ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Н.А.Дюжиной "Плотность сумм сдвигов одной функции"

В работе изучается вопрос о существовании функций, суммы сдвигов которых плотны в различных функциональных пространствах. Существование таких функций установлено в пространствах Харди $H_p(\mathbb{R})$, $2 \leq p < +\infty$, и в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$ функций, непрерывно и аналитически продолжающихся в верхнюю полуплоскость, стремящихся к нулю на бесконечности (теорема 1.1). Эта теорема усиливает результат П.А.Бородина и С.В.Конягина в [32], где было доказано существование функций с плотными суммами сдвигов в действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $2 \leq p < +\infty$, и в пространстве непрерывных, стремящихся к нулю на бесконечности, функций. Доказательство теоремы 1.1 весьма непросто, и, хотя в идейном плане оно повторяет доказательство теоремы из [32], технически сильно отличается. Во второй главе диссертации доказывается, что производные наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости плотны в пространствах $H_p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$, и в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$. В третьей главе результат П.А.Бородина и С.В.Конягина из [32] для пространств $L_p(\mathbb{R})$ распространен на многомерный случай, т.е., установлено, что в действительных пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$, $2 \leq p < +\infty$, существуют функции с плотными суммами сдвигов. Аналогичные теоремы доказаны для действительных пространств $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $2 \leq p < +\infty$, $c_0(\mathbb{Z}^d)$, а также для действительных пространств $L_p^0(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p < +\infty$, функций, заданных на d-мерном торе $\mathbb{T}^d$, с нулевым средним значением, причем в этом случае в терминах коэффициентов Фурье функции описано условие, гарантирующее плотность сумм ее сдвигов. Одномерные аналоги этих теорем были установлены П.А.Бородиным в [9], [10]. В последнем параграфе изучаются функции, заданные на компактной абелевой группе G, для которых получен следующий весьма непростой результат: действительная функция на G, суммы сдвигов которой плотны по норме $L_2(G)$ в соответствующем действительном пространстве функций с нулевым средним, существует тогда и только тогда, когда группа G связная и имеет счетный набор характеров.

Существенных замечаний у меня нет. Хочу только задать вопрос к постановке задачи. Несколько удивляет, что обсуждается полнота сумм, а не линейных комбинаций сдвигов, что было бы естественней с точки

зрения теории приближений. Вопрос о полноте линейных комбинаций сдвигов некоторой функции близок по постановке к классическим исследованиям аппроксимации тригонометрическими и алгебраическими полиномами. В значительной степени к истокам этой тематики можно отнести работу Н.Винера [47], в которой как раз и обсуждались линейные комбинации. Есть и существенно более свежие работы с такой постановкой задачи, например, А.Б.Александров, Аппроксимация в пространстве $L_p^0(\mathbb{T}^d)$, $0 < p < 1$, линейными комбинациями характеристических функций шаров, Зап. научн. сем. ПОМИ, 2009, том 366, 5–12. Не очень понятно, из каких соображений стоит ограничиваться линейными комбинациями с единичными коэффициентами. Ответ на этот вопрос дан в случае, когда речь идет о функции $f(z) = 1/z$, для которой суммы сдвигов (наипростейшие дроби) имеют естественную физическую интерпретацию. Кроме того, наипростейшие дроби суть логарифмические производные полиномов. Хотелось бы услышать хоть какие-нибудь объяснения для произвольной функции. И конечно стоило бы обсудить сравнения результатов о полноте линейными комбинациями и суммами. Однако, в любом случае, решаемая задача, как и любая другая корректно поставленная теоретическая задача, имеет право на существование.

В целом текст диссертации написан подробно и достаточно аккуратно, но отмечу несколько претензий и придирок к изложению материала.

Странно выглядит начало доказательства теоремы 1.1. Сказано: "По теореме Е существует последовательность замкнутых множеств ....., обладающих свойствами....". Но в теореме Е вообще не идет речь о каких-либо множествах. Значит, в первую очередь эти множества должны появиться, после чего можно обсуждать их свойства. Из теоремы Егорова и теоремы Е следует, что для каждого n существует множество E'_n, на котором последовательность полиномов p_n равномерно стремится к нулю, и таких что $\mu([0,n] \setminus E'_n) < 1/2^{n+1}$. Далее уже можно вводить множества E_n и проверять их свойства. Кроме того, следует дать объяснения замкнутости E_n, т.к. в стандартной формулировке теоремы Егорова ничего об этом не говорится.

На стр. 26 сказано: "равенства const=0"в (1.8) и (1.9) верны". Но в (1.9) const вообще не фигурирует.

В п. 10 доказательства теоремы 1.1 используется последовательность функций φ_n, удовлетворяющих ряду требований. Наличие такой последовательности выглядит правдоподобно, но приведенное обоснование этого факта непонятно. Сказано, что надо должным образом занумеровать некий набор функций, с индексами m, k, и ничего не объясняется, а дальше создается впечатление, что $n = m$, а k вообще не фигуриру-

ет. В последующем доказательстве, для удобства читателя, стоило бы отмечать, какие полученные ранее оценки используются, снабдив их номерами.

На стр. 39 стоило объяснить равенство $L_q(\mathbb{R})/H_q(\mathbb{R}) = (H_p(R))^*$ или дать ссылку. Далее непонятно, что значит «проинтегрируем это тождество по a», поскольку мнимая часть a отрицательна. Вероятно речь идет об интеграле по некоторому контуру. Это следовало подробно объяснить.

Ясно, что теорема 2.3 верна, но приведенное доказательство понять трудно. Например, сказано "суммируя функции вида (3.3) ..., мы получим, что...". Просуммировав что-либо, мы получим сумму, а не утверждение. Наверное, автор хотел сказать, что функция вида .... принадлежит R, поскольку g_2 может быть аппроксимирована в $L_p(\mathbb{R})$ суммами сдвигов функции f. Вообще, все здесь как-то напутанно, в начале доказательства надо взять произвольную функцию $g \in L_p(\mathbb{R}^d)$ и проверить, что она может быть аппроксимирована конечными сдвигами функции h.

Непонятно первое равенство в п. 2 доказательства теоремы 3.3. Там должна быть зависимость от коэффициентов Фурье c_ν функции f. Если в экспоненте убрать n, то можно разобраться, что это за равенство и как $c_{n\nu}$ выражается через c_ν, и стоило выписать эту зависимость явно, чтобы далее было ясно, что можно воспользоваться леммой 3.1 (где уже фигурируют как раз c_ν, а не $c_{n,\nu}$).

Считаю, что рецензируемая диссертационная работа Н.А. Дюжиной является законченным самостоятельным исследованием, соответствует всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
профессор Санкт-Петербургского
государственного университета
Скопина Мария Александровна
28.06.2024

Личную подпись
М.А. Скопиной
заверяю
И.О. начальника отдела кадров СПбГУ
И.И. Константинова
28.06.2024