Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

На правах рукописи
УДК 515.1, 517.9



Буряк Александр Юрьевич

Топология пространств модулей стабильных кривых и интегрируемые системы

Специальность 1.1.3 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2024

Работа выполнена на факультете математики Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”

НАУЧНЫЙ КОНСУЛЬТАНТ:

Гусейн-Заде Сабир Меджидович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова” (специальность 01.01.09).

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

Малютин Андрей Валерьевич – доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.04).

Соколов Владимир Вячеславович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Лаборатории динамики и стохастики сложных систем имени Р. Л. Добрушина Высшей школы современной математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)” (специальность 01.01.03).

Хабибуллин Исмагил Талгатович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, заведующий отделом математической физики Института математики с вычислительным центром Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (специальность 01.01.02).

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Новосибирский национальный исследовательский государственный университет”

Защита диссертации состоится 20 марта 2025 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-ый этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова РАН и на сайте https://mi-ras.ru/dis/ref24/buryak/dis.pdf

Автореферат разослан ____ декабря 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 24.1.167.03 при МИАН
доктор физико-математических наук Д. В. Осипов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Одним из центральных объектов данной работы является пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ связных гладких алгебраических кривых рода g с n отмеченными точками, а также его компактификация $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, построенная Делинем и Мамфордом[1] с помощью стабильных кривых, то есть помеченных связных проективных кривых $(C; x_1, \ldots, x_n)$, у которых в качестве особенностей разрешаются только простые точки самопересечения, отмеченные точки должны лежать на гладкой части кривой и группа автоморфизмов должна быть конечной.

Глубокая связь топологии пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ с интегрируемыми системами была впервые обнаружена Виттеном[2] и сформулирована им в виде знаменитой гипотезы. Напомним её формулировку. Обозначим через $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, n$, комплексное линейное расслоение над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, слоем которого над точкой, представленной стабильной кривой $(C; x_1, \ldots, x_n)$, является кокасательное пространство к кривой C в точке x_i. Первые классы Черна этих расслоений обозначаются через $\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ и называются *пси-классами*. *Числа пересечений* на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ определяются как

$$\langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \ldots \tau_{d_n} \rangle_g := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \psi_2^{d_2} \cdots \psi_n^{d_n} \in \mathbb{Q}, \quad d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

при этом мы полагаем интеграл равным нулю, если $\sum d_i \neq \dim \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = 3g - 3 + n$. Рассмотрим производящий ряд чисел пересечений:

$$\mathcal{F}(t_0, t_1, \ldots, \varepsilon) := \sum_{g,n \geq 0} \varepsilon^{2g} \sum_{d_1, \ldots, d_n \geq 0} \langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \ldots \tau_{d_n} \rangle_g \frac{t_{d_1} t_{d_2} \ldots t_{d_n}}{n!} \in \mathbb{Q}[[t_0, t_1, \ldots, \varepsilon]].$$

Гипотеза Виттена[2] утверждает, что формальный ряд $u = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_0^2}$ является решением иерархии Кортевега–де Фриза (КдФ) (мы отождествляем $x = t_0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} &= u u_x + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{xxx}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{u^2 u_x}{2} + \varepsilon^2 \left(\frac{u u_{xxx}}{12} + \frac{u_x u_{xx}}{6} \right) + \varepsilon^4 \frac{u_{xxxxx}}{240}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

[1] P. Deligne, D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. // Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques. — 1969. — Vol. 36. — P. 75–109.

[2] E. Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. // In: Surveys in differential geometry (Cambridge, USA, 1990). — Lehigh University, 1991. — P. 243–310.

Доказательство гипотезы Виттена было заявлено в работе Концевича[3], некоторые его детали были прояснены впоследствии в работах Лойенги[4] и Звонкина[5]. Основанные на совершенно иных идеях доказательства были предложены в работах Окунькова и Пандхарипанде[6], Казаряна и Ландо[7], Мирзахани[8].

После работы Виттена появились схожие по форме гипотезы и результаты, где рассматривается пространство модулей кривых с дополнительной структурой, например, пространство модулей стабильных отображений в проективную прямую[9] или пространство модулей стабильных кривых со спинорной структурой[10]. Важно отметить, что имеется способ унифицировать формулировки разновидностей гипотезы Виттена, рассматривая обычное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, оснащённое *когомологической теорией поля*[11] (КогТП), которая определяется как набор классов когомологий, удовлетворяющих простому набору свойств, описывающих как ведут себя обратные образы этих классов под действием естественных отображений между пространствами модулей. В рамках этого подхода, в гипотезах виттеновского типа рассматриваются обобщённые числа пересечений, так называемые *корреляторы* КогТП, определяемые как интеграл по $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ от произведения монома из пси-классов на класс когомологий, составляющий заданную КогТП, а дальше утверждается, что из этих чисел можно составить набор производящих рядов, являющийся решением некоторой интегрируемой системы УрЧП. Заметим сразу, что здесь возникают системы УрЧП эволюционного типа с одной пространственной переменной и бесконечным количеством времён.

С одной стороны, гипотезы виттеновского типа позволяют описывать корреляторы интерес-

[3] M. Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. // Communications in Mathematical Physics. — 1992. — Vol. 147, N. 1. — P. 1–23.

[4] E. Looijenga. Cellular decompositions of compactified moduli spaces of pointed curves. // In: The moduli space of curves (Texel Island, Netherlands, 1994). / Progress in Mathematics, Vol. 129. — Birkhäuser Boston, 1995. — P. 369–400.

[5] D. Zvonkine. Strebel differentials on stable curves and Kontsevich's proof of Witten's conjecture. // arXiv:math/0209071v2.

[6] A. Okounkov, R. Pandharipande. Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models. // In: Algebraic geometry, Part I: Seattle 2005. / Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 80, Part I. — American Mathematical Society, 2009. — P. 325–414.

[7] M. E. Kazarian, S. K. Lando. An algebro-geometric proof of Witten's conjecture. // Journal of the American Mathematical Society. — 2007. — Vol. 20, N. 4. — P. 1079–1089.

[8] M. Mirzakhani. Weil–Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves. // Journal of the American Mathematical Society. — 2007. — Vol. 20, N. 1. — P. 1–23.

[9] B. Dubrovin, Y. Zhang. Virasoro symmetries of the extended Toda hierarchy. // Communications in Mathematical Physics. — 2004. — Vol. 250, N. 1. — P. 161–193.

[10] E. Witten. Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity. // In: Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, USA, 1991). — Publish or Perish, 1993. — P. 235–269.

[11] M. Kontsevich, Yu. Manin. Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. // Communications in Mathematical Physics. — 1994. — Vol. 164, N. 3. — P. 525–562.

ных КогТП. С другой стороны, возникает следующий общий вопрос.

Вопрос 0.1. *Верно ли, что корреляторы произвольной КогТП описываются какой-то интегрируемой системой?*

Можно задать более концептуальный вопрос.

Вопрос 0.2. *Какие геометрические свойства пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ отвечают за появление интегрируемых систем УрЧП?*

Эти два вопроса являются центральными для нашего исследования.

Степень разработанности темы исследования

Если ограничиться рассмотрением пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, то возникает понятие *когомологической теории поля в роде* 0. В этом случае на оба поставленных выше вопроса имеется ясный ответ. Производящий ряд примарных корреляторов (без включения пси-классов в интеграл), называемый *потенциалом Дубровина–Фробениуса*, произвольной КогТП в роде 0 является решением *системы уравнений ассоциативности*: это является простым следствием так называемого *соотношения ассоциативности* в группе когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \mathbb{Q})$. Говоря точнее, потенциал Дубровина–Фробениуса является решением *расширенной системы уравнений ассоциативности*, включающей дополнительное уравнение, отвечающее за наличие единицы в некотором семействе ассоциативных алгебр. Верно и обратное утверждение: произвольное решение расширенной системы уравнений ассоциативности является потенциалом Дубровина–Фробениуса некоторой КогТП в роде 0, определяемой по этому потенциалу однозначно[12]. Имеется простая конструкция, предложенная Дубровиным[13], которая строит интегрируемую гамильтонову систему гидродинамического типа по любому заданному решению расширенной системы уравнений ассоциативности. Назовём эту интегрируемую систему *базовой иерархией*, в англоязычной литературе она называется “principal hierarchy”. При этом производящий ряд корреляторов КогТП в роде 0, соответствующей решению расширенной системы уравнений ассоциативности, задаёт решение базовой иерархии. Это даёт утвердительный ответ на вопрос 0.1 для произвольной КогТП в роде 0. Мы также видим, что за появление интегрируемой системы отвечает соотношение ассоциативности в группе когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \mathbb{Q})$, что даёт ответ на вопрос 0.2.

[12] Ю. И. Манин. *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей.* — Факториал, 2002.

[13] B. Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories. // In: Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, Italy, 1993). / Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1620. — Springer, 1996. — P. 120–348.

Рассмотрим теперь произвольную КогТП во всех родах и соответствующий производящий ряд корреляторов, называемый *потенциалом*, который также как и формальный ряд $\mathcal{F}$ в гипотезе Виттена зависит от переменной ε: коэффициент при ε^{2g} является производящим рядом корреляторов в роде g. Дубровин и Жанг[14] предложили, как по потенциалу задавать набор формальных рядов, и исследовали проблему существования интегрируемой гамильтоновой системы УрЧП такой, что построенный набор формальных рядов является её решением. Если такая интегрируемая система существует, то она называется *иерархией Дубровина–Жанга*, соответствующей заданной КогТП.

Гамильтонианы и скобка Пуассона искомой интегрируемой системы, рассматриваемые с точностью до $O(\varepsilon^{2g+2})$, контролируются корреляторами КогТП до рода g, включительно. Поэтому можно пытаться находить всё более точно гамильтонианы и скобку Пуассона иерархии, рассматривая корреляторы КогТП последовательно всё большего рода. Дубровиным и Жангом[14] было доказано существование иерархии Дубровина–Жанга в приближении до рода 1. Стоит отметить, что продвижение до следующего рода выглядит затруднительно в рамках рассматривавшегося подхода. Для вычислений в родах 0 и 1 ключевую роль играет выражение для псикласса через граничные классы в группах когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ при $g \leq 1$. При $g = 2$ такое выражение неизвестно. В принципе, имеются другие соотношения в когомологиях пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, которые можно использовать для получения соотношений на корреляторы КогТП, однако сложность этих соотношений резко растёт при повышении рода.

Стоит отметить, что при рассмотрении КогТП во всех родах Дубровин и Жанг развили свою теорию[15] в предположении, что КогТП является однородной и полупростой. Искомая гамильтонова иерархия строится применением преобразования квази-Миуры к базовой иерархии. При этом преобразование квази-Миуры однозначно задаётся так называемыми *вирасоровскими условиями*. В рамках этой конструкции, априори, гамильтонианы и скобка Пуассона получающейся иерархии могут иметь особенности. Дубровин и Жанг выдвинули гипотезу, что особенности отсутствуют, то есть построенная иерархия является иерархией Дубровина–Жанга, соответствующей заданной КогТП. С другой стороны, при рассмотрении приближения до рода 1 в работе Дубровина и Жанга[14] существование иерархии Дубровина–Жанга было доказано в полной общности, без предположения полупростоты или однородности.

Вычисление иерархии Дубровина–Жанга для заданной КогТП даёт утверждение виттеновского типа. Сама гипотеза Виттена эквивалентна при этом утверждению, что иерархия Дубровина–Жанга для тривиальной КогТП совпадает с иерархией КдФ. Ряд известных ре-

[14] B. Dubrovin, Y. Zhang. Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation. // Communications in Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 198, N. 2. — P. 311–361.

[15] B. Dubrovin, Y. Zhang. Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants. // arXiv:math/0108160.

зультатов об интегрируемых системах, контролирующих интересные КогТП такие, как КогТП, задаваемая классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$[19], спинорная КогТП[16], КогТП, соответствующая простой особенности[17], укладывается в теорию Дубровина–Жанга. Таким образом, теория Дубровина–Жанга даёт единый подход для утверждений и гипотез виттеновского типа.

Мы приходим к выводу, что гипотетически теория Дубровина–Жанга даёт утвердительный ответ на вопрос 0.1, но при этом существование иерархии Дубровина–Жанга было установлено только в ряде конкретных примеров. Однако, теория Дубровина–Жанга не даёт удовлетворительного ответа на вопрос 0.2. Если выйти за пределы рода 0, то имеющиеся результаты очень технические и не дают ясной картины о роли геометрии пространств модулей.

Цели и задачи

Обобщение теории Дубровина–Жанга для произвольных КогТП. Доказательство существования иерархии Дубровина–Жанга в широком классе случаев. Явное вычисление иерархии Дубовина–Жанга в конкретных важных примерах. Альтернативное построение интегрируемой системы по произвольной КогТП, позволяющее прояснить роль геометрии пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Установление связи альтернативной конструкции с конструкцией Дубровина–Жанга.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

- Построено обобщение теории Дубровина–Жанга для произвольной КогТП. Доказана единственность иерархии, обладающей рядом естественных свойств и у которой потенциал КогТП задаёт решение. Доказано существование иерархии Дубровина–Жанга для произвольной полупростой КогТП. Таким образом, дан утвердительный ответ на вопрос 0.1 в классе случаев, значительно превышающем уже известные случаи.

- Явно вычислена иерархия Дубровина–Жанга для КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа, включающим параметр μ. Было доказано, что иерархия связана простым преобразованием с *иерархией уравнения двухслойной жидкости*. При $\mu = 0$ рассматриваемая КогТП совпадает с тривиальной КогТП. С другой стороны, иерархия уравнения двухслойной жидкости при $\mu = 0$ совпадает с иерархией КдФ. Значит, при

[16] C. Faber, S. Shadrin, D. Zvonkine. Tautological relations and the r-spin Witten conjecture. // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Quatriéme Série. — 2010. — Vol. 43, N. 4. — P. 621–658.

[17] H. Fan, T. Jarvis, Y. Ruan. The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory. // Annals of Mathematics. — 2013. — Vol. 178, N. 1. — P. 1–106.

$\mu = 0$ доказанное утверждение эквивалентно гипотезе Виттена. Таким образом, доказано однопараметрическое обобщение гипотезы Виттена. Важность полученного результата также состоит в том, что это является первым явным вычислением иерархии Дубровина–Жанга для неоднородной КогТП.

- Доказано соотношение на определённые классы когомологий в пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, называемые *DR-циклами*, в группах когомологий $H^{2g+2}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$. Это соотношение, которое мы называем *соотношением коммутативности*, является обобщением на все рода соотношения ассоциативности в когомологиях $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \mathbb{Q})$.

- Стартуя с произвольной КогТП, предложена новая конструкция интегрируемой гамильтоновой системы УрЧП, названной *DR-иерархией*. Коммутация гамильтонианов является непосредственным следствием соотношения коммутативности на DR-циклы. Таким образом, дан в полной мере удовлетворительный ответ на вопрос 0.2.

- Доказано, что DR-иерархия наделена богатой алгебраической структурой. Во-первых, все гамильтонианы DR-иерархии можно восстановить, зная лишь одну выделенную линейную комбинацию гамильтонианов, причём с помощью необычайно простого рекурсивного соотношения. Удивительным образом, это рекурсивное соотношение никогда ранее в литературе не встречалось. Во-вторых, построено квантование DR-иерархии. Заметим, что уже в простейшем примере получается квантование иерархии КдФ, которое ранее в литературе не встречалось. Стартуя с произвольной однородной КогТП, приведена явная формула для дифференциального оператора, и выдвинута гипотеза, что этот оператор наделяет DR-иерархию бигамильтоновой структурой. Приведено доказательство некоторых частей гипотезы, и также она проверена в ряде примеров.

- Для произвольной КогТП построено преобразование Миуры, и, в предположении, что для заданной КогТП существует иерархия Дубровина–Жанга, выдвинута гипотеза, что эта иерархия связана с DR-иерархией построенным преобразованием Миуры. Гипотеза доказана в приближении до рода 1, включительно, а также в ряде примеров.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической топологии и теории интегрируемых систем.

Методология и методы исследования

В работе используются методы алгебраической топологии, алгебраической геометрии и теории интегрируемых систем.

Положения, выносимые на защиту

- Решена проблема существования иерархии Дубровина–Жанга для произвольной полупростой КогТП. Более того, построено обобщение теории Дубровина–Жанга для произвольной КогТП.

- Решена проблема явного описания иерархии Дубровина–Жанга для КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа. Полученный результат даёт однопараметрическое обобщение гипотезы Виттена.

- Доказано соотношение на определённые классы когомологий в пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, называемые *DR-циклами*, в группах когомологий $H^{2g+2}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$. Это соотношение является обобщением на все рода соотношения ассоциативности в когомологиях $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \mathbb{Q})$. На основе этого соотношения, стартуя с произвольной КогТП, предложена новая конструкция интегрируемой гамильтоновой системы УрЧП, названной *DR-иерархией*. Тем самым, развито новое направление в теории интегрируемых систем, связанных с геометрией пространств модулей кривых.

- Используя геометрические свойства пространств модулей кривых, доказано, что DR-иерархия наделена богатой алгебраической структурой, включающей рекурсивное соотношение нового типа и квантование, а также приведена явная формула для дифференциального оператора, гипотетически задающего бигамильтонову структуру DR-иерархии. Тем самым развиты новые методы в теории интегрируемых систем, основывающиеся на геометрии пространств модулей кривых.

- Открыто перспективное направление в рамках изучения иерархий Дубровина–Жанга: для произвольной КогТП построено преобразование Миуры, и выдвинута гипотеза, что это преобразование связывает иерархию Дубровина–Жанга и DR-иерархию.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты работы докладывались автором на семинаре “Геометрия, топология и математическая физика” (руководители С. П. Новиков, В. М. Бухштабер), семинаре лаборатории кластерной геометрии (НИУ Высшая школа экономики), семинаре лаборатории алгебраической

геометрии (НИУ Высшая школа экономики), заседании Московского математического общества, семинаре Центра перспективных исследований им. И. М. Кричевера (Сколтех), семинаре "Seminar in Real & Complex Geometry" университета Тель-Авива, семинаре "Beijing-Novosibirsk Seminar on Geometry and Mathematical Physics", семинаре "BIMSA Integrable Systems Seminar", семинаре математического факультета университета Падуи, семинаре Центра интегрируемых систем Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, семинаре "Algebraic geometry and moduli seminar" Федерального института технологий Цюриха, семинаре "Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика" (Независимый московский университет), а также на конференциях, в том числе:

- международные конференции "Dynamics in Siberia – 2019, 2021, 2022, 2024", Новосибирск;
- конференции "Дни геометрии в Новосибирске – 2020, 2021, 2022, 2023", Новосибирск;
- международные конференции "Integrable Systems and Their Applications - 2022, 2023", Сочи;
- международная конференция "SCMS Workshop on enumerative geometry", Шанхай, Китай, 11–15 марта, 2024 г.;
- международная конференция "Workshop on Geometry and Integrable Systems", Пекин, Китай, 15–16 января 2024 г.;
- международная школа-конференция "Enumerative geometry, quantisation and moduli spaces", Четраро, Италия, 4–8 сентября 2023 г.;
- международная конференция "At the Crossroads of Topology and Enumerative Geometry", Иерусалим, Израиль, 5–9 июня 2023 г.;
- международная конференция "Moduli spaces: theory and coding", Ле Диаблерэ, Швейцария, 27 февраля – 3 марта 2023 г.;
- международная конференция "Integrability, Enumerative Geometry and Quantization", Стони-Брук, США, 29 августа – 2 сентября, 2022 г. (удалённый доклад):
- международная конференция "Nonlinear Waves and Frobenius Structures in Geometry and Physics", памяти Бориса Анатольевича Дубровина, Москва, 17–19 ноября 2021 г.;
- международная конференция "Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics", памяти Бориса Анатольевича Дубровина, проведена удалённо, 28 июня – 2 июля 2021 г.;
- "Конференция международных математических центров мирового уровня", Сочи, 9–13 августа, 2021 г.;

– международная конференция “International Congress on Mathematical Physics”, Женева, Швейцария, 2–7 августа 2021 г.;

– международная конференция “3rd IBS-CGP & BICMR Joint Symplectic Geometry Workshop”, Поханг, Южная Корея, 24–26 сентября 2019 г.;

– международная конференция “Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives”, посвящённая 80-летнему юбилею Владимира Евгеньевича Захарова, Ярославль, 5–9 августа 2019 г.;

– международная конференция “Workshop on Geometry and Integrable Systems”, Чэнду, Китай, 19–23 ноября 2018 г.;

– международная конференция “Flat Surfaces and Algebraic Curves’, Обервольфах, Германия, 16–22 сентября 2018 г.;

– международная конференция “Russian–Chinese Conference on Integrable Systems and Geometry”, Санкт-Петербург, 18–26 августа 2018 г.;

– международная конференция “Differential Algebra and Related Topics IX”, Лидс, Великобритания, 30 июля – 2 августа 2018 г.;

– международная конференция “6th International Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, and Topological Recursion”, Москва, 4–9 июня 2018 г.;

– международная конференция “Geometry of Integrable systems”, Триест, Италия, 7–9 июня 2017 г.;

– международная конференция “Workshop on Enumerative Geometry”, Париж, Франция, 13–17 марта 2017 г.;

– международная конференция “Moduli space, conformal field theory and matrix models”, Окинава, Япония, 24–27 октября 2016 г.;

– международная конференция “Random Geometry and Physics”, Париж, Франция, 17–21 октября 2016 г.;

– международная конференция “5th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Numbers and Cohomological Field Theories”, Москва, 6–11 июня 2016 г.;

– международная конференция “2016 Workshop on Symplectic Geometry and Mathematical Physics”, Пекин, Китай, 23–27 мая 2016 г.;

– международная конференция “Xmas Workshop 2014 on Moduli Spaces and Integrable Systems”, Генуя, Италия, 18–20 декабря 2014 г.;

– международная конференция “Mirror Symmetry and Spin Curves”, Кортона, Италия, 28–30 апреля 2014 г.;

– международная конференция “Cohomology of the moduli space of curves”, Цюрих, Швейцария, 10–12 октября 2013 г.;

– международная конференция “Hamiltonian PDEs, Frobenius Manifolds and Deligne–Mamford Moduli Spaces”, Триест, Италия, 16–20 сентября 2013 г.;

– международная конференция “Analysis and Singularities”, посвящённая 75-летию со дня рождения Владимира Игоревича Арнольда, Москва, 17–21 декабря 2012 г;

– международная конференция “Algebraic Structures in Integrable Systems”, Москва, 3–7 декабря 2012 г.;

– международная конференция “3rd Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, Knots, and Topological Recursion”, Москва, 28 мая – 2 июня 2012 г.;

– международная конференция “Contemporary Ways of Integrability”, Лиссабон, Португалия, 16–19 мая 2012 г.

Основное содержание работы

Диссертация состоит из введения, 3-х глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, кратко рассмотрена история задач и их современное состояние, сформулированы основные результаты и описано содержание работы.

В первой главе мы напоминаем необходимые сведения о геометрии пространств модулей стабильных кривых, доказываем соотношение коммутативности, в котором участвуют DR-циклы, и подробно обсуждаем известные результаты о когомологических теориях поля. Далее мы приводим нужные нам результаты из теории эволюционных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной, а также доказываем ряд результатов об однозначной восстанавливаемости интегрируемых систем по ограниченным данным.

§1.1 посвящён геометрии пространств модулей.

В §1.1.1 мы вводим понятие *стабильной кривой*, а также их пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

В §1.1.2 мы определяем основные отображения между пространствами модулей: *отображения забывания*

$$\pi_{n+1}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

и два типа *отображений склейки*

$$\begin{aligned} &\mathrm{gl}_{I,J}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,|J|+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n}, && I \sqcup J = [n], \\ &\widetilde{\mathrm{gl}}_{i,j}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}, && 1 \le i,j \le n+2,\ i \ne j, \end{aligned}$$

где мы используем обозначение $[n] := \{1,\dots,n\}$. Нам будет полезно ввести обозначение для некоторой композиции описанных выше отображений склейки. А именно, для целого $k \ge 1$ мы рассмотрим отображение

$$\mathrm{gl}^{(k)}_{I,J}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+k} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,|J|+k} \to \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2+k-1,n}, \quad I \sqcup J = [n],$$

осуществляющее склейку k пар отмеченных точек. Ясно, что $\mathrm{gl}^{(1)}_{I,J} = \mathrm{gl}_{I,J}$.

В §1.1.3 на основе *пси-классов* $\psi_i \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$, *каппа-классов*

$$\kappa_j := (\pi_{n+1})_*(\psi_{n+1}^{j+1}) \in H^{2j}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$$

и отображений склейки, мы вводим понятие *тавтологических когомологий*, образующих подалгебру в алгебре $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$. Мы приводим простейшие соотношения между тавтологическими классами когомологий. В частности, мы приводим *соотношение ассоциативности*

$$\sum_{\substack{I\sqcup J=[n]\\ i,j\in I\not\ni k,l}} (\mathrm{gl}_{I,J})_*(1) = \sum_{\substack{I\sqcup J=[n]\\ i,k\in I\not\ni j,l}} (\mathrm{gl}_{I,J})_*(1) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n},\mathbb{Q}),$$

где $i,j,k,l \in [n]$ – фиксированные попарно различные числа. Соотношение ассоциативности играет ключевую роль для установления связи между топологией пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ и интегрируемыми системами гидродинамического типа.

В §1.1.4 мы подробно останавливаемся на *DR-циклах*

$$\mathrm{DR}_g(a_1,\dots,a_n) \in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}), \quad a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Z},\ \sum a_i = 0,$$

являющихся тавтологическими классами когомологий и играющих центральную роль в данной работе. Мы приводим определение DR-циклов, основанное на пространстве модулей *стабильных относительных отображений* в комплексную проективную прямую $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, а также их основные свойства. Мы доказываем ключевое *соотношение коммутативности*, в котором участвуют DR-циклы. Сформулируем этот результат. Для вектора $A = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^n$ и подмножества $I \subset [n]$ введём обозначения $a_I := \sum_{i\in I} a_i$ и $A_I := (a_{i_1},\dots,a_{i_{|I|}})$, где $i_1 < \ldots < i_{|I|}$ – числа, из которых состоит подмножество $I \subset [n]$. Пусть $n \ge 2$ и рассмотрим вектор $A = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$\sum a_i = 0$. Для пары чисел (a,b), равной $(1,2)$ или $(2,1)$, определим следующий когомологический класс:

$$D_{a,b;A,g} := \sum_{\substack{I\sqcup J=[n+2]\\ n+a\in I,\, n+b\in J\\ a_{I\setminus\{n+a\}}>0}} \sum_{\substack{g_1,g_2\geq 0,\, p\geq 1\\ g_1+g_2+p-1=g}} \sum_{\substack{K=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p_{\geq 1}\\ a_{I\setminus\{n+a\}}=\sum_{j=1}^p k_j}} \frac{\prod_{j=1}^p k_j}{p!}\times$$
$$\times\, (\mathrm{gl}^{(p)}_{I,J})_*\left(\mathrm{DR}_{g_1}(A_{I\setminus\{n+a\}},0,-K)\times \mathrm{DR}_{g_2}(A_{J\setminus\{n+b\}},0,K)\right)\in H^{2g+2}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2},\mathbb{Q}).$$

Теорема 1.2. *Для любых $g\geq 0$, $n\geq 2$ и вектора $A=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n$, $\sum a_i=0$, выполняется соотношение*

$$D_{1,2;A,g} = D_{2,1;A,g}\in H^{2g+2}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2},\mathbb{Q}).$$

Мы называем это соотношение соотношением коммутативности на DR-циклы.

Мы показываем, что соотношение ассоциативности является частным случаем соотношения коммутативности.

В §1.2 мы обсуждаем когомологические теории поля (КогТП).

В §1.2.1 мы приводим определение КогТП.

Определение. Рассмотрим конечномерное векторное пространство V над полем $\mathbb{C}$. Зафиксируем невырожденную симметричную билинейную форму $\eta\colon V\times V\to\mathbb{C}$, традиционно называемую *метрикой*, на пространстве V, а также вектор $e\in V$, который мы будем называть *единицей*. *Когомологической теорией поля* (КогТП) называется набор линейных отображений $c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ (через $H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ мы обозначаем пространство когомологий чётной степени), заданных для всех стабильных пар $(g,n)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

1. Отображения $c_{g,n}$ являются эквивариантными относительно действия симметрической группы S_n. Здесь мы рассматриваем S_n-действие на тензорной степени $V^{\otimes n}$, получаемое перестановками множителей, а S_n-действие на когомологиях $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ индуцируется S_n-действием на пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, задаваемым перестановками отмеченных точек.

2. Для любых векторов $v,w\in V$ выполняется равенство $\eta(v,w)=c_{0,3}(e\otimes v\otimes w)\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,3})=\mathbb{C}$.

3. Для любой стабильной пары (g,n) и векторов $v_1,\ldots,v_n\in V$ выполняется равенство

$$\pi_{n+1}^*\left(c_{g,n}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)\right)=c_{g,n+1}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n\otimes e).$$

4. Выберем базис $e_1,\ldots,e_{\dim V}$ в пространстве V и рассмотрим матрицу $(\eta_{\alpha\beta})$, где $\eta_{\alpha\beta}:=\eta(e_\alpha,e_\beta)$, которую мы также как и метрику будем обозначать через η. Положим $(\eta^{\alpha\beta}):=$

η^{-1}. Рассмотрим отображение склейки $\mathrm{gl}_{[n_1],[n_1+n_2]\setminus[n_1]}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1}\to\overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$. Тогда для любых векторов $v_1,\dots,v_{n_1+n_2}\in V$ выполняется равенство

$$\mathrm{gl}^*_{[n_1],[n_1+n_2]\setminus[n_1]}\left(c_{g_1+g_2,n_1+n_2}(v_1\otimes\dots\otimes v_{n_1+n_2})\right) = \\ = c_{g_1,n_1+1}(v_1\otimes\dots\otimes v_{n_1}\otimes e_\alpha)\times c_{g_2,n_2+1}(v_{n_1+1}\otimes\dots\otimes v_{n_1+n_2}\otimes e_\beta)\eta^{\alpha\beta}.$$

Схожее свойство выполняется и для отображения склейки $\widetilde{\mathrm{gl}}_{n+1,n+2}\colon\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}\to\overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}$:

$$\widetilde{\mathrm{gl}}^*_{n+1,n+2}\left(c_{g+1,n}(v_1\otimes\dots\otimes v_n)\right) = c_{g,n+2}(v_1\otimes\dots\otimes v_n\otimes e_\alpha\otimes e_\beta)\eta^{\alpha\beta}.$$

Выполнение свойства 4 не зависит от выбора базиса в пространстве V. Векторное пространство V часто называют *фазовым пространством* когомологической теории поля, а его размерность – *рангом* когомологической теории поля. Через A^α мы будем обозначать коэффициенты разложения единицы e по базису, $A^\alpha e_\alpha = e$.

Далее мы вводим понятие *корреляторов* заданной КогТП,

$$\langle\tau_{d_1}(v_1)\dots\tau_{d_n}(v_n)\rangle_{g,n} := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)\prod_{i=1}^n\psi_i^{d_i},\quad v_1,\dots,v_n\in V,\quad d_1,\dots,d_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},$$

а также *потенциала*

$$\mathcal{F}(t^*_*,\varepsilon) = \sum_{g\geq 0}\varepsilon^{2g}\mathcal{F}_g(t^*_*) := \sum_{g,n\geq 0}\frac{\varepsilon^{2g}}{n!}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ d_1,\dots,d_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}}\left\langle\prod_{i=1}^n\tau_{d_i}(e_{\alpha_i})\right\rangle_{g,n}\prod_{i=1}^n t^{\alpha_i}_{d_i}\in\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]].$$

Далее в §1.2.2–1.2.3 мы приводим основные примеры КогТП, а также вводим понятия однородных и полупростых КогТП.

В §1.2.4 мы вводим понятие КогТП в роде 0, а также соответствующего *потенциала Дубровина–Фробениуса*

$$F(t^1,\dots,t^N) := \sum_{n\geq 3}\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]}\left\langle\prod_{i=1}^n\tau_0(e_{\alpha_i})\right\rangle_{0,n}\frac{\prod_{i=1}^n t^{\alpha_i}}{n!}.$$

Мы формулируем результат Манина о том, что сопоставление КогТП в роде 0 её потенциала Дубровина–Фробениуса устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством КогТП в роде 0 и множеством решений *расширенной системы уравнений ассоциативности*

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha\partial t^\beta\partial t^\mu}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\nu\partial t^\gamma\partial t^\delta} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^\delta\partial t^\beta\partial t^\mu}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\nu\partial t^\gamma\partial t^\alpha},\qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in[N],$$
$$A^\nu\frac{\partial^3 F}{\partial t^\nu\partial t^\alpha\partial t^\beta} = \eta_{\alpha\beta},\qquad \alpha,\beta\in[N].$$

В §1.2.5 мы приводим результат Телемана о классификации полупростых КогТП, который будет важен для доказательства существования иерархии Дубровина–Жанга для произвольной полупростой КогТП.

§1.3 посвящён необходимым нам результатам из теории эволюционных УрЧП с одной пространственной переменной.

В §1.3.1 мы вводим алгебру *дифференциальных многочленов* от переменных $u^1, \dots, u^N$

$$\widehat{\mathcal{A}}_u := \mathbb{C}[[u^*]][u^*_{\geq 1}][[\varepsilon]],$$

пространство *локальных функционалов*

$$\widehat{\Lambda}_u := \widehat{\mathcal{A}}_u / (\mathrm{Im}(\partial_x) \oplus \mathbb{C}[[\varepsilon]]),$$

скобки Пуассона на пространстве локальных функционалов, а также понятие гамильтоновой системы УрЧП. Мы обсуждаем определённый тип замен переменных в теории эволюционных УрЧП, называемые *преобразованиями Миуры*. Далее мы обсуждаем, как формальное разложение в ряд Фурье позволяет установить изоморфизм алгебры дифференциальных многочленов с некоторой другой алгеброй. Эта конструкция будет для нас важна при построении DR-иерархий, стартуя с произвольной КогТП. Мы кратко обсуждаем понятие бигамильтоновых систем УрЧП. В конце §1.3.1 мы вводим расширение пространства локальных функционалов и *скобку Схоутена–Нийенхейса* на нём, которая даёт удобный инструмент для работы со скобками Пуассона.

В §1.3.2 мы доказываем ряд результатов о возможности однозначно восстановить интегрируемую систему, исходя из ограниченного набора данных.

Теорема 1.28. *Рассмотрим алгебру дифференциальных многочленов от одной переменной u и пару согласованных УрЧП*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = P, \quad P \in \widehat{\mathcal{A}}_{u;0}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = Q, \quad Q \in \widehat{\mathcal{A}}_{u;0}, \end{cases}$$

таких, что $P = \varepsilon f(u) u_x + O(\varepsilon^2)$, где $f'(u) \neq 0$. Тогда Q имеет вид $Q = \varepsilon h(u) u_x + O(\varepsilon^2)$ и, более того, Q однозначно определяется по P и h.

Нам важно следствие этого результата в случае гамильтоновых УрЧП.

Следствие 1.29. *Рассмотрим алгебру дифференциальных многочленов и пространство локальных функционалов от одной переменной u. Зафиксируем локальный функционал $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_{u;0}$ вида $\overline{h} = \int p(u)dx + O(\varepsilon)$, где $p'''(u) \neq 0$.*

1. *Предположим, что для локального функционала $\overline{g} \in \widehat{\Lambda}_{u;0}$ выполняется $\{\overline{h}, \overline{g}\}_{\partial_x} = 0$. Тогда $\overline{g}$ определяется по $\overline{h}$ и $\mathrm{Coef}_{\varepsilon^0}(\overline{g})$ однозначно.*

2. *Если для локальных функционалов $\overline{g}_1, \overline{g}_2 \in \widehat{\Lambda}_{u;0}$ выполняется $\{\overline{h}, \overline{g}_1\}_{\partial_x} = \{\overline{h}, \overline{g}_2\}_{\partial_x} = 0$, тогда $\{\overline{g}_1, \overline{g}_2\}_{\partial_x} = 0$.*

Теорема 1.31. *Рассмотрим целое число $N \geq 1$ и алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_w$, соответствующую формальным переменным $w^1, \dots, w^N$. Рассмотрим интегрируемую систему*

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^\beta_b} = \partial_x P^\alpha_{\beta,b}, \quad P^\alpha_{\beta,b} \in \widehat{\mathcal{A}}_{w;0}, \quad \alpha, \beta \in [N],\, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

и ненулевой вектор $(A^1, \dots, A^N) \in \mathbb{C}^N$, удовлетворяющие свойствам

$$P^\alpha_{\beta,b}\big|_{w^*_*=\varepsilon=0} = 0, \qquad P^\alpha_{\mathbb{1},0} = w^\alpha, \qquad \frac{\partial P^\alpha_{\beta,b}}{\partial w^{\mathbb{1}}} = \begin{cases} P^\alpha_{\beta,b-1}, & \text{если } b \geq 1, \\ \delta^\alpha_\beta, & \text{если } b = 0, \end{cases}$$

где $P^\alpha_{\mathbb{1},0} := A^\gamma P^\alpha_{\gamma,0}$ и $\frac{\partial}{\partial w^{\mathbb{1}}} := A^\gamma \frac{\partial}{\partial w^\gamma}$. Тогда все дифференциальные многочлены $P^\alpha_{\beta,b}$ однозначно определяются набором из N дифференциальных многочленов $(P^1_{\mathbb{1},1}, \dots P^N_{\mathbb{1},1})$.

Изложенные выше три результата важны для установления связи между различными интегрируемыми системами, состоящими из бесконечного числа потоков.

В §1.3.3 мы напоминаем конструкцию иерархии Кортевега–де Фриза, а также описание её бигамильтоновой структуры.

В §1.3.4, стартуя с произвольного решения расширенной системы уравнений ассоциативности, мы приводим конструкцию *базовой иерархии*. Эта иерархия была введена Дубровиным[13], однако наш подход несколько отличается, так как основан на использовании КогТП в роде 0, соответствующей заданному решению.

В §1.3.5 мы доказываем ряд вспомогательных результатов технического характера.

Вторая глава является центральной в данной работе. Стартуя с произвольной КогТП, мы приводим конструкцию гамильтоновой системы УрЧП, которую мы называем *DR-иерархией*, устанавливаем различные её свойства, а также явно вычисляем DR-иерархию для ряда конкретных КогТП, устанавливая связь с известными иерархиями математической физики.

В §2.1, стартуя с произвольной КогТП $\left\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\right\}$, мы приводим конструкцию DR-иерархии. А именно, мы рассматриваем интеграл

$$P_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n}(a_1,\dots,a_n) := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(-\sum a_i, a_1, \dots, a_n\right) \lambda_g \psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).$$

Этот интеграл является однородным многочленом степени $2g$ от переменных $a_1, \dots, a_n$:

$$P_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n}(a_1,\dots,a_n) = \sum_{\substack{b_1,\dots,b_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ b_1+\dots+b_n=2g}} P^{b_1,\dots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n} a_1^{b_1} \cdots a_n^{b_n}, \quad P^{b_1,\dots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n} \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим теперь формальные переменные $u^1, \dots, u^N$ и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_u$. Определим следующие дифференциальные многочлены:

$$g_{\alpha,d}(u^*_*,\varepsilon) := \sum_{\substack{g \geq 0 \\ n \geq 1+\delta_{g,0}}} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in [N]} \sum_{\substack{b_1,\dots,b_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ b_1+\dots+b_n=2g}} P^{b_1,\dots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n} u^{\alpha_1}_{b_1} \cdots u^{\alpha_n}_{b_n} \in \widehat{\mathcal{A}}_{u;0}, \quad \alpha \in [N],\, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Рассмотрим локальные функционалы

$$\overline{g}_{\alpha,d} := \int g_{\alpha,d} dx \in \widehat{\Lambda}_{u;0}$$

и пуассонов оператор $\eta^{-1}\partial_x = (\eta^{\alpha\beta}\partial_x)$.

Теорема 2.1. *Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in [N]$ и $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется равенство*

$$\{\overline{g}_{\alpha_1,d_1}, \overline{g}_{\alpha_2,d_2}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = 0.$$

Ключевую роль в доказательстве теоремы играет соотношении коммутативности из теоремы 1.2. Таким образом, дан в полной мере удовлетворительный ответ на вопрос 0.2.

Определение. Интегрируемая гамильтонова система уравнений, задаваемая локальными функционалами $\overline{g}_{\beta,d}$, $\beta \in [N]$, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, вместе с пуассоновым оператором $\eta^{-1}\partial_x$,

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t^\beta_d} = \eta^{\alpha\mu}\partial_x \frac{\delta \overline{g}_{\beta,d}}{\delta u^\mu}, \quad \alpha, \beta \in [N], \quad d \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

называется *DR-иерархией.*

Мы устанавливаем простейшие свойства DR-иерархии. В частности, мы показываем, что в роде 0 DR-иерархия совпадает с базовой иерархией.

В §2.2 мы вычисляем DR-иерархию в конкретных примерах.

Теорема 2.7. *DR-иерархия, соответствующая тривиальной когомологической теории поля с $V = \mathbb{C}$, $e_1 = e = 1$, $(e_1, e_1) = 1$ и $c_{g,n}(e_1^{\otimes n}) = 1 \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, совпадает с иерархией КдФ.*

Теорема 2.9. *DR-иерархия, соответствующая КогТП*

$$c_{g,n}(e_1^{\otimes n}) = 1 + \mu\lambda_1 + \ldots + \mu^g\lambda_g \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}), \quad V = \mathbb{C}, \quad e_1 = e = 1, \quad (e_1, e_1) = 1, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

совпадает с иерархией уравнения двухслойной жидкости, первым нетривильным уравнением которой является

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t_1} =& u u_x + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g-1}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}\partial_x^{2g+1}u = \\ =& \partial_x \frac{\delta}{\delta u}\int \left(\frac{u^3}{6} + \sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\mu^{g-1}\frac{|B_{2g}|}{2(2g)!}u\partial_x^{2g}u\right)dx.\end{aligned}$$

Для того, чтобы сформулировать следующий результат, нам необходимо напомнить конструкцию *расширенной иерархии Тоды.* Рассмотрим формальные переменные v^1, v^2 и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_v$. Рассмотрим оператор

$$L := \Lambda + v^1 + qe^{v^2}\Lambda^{-1}.$$

Расширенная иерархия Тоды задаётся двумя цепочками локальных функционалов $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p}, \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p}$, $p \geq 0$, и пуассоновым оператором K^{Td}. Локальные функционалы $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p}$ и пуассонов оператор K^{Td} задаются равенствами

$$\begin{aligned}
\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p} &:= \int \left(\frac{2}{(p+1)!} \operatorname{res}(L^{p+1}(\log L - \log q - H_{p+1})) \right) dx, && p \geq 0,\\
\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p} &:= \frac{1}{(p+2)!} \int \operatorname{res}(L^{p+2}) dx, && p \geq 0,\\
K^{\mathrm{Td}} &:= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1}(e^{\varepsilon\partial_x} - 1) \\ \varepsilon^{-1}(1 - e^{-\varepsilon\partial_x}) & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где $H_p := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$, если $p \geq 1$, и $H_0 := 0$.

Определим 2×2 матрицы с комплексными коэффициентами $S_0 := 1, S_1, S_2, \ldots$ равенствами

$$(S_{2k-1})^\alpha_\beta = \begin{cases} \frac{1}{k!(k-1)!} q^k, & \text{если } \alpha = 1,\ \beta = 2, \\ -\frac{2H_{k-1}}{((k-1)!)^2} q^{k-1}, & \text{если } \alpha = 2,\ \beta = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (S_{2k})^\alpha_\beta = \begin{cases} \left(\frac{1}{(k!)^2} - \frac{2H_k}{k!(k-1)!} \right) q^k, & \text{если } \alpha = \beta = 1, \\ \frac{1}{(k!)^2} q^k, & \text{если } \alpha = \beta = 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $S_i^\dagger$ сопряжённые матрицы: $(S_i^\dagger)^\alpha_\beta := \eta^{\alpha\mu}(S_i)^\nu_\mu \eta_{\nu\beta}$.

Теорема 2.12. *Рассмотрим КогТП, задаваемую классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, где в качестве базиса в фазовом пространстве $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ мы выбираем единицу и класс, двойственный точке. Свяжем переменные v^1, v^2 и u^1, u^2 преобразованием Миуры $v^1(u^*_*, \varepsilon) = e^{\frac{\varepsilon\partial_x}{2}} u^1$, $v^2(u^*_*, \varepsilon) = S(\varepsilon\partial_x)u^2$. Тогда*

$$\overline{g}_{\alpha,p} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (S_i^\dagger)^\mu_\alpha \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\mu,p-i}[u], \quad \alpha = 1, 2, \quad p \geq 0,$$

и $K^{\mathrm{Td}}_u = \eta^{-1}\partial_x$.

Сформулируем теперь результат о связи DR-иерархии, соответствующей спинорной КогТП, и *иерархии Гельфанда–Дикого*. Кратко напомним определение последней. Рассмотрим формальные переменные $f_0, f_1, \ldots, f_{r-2}$ и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_f$. Рассмотрим оператор

$$L := \partial_x^r + \sum_{i=0}^{r-2} \varepsilon^{i-r} f_i \partial_x^i.$$

Иерархией Гельфанда–Дикого называется следующая система УрЧП:

$$\frac{\partial L}{\partial T_m} = \varepsilon^{m-1}[(L^{m/r})_+, L], \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \backslash r\mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Гамильтонианы иерархии задаются формулой

$$\overline{h}^{\mathrm{GD}}_m := -\frac{r}{m+r} \varepsilon^{m+r+1} \int \operatorname{res}(L^{(m+r)/r}) dx, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \backslash r\mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Для описания скобки Пуассона рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$X := \sum_{i=0}^{r-2} (\varepsilon\partial_x)^{-i-1} \circ X_i,$$

где X_i – произвольные дифференциальные многочлены. Обозначим

$$\widetilde{L} := \varepsilon^r L = (\varepsilon\partial_x)^r + \sum_{i=0}^{r-2} f_i (\varepsilon\partial_x)^i.$$

Несложное вычисление показывает, что оператор $\varepsilon^{-1}[X, \widetilde{L}]_+$ имеет вид

$$\varepsilon^{-1}[X, \widetilde{L}]_+ = \sum_{0\le\alpha,\beta\le r-2} \left(\sum_{i\ge 0} K_i^{\mathrm{GD};\alpha\beta} \partial_x^i X_\beta \right) (\varepsilon\partial_x)^\alpha$$

для некоторых дифференциальных многочленов $K_i^{\mathrm{GD};\alpha\beta} \in \widehat{\mathcal{A}}_{f;1-i}$. В итоге, пуассонов оператор $K^{\mathrm{GD}} = (K^{\mathrm{GD};\alpha\beta})$ иерархии Гельфанда–Дикого задаётся формулой $K^{\mathrm{GD};\alpha\beta} := \sum_{i\ge 0} K_i^{\mathrm{GD};\alpha\beta} \partial_x^i$.

Для того, чтобы сформулировать гипотезу о связи DR-иерархии для КогТП $\{c_{g,n}^{r\text{-spin}}\}$ с иерархией Гельфанда–Дикого, удобно ввести промежуточные формальные переменные $w^1, \dots, w^{r-1}$ вместе с соответствующей алгеброй дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_w$. Определим следующие дифференциальные многочлены:

$$w^\alpha(u_*^*, \varepsilon) := \eta^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{g}_{\mu,0}^{r\text{-spin}}}{\delta u^1} \in \widehat{\mathcal{A}}_u,$$
$$w^\alpha(f_{*,*}, \varepsilon) = \frac{1}{(r-\alpha)(-r)^{\frac{r-\alpha-1}{2}}} \varepsilon^{r-\alpha+1} \operatorname{res}(L^{(r-\alpha)/r}) \in \widehat{\mathcal{A}}_f.$$

Таким образом, мы имеем преобразование Миуры, связывающее переменные f_α и u^β.

Гипотеза 2.16. *DR-иерархия для спинорной КогТП $\{c_{g,n}^{r\text{-spin}}\}$ и иерархия Гельфанда–Дикого связаны следующим образом:*

$$\overline{g}_{\alpha,d}^{r\text{-spin}} = \frac{1}{(-r)^{\frac{r+k-1}{2}-d} k!_r} \overline{h}_k^{\mathrm{GD}}[u], \quad \alpha \in [r-1], \quad d \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \quad k = \alpha + rd, \quad k!_r := \prod_{i=0}^{d} (\alpha + ri),$$
$$\eta^{-1}\partial_x = (-r)^{\frac{r}{2}} K_u^{\mathrm{GD}}.$$

Теорема 2.17. *Гипотеза 2.16 верна для $r \le 5$.*

В §2.3 мы доказываем рекурсивное соотношение, позволяющее восстанавливать плотности гамильтонианов DR-иерархии, зная лишь одну выделенную линейную комбинацию гамильтонианов.

Теорема 2.19. *Имеет место следующая система соотношений:*

$$\partial_x \left((D-1) g_{\alpha,d+1} \right) = \{ g_{\alpha,d}, \overline{g}_{\mathbb{1},1} \}_{\eta^{-1}\partial_x}, \quad \alpha \in [N], \quad d \in \mathbb{Z}_{\ge -1},$$

где $D := \varepsilon \frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \sum_{k\ge 0} u_k^\mu \frac{\partial}{\partial u_k^\mu}$ *и* $\overline{g}_{\mathbb{1},1} := A^\alpha \overline{g}_{\alpha,1}$.

Система рекурсивных соотношений из этой теоремы позволяет восстановить все гамильтонианы DR-иерархии, зная лишь один выделенный локальный функционал $\overline{g}_{\mathbb{1},1}$. Удивительным образом, рекурсивное соотношение такого вида в литературе никогда ранее не встречалось.

В §2.4 мы приводим явную формулу для гамильтонианов DR-иерархии в приближении до рода 1.

В §2.5 мы строим квантование DR-иерархии.

В §2.5.1 мы напоминаем определение *умножения Мояля*, задающего квантование пуассоновой алгебры, чьими элементами являются гамильтонианы DR-иерархии. А именно, введём формальные переменные p_a^α, $\alpha \in [N]$, $a \in \mathbb{Z}$, и рассмотрим пространство $\widehat{\mathcal{B}}_N := \mathbb{C}[p^*_{\geq 1}][[p^*_{\leq 0}, \varepsilon]]$. На этом пространстве имеется скобка Пуассона

$$\{\cdot,\cdot\}_\eta \colon \widehat{\mathcal{B}}_N \times \widehat{\mathcal{B}}_N \to \widehat{\mathcal{B}}_N,$$

задаваемая равенством

$$\{\overline{f},\overline{h}\}_\eta := \sum_{a\in\mathbb{Z}} ia\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \overline{f}}{\partial p_a^\alpha} \frac{\partial \overline{h}}{\partial p_{-a}^\beta}.$$

Пользуясь заменой $u_n^\alpha \mapsto \sum_{a\in\mathbb{Z}} (ia)^n p_a^\alpha e^{iax}$, гамильтонианы DR-иерархии можно рассматривать как элементы пространства $\widehat{\mathcal{B}}_N$, коммутирующие относительно скобки Пуассона. Пусть $\hbar$ – формальная переменная. *Умножение Мояля* $\star$ на пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$ определяется формулой

$$f \star g := f\left(e^{\sum_{k>0} i\hbar k m^{\alpha\beta} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_k^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_{-k}^\beta}} \right) g, \quad f,g \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]],$$

Умножение Мояля задаёт на векторном пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$ структуру ассоциативной алгебры, являющуюся деформационным квантованием пуассоновой алгебры $\left(\widehat{\mathcal{B}}_N, \{\cdot,\cdot\}_\eta\right)$.

В §2.5.2 мы строим деформированные гамильтонианы DR-иерархии, которую мы называем *квантовыми гамильтонианами*. Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n} \colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и соответствующую DR-иерархию. Для каждых $\alpha \in [N]$ и $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим следующий элемент в пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$:

$$\begin{aligned}\overline{G}_{\alpha,d} := \sum_{g\geq 0,\, n\geq 1} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ \sum a_i = 0}} \frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!} \times \\ \times \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(0,a_1,\dots,a_n\right) \left(\sum_{j=0}^{g} (i\hbar)^{g-j} (-\varepsilon^2)^j \lambda_j \right) \psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \right).\end{aligned}$$

Ясно, что $\overline{G}_{\alpha,d} = \overline{g}_{\alpha,d} + O(\hbar)$.

Теорема 2.27. *Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in [N]$ и $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется соотношение*

$$[\overline{G}_{\alpha_1,d_1}, \overline{G}_{\alpha_2,d_2}] = 0.$$

Таким образом, набор элементов $\overline{G}_{\alpha,d} \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$, $\alpha \in [N]$, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, задаёт квантование набора гамильтонианов DR-иерархии. Мы будем называть набор элементов $(\overline{G}_{\alpha,d})$ *квантовой DR-иерархией*, а сами элементы $\overline{G}_{\alpha,d}$ – *квантовыми гамильтонианами*.

В §2.5.3 мы разбираем примеры с тривиальной КогТП, КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа, а также с КогТП, задаваемой классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой. В этих случаях мы получаем квантования, соответственно, иерархии КдФ, иерархии уравнения двухслойной жидкости, расширенной иерархии Тоды. Все эти квантования ранее в литературе не встречались.

В §2.5.4 мы строим квантовый аналог рекурсии из теоремы 2.19.

В §2.6 мы приводим явную формулу для дифференциального оператора и формулируем гипотезу, что этот оператор наделяет DR-иерархию бигамильтоновой структурой. Мы проделываем ряд проверок гипотезы: доказываем кососимметричность оператора, проверяем соотношение бигамильтоновой рекурсии в простейшем случае, доказываем гипотезу в роде 0, доказываем, что скобка Схоутена–Нийенхейса построенного оператора с оператором, задающим гамильтонову структуру, равна 0. Мы также доказываем гипотезу для тривильной КогТП, для КогТП, заданной классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой, а также для КогТП, заданной классами Виттена при $r \leq 5$.

Третья глава посвящена иерархиям Дубровина–Жанга. Мы обобщаем теорию Дубровина–Жанга для подкрученных потенциалов произвольных КогТП, формулируем гипотезу о существовании иерархии, а также доказываем теорему о единственности иерархии. Мы доказываем гипотезу о существовании иерархии Дубровина–Жанга для произвольных полупростых КогТП и явно вычисляем иерархию для КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа. Мы формулируем гипотезу об эквивалентности иерархии Дубровина–Жанга и DR-иерархии и доказываем её в ряде случаев.

В §3.1 мы вводим понятие *подкрученного потенциала* произвольной КогТП. В англоязычной литературе эти потенциалы называются “descendent potentials”. Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ с фиксированным базисом $e_1, \dots, e_N \in V$, а также соответствующий потенциал $\mathcal{F}(t_*^*, \varepsilon)$.

Определим следующую группу:

$$G_{\eta,e,-} := \left\{ S(z) = \mathrm{Id} + \sum_{i\geq 1} S_i z^{-i} \in \mathrm{End}(V)[[z^{-1}]] \,\middle|\, \begin{array}{l} S(z)S^*(-z) = \mathrm{Id} \\ S_1(e) = 0 \end{array} \right\},$$

где звёздочкой мы обозначаем сопряжение по отношению к билинейной форме η. Соответствующая алгебра Ли имеет вид

$$\mathfrak{g}_{\eta,e,-} = \left\{ s(z) = \sum_{i\geq 1} s_i z^{-i} \in z^{-1}\,\mathrm{End}(V)[[z^{-1}]] \,\middle|\, \begin{array}{l} s_i^* = (-1)^{i+1} s_i \\ s_1(e) = 0 \end{array} \right\}.$$

Введём следующие дифференциальные операторы:

$$\widehat{s(z)} := -\sum_{i\geq 1,\, j\geq 0} (s_i)^\alpha_\beta q^\beta_{i+j}\frac{\partial}{\partial q^\alpha_j} + \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\sum_{i,j\geq 0}(-1)^{j+1}(s_{i+j+1})^\mu_\alpha \eta_{\mu\beta} q^\alpha_i q^\beta_j, \quad s(z)\in\mathfrak{g}_{\eta,e,-},$$

где мы используем сдвинутые переменные

$$q^\alpha_a := t^\alpha_a - A^\alpha \delta_{a,1}.$$

Подкрученный потенциал

$$\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}(t^*_*,\varepsilon) = \sum_{g\geq 0}\varepsilon^{2g}\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}_g(t^*_*)\in\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]]$$

заданной КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ определяется как

$$\exp(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}) := \exp(C)\exp(\widehat{s(z)})\exp(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}), \quad s(z)\in\mathfrak{g}_{\eta,e,-}, \quad C\in\mathbb{C}.$$

Частным случаем подкрученного потенциала является потенциал Громова–Виттена гладкого проективного многообразия.

В §3.2 мы формулируем гипотезу о существовании гамильтоновой иерархии, у которой заданный подкрученный потенциал задаёт решение и гамильтонианы определённым образом. Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и её подкрученный потенциал $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$. Введём формальные ряды

$$w^{\mathrm{top};\alpha} := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^2\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t^\mu_0\partial t^{\mathbb{1}}_0}, \quad w^{\mathrm{top};\alpha}_n := \frac{\partial^n w^{\mathrm{top};\alpha}}{(\partial t^{\mathbb{1}}_0)^n}, \quad \alpha\in[N], \quad n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Рассмотрим алгебру $\widehat{\mathcal{A}}_w$ дифференциальных многочленов от переменных $w^1,\dots,w^N$.

Следующую гипотезу мы называем *обобщённой гипотезой Дубровина–Жанга.*

Гипотеза 3.5. *Рассмотрим произвольную КогТП и её подкрученный потенциал $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$.*

1. *Для любых $\alpha,\beta\in[N]$ и $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ существует дифференциальный многочлен $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}\in\widehat{\mathcal{A}}_w$ такой, что $\frac{\partial^2\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t^\alpha_a\partial t^\beta_b} = \Omega_{\alpha,a;\beta,b}\big|_{w^\gamma_n = w^{\mathrm{top};\gamma}_n}$.*
2. *В предположении, что первая часть гипотезы верна, существует пуассонов оператор $K^{\mathrm{DZ}} = \left(K^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}\right)$ такой, что $\eta^{\alpha\mu}\partial_x\Omega_{\mu,0;\beta,b} = K^{\mathrm{DZ};\alpha\nu}\frac{\delta\overline{h}_{\beta,b}}{\delta w^\nu}$, где $\overline{h}_{\beta,b} := \int\Omega_{\mathbb{1},0;\beta,b+1}dx$, $\alpha,\beta\in[N]$, $b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Теорема 3.6. *Предположим, что первая часть гипотезы 3.5 верна.*

1. *Набор дифференциальных многочленов $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}$ определяется по подкрученному потенциалу $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ однозначно, и более того выполняется $\deg\Omega_{\alpha,a;\beta,b} = 0$.*

2. *Система УрЧП*

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^\beta_d} = \eta^{\alpha\mu}\partial_x \Omega_{\mu,0;\beta,b}, \quad \alpha,\beta \in [N], \quad d \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

является интегрируемой, и набор формальных рядов $(w^{\mathrm{top};1}|_{t^\gamma_0 \mapsto t^\gamma_0 + A^\gamma x}, \dots, w^{\mathrm{top};N}|_{t^\gamma_0 \mapsto t^\gamma_0 + A^\gamma x})$ *является её решением.*

3. *Если вторая часть гипотезы также верна, то пуассонов оператор* K^{DZ} *определяется по подкрученному потенциалу* $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ *однозначно, и более того оператор* K^{DZ} *имеет степень* 1.

При условии, что гипотеза 3.5 верна для заданной КогТП, указанная выше интегрируемая система называется иерархией Дубровина–Жанга, *соответствующей данному подкрученному потенциалу.*

В §3.3 мы обсуждаем известные примеры иерархий Дубровина–Жанга.

В §3.4 мы доказываем следующую важную теорему, дающую ответ на вопрос 0.1 в широком классе случаев.

Теорема 3.17. *Гипотеза 3.5 верна для произвольной полупростой КогТП.*

В §3.5 мы вычисляем иерархию Дубровина–Жанга для КогТП $\{c_{g,n}\}$ ранга 1, задаваемой равенством

$$c_{g,n}(e_1^{\otimes n}) = 1 + \mu\lambda_1 + \ldots + \mu^g \lambda_g, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Теорема 3.20. *Иерархия Дубровина–Жанга, соответствующая КогТП* $\{c_{g,n}\}$, *связана с иерархией уравнения двухслойной жидкости преобразованием Миуры*

$$w \mapsto u(w_*, \varepsilon) = w + \sum_{g\geq 1} \frac{(-1)^g}{2^{2g}(2g+1)!}\varepsilon^{2g}\mu^g w_{2g}.$$

В §3.6 мы формулируем гипотезу о том, что если для потенциала заданной КогТП иерархия Дубровина–Жанга существует, то она связана с DR-иерархией преобразованием Миуры.

Предложение 3.21. *Рассмотрим произвольную КогТП* $\{c_{g,n}\}$ *и соответствующий потенциал* $\mathcal{F}$. *Тогда существует единственный дифференциальный многочлен* $\mathcal{P} \in \widehat{\mathcal{A}}_{w;-2}$ *такой, что степенной ряд* $\mathcal{F}^{\mathrm{red}} \in \mathbb{C}[[t^*_*, \varepsilon]]$, *определённый равенством* $\mathcal{F}^{\mathrm{red}} := \mathcal{F} - \mathcal{P}|_{w^\gamma_n = w^{\mathrm{top};\gamma}_n}$, *удовлетворяет следующему свойству зануления:*

$$\mathrm{Coef}_{\varepsilon^m} \left.\frac{\partial^n \mathcal{F}^{\mathrm{red}}}{\partial t^{\alpha_1}_{d_1} \dots \partial t^{\alpha_n}_{d_n}}\right|_{t^*_*=0} = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^n d_i \leq m-2.$$

Степенной ряд $\mathcal{F}^{\mathrm{red}}$ *называется приведённым потенциалом нашей КогТП.*

Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\}$ и соответствующую DR-иерархию. Предположим, что для нашей КогТП верна гипотеза 3.5. Рассмотрим соответствующую иерархию Дубровина–Жанга. Помимо переменных $u^1, \dots, u^N$ и $w^1, \dots, w^N$, введём формальные переменные $\widetilde{u}^1, \dots, \widetilde{u}^N$ и дифференциальные многочлены

$$\widetilde{u}^\alpha(u^*_*, \varepsilon) := \eta^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{g}_{\mu,0}}{\delta u^{\mathbb{1}}},$$
$$\widetilde{u}^\alpha(w^*_*, \varepsilon) := w^\alpha - \eta^{\alpha\mu} \partial_x \left\{ \mathcal{P}, \overline{h}_{\mu,0} \right\}_{K^{\mathrm{DZ}}}.$$

Преобразования Миуры, задаваемые дифференциальными многочленами $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*, \varepsilon)$ и $\widetilde{u}^\alpha(w^*_*, \varepsilon)$, определяют сквозное преобразование Миуры $u^\alpha \mapsto w^\alpha(u^*_*, \varepsilon)$.

Гипотеза 3.23. *Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\}$ и предположим, что для неё верна гипотеза 3.5. Тогда соответствующие DR-иерархия и иерархия Дубровина–Жанга связаны сквозным преобразованием Миуры $u^\alpha \mapsto w^\alpha(u^*_*, \varepsilon)$, задаваемым дифференциальными многочленами $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*, \varepsilon)$ и $\widetilde{u}^\alpha(w^*_*, \varepsilon)$.*

Теорема 3.24. *Гипотеза 3.23 верна для*

1. *следующих КогТП:*
   (а) *КогТП из теоремы 2.9,*
   (б) *спинорной КогТП $\{c^{r\text{-}spin}_{g,n}\}$ при $r \leq 5$,*
   (в) *КогТП $\{c^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{g,n}\}$, заданной классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$;*
2. *произвольной КогТП в приближении до рода 1.*

В **заключении** диссертации мы излагаем итоги выполненного исследования и перспективы дальнейшей разработки темы.

Заключение

Диссертация открывает ряд направлений для дальнейших исследований. Помимо выдвинутых гипотез, можно выделить следующие направления:

- Конструкция DR-иерархии чрезвычайно универсальна и может быть применена для различных обобщений когомологических теорий поля:
  - Можно отказываться от наличия ряда свойств из определения КогТП, например, свойств 2 и 3, связанных с наличием единицы, а также можно не требовать выполнения свойства расщепления относительно отображения склейки второго типа из свойства 4.

– Имеется обобщение понятия когомологической теории поля, где отсутствует метрика.

– Имеется естественное обобщение понятия когомологической теории поля, где появляются когомологические классы нечётной степени. В общем случае, теория Громова–Виттена даёт примеры как раз таких обобщённых когомологических теорий поля.

– Можно рассматривать обобщённые когомологические теории поля, где фазовое пространство имеет бесконечную размерность.

Исследование соответствующих обобщённых DR-иерархий, а также связи с обобщениями иерархий Дубровина–Жанга представляется очень интересным.

- Важной открытой проблемой является задача описания класса интегрируемых систем, которые являются (возможно с точностью до преобразования Миуры) DR-иерархиями когомологических теорий поля. В случае систем с одной зависимой переменной имеется гипотетическое описание таких систем, однако случай большего числа зависимых переменных является в полной мере открытым.

- Представляется интересным связать геометрию пространств модулей кривых с интегрируемыми системами эволюционных УрЧП с более чем одной пространственной переменной. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [13], где возник пример системы с двумя пространственными переменными.

Благодарности. Работа была выполнена на Факультете математики Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” и в Центре перспективных исследований имени И.М. Кричевера Сколковского института науки и технологий. Автор выражает благодарность своему научному консультанту С.М. Гусейн-Заде за постоянное внимание и многочисленные полезные советы. Автор благодарен В.М. Бухштаберу за поддержку и внимание.

Работы автора по теме диссертации

[1] А. Ю. Буряк. Новые подходы к иерархиям топологического типа. // Успехи математических наук. — 2017. — Т. 72, № 5. — С. 63–112.

[2] А. Ю. Буряк. DR-иерархии: от пространств модулей кривых к интегрируемым системам. // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2024. — Т. 325. — С. 26–66.

[3] A. Buryak. Double ramification cycles and integrable hierarchies. // Communications in Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 336, N. 3. — P. 1085–1107.

[4] A. Buryak. Dubrovin–Zhang hierarchy for the Hodge integrals. // Communications in Number Theory and Physics. — 2015. — Vol. 9, N. 2. — P. 239–271.

[5] A. Buryak. ILW equation for the Hodge integrals revisited. // Mathematical Research Letters. — 2016. — Vol. 23, N. 3. — P. 675–683.

[6] A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi. Tau-structure for the double ramification hierarchies. // Communications in Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 363, N. 1. — P. 191–260.

[7] A. Buryak, J. Guéré. Towards a description of the double ramification hierarchy for Witten's r-spin class. // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 2016. — Vol. 106, N. 5. — P. 837–865.

[8] A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin. A polynomial bracket for the Dubrovin–Zhang hierarchies. // Journal of Differential Geometry. — 2012. — Vol. 92, N. 1. — P. 153–185.

[9] A. Buryak, P. Rossi. Recursion relations for double ramification hierarchies. // Communications in Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 342. — P. 533–568.

[10] A. Buryak, P. Rossi. Double ramification cycles and quantum integrable systems. // Letters in Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 106, N. 3. — P. 289–317.

[11] A. Buryak, P. Rossi, S. Shadrin. Towards a bihamiltonian structure for the double ramification hierarchy. // Letters in Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 111. — Article number 13.

[12] A. Buryak, P. Rossi. A generalisation of Witten's conjecture for the Pixton class and the noncommutative KDV hierarchy. // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. — 2023. — Vol. 22, N. 6. — P. 2987–3009.

[13] A. Buryak, P. Rossi. Intersection numbers with Pixton's class and the noncommutative KdV hierarchy. // Принято к публикации в журнале Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. — DOI: 10.2422/2036-2145.202312_003.

[14] A. Buryak, S. Shadrin, L. Spitz, D. Zvonkine. Integrals of psi-classes over double ramification cycles. // American Journal of Mathematics. — 2015. — Vol. 137, N. 3. — P. 699–737.

Подписано в печать 21.11.2024

Тираж 80 экз.

Отпечатано в типографии