Отзыв о диссертации
Александра Юрьевича Буряка
«Топология пространств модулей стабильных
кривых и интегрируемые системы»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.3 – геометрия и топология

Пространство модулей римановых поверхностей является классическим объектом изучения в геометрии, начиная с 19-го века. Важной вехой была работа Делиня и Мамфорда 1969-го года, где была построена компактификация пространства модулей с помощью стабильных кривых. Интерес к компактифицированному пространству модулей со стороны математической физики резко возрос в 1991-ом году из-за гипотезы Виттена, утверждающей, что производящий ряд интегралов по пространству модулей от некоторых характеристических классов является решением уравнения Кортевега—де Фриза, а также всей иерархии его инфинитезимальных симметрий. Гипотеза Виттена была вскоре доказана, но она оказалась лишь верхушкой айсберга, открыв целое направление исследований, находящееся на стыке топологии и математической физики и изучающее связь топологии пространств модулей стабильных кривых с интегрируемыми уравнениями математической физики. Диссертация Александра Юрьевича Буряка является весомым вкладом в этом направлении и, в частности, содержит свой ответ на концептуальный вопрос о природе этой связи. Тема исследований, представленных в диссертации, безусловно актуальна.

Диссертация состоит из введения, 3-х глав и заключения.

Во введении автор кратко обрисовывает направление исследований, связанное с обобщениями гипотезы Виттена, где центральную роль играет понятие когомологической теории поля (КогТП). Автор ставит два главных вопроса диссертационного исследования: в первом вопросе спрашивается верно ли, что корреляторы произвольной КогТП описываются некоторой интегрируемой системой, а во втором вопросе спрашивается какие геометрические свойства пространств модулей стабильных кривых отвечают за появление интегрируемых систем. Диссертант кратко описывает имеющийся в литературе общий подход в описанном направлении, развитый Дубровиным и Жангом, и приходит к выводу, что гипотетически эта теория даёт утвердительный ответ на первый вопрос. При этом автор обосновывает, что теория Дубровина—Жанга не даёт удовлетворительного ответа на второй

вопрос. Далее во введении кратко сформулированы основные результаты диссертации.

В первой главе в основном приводятся необходимые определения и известные результаты, но она содержит и новые результаты. Здесь доказывается важнейшее соотношение в когомологиях пространств модулей стабильных кривых, из которого выводится коммутация гамильтонианов DR-иерархии. Также автор доказывает ряд результатов о том, что при некоторых предположениях, интегрируемая иерархия может быть полностью восстановлена по уравнению одного потока, а также по очень малой информации об оставшихся потоках. Эти результаты представляют независимый интерес в теории интегрируемых систем.

Во второй главе содержится основное достижение диссертации: конструкция дисперсионной интегрируемой системы по произвольной заданной КогТП. Конструкция очень явная, и доказательство того, что получающиеся гамильтонианы коммутируют, непосредственно выводится из доказанного в первой главе когомологического соотношения. Автор рассматривает это соотношение, а также основанную на нём конструкцию иерархии, названной DR-иерархией, как вполне удовлетворительный ответ на концептуальный вопрос, поставленный во введении, о том, какие геометрические свойства пространств модулей стабильных кривых отвечают за появление интегрируемых систем. Эта точка зрения видится обоснованной, так как в сравнении с другими подходами новый подход является гораздо более простым и явным. Далее в течение всей второй главы выводится множество свойств DR-иерархии, и она вычисляется в ряде примеров.

Третья глава посвящена другому подходу к обобщениям гипотезы Виттена, развитому Дубровиным и Жангом. Основным результатом главы является доказательство гипотезы о существовании иерархии Дубровина—Жанга для произвольной полупростой КогТП. Важным результатом третьей главы также является явное вычисление иерархии Дубровина—Жанга для КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа. Этот результат даёт красивое однопараметрическое обобщение гипотезы Виттена. В завершении главы автор формулирует гипотезу об эквивалентности иерархии Дубровина—Жанга и DR-иерархии и доказывает её в ряде случаев.

В заключении диссертации автор излагает итоги выполненного исследования и перспективы дальнейшей разработки темы. Хочу подчеркнуть новизну исследования и полученных результатов, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации и их достоверность. Диссертация является в целом завершенным научным исследованием,

хорошо оформлена, изложена ясно и доступно. Содержание автореферата соответствует основным выводам диссертации.

Стоит отметить, что диссертация не лишена недостатков. В разделе с основными понятиями из теории эволюционных уравнений в частных производных приводится много результатов, которые часто используются в диссертации, однако не для всех из них приведены ссылки. В разделе, где строится квантование DR-иерархии, и как частный случай иерархии Кортевега–де Фриза, никак не уточняется как связано полученное квантование с известным квантованием иерархии Кортевега–де Фриза, построенным Бажановым—Лукьяновым—Замолодчиковым. В тексте также имеется ряд опечаток. Указанные недостатки не умаляют общего положительного впечатления от диссертации.

Результаты диссертации надлежащим образом опубликованы, в том числе в таком журнале первого ранга, как Communications in Mathematical Physics.

В работе продемонстрировано владение широким спектром инструментов, необходимых для работы на стыке нескольких дисциплин. Её автор успешно развивает собственное направление исследований в активно развивающейся области современной математики.

Диссертация А.Ю. Буряка является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Безусловно, диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 – геометрия и топология, а ее автор, Буряк Александр Юрьевич, заслуживает присуждения данной степени.

И. Т. Хабибуллин

25 февраля 2025 г.
Уфа

Сведения об оппоненте

Хабибуллин Исмагил Талгатович
доктор физико-математических наук

Подпись И.Т. Хабибуллина заверяю
ученый секретарь ИМВЦ УФИЦ РАН
В.Ф. Вильданова

главный научный сотрудник, заведующий отделом математической физики Института математики с вычислительным центром Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук,
адрес места работы: Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, д. 112
телефон организации: +7 (347) 272-59-36
e-mail организации: im@matem.anrb.ru