19), получаем, что она равна

$$2(-1)^k\Gamma(1-2u)\frac{\cos(\pi u)\sin\pi(u+v)}{\sin\pi(u-v)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-1+u+v+j)\Gamma(k-u-v+j)}{\Gamma(2k+j)j!}=$$
$$=2(-1)^k\Gamma(1-2u)\frac{\cos(\pi u)\sin\pi(u+v)}{\sin\pi(u-v)}\times$$
$$\frac{\Gamma(k-u-v)\Gamma(k-1+u+v)}{\Gamma(2k)}F(k-u-v,k-1+u+v,2k;1)=$$
$$=\frac{\cos(\pi u)\sin\pi(u+v)}{\sin\pi(u-v)}\frac{2(-1)^k\Gamma(1-2u)}{(k-1+u+v)(k-u-v)}, \quad (5.187)$$

где для вычисления гипергеометрической функции мы воспользовались (5.21).

Рассмотрим вторую сумму из (5.186). Дважды применяя (5.19), мы получаем, что она равна

$$-2(-1)^k\Gamma(1-2u)\frac{\cos(\pi v)\sin(2\pi u)}{\sin\pi(u-v)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-2v+j)\Gamma(2u+j)\Gamma(1+j)}{\Gamma(k+1+u-v+j)\Gamma(2-k+u-v+j)j!}=$$
$$=-2(-1)^k\Gamma(1-2u)\frac{\cos(\pi v)\sin(2\pi u)}{\sin\pi(u-v)}\frac{\Gamma(1-2v)\Gamma(2u)}{\Gamma(k+1+u-v)\Gamma(2-k+u-v)}\times$$
$${}_3F_2(1,1-2v,2u;k+1+u-v,2-k+u-v;1)=$$
$$-2\Gamma(1-2u)\cos(\pi v)\frac{\Gamma(k-1-u+v)\Gamma(1-2v)}{\Gamma(k+1+u-v)\Gamma(1-2u)}\times$$
$${}_3F_2(1,1-2v,2u;k+1+u-v,2-k+u-v;1). \quad (5.188)$$

Используя [**132**, p.451, f.27] (с $a = 1-2v, b = 2u, c = 2-k+u-v$), получаем

$$ {}_3F_2(1, 1-2v, 2u; k+1+u-v, 2-k+u-v; 1) = \frac{1}{(k-u-v)(k-1+u+v)} \times \\ \Big((k+u-v)(k-1-u+v) + \frac{\Gamma(k+1+u-v)\Gamma(2-k+u-v)}{\Gamma(1-2v)\Gamma(2u)}\Big). \quad (5.189) $$

Подставляя (5.189) в (5.188) и дважды применяя (5.19), мы находим, что вторая сумма из (5.186) равна

$$ \frac{-2\Gamma(1-2u)\cos(\pi v)}{(k-u-v)(k-1+u+v)}\Big(\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(1-2v)}{\Gamma(k+u-v)\Gamma(1-2u)} + (-1)^k \frac{\sin(2\pi u)}{\sin\pi(u-v)}\Big). \quad (5.190) $$

Складывая (5.187) и (5.190), получаем, что интеграл из (5.185) равен

$$ \frac{-2\Gamma(1-2u)}{(k-u-v)(k-1+u+v)}\Big(\cos(\pi v)\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(1-2v)}{\Gamma(k+u-v)\Gamma(1-2u)} + \\ + (-1)^k \frac{\sin(2\pi u)\cos(\pi v) - \cos(\pi u)\sin\pi(u+v)}{\sin\pi(u-v)}\Big) = S_1(u,-v), $$

и, следовательно, мы получаем первое слагаемое в (5.184).

Теперь мы кратко опишем как получается четвертое слагаемое в (5.184). В данном случаи необходимо вычислить

$$ \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \Gamma(k,u,v;s)\sin(\pi(u+s/2)) \int_0^1 x^{-1/2+u+v+s/2} dx ds = \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \sin(\pi(u+s/2))\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)} \times \\ \frac{\Gamma(1/2-u-v-s/2)\Gamma(1/2-u+v-s/2)}{1/2+u+v+s/2} ds. $$

Сдвигая контур интегрирования влево и вычисляя вычеты в точках $s = 1-2k-2j$ для $j = 0, 1, \ldots$ и $s = -1-2u-2v$, получаем

$$ -2\frac{\Gamma(k-1-u-v)}{\Gamma(k+1+u+v)}\Gamma(1+2v)\cos(\pi v) - \\ -2(-1)^k\cos(\pi u)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-u+v+j)\Gamma(k-1-u-v+j)}{\Gamma(2k+j)j!} = \\ -2\frac{\Gamma(k-1-u-v)}{\Gamma(k+1+u+v)}\Gamma(1+2v)\cos(\pi v) - \\ 2(-1)^k\cos(\pi u)\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-1-u-v)}{\Gamma(2k)}F(k-u+v, k-1-u-v, 2k; 1) = S_2(u,v), $$

где для вычисления гипергеометрической функции мы использовали (5.21). □

Чтобы вычислить $MT_1(l;0,0)$ мы воспользуемся (5.184). Для этого нам необходимо изучить свойства $S_1(u,v)$ и $S_2(u,v)$.

Лемма 5.9.5. *Справедливы следующие равенства*

$$S_1(0,0) = S_2(0,0) = -2\frac{1+(-1)^k}{k(k-1)} = -2(1+(-1)^k)Q, \tag{5.191}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}S_1(0,v)\Big|_{v=0} = \frac{\partial}{\partial v}S_2(0,v)\Big|_{v=0} = -4Q(\psi(1)-\psi(k)) - 2(1+(-1)^k)Q^2, \tag{5.192}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}S_1(u,0)\Big|_{u=0} = 4Q(\psi(k)+(-1)^k\psi(1)) + 2(1+(-1)^k)Q^2, \tag{5.193}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}S_2(u,0)\Big|_{u=0} = 4Q\psi(k) - 2(-1)^k\left(2\psi(1)-4\psi(k)\right)Q - 2(1+(-1)^k)Q^2, \tag{5.194}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}S_1(u,v)\Big|_{u,v=0} = 8\psi(k)\left(\psi(1)-\psi(k)\right)Q+ \\ + 4(1+(-1)^k)(1+\psi(1))Q^2 + 4(1+(-1)^k)Q^3, \tag{5.195}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}S_2(u,v)\Big|_{u,v=0} = 8\psi(k)\left(\psi(1)-\psi(k)\right)Q+ \\ + 4(1+(-1)^k)\left(2\psi(k)-1-\psi(1)\right)Q^2 - 4(1+(-1)^k)Q^3. \tag{5.196}$$

Доказательство. Равенство (5.191) непосредственно следует из (5.182) и (5.183). Так же из (5.182) и (5.183) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial v}S_1(u,v)\Big|_{v=0} = -2\Bigg(\frac{(1-2u)}{(k-u)^2(k-1+u)^2}\frac{\Gamma(k-u)}{\Gamma(k+u)}+ \\ \frac{2\psi(1)-\psi(k-u)-\psi(k+u)}{(k-u)(k-1+u)}\frac{\Gamma(k-u)}{\Gamma(k+u)} + \frac{(-1)^k\Gamma(2-2u)\cos(\pi u)}{(k-u)^2(k-1+u)^2}\Bigg), \tag{5.197}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}S_2(u,v)\Big|_{v=0} = -2(-1)^k\Gamma(1+2u)\cos(\pi u)\frac{\Gamma(k-1-u)\Gamma(k-u)}{\Gamma(k+1+u)\Gamma(k+u)}\times \\ \Big(\psi(k-u)-\psi(k-1-u)+\psi(k+u)-\psi(k+1+u)\Big)- \\ - 2\frac{\Gamma(k-1-u)}{\Gamma(k+1+u)}\Big(2\psi(1)-\psi(k-1-u)-\psi(k+1+u)\Big). \tag{5.198}$$

Подставляя $v=0$ в (5.197) и (5.198) и применяя в случае (5.198) соотношение

$$\psi(k-1)+\psi(k+1) = 2\psi(k) - Q, \tag{5.199}$$

которое следует из (5.20), мы получаем (5.192). Используя (5.199), получаем что (5.193) и (5.194) непосредственно следуют соответственно из (5.182) и (5.183). Более того, вычисляя производную от (5.197) мы получаем (5.195) .

Для доказательства (5.196) мы берем производную от (5.198) и получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}S_2(u,v)\Big|_{u,v=0} = -2Q\left(-\psi(k-1)-\psi(k+1)\right)\left(2\psi(1)-\psi(k-1)-\psi(k+1)\right)-$$
$$-2Q\left(\psi'(k-1)-\psi'(k+1)\right)\left(1+(-1)^k\right)-$$
$$-2(-1)^kQ\left[2\psi(1)-2\psi(k)-\psi(k-1)-\psi(k+1)\right]\left[2\psi(k)-\psi(k-1)-\psi(k+1)\right].$$

Применяя (5.199) и соотношение

$$\psi'(k-1)-\psi'(k+1)=\psi'(k)+\frac{1}{(k-1)^2}-\left[\psi'(k)-\frac{1}{k^2}\right]=2Q+Q^2,$$

мы получаем (5.196). □

Теорема 5.9.6. *Справедливо следующее равенство*

$$MT_1(l;0,0) = -(1+(-1)^k)\frac{2Q}{\zeta(2)\sqrt{l}}\sum_{d|l}d\log^2\frac{d^2}{l}-$$
$$-(1+(-1)^k)\frac{2Q}{\zeta(2)\sqrt{l}}\left(2D_1+2\psi(1)-2\psi(k)+2Q\right)\sum_{d|l}d\log\frac{d^2}{l}-$$
$$-(1+(-1)^k)\frac{2Q}{\zeta(2)\sqrt{l}}\left(D_1(D_1+2\psi(1)-2\psi(k))-4\left(\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)'+\right.$$
$$\left.+Q\left(2D_1+\psi(1)+\psi(2)+1-2\psi(k)+2Q\right)\right)\sum_{d|l}d, \quad (5.200)$$

где $Q=1/(k^2-k)$ *и* D_1 *определено в* (5.171).

Доказательство. Равенство (5.200) является следствием (5.184). Мы рассуждаем точно так же как и при доказательстве теоремы 5.9.3, повторяя все выкладки, которые производились при выводе (5.174) из (5.160). Чтобы получить аналитическое продолжение в точку $v=0$ при доказательстве теоремы 5.9.3 мы требовали справедливости тождество (5.178). Теперь необходимо, чтобы было верно аналогичное равенство

$$S_2(0,0)D(0)+\frac{1}{\zeta(2)}\frac{\partial}{\partial v}S_2(0,v)\Big|_{v=0}=S_1(0,0)D(0)+\frac{1}{\zeta(2)}\frac{\partial}{\partial v}S_1(0,v)\Big|_{v=0},$$

которое является следствием (5.191) и (5.192). В итоге, применяя (5.172), мы приходим к аналогу (5.179):

$$MT_1(l;0,0) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}\frac{S_2(0,0)}{\zeta(2)}\sum_{d|l} d\log^2\frac{d^2}{l} +$$
$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|l} d\log\frac{d^2}{l}\left[2D_1S_2(0,0) + \frac{\partial}{\partial v}S_2(0,v)\Big|_{v=0} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}S_2(u,0)\Big|_{u=0} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}S_1(u,0)\Big|_{u=0}\right] + \frac{(-1)^k}{\sqrt{l}}\frac{1}{\zeta(2)}\sum_{d|l} d\left[D_1\Big(D_1S_2(0,0) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}S_2(u,0)\Big|_{u=0} -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}S_1(u,0)\Big|_{u=0} + \frac{\partial}{\partial v}S_2(0,v)\Big|_{v=0}\Big) - 4\left(\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)' S_2(0,0) +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}S_2(u,v)\Big|_{u=v=0} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}S_1(u,v)\Big|_{u=v=0}\right].$$

Используя (5.192)-(5.196), мы получаем (5.200). Это завершает наше доказательство.

□

5.9.3. Доказательство теоремы 5.1.2. Из доказательства леммы 5.6.1 следует, что

$$E_3(l;0,0) + E_2(l;0,0) = (1+(-1)^k)E_2(l;0,0).$$

Соответственно,

$$MT_1(l;0,0) + MT_2(l;0,0) + MT_3(l;0,0) = MT_1(l;0,0) + (1+(-1)^k)MT_2(l;0,0).$$

Таким образом, теорема 5.1.2 следует из теорем 5.9.3 и 5.9.6.

ГЛАВА 6

Третий момент L-функций примитивных параболических форм большого веса.

Данная глава написана на основе работы [**34**].

6.1. Введение

Напомним, что в главе 5 мы доказали асимптотическую формулу (5.7) для второго момента (5.4) и с ее помощью получили результат о необнуляемости значений $L_f(1/2)$. В настоящей главе мы займемся изучением поведения третьего момента

$$\sum_{f\in H_{4k}} \omega_f L^3(f,1/2). \tag{6.1}$$

Ввиду наличия важных приложений, начиная со статьи Иванца и Конри [**22**], был написан целый ряд работ о третьих моментах автоморфных L-функций (см. Петров [**89**], Янг [**109**], Петров-Янг [**90, 91**]). Что касается именно третьего момента (6.1), то наилучший результат о его оценке принадлежит Пенгу [**88**], доказавшему оценку

$$\sum_{f\in H_{4k}} \omega_f L^3(f,1/2) \ll k^{\epsilon}. \tag{6.2}$$

Из формулы Вальдспургера [**107**] (см. также работу Конена-Загье [**61**]) следует, что $L(f,1/2)\geqslant 0$. Используя этот факт, а также оценку (см. [**53**, (2.9)]) $\omega_f \gg (\log k)^{-2}$, Пенг вывел из (6.2) следующую подвыпуклую оценку

$$L(f,1/2) \ll k^{1/3+\epsilon}. \tag{6.3}$$

Отметим, что из функционального уравнения (5.30) и теоремы Фрагмена-Линделефа следует $L(f,1/2)\ll k^{1/2+\epsilon}$.

Целью данной главы является уточнение оценки (6.2) и (6.3). К сожалению, мы не в состоянии не только получить асимптотическую формулу для данного момента, но и доказать правильную верхнюю оценку. Тем не менее даже из доказанной нами верхней оценки на третий момент удается получить новую оценку на рост значений $L_f(1/2)$ при весе k, стремящимся к бесконечности.

Чтобы улучшить оценку (6.2) и (6.3), мы рассмотрим следующий смещенный третий момент:

$$\mathcal{M}(u,v,\rho) := \sum_{f\in H_{2k}} \omega(f)L(f,1/2+u+v)L(f,1/2+u-v)L(f,1/2+\rho). \tag{6.4}$$

Введение параметров u, v и ρ обусловлено тем, что мы планируем сначала получить точную формулу для (6.4). Для вывода точной формулы мы собираемся использовать представление для L-функции в виде ряда, которое справедливо лишь при действительной части аргумента больше 1, а в конце применить принцип аналитического продолжения в точку $u = v = \rho = 0$. Этот подход кардинально отличается от метода, основанного на записи каждой L-функции с помощью приближенного функционального уравнения, который использовал Пенг.

Еще одним преимуществом введения параметров u, v и ρ является тот факт, что с помощью метода, разработанного Китингом-Конри-Рубинштеном-Снайс-Фармером [**21**] и основанного на моделировании поведения L-функций случайными матрицами, можно выписать явный вид главного члена в асимптотическом разложении для (6.4).

Гипотеза 2. *(следствие из* [**21**, гипотеза 4.5.2]*) Для любого* $\epsilon > 0$ *и* $k \equiv 0 \pmod 2$ *справедлива формула*

$$\mathcal{M}(0,0,0) = P_3(\log k) + O\left(\frac{k^\epsilon}{k^{1/2}}\right), \tag{6.5}$$

где $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *с коэффициентами*

$$a_3 = \frac{8}{3}, \quad a_2 = 16\gamma - 8\log(2\pi),$$

$$a_1 = 8\log^2(2\pi) - 32\gamma\log(2\pi) - 16\gamma_1 + 24\gamma^2$$

$$a_0 = -\frac{8}{3}\log^3(2\pi) + 16\gamma\log^2(2\pi) + (16\gamma_1 - 24\gamma^2)\log(2\pi) + 4\gamma_2 - 24\gamma\gamma_1 + 8\gamma^3.$$

Здесь $\gamma := \gamma_0$*, а* γ_i*-это коэффициенты разложения дзета-функции Римана* $\zeta(s)$ *в ряд Лорана в точке* $s = 1$ *(см.* [**86**, 25.2.4]*)*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n(s-1)^n,$$

Замечание 6.1.1. *Отметим, что изначально* [**21**, гипотеза 4.5.2] *формулируется для смещенного третьего момента. Вывод формулы* (6.5) *из* [**21**, гипотезы 4.5.2] *приведен в параграфе 6.2.*

Как уже отмечалось основным результатом данной главы является точная формула для третьего момента с явно выделенным главным членом $P_3(\log k)$, предсказанным гипотезой2. Остаток же представляет собой четвертый момент дзета-функции Римана с весовой функцией равной обобщенной гипергеометрической функции ${}_3F_2$.

Теорема 6.1.2. *Для любого $\epsilon > 0$ и $k \equiv 0 \pmod 2$ справедлива формула*

$$\mathcal{M}(0,0,0) = P_3(\log k) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} |\zeta(1/2+w)|^4 \hat{g}_1(k;w)dw + O\left(\frac{k^\epsilon}{k}\right), \tag{6.6}$$

$$\hat{g}_1(k;w) = \frac{2\pi^2 \sin(\pi w)}{\cos^2(\pi w)} {}_3F_2\left(1-k, k, 1/2+w; 1, 1; 1\right).$$

Замечание 6.1.3. *Мы также можем предъявить точное выражение для остаточного члена $O\left(k^{-1+\epsilon}\right)$ в формуле (6.6). В силу того, что данный остаток меньше предсказанного гипотезой (2) и с целью упрощения формулировки итогового результата мы не стали приводить очень громоздкое выражение этого остаточного члена.*

Используя теорему 6.1.2, асимптотическую формулу для четвертого момента дзета-функции Римана, а так же правильную по порядку оценку на функцию $\hat{g}_1(k;w)$, мы можем уточнить оценку k^ϵ в (6.2), заменив ее степенью логарифма $\log k$.

Теорема 6.1.4. *Справедлива следующая оценка*

$$\mathcal{M}(0,0,0) \ll \log^{9/2} k.$$

Следствие 6.1.5. *Имеет место следующая оценка*

$$L(f, 1/2) \ll k^{1/3} \log^{13/6} k.$$

Теорему 6.1.2 можно рассматривать как обращение точной формулы Мотохаши [**76**] для четвертого момента дзета-функции Римана, которая выражает данный момент через третьи моменты L-функций форм Маасса и примитивных параболических форм уровня один. Результат, аналогичный теореме 6.1.2, выражающий третий момент L-функций параболических форм уровня q и подкрученных квадратичным характером кондуктора q через четвертый момент L-функций Дирихле, был недавно получен Петровым [**89**, теорема 2]. Кроме того, содержание нынешней главы тесно связано с вычислениями так называемых смешанных моментов [**4**, теоремы 1.1 и 1.3] обычной L-функции и симметричной квадратичной L-функции. В обоих случаях все сводится к вычислению асимптотики очень похожих интегралов.

6.2. Гипотезы из теории случайных матриц

Напомним обозначение $\psi(s) := \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ и пусть

$$\mathcal{L}_k := 2\log(2\pi) - 2\psi(k) = 2\log(2\pi) - 2\log k + O(k^{-1}), \tag{6.7}$$

$$X_k(\alpha) := (2\pi)^{2\alpha}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+\alpha)}. \tag{6.8}$$

Легко видеть, что

$$X_k(0) = 1, \quad X_k(\alpha)X_k(-\alpha) = 1, \quad X_k'(0) = \mathcal{L}_k. \tag{6.9}$$

Также нам потребуется ввести следующий объект

$$A_3(z_1,z_2,z_3) := \prod_p \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\left(1-\frac{1}{p^{1+z_i+z_j}}\right) I_3(z_1,z_2,z_3;p),$$

где

$$I_3(z_1,z_2,z_3;p) := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\theta \prod_{j=1}^3 \frac{p^{1+2z_j}}{p^{1+2z_j}-2p^{1/2+z_j}\cos\theta+1}d\theta. \tag{6.10}$$

При $k \equiv 0 \pmod 2$ на основе теории случайных матриц можно предположить, что (см. [**21**, гипотеза 4.5.1])

$$\sum_{f\in H_{2k}} \omega(f)L(f,1/2+\alpha_1)L(f,1/2+\alpha_3)L(f,1/2+\alpha_3)$$
$$= 2MT_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) + O\left(\frac{k^\epsilon}{k^{1/2}}\right), \tag{6.11}$$

где

$$MT_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \prod_{j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{X_k(-\alpha_j)}} \sum_{\epsilon_j=\pm 1, \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3=1} \prod_{j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{X_k(\epsilon_j\alpha_j)}}$$
$$\times \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \zeta(1+\epsilon_i\alpha_i+\epsilon_j\alpha_j)A_3(\epsilon_1\alpha_1,\epsilon_2\alpha_2,\epsilon_3\alpha_3).$$

Отметим, что в (6.11) нам необходимо домножать $MT_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ на 2 , так как мы рассматриваем случай четного k. Из вычислений, приведенных на [**3**, стр.16] следует, что $A_3(z_1,z_2,z_3) = 1$. Таким образом, используя (6.9), мы получаем

$$MT_3(\alpha_1,\alpha_2,0) = \zeta(1+\alpha_2)\left(\zeta(1+\alpha_1)\zeta(1+\alpha_1+\alpha_2) + \frac{\zeta(1-\alpha_1)\zeta(1-\alpha_1+\alpha_2)}{X_k(-\alpha_1)}\right)$$
$$+ \zeta(1-\alpha_2)\left(\frac{\zeta(1+\alpha_1)\zeta(1+\alpha_1-\alpha_2)}{X_k(-\alpha_2)} + \frac{\zeta(1-\alpha_1)\zeta(1-\alpha_1-\alpha_2)}{X_k(-\alpha_1)X_k(-\alpha_2)}\right).$$

Устремляя α_2 к нулю, находим

$$MT_3(\alpha_1,0,0)=(2\gamma-X_k'(0))\zeta^2(1+\alpha_1)+\frac{2\gamma-X_k'(0)}{X_k(-\alpha_1)}\zeta^2(1-\alpha_1)$$
$$+2\zeta(1+\alpha_1)\zeta'(1+\alpha_1)+\frac{2\zeta(1-\alpha_1)\zeta'(1-\alpha_1)}{X_k(-\alpha_1)}. \quad (6.12)$$

Чтобы устремить α_1 к нулю, рассмотрим разложения в ряд Лорана (см. [**86**, 25.2.4])

$$\zeta(1+s)=\frac{1}{s}+\gamma-\gamma_1 s+\frac{\gamma_2}{2}s^2+O(|s|^3), \quad \zeta^2(1+s)=\frac{1}{s^2}+\frac{2\gamma}{s}+\gamma^2-2\gamma_1+O(|s|), \quad (6.13)$$

$$\zeta'(1+s)=-\frac{1}{s^2}-\gamma_1+\gamma_2 s+O(|s|^2),$$

$$\zeta(1+s)\zeta'(1+s)=-\frac{1}{s^3}-\frac{\gamma}{s^2}+\frac{\gamma_2}{2}-\gamma\gamma_1+O(|s|). \quad (6.14)$$

Используя (6.8) и (6.7), можно показать, что

$$X_k(\alpha)=1+\mathcal{L}_k\alpha+\frac{\mathcal{L}_k^2}{2}\alpha^2+\frac{\mathcal{L}_k^3-2\psi''(k)}{6}\alpha^3+O(|\alpha|^4) \quad (6.15)$$

Устремляя α_1 к нулю в (6.12) и применяя (6.13)–(6.15), получаем

$$MT_3(0,0,0)=-\frac{1}{6}\mathcal{L}_k^3+2\gamma\mathcal{L}_k^2+(4\gamma_1-6\gamma^2)\mathcal{L}_k+4\gamma^3+2\gamma_2-12\gamma\gamma_1-\frac{\psi''(k)}{3}. \quad (6.16)$$

Подставляя (6.16) в (6.11) и используя (6.7), мы приходим к (6.5).

6.3. Точная формула для второго момента

Напомним (см. теорему 5.4.2), что при $\Re v=0$, $\Im v\neq 0$, $|\Re u|<k-1$ справедливо тождество

$$M_2(l;u,v):=\sum_{f\in H_{2k}}\omega(f)\lambda_f(l)L_f(1/2+u+v)L_f(1/2+u-v)=$$
$$MT(l;u,v)+E_1(l;u,v)+E_2(l;u,v)+E_3(l;u,v), \quad (6.17)$$

где

$$MT(l;u,v)=\tau_v(l)\left(\frac{\zeta(1+2u)}{l^{1/2+u}}+\frac{(2\pi)^{4u}}{l^{1/2-u}}\zeta(1-2u)\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+u+v)\Gamma(k+u-v)}\right)+$$

$$(-1)^k\tau_u(l)\frac{\zeta(1+2v)}{(2\pi)^{-2u+2v}l^{1/2+v}}\frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)}+(-1)^k\tau_u(l)\frac{\zeta(1-2v)}{(2\pi)^{-2u-2v}l^{1/2-v}}\frac{\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+v+u)},$$

а $E_i(l;u,v)$ определены в (5.66)-(5.68). Отметим, что переходя к пределу при $u,v\to 0$, получаем

$$MT(l;0,0)=(1+(-1)^k)\frac{\tau(l)}{\sqrt{l}}\left(2\psi(k)-\log l-2\log(2\pi)+2\gamma\right). \quad (6.18)$$

Из (5.72) и [**86**, 15.8.1] следует, что

$$\psi_k(x;u,v) = 2(2\pi)^{2u}\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(2k)}\times$$
$$\sin(\pi(1/2+v))x^k(1+x)^{-k+v}{}_2F_1\left(\begin{matrix}k+u-v, k-u-v\\ 2k\end{matrix}; \frac{x}{1+x}\right). \quad (6.19)$$

Сопоставляя (6.19) с (5.71), приходим к соотношению

$$\psi_k(x;u,v) = \frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)}(2\pi)^{2u-2v}\Phi_k\left(\frac{x}{1+x};v,u\right). \quad (6.20)$$

Таким образом, используя (6.20), (5.67) и (5.68) заключаем, что

$$E_3(u,v,\rho) = (-1)^k\frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)}(2\pi)^{2u-2v}E_2(v,u,\rho). \quad (6.21)$$

В частности,

$$E_3(l;0,0) = (-1)^k E_2(l;0,0).$$

6.4. Специальные функции

Напомним, что преобразование Меллина функции $h(x)$ определяется следующим образом

$$\hat{h}(s) = \int_0^\infty h(x)x^{s-1}dx. \quad (6.22)$$

Для $0 \leqslant \Re u < k$, $\Re v = 0$ определим (см. (4.74), (4.19), мы решили изменить обозначение, чтобы иметь возможность указывать зависимость от u v)

$$I_k(u,v;x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u+v-s/2)$$
$$\times\,\Gamma(1/2-u-v-s/2)\sin(\pi(u+s/2))\,x^{s/2}ds, \quad (6.23)$$

с $1-2k < \Delta < 1-2\Re u$.

Лемма 6.4.1. *Пусть $\Re v = 0$, $0 \leqslant \Re u < k$, тогда при $0 < x < 1$ справедливо равенство*

$$\phi_k(x;u,v) = (2\pi)^{2u}x^{-1/2+u}(1-x)^{-u}I_k(u,v;x), \quad (6.24)$$

а при $x > 0$ справедливы равенства

$$\Phi_k(x;u,v) = (-1)^k(2\pi)^{2u}x^{1/2}(1-x)^{-u}I_k\left(u,v;\frac{1}{x}\right), \quad (6.25)$$

$$\psi_k(x;u,v) = (-1)^k(2\pi)^{2u}x^{1/2}(1+x)^{-1/2+v}I_k\left(v,u;\frac{1+x}{x}\right)\frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)}.$$

Доказательство. Равенство (6.24) было доказано нами в лемме 5.4.3. Отметим, что (6.24) можно доказать напрямую, сдвигая контур интегрирования в (6.23) вправо и вычисляя вычеты в полюсах $s = 1 - 2u \pm 2v + 2j$.

Чтобы доказать (6.25), мы сдвигаем линию интегрирования в (6.23) влево и вычисляем вычеты в точках $s = 1 - 2k - 2j$. Формула (5.72) получается сразу из (6.20) и (6.25). □

Лемма 6.4.2. *Пусть* $\Re v = 0$, $v \neq 0$ u $0 < \Re u < k - 1$, *тогда*

$$\phi_k(x;u,v) \sim 1 \quad при \quad x \to 0, \quad \phi_k(x;u,v) \sim (1-x)^{-\Re u} \quad при \quad x \to 1, \tag{6.26}$$

$$\Phi_k(x;u,v) \sim x^k \quad при \quad x \to 0, \quad \Phi_k(x;u,v) \sim (1-x)^{-\Re u} \quad при \quad x \to 1, \tag{6.27}$$

$$\psi_k(x;u,v) \sim x^k \quad при \quad x \to 0, \quad \psi_k(x;u,v) \sim 1 \quad при \quad x \to +\infty. \tag{6.28}$$

Доказательство. Из [**86**, 15.4.20] следует, что при $\Re(c-a-b) > 0$ и $x \to 1$ функция ${}_2F_1(a,b;c,x)$ ведет себя как константа. К тому же из рязложения гипергеометрической функции в ряд следует, что ${}_2F_1(a,b;c,x) \sim 1$ при $x \to 0$. Таким образом формула (6.26) сразу получается из (5.69) и (5.70), а формула (6.27) из (5.71). Первая часть (6.28) получается из (5.72), а вторая доказывается путем применения к (5.72) соотношения [**86**, 15.8.2].

□

В интервале $0 < x < \infty$ определим функцию

$$g_1(u,v,\rho,k;x) := \frac{x^{1/2+\rho/2}}{(1+x)^{1+\rho}} \phi_k\left(\frac{x}{1+x};u,v\right). \tag{6.29}$$

А в интервале $0 < x < 1$ определим функции

$$g_2(u,v,\rho,k;x) := \frac{x^{1/2+\rho/2}}{(1-x)^{1+\rho}} \Phi_k(1-x;u,v), \tag{6.30}$$

$$g_3(u,v,\rho,k;x) := \frac{x^{1/2+\rho/2}}{(1-x)^{1+\rho}} \psi_k\left(\frac{1-x}{x};u,v\right). \tag{6.31}$$

При $x > 1$ будем считать, что $g_i(u,v,\rho,k;x) := 0$ для $i = 2,3$. Отметим, что из (6.20) следует равенство

$$g_2(0,0,0,k;x) = g_3(0,0,0,k;x). \tag{6.32}$$

Для упрощения записи, мы чато будем использовать сокращенные обозначения, когда некоторые из переменных обращаются в ноль

$$\hat{g}_1(k;w) := \hat{g}_1(0,0,0,k;w),$$

$$\phi_k(x) := \lim_{\substack{u\to 0\\ v\to 0}} \phi_k(x;u,v).$$

6.4.1. Преобразование Меллина функций $g_i(u,v,\rho,k;x)$ с $i=2,3$.

Лемма 6.4.3. *При* $\Re v=0$, $0\leqslant\Re u<k$, $\Re\rho<k$ *и* $\Re w>-1/2-\Re\rho/2+\Re u$, *преобразование Меллина функции* (6.30) *может быть записано тремя разными способами:*

$$\hat g_2(u,v,\rho,k;w)=\int_0^1(1-x)^{w+\rho/2-1/2}x^{-1-\rho}\Phi_k\left(x;u,v\right)dx, \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}\hat g_2(u,v,\rho,k;w)=(2\pi)^{2u}\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}-u+w\right)\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\\ \times\Gamma\left(\frac{1-s}{2}-u+v\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}-u-v\right)\\ \times\frac{\sin\left(\pi(u+s/2)\right)\Gamma(1/2-\rho-s/2)}{\Gamma(1-\rho/2-u+w-s/2)}ds,\end{aligned} \tag{6.34}$$

где $1-2k<\Delta<\min(1-2\Re u,1-2\Re\rho)$,

$$\begin{aligned}\hat g_2(u,v,\rho,k;w)=2(2\pi)^{2u}\cos(\pi u)\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}-u+w\right)\\ \times\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(2k)\Gamma(k+1/2-\rho/2-u+w)}\\ \times{}_3F_2\left(k-u+v,k-u-v,k-\rho;2k,k+\frac{1-\rho}{2}-u+w;1\right).\end{aligned} \tag{6.35}$$

Доказательство. Равенство (6.33) непосредственно следует из (6.22) и (6.30). Отметим, что условия леммы и (6.27) обеспечивают абсолютную сходимость интеграла в (6.33). Чтобы доказать (6.34), подставим (6.25) в (6.33). Используя (6.23), получаем

$$\begin{aligned}\hat g_2(u,v,\rho,k;w)=(-1)^k(2\pi)^{2u}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u+v-s/2)\\ \times\Gamma(1/2-u-v-s/2)\sin\left(\pi(u+s/2)\right)\int_0^1(1-x)^{\rho/2+w-u-1/2}x^{-s/2-\rho-1/2}dxds,\end{aligned}$$

где $1-2k<\Delta<\min(1-2\Re u,1-2\Re\rho)$. Данный двойной интеграл в условиях леммы, а также при таких ограничениях на $\Re s$, сходится абсолютно. Применяя [**86**, (5.12.1)], мы приходим к (6.34).

Чтобы доказать (6.35), достаточно вычислить вычеты в точках $s=1-2k-2j$, $j=0,1,2,\ldots$, которые лежат слева от линии интегрирования в (6.34). □

Рассуждая аналогичным образом, мы получаем три выражения для $\hat g_3(u,v,\rho,k;w)$.

Лемма 6.4.4. *При* $\Re v=0$, $0\leqslant\Re u<k$, $\Re\rho<k$ *и* $\Re w>-1/2-\Re\rho/2$ *преобразование Меллина функции* (6.31) *может быть записано тремя разными способами:*

$$\hat g_3(u,v,\rho,k;w)=\int_0^1\frac{x^{w+\rho/2-1/2}}{(1-x)^{1+\rho}}\Psi_k\left((1-x)/x;u,v\right)dx, \tag{6.36}$$

$$\hat{3}_2(u,v,\rho,k;w)=\frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)}(2\pi)^{2u}\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}-v+w\right)\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}$$
$$\times\Gamma\left(\frac{1-s}{2}-v+u\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}-u-v\right)$$
$$\times\frac{\sin\left(\pi(v+s/2)\right)\Gamma(1/2-\rho-s/2)}{\Gamma(1-\rho/2-v+w-s/2)}ds, \quad (6.37)$$

где $1-2k<\Delta<\min(1-2\Re v,1-2\Re\rho)$,

$$\hat{g}_3(u,v,\rho,k;w)=2(2\pi)^{2u}\cos(\pi v)\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}-v+w\right)$$
$$\times\frac{\Gamma(k-u+v)\Gamma(k-u-v)\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(2k)\Gamma(k+1/2-\rho/2-v+w)}$$
$$\times{}_3F_2\left(k-v+u,k-u-v,k-\rho;2k,k+\frac{1-\rho}{2}-v+w;1\right). \quad (6.38)$$

Отметим, что из (6.20), (6.33) и (6.36) следует

$$\hat{g}_3(u,v,\rho,k;w)=\frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)}(2\pi)^{2u-2v}\hat{g}_2(v,u,\rho,k;w).$$

Таким образом, формулы (6.37) и (6.38) непосредственно следуют из (6.34) и (6.35), соответственно. Напомним (6.32), что $\hat{g}_2(0,0,0,k;w)=\hat{g}_3(0,0,0,k;w)$. Следовательно, нам достаточно оценить функцию $\hat{g}_2(0,0,0,k;w)$.

Лемма 6.4.5. *Для* $i=2,3$ *справедлива следующая оценка*

$$\hat{g}_i(0,0,0,k;1/2),\quad \frac{\partial}{\partial w}\hat{g}_i(0,0,0,k;w)\Big|_{w=1/2}\ll\frac{k^\epsilon}{k^2}. \quad (6.39)$$

Доказательство. Данное утверждение является аналогом [**4**, леммы 4.3] и доказывается схожим образом. Доказательство [**4**, леммы 4.3] существенным образом опирается на оценку [**4**, (4.11)]. В нашем случае аналог этой оценки следует из (5.133), (5.135) и теоремы 5.5.16

$$\Phi_k\left(\frac{1}{\cosh^2\sqrt{\xi}/2};0,0\right)\left(\xi\sinh^2\sqrt{\xi}\right)^{1/4}\ll\sqrt{\xi}K_0(u\sqrt{\xi}). \quad (6.40)$$

Применяя (6.40) и следуя схеме доказательства [**4**, леммы 4.3], получаем при $i=2,3$ю что

$$\hat{g}_i(0,0,0,k;1/2),\quad \frac{\partial}{\partial w}\hat{g}_i(0,0,0,k;w)\Big|_{w=1/2}\ll\frac{k^\epsilon}{k^2}.$$

□

Лемма 6.4.6. *Для* $i=2,3$ *справедлива следующая оценка*

$$\hat{g}_i(0,0,0,k;ir)\ll\frac{k^\epsilon}{k(1+|r|)^2}. \quad (6.41)$$

Доказательство. Доказательство данного утверждения аналогично [**4**, лемме 4.4]. Положим

$$T_k(x) := (1-x)^{1/2}\Phi_k\left(x;0,0\right),$$

тогда равенство (6.33) может быть записано в виде

$$\hat{g}_2(0,0,0,k;ir) = \int_0^1 \frac{(1-x)^{ir-1}}{x} T_k(x)dx.$$

Это равенство является аналогом [**4**, (4.15)]. Доказательство [**4**, леммы 4.4] базируется на интегрировании [**4**, (4.15)] по частям с применением дифференциального уравнения [**4**, (4.17)]. В нашем случае функция $T_k(x)$ удовлетворяет (см. лемму 5.5.15) дифференциальному уравнению

$$T_k''(x) - (u^2\alpha(x) + \beta(x))T_k(x) = 0, \tag{6.42}$$

где $u = k - 1/2$ и

$$\alpha(x) := \frac{1}{x^2(1-x)}, \quad \beta(x) := -\frac{1}{4x^2(1-x)^2} + \frac{1}{4x(1-x)}.$$

Это уравнение , с точностью до констант в функции $\beta(x)$, совпадает с [**4**, (4.17)]. Поэтому, повторяя вычисления из [**4**, леммы 4.4], мы получим (6.41). □

6.4.2. Преобразование Меллина функции $g_1(u,v,\rho,k;x)$.

Лемма 6.4.7. *При* $\Re v = 0$, $0 \leqslant \Re u < k$, $\Re\rho > \Re u - 1$ *и*

$$-1/2 - \Re\rho/2 < \Re w < 1/2 + \Re\rho/2 - \Re u$$

преобразование Меллина функции (6.29) *может быть записано двумя разными способами:*

$$\hat{g}_1(u,v,\rho,k;w) = \int_0^1 (x(1-x))^{\rho/2-1/2}\frac{x^w}{(1-x)^w}\phi_k\left(x;u,v\right)dx, \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(u,v,\rho,k;w) = (2\pi)^{2u}\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2} - u - w\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\\ \times\Gamma\left(\frac{1-s}{2} - u + v\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2} - u - v\right)\\ \times\sin\left(\pi(u+s/2)\right)\frac{\Gamma(\rho/2+u+w+s/2)}{\Gamma(1/2+\rho+s/2)}ds,\end{aligned} \tag{6.44}$$

где $\max(1-2k, -\Re(\rho+2u+2w)) < \Delta < 1 - 2\Re u$.

Доказательство. Формула (6.43) непосредственно получается из (6.22) и (6.29). Отметим, что условия леммы и (6.26) гарантируют абсолютную сходимость интеграла (6.43). Чтобы получить представление (6.44), мы подставляем (6.24) в (6.43) и, используя (6.23), находим

$$\hat{g}_1(u,v,\rho,k;w) = (2\pi)^{2u}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\Gamma(1/2-u+v-s/2)$$
$$\times\,\Gamma(1/2-u-v-s/2)\sin\left(\pi(u+s/2)\right)\int_0^1 x^{\rho/2+w+u+s/2-1}(1-x)^{\rho/2-w-u-1/2}dxds,$$

где $\max(1-2k,-\Re(\rho+2u+2w)) < \Delta < 1-2\Re u$. Отметим, что эти условия на $\Re s$ вместе с условиями леммы гарантируют абсолютную сходимость данного двойного интеграла. Применяя [**86**, 5.12.1] мы сразу получаем и (6.44). □

Лемма 6.4.8. *При $\Re v = 0$, $-1/2 < \Re u < k-1/2$ u*

$$\Re u - 1 < \Re\rho < k - \Re(u \pm u)$$

справедливо равенство

$$\hat{g}_1(u,v,\rho,k;-1/2+\rho/2\pm u) = 2(2\pi)^{2u}\frac{\Gamma(k-\rho-u\mp u)}{\Gamma(k+\rho+u\pm u)}$$
$$\times\,\Gamma(\rho+v\pm u)\Gamma(\rho-v\pm u)\cos(\pi(\rho\pm u)) + J_{\pm}(u,v,\rho,k), \quad (6.45)$$

где

$$J_{\pm}(u,v,\rho,k) = \Gamma(1-u\mp u)\frac{(2\pi)^{2u}}{2\pi i}\int_{(\Delta_1)}\frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\sin\left(\pi(u+s/2)\right)$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}-u+v\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}-u-v\right)\frac{\Gamma(-1/2+\rho+u\pm u+s/2)}{\Gamma(1/2+\rho+s/2)}ds, \quad (6.46)$$

а

$$\max(1-2k,-1-2\Re(\rho+u\pm u)) < \Delta_1 < \min(1-2\Re u, 1-2\Re(\rho+u\pm u)).$$

Более того справедливы оценки

$$J_{\pm}(0,0,0,k), \quad \frac{\partial}{\partial u}J_{\pm}(u,0,0,k)\Big|_{u=0} \ll \frac{k^{\epsilon}}{k}. \quad (6.47)$$

Доказательство. Сначала мы сдвигаем линию интегрирования в (6.44) влево на $\Re s = \Delta_1(w)$ так, что

$$\max(1-2k,-2-\Re(\rho+2u+2w)) < \Delta_1(w) < \min(1-2\Re u, -\Re(\rho+2u+2w)).$$

Так как при этом мы проходим полюс в точке $s=-\rho-2u-2w$, то вычисляя вычет в этой точке, мы получаем

$$\hat{g}_1(u,v,\rho,k;w)=2(2\pi)^{2u}\frac{\Gamma(k-1/2-\rho/2-u-w)}{\Gamma(k+1/2+\rho/2+u+w)}\times$$
$$\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}+v+w\right)\Gamma(\frac{1+\rho}{2}-v+w)\sin(\pi(-\rho/2-w))+J_0(u,v,\rho,k;w), \quad (6.48)$$

где $J_0(u,v,\rho,k;w)$-интеграл определенный в правой части (6.44), но с интегрированием по прямой $\Re s=\Delta_1(w)$. Теперь формула (6.45) следует непосредственно из (6.48). Подставляя $u=\rho=0$ в (6.46), выбирая $\Delta_1=0$ и совершая замену переменных $s=2ir$, мы получаем

$$J_{\pm}(0,0,0,k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(k-1/2+ir)}{\Gamma(k+1/2-ir)}\sin(\pi ir)\,\frac{\Gamma^2(1/2-ir)}{(-1/2+ir)}dr.$$

Оценивая Гамма-функции с помощью формулы Стирлинга [**86**, 5.11.9], приходим к оценке

$$J_{\pm}(0,0,0,k)\ll\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dr}{\sqrt{(k-1/2)^2+r^2}\sqrt{1/4+r^2}}\ll\frac{\log k}{k}. \quad (6.49)$$

Отметим, что при дифференцировании (6.46) по u мы получаем дополнительный множитель $\psi(\pm1/2+ir)$, который оценивается [**86**, 5.11.2] степенью $\log(1+|r|)$. Следовательно, рассуждая так же как при доказательстве (6.49) мы получим (6.47).

□

Лемма 6.4.9. *При $-1<\Re\rho<k$ справедливо равенство*

$$\frac{\partial}{\partial w}\hat{g}_1(0,0,\rho,k;w)\Big|_{w=-1/2+\rho/2}=2\frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)}\Gamma^2(\rho)\cos(\pi\rho)$$
$$\times(2\psi(\rho)-\psi(k+\rho)-\psi(k-\rho)-\pi\tan(\pi\rho))+J_1(\rho,k), \quad (6.50)$$

с функцией

$$J_1(\rho,k)=\frac{\partial}{\partial w}J_0(u,v,\rho,k;w)|_{w=-1/2+\rho/2},$$

удовлетворяющей оценке

$$J_1(\rho,k)\ll\frac{k^{\epsilon}}{k}. \quad (6.51)$$

Доказательство. Вычисляя производную от (6.48) по переменной w, мы сразу получаем (6.50). Оценка (6.51) доказывается так же как неравенство (6.47).

□

Лемма 6.4.10. *При $-1/2-\Re\rho/2<\Re w$, $\Re w_0<1/2+\Re\rho/2$ имеют место соотношения*

$$\hat{g}_1(0,0,\rho,k;w)=(-1)^k\hat{g}_1(0,0,\rho,k;-w), \quad (6.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\hat{g}_1(0,0,\rho,k;w)\Big|_{w=w_0} = -(-1)^k \frac{\partial}{\partial w}\hat{g}_1(0,0,\rho,k;w)\Big|_{w=-w_0}. \tag{6.53}$$

Доказательство. Совершая в (6.43) замену переменных $x = 1 - y$ и используя соотношение (5.85)

$$\phi_k(y) = (-1)^k \phi_k(1-y),$$

получаем

$$\hat{g}_1(0,0,\rho,k;w) = \int_0^1 (y(1-y))^{\rho/2-1/2} \frac{y^{-w}}{(1-y)^{-w}} (-1)^k \phi_k(y)\, dy$$
$$= (-1)^k \hat{g}_1(0,0,\rho,k;-w).$$

Таким образом равенство (6.52) доказано. Из (6.43) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial w}\hat{g}_1(0,0,\rho,k;w)\Big|_{w=w_0} = \int_0^1 (x(1-x))^{\rho/2-1/2} \frac{x^{w_0}}{(1-x)^{w_0}} \phi_k(x) \log\frac{x}{1-x} dx.$$

Рассуждая также как при доказательстве (6.52), мы получаем (6.53). □

Для упрощения обозначений введем следующее обозначение

$$\hat{g}_1(k;w) := \hat{g}_1(0,0,0,k;w)$$

Лемма 6.4.11. *При $\Re w = 0$ справедливы равенства*

$$\hat{g}_1(k;w) = \frac{2(-1)^k \sin(\pi w)\Gamma(1/2-w)\Gamma^3(1/2+w)}{\Gamma(k+1/2+w)\Gamma(3/2+w-k)}$$
$$\times {}_3F_2\left(\frac{1}{2}+w, \frac{1}{2}+w, \frac{1}{2}+w; k+\frac{1}{2}+w, \frac{3}{2}+w-k; 1\right), \tag{6.54}$$

$$\hat{g}_1(k;w) = \frac{2\pi^2 \sin(\pi w)}{\cos^2(\pi w)} {}_3F_2\left(1-k, k, 1/2+w; 1, 1; 1\right). \tag{6.55}$$

Доказательство. Используя (6.44) и [**86**, (5.5.3)], находим

$$\hat{g}_1(k;w) = \frac{\Gamma(1/2-w)}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Delta)} \frac{\Gamma(k-1/2+s/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)} \Gamma^3\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma(w+s/2)\sin(\pi s) ds,$$

с $0 < \Delta < 1$. Сдвигая контур интегрирования влево, вычисляя вычеты в полюсах $s = -2w-2j$ и $s = 1-2k-2j$, $j = 0, 1\ldots$, мы получаем (так как оказывается, что вычеты в точках $s = 1-2k-2j$ равны нулю)

$$\hat{g}_1(k;w) = -\frac{\Gamma(1/2-w)}{\pi} \sin(2\pi w) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\Gamma(k-1/2-w-j)}{\Gamma(k+1/2+w+j)} \Gamma^3(1/2+w+j).$$

Применяя [**86**, (5.5.3)], находим

$$\hat{g}_1(k;w)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{2(-1)^k\sin(\pi w)\Gamma\left(1/2-w\right)\Gamma^3\left(1/2+w+j\right)}{\Gamma(k+1/2+w+j)\Gamma(3/2-k+w+j)}=$$

$$\frac{2(-1)^k\sin(\pi w)\Gamma(1/2-w)\Gamma^3(1/2+w)}{\Gamma(k+1/2+w)\Gamma(3/2+w-k)}$$

$$\times\,{}_3F_2\left(\frac{1}{2}+w,\frac{1}{2}+w,\frac{1}{2}+w;k+\frac{1}{2}+w,\frac{3}{2}+w-k;1\right),$$

тем самым доказывая (6.54). Для доказательства (6.55) мы преобразуем гипергеометрическую функцию в (6.54) с помощью [**132**, (7.4.4.14)], а именно

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2}+w,\frac{1}{2}+w,\frac{1}{2}+w;k+\frac{1}{2}+w,\frac{3}{2}+w-k;1\right)=$$

$$\frac{\Gamma^2(1/2-w)\Gamma(k+1/2+w)}{\Gamma(k-1/2-w)}{}_3F_2\left(1-k,k,\frac{1}{2}+w;1,1;1\right). \quad (6.56)$$

Подставляя (6.56) в (6.54) и применяя [**86**, (5.5.3)], мы приходим к (6.55). □

Следующее утверждение является аналогом [**4**, леммы 4.8]

Лемма 6.4.12. *Существует константа $c_1>1$ такая, что для $|r|>c_1k$ и любого $A>0$ справедлива следующая оценка*

$$\hat{g}_1(k;ir)\ll\frac{1}{|r|^A}. \quad (6.57)$$

Доказательство. Применяя (6.55), мы получаем

$$\hat{g}_1(k;w)=\frac{2\pi^2\sin(\pi w)}{\cos^2(\pi w)\Gamma(1/2+w)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j\Gamma(k+j)}{\Gamma(k-j)\Gamma^2(j+1)}\frac{\Gamma(1/2+w+j)}{\Gamma(1+j)}.$$

Рассуждая также как в начале [**4**, леммы 4.8], мы сначала находим

$$\hat{g}_1(k;w)\ll\exp(-\pi|r|/2)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k+j)}{\Gamma(k-j)\Gamma^2(j+1)}.$$

Правая часть данной формулы практически идентична правой части формулы [**4**, (4.41)]. Используя оценку[**4**, (4.42)], мы доказываем (6.57). □

Следующее утверждение является аналогом [**4**, леммы 1.2] Введем следующее обозначение

$$\mathbf{k}:=2k-1.$$

Лемма 6.4.13. *Пусть $k\equiv 0\pmod 2$, а δ некая фиксированная константа такая, что $0<\delta<1/4$. Тогда при $\mathbf{k}^{1/2-\delta}<r\leqslant c_1k$ справедлива оценка*

$$\hat{g}_1(k;ir)\ll\frac{1}{\mathbf{k}^{5/6}}\min\left(1,\frac{\mathbf{k}^{1/12}}{|\mathbf{k}-4r|^{1/4}}\right)+\frac{k^{-1/4-3\delta}+k^{-1/2}}{r}. \quad (6.58)$$

Доказательство. Напомним, что

$$\phi_k(x) = (-1)^k \phi_k(1-x).$$

Так как $k \equiv 0 \pmod 2$, то из (6.43) следует, что

$$\hat{g}_1(k; ir) = \int_0^{1/2} (x(1-x))^{-1/2} \left(\frac{x^{ir}}{(1-x)^{ir}} + \frac{x^{-ir}}{(1-x)^{-ir}} \right) \phi_k(x)\, dx = 2\int_0^{1/2} (x(1-x))^{-1/2} \cos\left(r \log \frac{x}{1-x} \right) \phi_k(x)\, dx. \quad (6.59)$$

Аналогично тому, как было сделано в [**4**, лемме 4.9], мы аппроксимируем функцию $\phi_k(x)$ с помощью функций Бесселя. А именно, применяя теорему 5.5.14, получаем для $0 < \xi < \pi^2/4$ асимптотическую формулу

$$\phi_k(\sin^2 \frac{\sqrt{\xi}}{2}) = \frac{-2\pi \xi^{1/4}}{(\sin\sqrt{\xi})^{1/2}} Y_0((k-1/2)\sqrt{\xi}) + O\left(\frac{1}{k} \left| Y_0((k-1/2)\sqrt{\xi}) \right| \right). \quad (6.60)$$

Подставляя (6.60) в (6.59), находим

$$\hat{g}_1(k; ir) = -2^{7/2}\pi \int_0^{\pi/4} \cos(2r \log\tan x)\, Y_0(\mathbf{k}x) \frac{x^{1/2}}{\sqrt{\sin(2x)}} dx + O(k^{-3/2+\epsilon}).$$

Для некоего мало $\varepsilon > 0$ определим

$$\beta(x) = 1 \text{ for } 2\varepsilon \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon, \quad \beta(x) = 0 \text{ for } 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и $\beta(x) = \beta(\pi/2 - x)$, $\beta^{(j)}(x) \ll \varepsilon^{-j}$. Точно также как в [**4**, лемме 4.10] можно доказать, что

$$\hat{g}_1(k; ir) \ll \left| \int_0^{\pi/4} \beta(x) \cos(2r \log\tan x)\, Y_0(\mathbf{k}x) \frac{x^{1/2}}{\sqrt{\sin(2x)}} dx \right| + \frac{k^{-1+\epsilon} + k^{1/2}\varepsilon^{3/2}}{r} + k^{-3/2+\epsilon}. \quad (6.61)$$

Заменяя функции Бесселя в (6.61) их асимптотическим разложением [**35**, (8.451.2)] и рассуждая в духе [**4**, леммы 4.11], мы получаем

$$\hat{g}_1(k; ir) \ll \frac{1}{k^{1/2}} \left| \int_0^{\pi/4} \frac{\beta(x)}{(\sin(2x))^{1/2}} \cos(2r \log\tan x) \sin(\mathbf{k}x - \pi/4) dx \right| + \frac{k^{-1/4-3\delta} + k^{-1/2}}{r} + \frac{1}{k^{5/4-\delta}}. \quad (6.62)$$

Так как $k \equiv 0 \pmod 2$, то

$$\sin(\mathbf{k}(\pi/2 - x) - \pi/4) = -\sin(\mathbf{k}x + 3\pi/4) = \sin(\mathbf{k}x - \pi/4).$$

Следовательно, учитывая соотношение $\beta(x) = \beta(\pi/2 - x)$, приходим к

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\beta(x)}{(\sin(2x))^{1/2}} \cos(2r \log\tan x) \sin(\mathbf{k}x - \pi/4)dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\beta(x)}{(\sin(2x))^{1/2}} \cos(2r \log\tan x) \sin(\mathbf{k}x - \pi/4)dx. \quad (6.63)$$

Из (6.63) и (6.62) следует, что

$$\hat{g}_1(k; ir) \ll \frac{1}{k^{1/2}} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\beta(x)}{(\sin(2x))^{1/2}} \cos(2r \log\tan x) \sin(\mathbf{k}x - \pi/4)dx \right| + \frac{k^{-1/4-3\delta} + k^{-1/2}}{r} + \frac{1}{k^{5/4-\delta}}.$$

Таким образом,

$$\hat{g}_1(k; ir) \ll \frac{1}{k^{1/2}} \sum_{\pm} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\beta(x) \exp(ih_{\pm}(x))}{(\sin(2x))^{1/2}} dx \right| + \frac{k^{-1/4-3\delta} + k^{-1/2}}{r} + \frac{1}{k^{5/4-\delta}},$$

где

$$h_{\pm}(x) = \pm\mathbf{k}x + 2r \log(\tan x).$$

Полученный нами интеграл в точности совпадает с интегралом из [**4**, леммы 4.11]. Используя результаты вычислений из [**4**], мы завершаем доказательство леммы. □

6.5. Точная формула для третьего момента

В этом параграфе мы получим точную формулу для третьего момента

$$\sum_{f \in H_{2k}} \omega_f L(f, 1/2)^3.$$

Для этого мы сначала рассмотрим смещенный третий момент

$$\mathcal{M}(u, v, \rho) := \sum_{f \in H_{2k}} \omega_f L(f, 1/2 + u + v) L(f, 1/2 + u - v) L(f, 1/2 + \rho).$$

Для упрощения рассуждений, предположим, что $\Re v = 0$, $\Re\rho > 1 + \Re u$ и $0 < \Re u < k$. На первом шаге мы запишем $L(f, 1/2 + \rho)$ с помощью ряда (5.27) и сведем задачу к изучению подкрученного второго момента, для которого у нас уже есть точная формула (6.17) из теоремы 5.4.2. Рассуждая таким образом мы придем к следующей формуле

$$\mathcal{M}(u, v, \rho) = \mathcal{MT}_1(u, v, \rho) + \mathcal{ET}_1(u, v, \rho) + \mathcal{ET}_2(u, v, \rho) + \mathcal{ET}_3(u, v, \rho), \quad (6.64)$$

где

$$\mathcal{MT}_1(u, v, \rho) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{MT(l; u, v)}{l^{1/2+\rho}}, \quad \mathcal{ET}_i(u, v, \rho) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{E_i(l; u, v)}{l^{1/2+\rho}}, \quad (6.65)$$

при $i = 1, 2, 3$. Так как при $\Re\rho > 0$ выполнены равенства

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tau(l)}{l^{1+\rho}} = \zeta^2(1+\rho), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tau(l)\log l}{l^{1+\rho}} = -2\zeta(1+\rho)\zeta'(1+\rho),$$

то из (6.18) следует, что

$$\mathcal{MT}_1(0,0,\rho) = 2(1+(-1)^k)\left(\zeta^2(1+\rho)\left(\psi(k) - \log(2\pi) + \gamma\right) + \zeta(1+\rho)\zeta'(1+\rho)\right). \quad (6.66)$$

Отметим, что правая часть равенства (6.66) обладает полюсом третьего порядка в точке $\rho = 0$. А так как $\mathcal{M}(0,0,\rho)$ голоморфна в $\rho = 0$, то это означает, что часть главного члена содержится в слагаемых $\mathcal{ET}_i(u,v,\rho)$.

Поэтому ближайшие параграфы посвящены изучению $\mathcal{ET}_i(u,v,\rho)$. Сразу отметим, что из (6.21) следует

$$\mathcal{ET}_3(u,v,\rho) = (-1)^k \frac{\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+u-v)}(2\pi)^{2u-2v}\mathcal{ET}_2(v,u,\rho). \quad (6.67)$$

Результатом вычислений слагаемого $\mathcal{ET}_2(u,v,\rho)$ является лемма 6.5.5, в которой доказывается формула для $\mathcal{ET}_2(0,0,\rho)$ при условии $0 \leqslant \Re\rho < 1$, содержащая часть главного члена $\mathcal{M}(0,0,\rho)$. Аналогичная формула для $\mathcal{ET}_1(0,0,\rho)$ получена в лемме 6.5.11. С помощью этих двух лемм мы получаем итоговую формулу для $\mathcal{M}(0,0,\rho)$ (см. лемму 6.5.12). Устремляя ρ к нулю мы, в начале параграфа 6.5.4, получаем утверждение теоремы 6.1.2. Используя оценки (см. лемму 6.58) на $\hat{g}_1(k;ir)$, мы в итоге доказываем теорему 6.1.4.

6.5.1. Исследование $\mathcal{ET}_2(u,v,\rho)$.

Лемма 6.5.1. *При $\Re v = 0$, $v \neq 0$, $0 < \Re u < 1$, $\Re\rho > 1 + \Re u$ справедливо равенство*

$$\mathcal{ET}_2(u,v,\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \zeta\left(\frac{1+\rho}{2} + v - w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2} - v - w\right) \times \\ \zeta\left(\frac{1+\rho}{2} + u + w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2} - u + w\right)\hat{g}_2(u,v,\rho,k;w)dw, \quad (6.68)$$

с $1/2 - \Re\rho/2 + \Re u < \sigma < \Re\rho/2 - 1/2$.

Доказательство. Подставляя (5.67) в (6.65), приходим к

$$\mathcal{ET}_2(u,v,\rho) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{1+\rho}}\sum_{m=1}^{\infty}\tau_v(l+m)\tau_u(m)\Phi_k\left(\frac{l}{l+m};u,v\right). \quad (6.69)$$

Из (6.27) следует, что двойной ряд сходится абсолютно при $\Re\rho > \max(1, \Re u)$. Меняя порядки суммирования (6.72) и совершая замену переменных $l = n - m$, получаем

$$\mathcal{ET}_2(u,v,\rho) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\tau_v(n)\tau_u(m)}{(n-m)^{1+\rho}}\Phi_k\left(\frac{n-m}{n};u,v\right),$$

или (см. (6.30))

$$\mathcal{ET}_2(u,v,\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_v(n)\tau_u(m)}{(mn)^{1/2+\rho/2}}g_2(u,v,\rho,k;m/n).$$

Расписывая функцию $g_2(u,v,\rho,k;m/n)$ с помощью обратного преобразования Меллина и используя соотношение

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\tau_\alpha(l)}{l^s}=\zeta(s+\alpha)\zeta(s-\alpha), \tag{6.70}$$

справедливое $\Re(s\pm\alpha)>1$, мы доказываем (6.68). □

Определим

$$Z_2(u,v,\rho,k;w):=\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}+v-w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}-v-w\right)\times \\ \zeta\left(\frac{1+\rho}{2}+u+w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}-u+w\right)\hat{g}_2(u,v,\rho,k;w). \tag{6.71}$$

Лемма 6.5.2. *При $\Re v=0$, $v\neq 0$, $0<\Re u<1/2$, $0\leqslant\Re\rho<1-2\Re u$ справедлива следующая формула*

$$\mathcal{ET}_2(u,v,\rho)=\left(R_{2,1}+R_{2,2}-R_{2,3}-R_{2,4}\right)(u,v,\rho,k)+\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}Z_2(u,v,\rho,k;w)dw, \tag{6.72}$$

где

$$R_{2,1}(u,v,\rho,k)=\zeta(1-2u)\zeta(\rho+u+v)\zeta(\rho+u-v)\hat{g}_2(u,v,\rho,k;1/2-\rho/2-u), \tag{6.73}$$

$$R_{2,2}(u,v,\rho,k)=\zeta(1+2u)\zeta(\rho-u+v)\zeta(\rho-u-v)\hat{g}_2(u,v,\rho,k;1/2-\rho/2+u), \tag{6.74}$$

$$R_{2,3}(u,v,\rho,k)=-\zeta(1+2v)\zeta(\rho+u-v)\zeta(\rho-u-v)\hat{g}_2(u,v,\rho,k;-1/2+\rho/2-v), \tag{6.75}$$

$$R_{2,4}(u,v,\rho,k)=-\zeta(1-2v)\zeta(\rho+u+v)\zeta(\rho-u+v)\hat{g}_2(u,v,\rho,k;-1/2+\rho/2+v).$$

Доказательство. Пусть $\Re\rho>1+2\Re u$, тогда (6.68) мы можем выбрать $\sigma=0$. Подынтегральная функция $Z_2(u,v,\rho,k;w)$ в (6.68) обладает полюсами в точках

$$w_1=1/2-\rho/2-u,\quad w_2=1/2-\rho/2+u,\quad w_3=-1/2+\rho/2-v,\quad w_4=-1/2+\rho/2+v.$$

При этом полюса w_1 и w_2 расположена слева от прямой $\Re w=0$, а полюса w_3 и w_4 справа. Чтобы получить аналитическое продолжение функции $\mathcal{ET}_2(u,v,\rho)$ в область $0\leqslant\Re\rho<1-2\Re u$, мы воспользуемся [**20**, следствием 2.4.2, стр. 55] и получим для $0\leqslant\Re\rho<1-2\Re u$ следующую формулу

$$\mathcal{ET}_2(u,v,\rho)=\Bigg(\operatorname{res}_{w=w_1}Z_2(u,v,\rho,k;w)+\operatorname{res}_{w=w_2}Z_2(u,v,\rho,k;w)- \\ \operatorname{res}_{w=w_3}Z_2(u,v,\rho,k;w)-\operatorname{res}_{w=w_4}Z_2(u,v,\rho,k;w)\Bigg)+\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}Z_2(u,v,\rho,k;w)dw.$$

Вычисляя все вычеты, мы приходим к (6.72). □

Теперь нам необходимо получить аналитическое продолжение функции (6.72) в область, содержащую $u = v = 0$.

Лемма 6.5.3. *Справедливы следующие оценки*

$$R_{2,1}(0,0,0,k) + R_{2,2}(0,0,0,k) \ll \frac{k^{\epsilon}}{k^2}. \tag{6.76}$$

Доказательство. Сначала мы докажем, что сумма $R_{2,1}(u,v,\rho,k) + R_{2,2}(u,v,\rho,k)$ является аналитической функцией переменной u в точке $u = 0$. Используя (6.73), (6.74), (6.13) и правило Лопиталя, получаем

$$\begin{aligned}(R_{2,1}(u,v,\rho,k) + R_{2,2}(u,v,\rho,k))\Big|_{u=0} &= 2\gamma\zeta(\rho+v)\zeta(\rho-v)\hat{g}_2(0,v,\rho,k;1/2-\rho/2)+\\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\Bigg(&\zeta(\rho-u+v)\zeta(\rho-u-v)\hat{g}_2(u,v,\rho,k;1/2-\rho/2+u)-\\ &\zeta(\rho+u+v)\zeta(\rho+u-v)\hat{g}_2(u,v,\rho,k;1/2-\rho/2-u)\Bigg)\Bigg|_{u=0}.\end{aligned}$$

Вычисляя производные и применяя (6.39), мы приходим к (6.76). □

Лемма 6.5.4. *Имеет место следующее равенство*

$$\begin{aligned}R_{2,3}(0,0,\rho,k) + R_{2,4}(0,0,\rho,k) = &-\frac{(2\pi)^{2\rho}}{\cos^2(\pi\rho/2)}\frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)}\\ &\times\left(\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho) + \zeta^2(1-\rho)\left(\psi(k)+\gamma-\log(2\pi)-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi\rho}{2}\right)\right).\end{aligned} \tag{6.77}$$

Доказательство. Применяя (6.35) и [**86**, 15.4.20], находим

$$\begin{aligned}&\hat{g}_2(u,v,\rho,k;-1/2+\rho/2-v) =\\ &\qquad 2(2\pi)^{2u}\cos(\pi u)\Gamma(\rho-u-v)\Gamma(\rho+u-v)\frac{\Gamma(k-\rho)\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+\rho)\Gamma(k+u-v)},\end{aligned} \tag{6.78}$$

$$\begin{aligned}&\hat{g}_2(u,v,\rho,k;-1/2+\rho/2+v) =\\ &\qquad 2(2\pi)^{2u}\cos(\pi u)\Gamma(\rho-u+v)\Gamma(\rho+u+v)\frac{\Gamma(k-\rho)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+\rho)\Gamma(k+u+v)}.\end{aligned}$$

Используя [**86**, (5.5.3)], функциональное уравнение [**86**, (25.4.1)] для дзеты-функции Римана может быть записано в виде

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{(2\pi)^s}{2\cos(\pi s/2)}\zeta(1-s). \tag{6.79}$$

Подставляя (6.78) в (6.75) и применяя (6.79), мы приходим к равенству

$$R_{2,3}(u,v,\rho,k) = -\zeta(1+2v)\zeta(1-\rho-u+v)\zeta(1-\rho+u+v)\times \\ \frac{(2\pi)^{2\rho-2v+2u}\cos(\pi u)}{2\cos(\pi(\rho+u-v)/2)\cos(\pi(\rho-u-v)/2)}\frac{\Gamma(k-\rho)\Gamma(k-u+v)}{\Gamma(k+\rho)\Gamma(k+u-v)}.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$R_{2,4}(u,v,\rho,k) = -\zeta(1-2v)\zeta(1-\rho-u-v)\zeta(1-\rho+u-v)\times \\ \frac{(2\pi)^{2\rho+2v+2u}\cos(\pi u)}{2\cos(\pi(\rho+u+v)/2)\cos(\pi(\rho-u+v)/2)}\frac{\Gamma(k-\rho)\Gamma(k-u-v)}{\Gamma(k+\rho)\Gamma(k+u+v)}.$$

Обе функции $R_{2,3}$ и $R_{2,4}$ голоморфны в точке $u=0$. Следовательно, мы можем просто подставить $u=0$. После этого несложно увидеть, что сумма $R_{2,3}(0,v,\rho,k)+R_{2,4}(0,v,\rho,k)$ голоморфна и в точке $v=0$. Для этого достаточно воспользоваться (6.13) и правилом Лопиталя. Таким образом, мы получаем

$$R_{2,3}(0,0,\rho,k)+R_{2,4}(0,0,\rho,k) = -2\gamma\zeta^2(1-\rho)\frac{(2\pi)^{2\rho}}{2\cos^2(\pi\rho/2)}\frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)}- \\ \frac{(2\pi)^{2\rho}}{4}\frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)}\frac{\partial}{\partial v}\left(\zeta^2(1-\rho+v)\frac{(2\pi)^{-2v}}{\cos^2(\pi(\rho-v)/2)}\frac{\Gamma(k+v)}{\Gamma(k-v)}- \right. \\ \left.\zeta^2(1-\rho-v)\frac{(2\pi)^{2v}}{\cos^2(\pi(\rho+v)/2)}\frac{\Gamma(k-v)}{\Gamma(k+v)}\right)\Bigg|_{v=0}.$$

Вычисляя производную, мы приходим к (6.77). □

Подставляя (6.77) и (6.76) в (6.72), мы получаем следующую формулу для $\mathcal{ET}_2(0,0,\rho)$.

Лемма 6.5.5. *При $0 \leqslant \Re\rho < 1$ справедливо равенство*

$$\mathcal{ET}_2(0,0,\rho) = \frac{X_k(\rho)}{\cos^2(\pi\rho/2)}\left(\zeta^2(1-\rho)\left(\psi(k)+\gamma-\log(2\pi)-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi\rho}{2}\right)+ \right. \\ \left.+\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho)\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} Z_2(0,0,\rho,k;w)dw + O\left(\frac{k^\epsilon}{k^2}\right), \quad (6.80)$$

где $X_k(\rho)$ определены в (6.8)*, а $Z_2(0,0,\rho,k;w)$ задается* (6.71)*.*

6.5.2. Исследование $\mathcal{ET}_1(u,v,\rho)$.

Лемма 6.5.6. *При $\Re v = 0$, $v \neq 0$, $0 < \Re u < 1$, $\Re\rho > 1 + \Re u$ имеет место следующее интегральное представление*

$$\mathcal{ET}_1(u,v,\rho) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \zeta\left(\frac{1+\rho}{2}+v+w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}-v+w\right)\times \\ \zeta\left(\frac{1+\rho}{2}+u-w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}-u-w\right)\hat{g}_1(u,v,\rho,k;w)dw, \quad (6.81)$$

с $1/2 - \Re\rho/2 < \sigma < \Re\rho/2 - 1/2 - \Re u$.

Доказательство. Подставляя (5.66) в (6.65), мы получаем

$$\mathcal{ET}_1(u,v,\rho) = (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{1+\rho}} \sum_{n=1}^{l-1} \tau_v(n)\tau_u(l-n)\phi_k\left(\frac{n}{l};u,v\right). \tag{6.82}$$

Из (6.26) следует, что при $\Re\rho > \max(1,\Re u)$ данный двойной ряд сходится абсолютно. Изменяя порядки суммирования Changing в (6.84) и производя замену переменных $l = n+m$, мы приходим к соотношению

$$\mathcal{ET}_1(u,v,\rho) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_v(n)\tau_u(m)}{(n+m)^{1+\rho}} \phi_k\left(\frac{n}{n+m};u,v\right).$$

Используя обозначение (6.29), получаем

$$\mathcal{ET}_1(u,v,\rho) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_v(n)\tau_u(m)}{(mn)^{1/2+\rho/2}} g_1(u,v,\rho,k;n/m).$$

Представляя $g_1(u,v,\rho,k;m/n)$ с помощью обратного преобразования Меллина и применяя (6.70), мы доказываем (6.81).

□

Определим

$$Z_1(u,v,\rho,k;w) := \zeta\left(\frac{1+\rho}{2}+v+w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}-v+w\right)\times \\ \zeta\left(\frac{1+\rho}{2}+u-w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}-u-w\right)\hat{g}_1(u,v,\rho,k;w). \tag{6.83}$$

Лемма 6.5.7. *При* $\Re v = 0$ *,*$v \neq 0$*,* $0 < \Re u < 1/2$*,* $0 \leqslant \Re\rho < 1 - 2\Re u$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{ET}_1(u,v,\rho) = (-1)^k \left(R_{1,1}+R_{1,2}-R_{1,3}-R_{1,4}\right)(u,v,\rho,k)+ \\ \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{(0)} \zeta\left(\frac{1+\rho}{2}+v+w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}-v+w\right)\times \\ \zeta\left(\frac{1+\rho}{2}+u-w\right)\zeta\left(\frac{1+\rho}{2}-u-w\right)\hat{g}_1(u,v,\rho,k;w)dw, \tag{6.84}$$

где

$$R_{1,1}(u,v,\rho,k) = \zeta(1-2v)\zeta(\rho+u+v)\zeta(\rho-u+v)\hat{g}_1(u,v,\rho,k;1/2-\rho/2-v), \tag{6.85}$$

$$R_{1,2}(u,v,\rho,k) = \zeta(1+2v)\zeta(\rho+u-v)\zeta(\rho-u-v)\hat{g}_1(u,v,\rho,k;1/2-\rho/2+v), \tag{6.86}$$

$$R_{1,3}(u,v,\rho,k) = -\zeta(1-2u)\zeta(\rho+u+v)\zeta(\rho+u-v)\hat{g}_1(u,v,\rho,k;-1/2+\rho/2+u), \tag{6.87}$$

$$R_{1,4}(u,v,\rho,k) = -\zeta(1+2u)\zeta(\rho-u+v)\zeta(\rho-u-v)\hat{g}_1(u,v,\rho,k;-1/2+\rho/2-u). \tag{6.88}$$

Доказательство. Пусть $\Re\rho > 1 + 2\Re u$, тогда в (6.81) мы можем положить $\sigma = 0$. Подынтегральная (6.81) функция $Z_1(u, v, \rho, k; w)$ имеет полюса в точках

$$w_1 = 1/2 - \rho/2 - v, \quad w_2 = 1/2 - \rho/2 + v, \quad w_3 = -1/2 + \rho/2 + u, \quad w_4 = -1/2 + \rho/2 - u.$$

Чтобы получить аналитическое продолжение функции $\mathcal{ET}_1(u, v, \rho)$ в область $\Re\rho < 1 - 2\Re u$, мы воспользуемся [**20**, следствием 2.4.2, стр. 55]. Применяя данный результат, получаем что при $\Re\rho < 1 - 2\Re u$ выполнено

$$\mathcal{ET}_1(u, v, \rho) = (-1)^k \Bigg(\operatorname{res}_{w=w_1} Z_1(u, v, \rho, k; w) + \operatorname{res}_{w=w_2} Z_1(u, v, \rho, k; w) - \\ \operatorname{res}_{w=w_3} Z_1(u, v, \rho, k; w) - \operatorname{res}_{w=w_4} Z_1(u, v, \rho, k; w) \Bigg) + \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{(0)} Z_1(u, v, \rho, k; w) dw.$$

Вычисляя вычеты мы доказываем (6.84). □

Лемма 6.5.8. *Справедлива следующая формула*

$$- R_{1,3}(0, 0, \rho, k) - R_{1,4}(0, 0, \rho, k) = J_{3,4}(\rho, k) + \\ \frac{(2\pi)^{2\rho} \cos(\pi\rho)}{\cos^2(\pi\rho/2)} \frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)} \Bigg(\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho) + \\ \zeta^2(1-\rho) \left(\frac{\psi(k-\rho) + \psi(k+\rho)}{2} + \gamma - \log(2\pi) + \frac{\pi}{2}\tan(\pi\rho) - \frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi\rho}{2} \right) \Bigg), \quad (6.89)$$

где $J_{3,4}(\rho, k)$ некие функции, для которых справедлива оценка

$$J_{3,4}(0, k) \ll \frac{k^\epsilon}{k}. \quad (6.90)$$

Доказательство. Заметим, что мы можем сразу положить $v = 0$ в (6.87) и (6.88). Подставляя (6.45) в (6.87), (6.88) и применяя (6.79), мы получаем

$$-R_{1,3}(u, 0, \rho, k) - R_{1,4}(u, 0, \rho, k) = \quad (6.91)$$
$$= 2(2\pi)^{2\rho+4u} \frac{\Gamma(k-\rho-2u)}{\Gamma(k+\rho+2u)} \frac{\cos(\pi(\rho+u))}{4\cos^2(\pi(\rho+u)/2)} \zeta^2(1-\rho-u)\zeta(1-2u)$$
$$+2(2\pi)^{2\rho} \frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)} \frac{\cos(\pi(\rho-u))}{4\cos^2(\pi(\rho-u)/2)} \zeta^2(1-\rho+u)\zeta(1+2u)$$
$$+\zeta(1-2u)\zeta(\rho+u)\zeta(\rho+u)J_+(u, 0, \rho, k) + \zeta(1+2u)\zeta(\rho-u)\zeta(\rho-u)J_-(u, 0, \rho, k).$$

Чтобы доказать аналитичность (6.91) в точке $u = 0$, достаточно воспользоваться (6.13). Применяя правило Лопиталя для вычисления предела при $u \to 0$, мы приходим к

$$-R_{1,3}(0,0,\rho,k) - R_{1,4}(0,0,\rho,k) = \tag{6.92}$$
$$= 2(2\pi)^{2\rho}\frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)}\frac{\cos(\pi\rho)}{4\cos^2(\pi\rho/2)}\zeta^2(1-\rho)2\gamma + \gamma\zeta^2(\rho)(J_+ + J_-)(0,0,\rho,k) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial u}\Bigg((2\pi)^{2\rho}\frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)}\frac{\cos(\pi(\rho-u))}{4\cos^2(\pi(\rho-u)/2)}\zeta^2(1-\rho+u) -$$
$$-(2\pi)^{2\rho+4u}\frac{\Gamma(k-\rho-2u)}{\Gamma(k+\rho+2u)}\frac{\cos(\pi(\rho+u))}{4\cos^2(\pi(\rho+u)/2)}\zeta^2(1-\rho-u)\Bigg)\Bigg|_{u=0}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\Bigg(\zeta(\rho-u)\zeta(\rho-u)J_-(u,0,\rho,k) - \zeta(\rho+u)\zeta(\rho+u)J_+(u,0,\rho,k)\Bigg)\Bigg|_{u=0}.$$

Обозначим через $J_{3,4}(\rho,k)$. сумму всех слагаемых, содержащих $J_\pm$. Используя (6.47), мы сразу получаем оценку (6.90) на функцию $J_{3,4}(\rho,k)$. Вычисляя производную в (6.92), мы приходим к (6.89).

□

Лемма 6.5.9. *Справедлива следующая формула*

$$R_{1,1}(0,0,\rho,k) + R_{1,2}(0,0,\rho,k) = J_{1,2}(\rho,k) + 2(-1)^k\cos(\pi\rho)\Gamma^2(\rho)\frac{\Gamma(k-\rho)}{\Gamma(k+\rho)}\times$$
$$\times\Bigg(-2\zeta(\rho)\zeta'(\rho) + \zeta^2(\rho)\left(2\gamma + \psi(k-\rho) + \psi(k+\rho) - 2\psi(\rho) + \pi\tan(\pi\rho)\right)\Bigg), \tag{6.93}$$

где $J_{1,2}(\rho,k)$ некие функции, удовлетворяющие оценке

$$J_{1,2}(0,k) \ll \frac{k^\epsilon}{k}.$$

Доказательство. Заметим, что мы сразу можем положить $u = 0$ в (6.85) и (6.86). Чтобы доказать аналитичность $R_{1,1}(0,v,\rho,k) + R_{1,2}(0,v,\rho,k)$ в точке $v = 0$ достаточно воспользоваться (6.13), получая

$$R_{1,1}(0,v,\rho,k) + R_{1,2}(0,v,\rho,k) = 2\gamma\zeta^2(\rho)\hat{g}_1(0,0,\rho,k;1/2-\rho/2) +$$
$$+\lim_{v\to 0}\frac{1}{2v}\left(\zeta^2(\rho-v)\hat{g}_1(0,v,\rho,k;1/2-\rho/2+v) - \zeta^2(\rho+v)\hat{g}_1(0,v,\rho,k;1/2-\rho/2-v)\right).$$

Используя правило Лопиталя для вычисления пределов, а также формулы (6.52) , (6.53) мы приходим к

$$R_{1,1}(0,0,\rho,k)+R_{1,2}(0,0,\rho,k)=-(-1)^k\zeta^2(\rho)\frac{\partial}{\partial w}\hat{g}_1(0,0,\rho,k;w)\Big|_{w=-1/2+\rho/2}$$
$$+(-1)^k\left(2\gamma\zeta^2(\rho)-2\zeta(\rho)\zeta'(\rho)\right)\hat{g}_1(0,0,\rho,k;-1/2+\rho/2). \quad (6.94)$$

Подставляя (6.45) и (6.50) в (6.94), мы доказываем (6.93). □

Лемма 6.5.10. *Справедливо следующее соотношение*

$$\frac{(2\pi)^{2\rho}}{\cos^2(\pi\rho/2)}\Bigg(\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho)+\zeta^2(1-\rho)\Big(\frac{\psi(k-\rho)+\psi(k+\rho)}{2}$$
$$+\gamma-\log(2\pi)+\frac{\pi}{2}\tan(\pi\rho)-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi\rho}{2}\Big)\Bigg)=2(-1)^k\Gamma^2(\rho)\Bigg(-2\zeta(\rho)\zeta'(\rho)+$$
$$\zeta^2(\rho)\Big(2\gamma+\psi(k-\rho)+\psi(k+\rho)-2\psi(\rho)+\pi\tan(\pi\rho)\Big)\Bigg). \quad (6.95)$$

Доказательство. Для доказательства (6.95) мы воспользуемся функциональным уравнением [**86**, (25.4.1)] для дзета-функции Римана

$$\zeta(\rho)=2(2\pi)^{\rho-1}\sin(\pi\rho/2)\Gamma(1-\rho)\zeta(1-\rho). \quad (6.96)$$

Из (6.96) следует, что

$$\zeta'(\rho)=-2(2\pi)^{\rho-1}\sin(\pi\rho/2)\Gamma(1-\rho)\zeta'(1-\rho)+2(2\pi)^{\rho-1}\sin(\pi\rho/2)\times$$
$$\Gamma(1-\rho)\zeta(1-\rho)\left(\log(2\pi)+\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi\rho}{2}-\psi(1-\rho)\right). \quad (6.97)$$

Применяя (6.96) и (6.97), мы получаем, что правая часть (6.95) равна

$$16(-1)^k(2\pi)^{2\rho}\sin^2(\pi\rho/2)\Gamma^2(\rho)\Gamma^2(1-\rho)\Bigg(\zeta^2(1-\rho)\Big(\frac{\psi(k-\rho)+\psi(k+\rho)}{2}+$$
$$+\gamma-\log(2\pi)+\frac{\pi}{2}\tan(\pi\rho)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi\rho}{2}+\psi(1-\rho)-\psi(\rho)\Big)+\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho)\Bigg).$$

ИСпользуя [**86**, (5.5.3), (5.5.4)], находим что правая часть (6.95) равна

$$\frac{(-1)^k(2\pi)^{2\rho}}{\cos^2(\pi\rho/2)}\Bigg(\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho)+\zeta^2(1-\rho)\Big(\frac{\psi(k-\rho)+\psi(k+\rho)}{2}$$
$$+\gamma-\log(2\pi)+\frac{\pi}{2}\tan(\pi\rho)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi\rho}{2}+\frac{\pi}{\tan(\pi\rho)}\Big)\Bigg). \quad (6.98)$$

Так как

$$-\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi\rho}{2}+\frac{\pi}{\tan(\pi\rho)}=-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi\rho}{2},$$

то (6.98) совпадает с левой частью (6.95), что завершает доказательство утверждения.

□

Лемма 6.5.11. *При $0\leqslant\Re\rho<1$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\mathcal{ET}_1(0,0,\rho)=(1+(-1)^k)X_k(\rho)\frac{\cos(\pi\rho)}{\cos^2(\pi\rho/2)}\Bigg(\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho)+$$
$$\zeta^2(1-\rho)\left(\frac{\psi(k-\rho)+\psi(k+\rho)}{2}+\gamma-\log(2\pi)+\frac{\pi}{2}\tan(\pi\rho)-\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi\rho}{2}\right)\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}Z_1(0,0,\rho,k;w)dw+O(k^{-1+\epsilon}),\quad(6.99)$$

где $X_k(\rho)$ определено в (6.8)*, а $Z_1(0,0,\rho,k;w)$ в* (6.83)*.*

Доказательство. Вычисляя (6.84) с помощью (6.93) и (6.89) и применяя (6.95), приходим к (6.99). □

6.5.3. Точная формула для третьего момента.

Лемма 6.5.12. *Пусть $k\equiv 0\pmod 2$ и $0\leqslant\Re\rho<1$, тогда имеет место формула*

$$\mathcal{M}(0,0,\rho)=4\zeta^2(1+\rho)\left(\psi(k)-\log(2\pi)+\gamma\right)$$
$$+4\zeta(1+\rho)\zeta'(1+\rho)+4X_k(\rho)\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho)+2\zeta^2(1-\rho)X_k(\rho)\times$$
$$\times\left(2\gamma-2\log(2\pi)+\frac{2\psi(k)-\psi(k-\rho)-\psi(k+\rho)}{2\cos^2(\pi\rho/2)}+\psi(k-\rho)+\psi(k+\rho)\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}Z_1(0,0,\rho,k;w)dw+\frac{2}{2\pi i}\int_{(0)}Z_2(0,0,\rho,k;w)dw+O(k^{-1+\epsilon}),\quad(6.100)$$

где $X_k(\rho)$ определено в (6.8)*, а $Z_{1,2}(0,0,\rho,k;w)$ в* (6.83)*,* (6.71) *соответственно.*

Доказательство. Применяя (6.67), подставляя (6.66), (6.80), (6.99) в (6.64), мы после небольших упрощений приходим к (6.100). □

6.5.4. Доказательство теорем.

Доказательство теоремы 6.1.2. Из верхней оценки на четвертый момент дзета-функции Римана, впервые полученной еще Ингамом [**44**]

$$\int_T^{2T}|\zeta(1/2+ir)|^4dr\ll T\log^4 T,\quad(6.101)$$

определения (6.71) и оценки (6.41) следует, что

$$\frac{2}{2\pi i}\int_{(0)} Z_2(0,0,\rho,k;w)dw \ll k^{-1+\epsilon}.$$

Таким образом нам осталось показать, что при $\rho = 0$ главный член (6.100) совпадает с многочленом $P_3(\log k)$, определенным в гипотезе 2. Для этого мы разложим все слагаемые из (6.100) в ряды Лорана в точке $\rho = 0$. Используя (6.7), (6.13) и (6.14), находим

$$4\zeta^2(1+\rho)\left(\psi(k) - \log(2\pi) + \gamma\right) + 4\zeta(1+\rho)\zeta'(1+\rho) = \tag{6.102}$$
$$= -\frac{4}{\rho^3} - \frac{2\mathcal{L}_k}{\rho^2} + \frac{8\gamma^2 - 4\gamma\mathcal{L}_k}{\rho} + 4\gamma^3 + 2\gamma_2 - 12\gamma\gamma_1 - (2\gamma^2 - 4\gamma_1)\mathcal{L}_k + O(|\rho|).$$

Из (6.15) и (6.14) следует, что

$$4X_k(\rho)\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho) = \frac{4}{\rho^3} + \frac{4\mathcal{L}_k - 4\gamma}{\rho^2} + \frac{2\mathcal{L}_k^2 - 4\gamma\mathcal{L}_k}{\rho} +$$
$$+ 2\gamma_2 - 4\gamma\gamma_1 - 2\gamma\mathcal{L}_k^2 + \frac{2}{3}\mathcal{L}_k^3 - \frac{4}{3}\psi''(k) + O(|\rho|). \tag{6.103}$$

Применяя (6.15) и (6.13), получаем

$$\zeta^2(1-\rho)X_k(\rho) = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\mathcal{L}_k - 2\gamma}{\rho} + \gamma^2 - 2\gamma_1 - 2\gamma\mathcal{L}_k + \mathcal{L}_k^2/2 + O(|\rho|). \tag{6.104}$$

Заметим, что

$$\psi(k-\rho) + \psi(k+\rho) = 2\psi(k) + \psi''(k)\rho^2 + O(|\rho|^3), \tag{6.105}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\pi\rho/2)} = 1 + \frac{\pi^2\rho^2}{4} + O(|\rho|^4).$$

Используя (6.105) и (6.15), приходим к соотношению

$$X_k(\rho)\frac{2\psi(k) - \psi(k-\rho) - \psi(k+\rho)}{\cos^2(\pi\rho/2)} = -\psi''(k)\rho^2 + O(|\rho|^3).$$

Таким образом, из (6.13) следует, что

$$\zeta^2(1-\rho)X_k(\rho)\frac{2\psi(k) - \psi(k-\rho) - \psi(k+\rho)}{\cos^2(\pi\rho/2)} = -\psi''(k) + O(|\rho|). \tag{6.106}$$

Применяя (6.13), (6.15) и (6.105), получаем

$$2\zeta^2(1-\rho)X_k(\rho)(\psi(k-\rho) + \psi(k+\rho)) = \frac{4\psi(k)}{\rho^2} + 4\psi(k)\frac{\mathcal{L}_k - 2\gamma}{\rho} +$$
$$4\psi(k)(\gamma^2 - 2\gamma_1 - 2\gamma\mathcal{L}_k + \mathcal{L}_k^2/2) + 2\psi''(k) + O(|\rho|). \tag{6.107}$$

Используя (6.103), (6.104), (6.106), (6.107) находим

$$4X_k(\rho)\zeta(1-\rho)\zeta'(1-\rho)+2\zeta^2(1-\rho)X_k(\rho)\Bigg(2\gamma-2\log(2\pi)+$$
$$+\frac{2\psi(k)-\psi(k-\rho)-\psi(k+\rho)}{2\cos^2(\pi\rho/2)}+\psi(k-\rho)+\psi(k+\rho)\Bigg)=$$
$$=\frac{4}{\rho^3}+\frac{2\mathcal{L}_k}{\rho^2}+\frac{4\gamma\mathcal{L}_k-8\gamma^2}{\rho}-\frac{\mathcal{L}_k^3}{3}+4\gamma\mathcal{L}_k^2+(4\gamma_1-10\gamma^2)\mathcal{L}_k+$$
$$+4\gamma^3+2\gamma_2-12\gamma\gamma_1-\frac{7}{3}\psi''(k)+O(|\rho|). \quad (6.108)$$

Подставляя (6.102) и (6.108) в (6.100), мы получаем, что правая часть (6.100) аналитична в точке $\rho=0$ и

$$\mathcal{M}(0,0,0)=-\frac{\mathcal{L}_k^3}{3}+4\gamma\mathcal{L}_k^2+(8\gamma_1-12\gamma^2)\mathcal{L}_k+8\gamma^3+4\gamma_2-24\gamma\gamma_1+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}Z_1(0,0,0,k;w)dw+O(k^{-1+\epsilon}). \quad (6.109)$$

Это доказывает, что главный член в (6.109) совпадает с предполагаемым главным членом (см. (6.11) и (6.16)). Таким образом, применяя (6.7), мы получаем

$$\mathcal{M}(0,0,0)=P_3(\log k)+\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}Z_1(0,0,0,k;w)dw+O(k^{-1+\epsilon}).$$

Вспоминая определение (6.83) функции $Z_1(0,0,0,k;w)$, а также (6.55), мы завершаем доказательство теоремы 6.1.2.

□

Доказательство теоремы 6.1.4. Из теоремы 6.1.2 а также оценок (6.57)–(6.58) следует, что для доказательства теоремы 6.1.4 достаточно показать, что

$$\frac{1}{\mathbf{k}^{5/6}}\int_{k^{1/2-\delta}}^{c_1k}|\zeta(1/2+ir)|^4\min\left(1,\frac{\mathbf{k}^{1/12}}{|\mathbf{k}-4r|^{1/4}}\right)dr\ll\log^{9/2}k.$$

Раскрывая минимум, приходим к необходимости проверить неравенство

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{|\zeta(1/2+ir)|^4}{\mathbf{k}^{3/4}|\mathbf{k}-4r|^{1/4}}dr+\int_{r_2}^{r_3}|\zeta(1/2+ir)|^4\frac{dr}{\mathbf{k}^{5/6}}+\int_{r_3}^{r_4}\frac{|\zeta(1/2+ir)|^4}{\mathbf{k}^{3/4}|\mathbf{k}-4r|^{1/4}}dr\ll\log^{9/2}k, \quad (6.110)$$

с $r_1=\mathbf{k}^{1/2-\delta}$, $r_2=\mathbf{k}/4-\mathbf{k}^{1/3}$, $r_3=\mathbf{k}/4+\mathbf{k}^{1/3}$, $r_4=c_1k$. Для получения оценки второго интеграла мы воспользуемся оценкой четвертого момента дзета-функции Римана на коротком интервале

$$\int_T^{T+T_0}|\zeta(1/2+ir)|^4dr\ll T_0T^{\epsilon}, \quad (6.111)$$

доказанной Иванцом [**49**] при условии $T_0 \gg T^{2/3}$. Отметим, что при $T_0 \gg T^{2/3+\epsilon}$, справедлива оценка

$$\int_T^{T+T_0} |\zeta(1/2+ir)|^4 dr \ll T_0 \log^4 T, \tag{6.112}$$

которая является прямым следствием асимптотической формулы для четвертого момента дзета-функции Римана, полученной Заворотным [**123**] (см. также несколько улучшенный результат Ивича-Мотохаши [**48**]). Первый и третий интегралы из (6.110) оцениваются аналогичным способом. Таким образом, нам остается доказать неравенство

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{|\zeta(1/2+ir)|^4}{\mathbf{k}^{3/4}|\mathbf{k}-4r|^{1/4}} dr \ll \log^{9/2} k. \tag{6.113}$$

Для этого мы сначала применим неравенство Коши-Буняковского и оценку (6.101), получая

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{|\zeta(1/2+ir)|^4}{\mathbf{k}^{3/4}|\mathbf{k}-4r|^{1/4}} dr \ll \frac{\log^2 k}{k^{1/4}} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{|\zeta(1/2+ir)|^4}{|\mathbf{k}-4r|^{1/2}} dr \right)^{1/2}. \tag{6.114}$$

Разбивая интеграл на диадические промежутки и применяя (6.111)– (6.112), приходим к оценке

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{|\zeta(1/2+ir)|^4}{|\mathbf{k}-4r|^{1/2}} dr \ll k^{1/2} \log^5 k. \tag{6.115}$$

Подставляя (6.115) в (6.114), мы доказываем (6.113). □

Список литературы

[1] A. Akbary, *Non-vanishing of weight k modular L-functions with large level*, J. Ramanujan Math. Soc. 14:1, (1999), 37-54.

[2] F.V. Atkinson, *The mean value of the zeta-function on the critical line*, Proc. London Math. Soc. (2) 47 (1941), 174–200.

[3] O. Balkanova, *The fourth moment of automorphic L-functions of prime power level*, PhD thesis, Université de Bordeaux, 2015.

[4] O. Balkanova, G. Bhowmik, D. Frolenkov, N. Raulf, *Mixed moment of $GL(2)$ and $GL(3)$ L-functions*, Proc. London Math. Soc. (3), 121:2 (2020), 177–219.

[5] O. Balkanova and D. Frolenkov, *The first moment of cusp form L-functions in weight aspect on average*, Acta Arith. 181 (2017) , 197–208.

[6] O. Balkanova and D. Frolenkov, *Non-vanishing of automorphic L-functions of prime power level*, Monatsh. Math. 185:1 (2018), 17–41.

[7] O. Balkanova, D. Frolenkov, *Moments of L-functions and the Liouville-Green method*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 23:4 (2021), 1333–1380.

[8] O. Balkanova, B. Huang, and A. Södergren, *Non-vanishing of Maass form L-functions at the central point*, Proc. Amer. Math. Soc., 149(2):509–523, 2021.

[9] P. Baratella, L. Gatteschi, *The bounds for the error term of an asymptotic approximation of Jacobi polynomials*, in: Orthogonal Polynomials and Their Applications (Segovia, 1986), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1329, Springer, Berlin, New York, 1988, 203–221.

[10] H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.

[11] H. Bateman, A. Erdélyi, *Tables of integral transforms*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.

[12] S. Bettin, *The first moment of twisted Hecke L-functions with unbounded shifts*, Funct. Approx. Comment. Math. 57 (1), (2017), 105 - 114.

[13] V. Blomer, *Sums of Hecke eigenvalues over values of quadratic polynomials*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008 (2008), no. 16, 1–29.

[14] V. Blomer, G. Harcos, and P. Michel, *Bounds for modular L-functions in the level aspect*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) ґ , 40(5):697–740, 2007.

[15] A.R. Booker, A. Strömbergsson, H. Then, *Bounds and algorithms for the K - Bessel function of imaginary order*, LMS J. Comput. Math. 16, (2013), 78–108.

[16] W.G.C. Boyd and T.M. Dunster, *Uniform asymptotic solutions of a class of second-order linear differential equations having a turning point and a regular singularity, with an application to Legendre functions*, SIAM J. Math. Anal. 17-2 (1986), 422-450.

[17] H.M. Bui, *A note on the second moment of automorphic L-functions*, Mathematika. 56:01, (2010), 35- 44.

[18] V.A. Bykovsky, *Hecke series values of holomorphic cusp forms in the centre of the critical strip*, in Number Theory in Progress, Vol. 2: Elementary and Analytic Number Theory, K. Győry, H. Iwaniec, J. Urbanowicz, eds., Walter de Gruyter, Berlin, (1999), 675-689.

[19] V.A. Bykovsky, N.V. Kuznetsov, A.I.Vinogradov, *Generalized summation formula for inhomogeneous convolution*, Automorphic functions and their applications (Khabarovsk, 1988), 18–63, *Acad. Sci. USSR, Inst. App. Math.,Khabarovsk*, 1990.

[20] J.A. Cima, A.L. Matheson, W.T. Ross, *The Cauchy transform*, American Mathematical Soc., 2006.

[21] J.B. Conrey, D.W. Farmer, J.P. Keating, M. O. Rubinstein and N.C. Snaith, *Integral moments of L-functions*, Proc. Lond. Math. Soc. (3), 91:1 (2005), 33–104.

[22] J.B. Conrey, H. Iwaniec, *The cubic moment of central values of automorphic L-functions*, Ann. of Math. (2) 151 (2000), 1175–1216.

[23] J.-M. Deshouillers, *Majorations en moyenne de sommes de Kloosterman*, In Seminar on Number Theory, 1981/1982, pages Exp. No. 3, 5. Univ. Bordeaux I, Talence, 1982.

[24] J.-M. Deshouillers, H. Iwaniec, *An additive divisor problem*, J. London. Math. Soc., Vol. 26(2), (1982), 1–14.

[25] W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level*, Invent. Math. 119:1, (1995), 165-174.

[26] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, *A quadratic divisor problem*, Invent. Math., 115(2):209–217, 1994.

[27] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions. II*, Invent. Math., 115(2):219–239, 1994.

[28] T. M. Dunster, *Bessel functions of purely imaginary order, with an application to second-order linear differential equations having a large parameter*, Siam J. Math. Anal. **21**:4 (1990), 995–1018.

[29] J.S. Ellenberg, *On the error term in Duke*I*s estimate for the average special value of L- functions*, Canad. Math. Bull. 48 (2005),no. 4, 535 − 546.

[30] T. Estermann, *On the representation of a number as the sum of two products*, Proc. London Math. Soc., **31** (1930), 123–133.

[31] T. Estermann, *Über die darstellung einer zahl als differenz von zwei produkten*, J. Reine Angew. Math., Vol. 164, (1931), 173–182.

[32] T.Estermann, *On Kloosterman's sum*, Mathematika, 8 (1961), 83–86.

[33] J. B. Friedlander and H. Iwaniec, *Incomplete Kloosterman sums and a divisor problem*, Ann.of Math. (2), 121(2):319–350, 1985. With an appendix by Bryan J. Birch and Enrico Bombieri.

[34] D. Frolenkov, *The cubic moment of automorphic L-functions in the weight aspect*, J. Number Theory, 207:2 (2020), 247–281.

[35] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 6th ed., Academic Press, Boston, 2000.

[36] H. Halberstam, *An asymptotic formula in the theory of numbers*, Trans. A.M.S., **84** (1957), 338–351.

[37] D. R. Heath-Brown, *The fourth power moment of the Riemann zeta function*, J. London Math. Soc (3) 38 (1979), 385–422.

[38] D. R. Heath-Brown, *The divisor function $d_3(n)$ in arithmetic progressions*, Acta Arith.,47(1):29–56, 1986.

[39] H. Heilbronn, *On the average length of a class of finite continued fractions*, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis, Berlin, VEB (1968), 89–96.

[40] J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. of Math. 140 (1994), 161–181.

[41] C. Hooley, *An asymptotic formula in the theory of numbers*, Proc. London Math. Soc. (3), 7:396–413, 1957.

[42] B. Hough, *Zero-density estimate for modular form L-functions in weight aspect*, Acta Arith. 154 (2012), 187–216.

[43] Y. Ichihara, *The first moment of L -functions of primitive forms on* $\Gamma_0(p^\alpha)$ *and a basis of old forms*, J. Number Theory 131 (2011), No. 2 , 343 − 362.

[44] H. Ingham, *Mean-Value Theorems in the Theory of the Riemann Zeta-Function*, Proc. London Math. Soc. (2) 27 (1926), 273–300.

[45] A. E. Ingham. *Some asymptotic formulae in the theory of numbers*, J. London Math. Soc., **2** (1927), 202–208.

[46] A. Ivic, *On sums of Hecke series in short intervals*, J. de Thŕeorie des Nombres Bordeaux 14(2001), 554-568.

[47] A. Ivic, *On the moments of Hecke series at central points*, Funct. Approx. Comment. Math. 30 (2002), 49–82.

[48] A. Ivic, Y. Motohashi *On the Fourth Power Moment of the Riemann Zeta-Function*, J. Number Theory 51:1 (1995), 16–45.

[49] H. Iwaniec, *Fourier coefficients of cusp forms and the Riemann zeta-function*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 9,1979-1980, 1–36.

[50] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Providence: American Mathematical Society, 1997.

[51] H. Iwaniec, E. Kowalski. *Analytic number theory*, American Mathemaical Society Colloquim Publications, vol 53, 2004.

[52] H. Iwaniec, W. Luo, and P. Sarnak, *Low lying zeros of families of L-functions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (2000), no. 91, 55–131.

[53] H. Iwaniec, P. Sarnak. *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros*, Israel Journal of Math. 120, (2000), 155-177.

[54] J. Jackson, A. Knightly, *Averages of twisted L-functions*, J. Aust. Math. Soc. 99 (2015), no. 2, 207 − 236.

[55] M. Jutila, *A method in the theory of exponential sums*, Tata Lect. Notes Math. 80, Bombay (1987).

[56] M. Jutila and Y. Motohashi, *Uniform bound for Hecke L-functions*, Acta Math., 195 (2005), 61–115.

[57] Y. Kamiya. *Certain mean values and non-vanishing of automorphic L-functions with large level*, Acta Arith. 93:2, (2000), 157–176.

[58] M. Katsurada. *On an asymptotic formula of Ramanujan for a certain theta-type series*, Acta Arith. 92:2, (2001), 157–172.

[59] H. H. Kim (with appendices by D. Ramakrishnan, H. H. Kim and P. Sarnak). *Functoriality for the exterior square of* GL_4 *and the symmetric square of* GL_2*,* J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 139–183.

[60] D. E. Knuth. *Evaluation of Porter's Constant*, Comp. and Maths. with Appls., **2** (1976), 137–139.

[61] W. Kohnen and D.Zagier, *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip*, Invent. Math. 64 (1981), 175–198.

[62] E. Kowalski, *The rank of the jacobian of modular curves: analytic methods*, Ph.D. Thesis, Rutgers University (1998).

[63] E. Kowalski and P. Michel, *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions*, Duke Math. J. 100 (1999), no. 3, 503–542.

[64] E. Kowalski, P. Michel. *A lower bound for the rank of $J_0(q)$*, Acta Arith. 94:4, (2000), 303–343.

[65] E. Kowalski and P. Michel, *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions*, (2001), 1–39. Available at https://tan.epfl.ch/files/content/sites/tan/files/PhMICHELfiles/DMJ.pdf.

[66] E. Kowalski, P. Michel, J.M. VanderKam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, J. Reine Angew. Math. 526 (2000), 1–34.

[67] Y.K. Lau and K.M. Tsang, *A mean square formula for central values of twisted automorphic L-functions*, Acta Arith. 118-3 (2005), 231–262.

[68] Y.K. Lau and J. Wu, *Extreme values of symmetric power L-functions at 1*, Acta Arith. 126-1 (2007), 57–76.

[69] L. Lewin. *Polylogarithms and associated functions*, North Holland, 1981.

[70] L. Lewin. *The dilogarithm in algebraic fields*, J.Austral. Math. Soc. Ser. A, **33**:03 (1982), 302–330.

[71] Yu. V. Linnik, *Additive problems and eigenvalues modular operators*, Proc. of the International Congress of Math., Stockholm, 1962, 270—284.

[72] G. Lochs. *Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmäßigen Kettenbrüche,* Monatshefte für Math., **65**:1 (1961), 27–52.

[73] W. Luo, *Nonvanishing of the central L-values with large weight*, Adv. in Math. 285 (2015), 220–234.

[74] T. Meurman, *On the binary additive divisor problem,* in Number Theory: Proc. Turku Symp. on Number Theory in Memory of Kustaa Inkeri, Turku, 1999, Ed. by M. Jutila et al. (W. de Gruyter, Berlin, 2001), 223–246.

[75] Y. Motohashi. *Spectral mean values of Maass wave form L-functions*, J.Number Theory 42 (1992), 258–284.

[76] Y. Motohashi, *An explicit formula for the fourth power moment of the Riemann zeta-function*, Acta Math. 170 (1993), 181–220.

[77] Y. Motohashi. *The binary additive divisor problem*, Annales scientifiques de l'École Normale Superieure 27:5 (1994), 529–572.

[78] Y. Motohashi, *Spectral theory of the Riemann zeta-function*, vol. 127 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[79] R. Munshi, *The circle method and bounds for L-functions—III: t-aspect subconvexity for GL(3) L-functions*, J. Amer. Math. Soc., 28(4):913–938, 2015.

[80] R. Munshi, *The circle method and bounds for L-functions—IV: Subconvexity for twists of GL(3) L-functions*, Ann. of Math. (2), 182(2):617–672, 2015.

[81] M.H. Ng, *Moments of automorphic L-functions*, PhD thesis, University of Hong Kong, 2016.

[82] N. Ng, *The sixth moment of the Riemann zeta function and ternary additive divisor sums*, Discrete Analysis, 2021:6, 60 pages.

[83] N. Ng, Q. Shen, and P.-J. Wong, *The eighth moment of the Riemann zeta function*, arXiv preprint arXiv:2204.13891, (2022).

[84] N. Ng and M. Thom, *Bounds and conjectures for additive divisor sums*, Funct. Approx. Comment.Math. 60 (2019), no. 1, 97–142.

[85] F.W.J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, 1974.

[86] F.W.J. Olver , D.W. Lozier, R.F. Boisvert and C.W. Clarke, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[87] R. B. Paris, D. Kaminski, *Asymptotics and Mellin-Barnes integrals*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).

[88] Z. Peng, *Zeros and central values of automorphic L-functions*, PhD thesis, Princeton University, 2001.

[89] I. Petrow, *A twisted Motohashi formula and Weyl-subconvexity for L-functions of weight two cusp forms*, Math. Ann. 363 (2015), no. 1-2, 175–216.

[90] I. Petrow, M.P. Young, *A generalized cubic moment and the Petersson formula for newforms*, Math. Ann. 373(1-2) (2018), 287–353.

[91] I. Petrow, M.P. Young, *The Weyl bound for Dirichlet L-functions of cube-free conductor*, Annals of Mathematics 192, 2 (2020), 437–486.

[92] J. W. Porter. *On a theorem of Heilbronn*, Mathematika,**22**: 1 (1975), 20–28.

[93] Z. Qi, *Proof of the Strong Ivic conjecture for the cubic moment of Maass-form L-functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2023, iss.22, p. 19205–19236.

[94] D. Rouymi, *Formules de trace en niveau primaire et non annulation de valeurs centrales de fonctions L automorphes*, PhD thesis, Université Henri Poincaré (2009).

[95] D. Rouymi, *Formules de trace et non annulation de fonctions L automorphes au niveau p^v,* Acta Arith. 147 (2011), $1-32$.

[96] D. Rouymi, *Mollification et non annulation de fonctions L automorphes en niveau primaire*, J. Number Theory. 132:1, (2012), 79-93.

[97] E. Royer, *Sur les fonctions L de formes modulaires*, PhD thesis, Université de Paris-Sud, 2001.

[98] Z. Rudnick and K. Soundararajan, *Lower bounds for moments of L-functions: symplectic and orthogonal examples*, Multiple Dirichlet Series, Automorphic Forms, and Analytic Number Theory (Editors: Friedberg, Bump, Goldfeld, and Hoffstein), Proc. Symp. Pure Math., vol. 75, Amer. Math. Soc., 2006.

[99] A. Sankaranarayanan, *Mean-square upper bound of Hecke L-functions on the critical line*, Hardy-Ramanujan J. 26, (2003), 2-17.

[100] P. Sarnak, J. Tsimerman, *On Linnik and Selberg's conjecture about sums of Kloosterman sums*, in Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, Vol. II, Progress in Mathematics, vol. 270 (BirkhËauser, Boston, MA, 2009), 619–635.

[101] G. Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Cambridge University Press, 1995.

[102] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, Oxford, 1986.

[103] B. Topacogullari, *The shifted convolution of generalized divisor functions*, Q. J. Math. 67, no. 2 (2016),331–363.

[104] B.Topacogullari, *On a certain additive divisor problem*, Acta Arith. 181(2), 143–172 (2017).

[105] B. Topacogullari, *The shifted convolution of divisor sums*, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 24 (2018),7681–7724.

[106] J.M. VanderKam, *The rank of quotients of $J_0(N)$*, Duke Math. J. 97:3, (1999), 545-577.

[107] J.L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des forms modulaires de poids demi-entier*, J. Math. Pure Appl. 60 (1981), 375–484.

[108] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 34, (1948), 204-207.

[109] M.P. Young, *Weyl-type hybrid subconvexity bounds for twisted L-functions and Heegner points on shrinking sets*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 19(5):1545–1576, 2017.

[110] О. Г. Балканова, Д. А. Фроленков, *Равномерная асимптотическая формула для второго момента L-функций на критической прямой*", Современные пробоемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016, 20–53.

[111] О. Г. Балканова, Д. А. Фроленков, *О бинарной аддитивной проблеме делителей*, Аналитическая теория чисел, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, 299, МАИК, М., 2017, 50–55.

[112] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции II*, «Наука», Москва, 1974.

[113] В.А. Быковский, *Формула следа для скалярного произведения рядов Гекке и ее приложения*, Зап. науч. сем. ПОМИ. 226, (1996), 14-36.

[114] В. А. Быковский, А. И. Виноградов, *Неоднородные свертки*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 160 (1987), 16–30.

[115] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *О втором моменте L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой*, Докл. РАН, 463:2, (2015), 133-136.

[116] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *Асимптотическая формула для свертки обобщенной функции делителей*, Докл. РАН, 465:2 (2015), 137–140.

[117] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *Некоторые интегральные представления для гипергеометрической функции*, Дальневост. матем. журн. 15:1, (2015), 38-40.

[118] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, *О средней длине конечных цепных дробей с фиксированным знаменателем*, Матем. сб., 208:5 (2017), 63–102.

[119] В.А. Быковский, Д.А. Фроленков, *Асимптотические формулы для вторых моментов L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой,* Изв.РАН Сер.матем., 81:2 (2017), 5–34.

[120] А. И. Виноградов, Л. А. Тахтаджян, *Дзета-функция аддитивной проблемы делителей и спектральное разложение автоморфного лапласиана*, Автоморфные функции и теория чисел. II, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 134, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1984, 84–116.

[121] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, М. Физматлит, 1994.

[122] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИФМЛ. Москва, 1963.

[123] Н.И. Заворотный, *О четвертом моменте дзета-функции Римана*, труды конференции "Автоморфные функции и теория чисел I 69–125, г.Владивосток, 1989.

[124] Д.И. Исмоилов, *Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений*, Докл. АН ТаджССР, 22 (1979), 75–79.

[125] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, -М.,Наука, 1983.

[126] Н. В. Кузнецов, *Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна-Мааса*, Записки научн. семин. ЛОМИ, **129** (1983), 43–84.

[127] Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана*, Матем. Сб., 111(153):3 (1980), 334–383.

[128] Н.В. Кузнецов, *Ряды Гекке в центре критической полосы*, препринт ИПМ ДВО РАН, г.Хабаровск 1999 г., 27 стр.

[129] Н.В. Кузнецов, *Формулы следа и некоторые их приложения в аналитической теории чисел*, Владивосток, Дальнаука, 160с., 2003.

[130] Н.В. Кузнецов, *О среднем значении рядов Гекке*, препринт ИПМ ДВО РАН, г.Хабаровск 1994 г., 35 стр.

[131] Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции*, М. Наука, 1990.

[132] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и ряды том 3 специальные функци. Дополнительные главы*, 2е изд., М.,ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[133] А. В. Устинов, *О статистических свойствах конечных цепных дробей*, Записки научн. семин. ПОМИ, 322 (2005), 186–211.

[134] А. В. Устинов, *О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с выбором минимальноого по модулю остатка*, Матем. заметки, 85:1 (2009), 153–156.

[135] А. В. Устинов, *О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными*, Матем. заметки, 88:4 (2010), 594–604.

[136] А. В. Устинов, *О числе решений сравнения* $xy \equiv l \pmod q$ *под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции*, Алгебра и анализ, 20: 5 (2008), 186–216.

[137] А. В. Устинов, *О статистиках Гаусса–Кузьмина в коротких интервалах*, ДВМЖ, 11: 1 (2011), 93–98.

[138] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциальноого и интегральноого исчисления,* том 2, Наука, 1969.

[139] О. М. Фоменко, *Необращение в нуль автоморфных L -функций в центре критической полосы*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 263 (2000), 193–204.

[140] Д. А. Фроленков, *Равномерные асимптотические формулы для гипергеометрической функции,* Дальневост. матем. журн., 15:2 (2015), 289—298.

[141] Д. А. Фроленков, *Недиагональные части второго момента L-функций автоморфных форм,* Матем. сб., 211:8 (2020), 114–131.

[142] Н.Г. Чудаков, *Введение в теорию L–функций Дирихле*, ОГИЗ, ГИТТЛ. Москва 1947.