ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Н.А. Дюжиной "Плотность сумм сдвигов одной функции", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация относится к теории нелинейных приближений. В ней доказываются результаты о плотности сумм (с коэффициентами 1) сдвигов одной функции в различных функциональных пространствах с естественно определенным оператором сдвига. Эта тематика, с одной стороны, примыкает к многочисленным исследованиям полноты систем сдвигов (начиная с классической работы Винера), а с другой стороны, является частной областью теории плотности аддитивной полугруппы, порожденной заданным множеством (в данном случае — системой сдвигов одной функции) в банаховом пространстве.

Основной мотивировкой для исследования общих вопросов о плотности аддитивной полугруппы послужила теория приближений наипростейшими дробями (логарифмическими производными комплексных многочленов, т.е. суммами сдвигов функции $1/z$). Это довольно обширная часть теории приближений в комплексной области, существенные результаты в которой доказывали Кореваааp, Маклейн, Элкинс, Чуи, Ньюман, В.И. Данченко, О.Н. Косухин, П.А. Бородин, М.А. Комаров, П.В. Чунаев, В.Ю. Протасов, Е.В. Абакумов, А.А. Боричев, К.Ю. Федоровский и другие математики. Другим частным случаем исследования плотности полугруппы могут считаться многочисленные результаты о приближениях многочленами с целыми коэффициентами (Какея, Фекете, Р.М. Тригуб, Апарисио Бернардо, А.О. Гельфонд, Фергюсон и др.). В настоящее время общая теория плотности полугруппы вполне оформилась в самостоятельную область геометрической теории приближений. Так, в обзоре П.А. Бородина и К.С. Шкляева (УМН, 2023) получены общие результаты о плотности полугруппы в банаховом пространстве, из которых различные теоремы о приближении наипростейшими дробями выводятся как частные случаи.

В первой главе диссертации доказывается существование комплексной функции на действительной оси $\mathbb{R}$, для которой суммы действительных сдвигов плотны во всех пространствах Харди $H_p(\mathbb{R})$ при $p \in [2, \infty)$. Этот результат аналогичен моему результату о существовании действительной функции, суммы сдвигов которой плотны во всех пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $p \in [2, \infty)$. Доказательство Н.А. Дюжиной идейно повторяет мое (в частности, существенно используется теорема С.В. Конягина о существовании последовательности тригонометрических многочленов с натуральными коэффициентами, сходящаяся к нулю почти всюду), но технически во многом отличается от моего.

Во второй главе доказывается, что производные наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости плотны во всех пространствах H_p Харди в верхней полуплоскости при $p \in (1, \infty)$. Это означает, что суммы допустимых комплексных сдвигов функции $1/z^2$ плотны в указанных пространствах. Функция $1/z$ на эту роль не подходит: суммы ее сдвигов, т. е. наипростейшие дроби, не плотны в пространствах Харди в полуплоскости. Кроме того, во второй главе получены оценки сверху скорости приближения нулевой функции производными наипростейших дробей заданной степени с одним фиксированным полюсом в указанных пространствах Харди.

В третьей главе найдено условие на компактную абелеву группу G, необходимое и достаточное для существования функции на G, суммы сдвигов которой плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$ суммируемых в квадрате функций с нулевым средним. Таким условием оказалось связность G и счетность ее группы характеров. Это самый

трудный результат диссертации, потребовавший от автора довольно глубокого проникновения в абстрактный гармонический анализ. Кроме того, в третьей главе обобщаются на многомерный случай мои результаты о существовании функций на $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $[0, 2\pi)$, суммы сдвигов которых плотны в пространствах L_p или L_p^0 на этих множествах.

При доказательстве своих результатов Н.А. Дюжина реализовала интересные идеи и преодолела существенные технические трудности. В работе явно выделяются три основные теоремы (по одной в каждой главе); уровень сложности их доказательств выше обычного уровня доказательств в кандидатской диссертации. Все результаты изложены ясно и аккуратно.

Тема диссертации актуальна, полученные результаты новы, интересны и могут быть использованы в научных исследованиях, ведущихся в МГУ имени М.В. Ломоносова, СПбГУ, МИАН имени В.А. Стеклова, Владимирском и Саратовском государственных университетах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации; основные результаты диссертации опубликованы и апробированы на различных семинарах и конференциях.

Считаю, что диссертация "Плотность сумм сдвигов одной функции" удовлетворяет всем требованиям ВАК, а ее автор Н.А. Дюжина заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Д.ф.-м.н., профессор РАН П.А. Бородин

Подпись П.А. Бородина заверяю специалист по кадрам