**ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА НА ДИССЕРТАЦИЮ А. Ю. БУРЯКА «ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ КРИВЫХ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ», ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 1.1.3 – ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ**

Диссертация посвящена топологии пространств модулей стабильных кривых и ее приложениям в математической физике. Геометрия пространств модулей гладких алгебраических кривых изучается, начиная с 19-го века. В 1960-х годах Делинем и Мамфордом была построена компактификация пространства модулей с помощью стабильных кривых, одна из замечательных особенностей которой заключается в том, что она является пространством, близким по своим свойствам к гладким проективным многообразиям. Когомологии пространств модулей стабильных кривых имеют чрезвычайно сложную структур, и в 1980-х годах Мамфорд инициировал систематическое исследование подкольца в когомологиях, порождённого, если не вдаваться в детали, характеристическими классами естественных векторных расслоений над пространством модулей. Это подкольцо сейчас называют кольцом тавтологических когомологий. Описание этого кольца при малом роде и малом числе отмеченных точек выглядело реалистичной задачей, однако в общем случае задача описания кольца тавтологических когомологий выглядела весьма сложной. В этом плане гипотеза Виттена 1991-го года была прорывом, поскольку открывала путь к полному решению задачи вычисления произведения произвольных тавтологических классов, если это произведение лежит в старшей степени. Для этого достаточно знать числа пересечений пси-классов на пространствах модулей кривых, и замечательным образом гипотеза Виттена связывала эти числа с коэффициентами в ряде Тейлора специального решения иерархии Кортевега–де Фриза. Гипотеза Виттена открыла активное направление исследований, в рамках которого вместо чисел пересечений рассматривались более сложные инварианты Громова–Виттена. В самой общей постановке, следуя работе Концевича и Манина, рассматривались корреляторы когомологических теорий поля и предпринималась попытка понять, задаются ли эти корреляторы решением какой-то интегрируемой иерархии. Общая постановка задачи систематически исследовалась в работах Дубровина и Жанга, ими была построена соответствующая иерархия, но оставалась проблема в недоказанности того, что построенная иерархия обладает полиномиальным свойством.

Основным результатом диссертации является новая конструкция интегрируемой системы, названной DR-иерархией, по любой заданной когомологической теории поля. Выгодным отличием предложенной конструкции от конструкции Дубровина–Жанга является то, что все уравнения DR-иерархии строятся как дифференциальные многочлены с коэффициентами, явно заданными как некоторые числа пересечений на

пространствах модулей. Формулы очень явные, но на первый взгляд выглядят неожиданными. Картина проясняется доказательством коммутации потоков, это довольно просто выводится из нового когомологического соотношения, доказанного автором. Автору удается далеко продвинуться в изучении DR-иерархий: оказывается, что многие известные иерархии из математической физики получаются в качестве примера, DR-иерархии обладают комплексом интересных свойств. Наконец, автор выдвигает перспективную гипотезу о связи DR-иерархии и иерархии Дубровина–Жанга. Всё это убедительно доказывает, что новая конструкция интегрируемой системы, предложенная автором, действительно глубока и интересна и вносит солидный вклад в активно развивающуюся область современной математики. Новое когомологическое соотношение, доказанное автором, концептуально проясняет тесную связь топологии пространств модулей кривых и теории интегрируемых систем.

Разберём более подробно содержание диссертации по главам.

В первой главе автор подробно напоминает релевантные сведения из топологии пространств модулей стабильных кривых, а также из теории интегрируемых систем. Из новых результатов, – здесь доказывается ключевое когомологическое соотношение, из которого выводится коммутация потоков DR-иерархии, а также доказывается ряд теорем об однозначной восстанавливаемости интегрируемых систем на основе ограниченных данных. Эти теоремы играют важную роль при вычислении DR-иерархии и иерархии Дубровина–Жанга в конкретных примерах.

Во второй главе приводится конструкция DR-иерархии, она вычисляется в ряде примеров, доказывается серия ее свойств. Интересно, как при этом переплетаются геометрические свойства пространств модулей кривых и структуры из теории интегрируемых систем. Например, формула для пересечения пси-класса с DR-циклом переписывается как некая рекурсия для DR-иерархии, при этом такого рода рекурсии, насколько мне известно, ранее в теории интегрируемых систем не встречались.

Третья глава посвящена иерархиям Дубровина–Жанга, здесь автор также вносит свой существенный вклад. Автор доказал свойство полиномиальности иерархии Дубровина–Жанга для любой полупростой когомологической теории поля. Также автор явно вычислил иерархию Дубровина–Жанга для когомологической теории поля, образованной полным классом Черна расслоения Ходжа. При этом получается однопараметрическое обобщение гипотезы Виттена, причём в качестве иерархии возникает иерархия уравнения двухслойной жидкости. В завершающей части главы автор выдвигает гипотезу об эквивалентности DR-иерархии и иерархии Дубровина–Жанга и проверяет её в ряде примеров.

Диссертация написана на высоком научном уровне. Отдельные опечатки на влияют на высокое качество диссертации в целом.

Диссертация А. Ю. Буряка является крупным вкладом в топологию и её приложения в математической физике. Результаты диссертации опубликованы в ведущих российских и зарубежных математических журналах. Всего по теме диссертации А. Ю. Буряком опубликовано 14 статей.

Все результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены подробными доказательствами.

Диссертация соответствует специальности 1.1.3 – геометрия и топология.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Основные теоремы докладывались на престижных международных математических конференциях и математических семинарах.

Диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК и ее автор А. Ю. Буряк безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук.

Заместитель директора по научной работе
ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
доктор физико-математических наук
специальность – 01.01.04

Андрей Валерьевич Малютин
Дата: 01.03.2025

Адрес: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ), наб. р. Фонтанки 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия. Адрес электронной почты: malyutin@pdmi.ras.ru. Сайт: www.pdmi.ras.ru; тел. 8 (812) 312-40-58

Подпись А. В. Малютина заверяю

Помощник директора
по кадрам

01.03.2025