Отзыв

официального оппонента на диссертационную работу
Буряка Александра Юрьевича
«Топология пространств модулей стабильных кривых и интегрируемые системы»
на соискание степени доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.3 (геометрия и топология)

В диссертации А. Ю. Буряка изучается связь топологии пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ стабильных алгебраических кривых кривых рода g с n отмеченными точками с теорией интегрируемых систем. Впервые эта связь была обнаружена Виттеном и сформулирована в виде знаменитой гипотезы (доказанной многими различными способами), утверждающей, что производящий ряд чисел пересечений на пространствах модулей задаёт решение иерархии Кортевега—де Фриза. Диссертация посвящена исследованию обобщений гипотезы Виттена. Диссертант предлагает свой оригинальный подход, основанный на геометрии циклов двойных ветвлений в пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, получает важные результаты в рамках другого общего подхода, предложенного в работах Дубровина и Жанга, а также исследует связь двух подходов.

Диссертация состоит из введения, 3-х глав и заключения. Список использованной литературы содержит 83 источника.

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, кратко рассмотрена история задач и их современное состояние. В рамках исследования обобщений гипотезы Виттена ставится вопрос о существовании интегрируемой системы УрЧП, контролирующей корреляторы произвольной заданной когомологической теории поля. Также задаётся более концептуальный вопрос о том, какие геометрические свойства пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ отвечают за появление интегрируемых систем УрЧП. Эти два вопроса являются центральными для диссертационного исследования. Диссертант приходит к выводу, что гипотетически теория Дубровина—Жанга даёт утвердительный ответ на первый вопрос, однако эта теория не даёт удовлетворительного ответа на второй вопрос. Если выйти за пределы рода 0, то имеющиеся результаты очень технические и не дают ясной картины о роли геометрии пространств модулей. Далее во введении кратко сформулированы основные результаты работы.

В **первой главе** приводятся необходимые сведения о геометрии пространств модулей стабильных кривых и вводятся циклы двойных ветвлений, также называемые DR-циклами, которые играют ключевую роль в диссертации. Далее автор доказывает соотношение коммутативности на DR-циклы. Это соотношение играет решающую роль для установления связи между топологией пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ и дисперсионными интегрируемыми системами. Диссертант подробно обсуждает

известные результаты о когомологических теориях поля. Далее в первой главе приводятся необходимые сведения из теории эволюционных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной, а также доказывается ряд результатов об однозначной восстанавливаемости интегрируемых систем по ограниченным данным.

Вторая глава является центральной в диссертации. Стартуя с произвольной когомологической теории поля, автор приводит конструкцию гамильтоновой системы УрЧП, причём плотности гамильтонианов явным задаются как дифференциальные многочлены, у которых коэффициенты задаются явной формулой в виде интеграла по пространству модулей от элемента когомологической теории поля, помноженного на пси-класс, класс Ходжа и DR-цикл. Построенная гамильтонова система была названа DR-иерархией, причём коммутация гамильтонианов является немедленным следствием доказанного ранее соотношения коммутативности на DR-циклы. Таким образом, автор рассматривает соотношение коммутативности на DR-циклы, а также основанную на нём конструкцию DR-иерархии, как вполне удовлетворительный ответ на концептуальный вопрос, поставленный во введении, о том, какие геометрические свойства пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ отвечают за появление интегрируемых систем УрЧП. Во второй главе доказано, что DR-иерархия наделена богатой алгебраической структурой, наличие которой связано с геометрическими свойствами пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. В частности, была найдена рекурсия нового типа, позволяющая восстановить все гамильтонианы DR-иерархии, зная лишь одну выделенную линейную комбинацию гамильтонианов, а также построено квантование DR-иерархии. Автор явно вычисляет DR-иерархию для ряда конкретных когомологических теорий поля, устанавливая связь с известными иерархиями математической физики.

Третья глава посвящена иерархиям Дубровина—Жанга. В работах Дубровина и Жанга, по произвольной однородной когомологической теории поля строится интегрируемая иерархия, у которой производящий ряд корреляторов когомологической теории поля задаёт решение. Автор обобщает теорию Дубровина—Жанга для произвольных когомологических теорий поля, формулирует гипотезу о существовании иерархии, а также доказывает теорему о единственности иерархии. Один из центральных результатов главы – это доказательство гипотезы о существовании иерархии для произвольной полупростой когомологической теории поля. Важным результатом главы является явное вычисление иерархии Дубровина—Жанга для когомологической теории поля, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа. Этот результат даёт однопараметрическое обобщение гипотезы Виттена. Далее автор формулирует гипотезу об эквивалентности иерархии Дубровина—Жанга и DR-иерархии и доказывает её в ряде случаев.

В **заключении** диссертации автор излагает итоги выполненного исследования и перспективы дальнейшей разработки темы.

Автором диссертации была предложена новая конструкция интегрируемой системы эволюционных УрЧП с одной пространственной переменной, стартуя с произвольной когомологической теории поля. За интегрируемость иерархии отвечает соотношение коммутативности на DR-циклы, которое является относительно простым обобщением на все рода соотношения ассоциативности в когомологиях пространств модулей кривых рода 0. Основным достоинством предложенной конструкции является то, что структура интегрируемой системы описывается очень явным образом в терминах чисел пересечений на пространстве модулей стабильных кривых. Это позволило далеко продвинуться в описании свойств DR-иерархии. Прояснена связь с подходом Дубровина—Жанга. Полученные результаты можно охарактеризовать как новое направление в теории интегрируемых систем, связанных с геометрией пространств модулей кривых.

В тексте диссертации присутствуют опечатки, но это не умаляет достоинств работы.

Основные результаты диссертации являются новыми, они были многократно представлены на ведущих семинарах и конференциях по геометрии и математической физике.

Диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 (геометрия и топология), а ее автор безусловно заслуживает этой степени.

Официальный оппонент:
Соколов Владимир Вячеславович,
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.03),
профессор, ведущий научный сотрудник
Лаборатории динамики и стохастики сложных систем имени Р. Л. Добрушина
Высшей школы современной математики
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»,
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9
Тел.: +74954084254, e-mail: sokolov@itp.ac.ru
10 февраля 2025 г.

Подпись Соколова В. В. заверяю

адм. канц.
Кораблева О. А.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАНЦЕЛЯРИЯ