Отзыв на диссертацию А.Ю.Буряка "Топология пространства модулей стабильных кривых и интегрируемые системы", представленной на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук по специальности 1.1.3 "Геометрия и топология".

Работа А.Ю.Буряка посвящена изучению топологических инвариантов пространства модулей стабильных кривых и их связей с интегрируемыми системами. Первым наблюдением такого рода была известная гипотеза Виттена. Можно сказать, что работа А.Ю.Буряка содержит далеко идущие обобщения этой гипотезы. Гипотеза Виттена утверждает, что производящий ряд интегралов от некоторых классов когомологий (мономов из так называемых пси-классов) по пространству модулей стабильных кривых задаёт решение иерархии Кортевега—де Фриза. Возникает естественный вопрос: какие геометрические свойства пространств модулей стабильных кривых отвечают за появление интегрируемых систем УрЧП?

Интегралы, фигурирующие в гипотезе Виттена, можно интерпретировать как простейшие инварианты Громова—Виттена. Имеются похожие инварианты, называемые инвариантами Фана—Йарвиса—Руана—Виттена. Для всех таких инвариантов естественно возникает вопрос о наличии обобщений гипотезы Виттена. Инварианты Громова—Виттена и инварианты Фана—Йарвиса—Руана—Виттена фигурируют в введенных Концевичем и Маниным когомологических теориях поля (КогТП) в качестве корреляторов. Поэтому более общей задачей является изучение корреляторов произвольной КогТП и их связей с интегрируемыми системами.

Для рода ноль указанные задачи были решены Б.А.Дубровиным, который показал, что в этом случае производящий ряд корреляторов КогТП описывается решением некоторой иерархии гидродинамического типа. Доказательство основывается на соотношении ассоциативности в когомологиях пространства модулей кривых рода ноль.

Для старших родов Дубровиным и Жангом была построена теория, гипотетически дающая утвердительный ответ на вопрос о связи корреляторов КогТП с интегрируемыми иерархиями (отсутствует ответ на вопрос о полиномиальности построенных ими иерархий). Даже в роде один, где этот вопрос был ими решен, отсутствует понимание роли геометрии пространств модулей в появлении интегрируемой иерархии.

В работе А.Ю.Буряка была доказана полиномиальность иерархии Дубровина—Жанга для любой полупростой КогТП. Тем самым дан ответ на вопрос о связи производящих рядов корреляторов с интегрируемыми системами для широкого класса случаев. В рамках изучения связи геометрических свойств пространства модулей кривых с интегрируемыми системами в работе А.Ю.Буряка соотношение ассоциативности было обобщено на произвольные роды. На основе этого соотношения была приведена явная конструкция интегрируемой системы, для произвольной КогТП. В этой конструкции коэффициенты в уравнениях иерархии явно описаны как интегралы от неких классов когомологий по пространству модулей кривых. Интегрируемость иерархии, то есть согласованность потоков, является непосредственным следствием полученного обобщения соотношения ассоциативности. Новая иерархия названа DR-иерархией. Конструкция DR-иерархии может рассматриваться как ответ на вопрос о связи появления интегрируемых иерархий с геометрией пространства модулей.

DR-иерархия обладает богатой алгебраической структурой (не проявляющейся в иерархии Дубровина—Жанга). При этом все её ингредиенты: гамильтонова структура, квантование, рекурсивный оператор (и, похоже, бигамильтонова структура) — задаются явными геометрическими формулами.

Выдвинута гипотеза о том, что DR-иерархия и иерархия Дубровина—Жанга связаны явно описанной в работе А.Ю.Буряка полиномиальной заменой переменных, называемой преобразованием Миуры. Эта гипотеза проверена в приближении до рода один.

В работах А.Ю.Буряка, представленнных к защите, решены важные задачи, связанные с топологией и геометрией пространства модулей стабильных кривых. Эти работы опубликованы в журналах высокого уровня и привлекли внимание значительного количества исследователей (что видно, в частности, по показателям цитируемости). Мне представляется, что диссертация соответствует всем критериям, предъявляемым к докторским диссертациям, а А.Ю.Буряк заслуживает ученой степени доктора физ.-мат. наук по специальности 1.1.3 "Геометрия и топология".

Научный консультант,
доктор физ.-мат. наук,
профессор / С.М. Гусейн-Заде /

22.10.2024г.

Подпись С.М.Гусейн-Заде заверяю:
ученый секретарь кафедры высшей
геометрии и топологии МГУ им.
М.В. Ломоносова / В.А. Шастин /

22.10.2024