Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

На правах рукописи

Буряк Александр Юрьевич

Топология пространств модулей стабильных кривых и интегрируемые системы

Специальность 1.1.3 – геометрия и топология

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., проф. С. М. Гусейн-Заде

Москва – 2024

Оглавление

Введение **4**

1 Предварительные сведения **17**

1.1 Пространства модулей стабильных кривых 18

1.1.1 Понятие стабильной кривой и их пространств модулей 18

1.1.2 Отображения между пространствами модулей 20

1.1.3 Тавтологические классы когомологий 22

1.1.4 DR-циклы 24

1.2 Когомологические теории поля 32

1.2.1 Основные определения 32

1.2.2 Примеры 34

1.2.3 Однородные и полупростые когомологические теории поля 39

1.2.4 Когомологические теории поля в роде 0 41

1.2.5 Описание всех полупростых когомологических теорий поля 43

1.3 Формальная теория эволюционных уравнений в частных производных 46

1.3.1 Основные понятия 46

1.3.2 Теоремы о восстановлении для интегрируемых систем 55

1.3.3 Иерархия Кортевега–де Фриза 61

1.3.4 Базовая иерархия для решения уравнений ассоциативности 62

1.3.5 Вспомогательные результаты 64

2 DR-иерархии **70**

2.1 Конструкция 70

2.2 Примеры 74

2.2.1 Тривиальная когомологическая теория поля и иерархия КдФ 74

2.2.2 Классы Ходжа и иерархия уравнения двухслойной жидкости 75

2.2.3 Теория Громова–Виттена для $\mathbb{C}P^1$ и расширенная иерархия Тоды 76

2.2.4 Класс Виттена и иерархии Гельфанда–Дикого 86

2.3 Рекурсия нового типа на плотности гамильтонианов . . . 93
2.4 DR-иерархия в приближении до рода 1 . . . 96
2.5 Квантование . . . 97
2.5.1 Основные понятия деформационного квантования . . . 98
2.5.2 Квантовые гамильтонианы DR-иерархии . . . 102
2.5.3 Примеры . . . 103
2.5.4 Квантовая рекурсия . . . 108
2.6 Бигамильтонова структура DR-иерархии . . . 110
2.6.1 Явная формула и основная гипотеза . . . 110
2.6.2 Частичные проверки гипотезы в общем случае . . . 111
2.6.3 Проверка гипотезы в примерах . . . 116

3 Иерархии Дубровина–Жанга и гипотеза об эквивалентности 122
3.1 Подкрученные потенциалы КогТП . . . 122
3.2 Основная гипотеза . . . 125
3.3 Известные примеры . . . 133
3.3.1 Тривиальная когомологическая теория поля и иерархия КдФ . . . 133
3.3.2 Теория Громова–Виттена для $\mathbb{C}P^1$ и расширенная иерархия Тоды . . . 134
3.3.3 Класс Виттена и иерархии Гельфанда–Дикого . . . 134
3.4 Доказательство основной гипотезы для полупростой КогТП . . . 134
3.5 Классы Ходжа и иерархия уравнения двухслойной жидкости . . . 143
3.6 Гипотеза об эквивалентности двух иерархий . . . 149

Заключение 154

Литература 157

Введение

Актуальность темы исследования

Одним из центральных объектов данной работы является пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ связных гладких алгебраических кривых рода g с n отмеченными точками, а также его компактификация $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, построенная Делинем и Мамфордом [31] с помощью стабильных кривых, то есть помеченных связных проективных кривых $(C; x_1, \dots, x_n)$, у которых в качестве особенностей разрешаются только простые точки самопересечения, отмеченные точки должны лежать на гладкой части кривой и группа автоморфизмов должна быть конечной.

Глубокая связь топологии пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ с интегрируемыми системами была впервые обнаружена Виттеном [80] и сформулирована им в виде знаменитой гипотезы. Напомним её формулировку. Обозначим через $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, n$, комплексное линейное расслоение над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, слоем которого над точкой, представленной стабильной кривой $(C; x_1, \dots, x_n)$, является кокасательное пространство к кривой C в точке x_i. Первые классы Черна этих расслоений обозначаются через $\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ и называются *пси-классами*. *Числа пересечений* на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ определяются как

$$\langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \dots \tau_{d_n} \rangle_g := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \psi_2^{d_2} \cdots \psi_n^{d_n} \in \mathbb{Q}, \quad d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

при этом мы полагаем интеграл равным нулю, если $\sum d_i \neq \dim \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = 3g - 3 + n$. Рассмотрим производящий ряд чисел пересечений:

$$\mathcal{F}(t_0, t_1, \dots, \varepsilon) := \sum_{g,n \geq 0} \varepsilon^{2g} \sum_{d_1, \dots, d_n \geq 0} \langle \tau_{d_1} \tau_{d_2} \dots \tau_{d_n} \rangle_g \frac{t_{d_1} t_{d_2} \dots t_{d_n}}{n!} \in \mathbb{Q}[[t_0, t_1, \dots, \varepsilon]].$$

Гипотеза Виттена [80] утверждает, что формальный ряд $u = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_0^2}$ является решением иерархии Кортевега–де Фриза (КдФ) (мы отождествляем $x = t_0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} &= u u_x + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{xxx}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{u^2 u_x}{2} + \varepsilon^2 \left(\frac{u u_{xxx}}{12} + \frac{u_x u_{xx}}{6} \right) + \varepsilon^4 \frac{u_{xxxxx}}{240}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Доказательство гипотезы Виттена было заявлено в работе Концевича [56], некоторые его детали были прояснены впоследствии в работах Лойенги [61] и Звонкина [82]. Основанные на совершенно иных идеях доказательства были предложены в работах Окунькова и Пандхарипанде [69], Казаряна и Ландо [55], Мирзахани [66], Александрова, Эрнандеса и Шадрина [7].

После работы Виттена появились схожие по форме гипотезы и результаты, где рассматривается пространство модулей кривых с дополнительной структурой, например, пространство модулей стабильных отображений в проективную прямую (см., напр., [37, 68]) или пространство модулей стабильных кривых со спинорной структурой (см., напр., [81, 44]). Важно отметить, что имеется способ унифицировать формулировки разновидностей гипотезы Виттена, рассматривая обычное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, оснащённое *когомологической теорией поля* (КогТП) [57], которая определяется как набор классов когомологий, удовлетворяющих простому набору свойств, описывающих как ведут себя обратные образы этих классов под действием естественных отображений между пространствами модулей. В рамках этого подхода, в гипотезах виттеновского типа рассматриваются обобщённые числа пересечений, так называемые *корреляторы* КогТП, определяемые как интеграл по $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ от произведения монома из пси-классов на класс когомологий, составляющий заданную КогТП, а дальше утверждается, что из этих чисел можно составить набор производящих рядов, являющийся решением некоторой интегрируемой системы УрЧП. Заметим сразу, что здесь возникают системы УрЧП эволюционного типа с одной пространственной переменной и бесконечным количеством времён.

С одной стороны, гипотезы виттеновского типа позволяют описывать корреляторы интересных КогТП. С другой стороны, возникает следующий общий вопрос.

Вопрос 0.1. *Верно ли, что корреляторы произвольной КогТП описываются какой-то интегрируемой системой?*

Можно задать более концептуальный вопрос.

Вопрос 0.2. *Какие геометрические свойства пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ отвечают за появление интегрируемых систем УрЧП?*

Эти два вопроса являются центральными для нашего исследования.

Степень разработанности темы исследования

Если ограничиться рассмотрением пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, то возникает понятие *когомологической теории поля в роде* 0. В этом случае на оба поставленных выше вопроса имеется ясный ответ. Производящий ряд примарных корреляторов (без включения пси-классов в интеграл), называемый *потенциалом Дубровина–Фробениуса*, произвольной КогТП в роде 0 является решением *системы уравнений ассоциативности*: это является простым следствием так

называемого *соотношения ассоциативности* в группе когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n},\mathbb{Q})$. Говоря точнее, потенциал Дубровина–Фробениуса является решением *расширенной системы уравнений ассоциативности*, включающей дополнительное уравнение, отвечающее за наличие единицы в некотором семействе ассоциативных алгебр. Верно и обратное утверждение: произвольное решение расширенной системы уравнений ассоциативности является потенциалом Дубровина–Фробениуса некоторой КогТП в роде 0, определяемой по этому потенциалу однозначно [4]. Имеется простая конструкция, предложенная Дубровиным [34], которая строит интегрируемую гамильтонову систему гидродинамического типа по любому заданному решению расширенной системы уравнений ассоциативности. Назовём эту интегрируемую систему *базовой иерархией*, в англоязычной литературе она называется “principal hierarchy”. При этом производящий ряд корреляторов КогТП в роде 0, соответствующей решению расширенной системы уравнений ассоциативности, задаёт решение базовой иерархии. Это даёт утвердительный ответ на вопрос 0.1 для произвольной КогТП в роде 0. Мы также видим, что за появление интегрируемой системы отвечает соотношение ассоциативности в группе когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n},\mathbb{Q})$, что даёт ответ на вопрос 0.2.

Рассмотрим теперь произвольную КогТП во всех родах и соответствующий производящий ряд корреляторов, называемый *потенциалом*, который также как и формальный ряд $\mathcal{F}$ в гипотезе Виттена зависит от переменной ε: коэффициент при ε^{2g} является производящим рядом корреляторов в роде g. Дубровин и Жанг [35, 36] предложили, как по потенциалу задавать набор формальных рядов, и исследовали проблему существования интегрируемой гамильтоновой системы УрЧП такой, что построенный набор формальных рядов является её решением. Если такая интегрируемая система существует, то она называется *иерархией Дубровина–Жанга*, соответствующей заданной КогТП.

Гамильтонианы и скобка Пуассона искомой интегрируемой системы, рассматриваемые с точностью до $O(\varepsilon^{2g+2})$, контролируются корреляторами КогТП до рода g, включительно. Поэтому можно пытаться находить всё более точно гамильтонианы и скобку Пуассона иерархии, рассматривая корреляторы КогТП последовательно всё большего рода. В работе [35] было доказано существование иерархии Дубровина–Жанга в приближении до рода 1. Стоит отметить, что продвижение до следующего рода выглядит затруднительно в рамках рассматривавшегося подхода. Для вычислений в родах 0 и 1 ключевую роль играет выражение для пси-класса через граничные классы в группах когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$ при $g \leq 1$. При $g = 2$ такое выражение неизвестно. В принципе, имеются другие соотношения в когомологиях пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, которые можно использовать для получения соотношений на корреляторы КогТП, однако сложность этих соотношений резко растёт при повышении рода.

Стоит отметить, что при рассмотрении КогТП во всех родах Дубровин и Жанг развили свою теорию [36] в предположении, что КогТП является однородной и полупростой. Искомая гамиль-

тонова иерархия строится применением преобразования квази-Миуры к базовой иерархии. При этом преобразование квази-Миуры однозначно задаётся так называемыми *вирасоровскими условиями*. В рамках этой конструкции, априори, гамильтонианы и скобка Пуассона получающейся иерархии могут иметь особенности. Дубровин и Жанг выдвинули гипотезу, что особенности отсутствуют, то есть построенная иерархия является иерархией Дубровина–Жанга, соответствующей заданной КогТП. С другой стороны, при рассмотрении приближения до рода 1 в работе [35] существование иерархии Дубровина–Жанга было доказано в полной общности, без предположения полупростоты или однородности.

Вычисление иерархии Дубровина–Жанга для заданной КогТП даёт утверждение виттеновского типа. Сама гипотеза Виттена эквивалентна при этом утверждению, что иерархия Дубровина–Жанга для тривиальной КогТП совпадает с иерархией КдФ. Ряд известных результатов об интегрируемых системах, контролирующих интересные КогТП такие, как КогТП, задаваемая классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ [37], спинорная КогТП [44], КогТП, соответствующая простой особенности [45], укладывается в теорию Дубровина–Жанга. Таким образом, теория Дубровина–Жанга даёт единый подход для утверждений и гипотез виттеновского типа.

Мы приходим к выводу, что гипотетически теория Дубровина–Жанга даёт утвердительный ответ на вопрос 0.1, но при этом существование иерархии Дубровина–Жанга было установлено только в ряде конкретных примеров. Однако, теория Дубровина–Жанга не даёт удовлетворительного ответа на вопрос 0.2. Если выйти за пределы рода 0, то имеющиеся результаты очень технические и не дают ясной картины о роли геометрии пространств модулей.

Цели и задачи

Обобщение теории Дубровина–Жанга для произвольных КогТП. Доказательство существования иерархии Дубровина–Жанга в широком классе случаев. Явное вычисление иерархии Дубовина–Жанга в конкретных важных примерах. Альтернативное построение интегрируемой системы по произвольной КогТП, позволяющее прояснить роль геометрии пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Установление связи альтернативной конструкции с конструкцией Дубровина–Жанга.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

- Построено обобщение теории Дубровина–Жанга для произвольной КогТП. Доказана единственность иерархии, обладающей рядом естественных свойств и у которой потенциал

КогТП задаёт решение. Доказано существование иерархии Дубровина–Жанга для произвольной полупростой КогТП. Таким образом, дан утвердительный ответ на вопрос 0.1 в классе случаев, значительно превышающем уже известные случаи.

- Явно вычислена иерархия Дубровина–Жанга для КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа, включающим параметр μ. Было доказано, что иерархия связана простым преобразованием с *иерархией уравнения двухслойной жидкости*. При $\mu = 0$ рассматриваемая КогТП совпадает с тривиальной КогТП. С другой стороны, иерархия уравнения двухслойной жидкости при $\mu = 0$ совпадает с иерархией КдФ. Значит, при $\mu = 0$ доказанное утверждение эквивалентно гипотезе Виттена. Таким образом, доказано однопараметрическое обобщение гипотезы Виттена. Важность полученного результата также состоит в том, что это является первым явным вычислением иерархии Дубровина–Жанга для неоднородной КогТП.

- Доказано соотношение на определённые классы когомологий в пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, называемые *DR-циклами*, в группах когомологий $H^{2g+2}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$. Это соотношение, которое мы называем *соотношением коммутативности*, является обобщением на все рода соотношения ассоциативности в когомологиях $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \mathbb{Q})$.

- Стартуя с произвольной КогТП, предложена новая конструкция интегрируемой гамильтоновой системы УрЧП, названной *DR-иерархией*. Коммутация гамильтонианов является непосредственным следствием соотношения коммутативности на DR-циклы. Таким образом, дан в полной мере удовлетворительный ответ на вопрос 0.2.

- Доказано, что DR-иерархия наделена богатой алгебраической структурой. Во-первых, все гамильтонианы DR-иерархии можно восстановить, зная лишь одну выделенную линейную комбинацию гамильтонианов, причём с помощью необычайно простого рекурсивного соотношения. Удивительным образом, это рекурсивное соотношение никогда ранее в литературе не встречалось. Во-вторых, построено квантование DR-иерархии. Заметим, что уже в простейшем примере получается квантование иерархии КдФ, которое ранее в литературе не встречалось. Стартуя с произвольной однородной КогТП, приведена явная формула для дифференциального оператора, и выдвинута гипотеза, что этот оператор наделяет DR-иерархию бигамильтоновой структурой. Приведено доказательство некоторых частей гипотезы, и также она проверена в ряде примеров.

- Для произвольной КогТП построено преобразование Миуры, и, в предположении, что для заданной КогТП существует иерархия Дубровина–Жанга, выдвинута гипотеза, что эта иерархия связана с DR-иерархией построенным преобразованием Миуры. Гипотеза доказана в приближении до рода 1, включительно, а также в ряде примеров.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической топологии и теории интегрируемых систем.

Методология и методы исследования

В работе используются методы алгебраической топологии, алгебраической геометрии и теории интегрируемых систем.

Положения, выносимые на защиту

- Решена проблема существования иерархии Дубровина–Жанга для произвольной полупростой КогТП. Более того, построено обобщение теории Дубровина–Жанга для произвольной КогТП.
- Решена проблема явного описания иерархии Дубровина–Жанга для КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа. Полученный результат даёт однопараметрическое обобщение гипотезы Виттена.
- Доказано соотношение на определённые классы когомологий в пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, называемые *DR-циклами*, в группах когомологий $H^{2g+2}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$. Это соотношение является обобщением на все рода соотношения ассоциативности в когомологиях $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \mathbb{Q})$. На основе этого соотношения, стартуя с произвольной КогТП, предложена новая конструкция интегрируемой гамильтоновой системы УрЧП, названной *DR-иерархией*. Тем самым, развито новое направление в теории интегрируемых систем, связанных с геометрией пространств модулей кривых.
- Используя геометрические свойства пространств модулей кривых, доказано, что DR-иерархия наделена богатой алгебраической структурой, включающей рекурсивное соотношение нового типа и квантование, а также приведена явная формула для дифференциального оператора, гипотетически задающего бигамильтонову структуру DR-иерархии. Тем самым развиты новые методы в теории интегрируемых систем, основывающиеся на геометрии пространств модулей кривых.
- Открыто перспективное направление в рамках изучения иерархий Дубровина–Жанга: для произвольной КогТП построено преобразование Миуры, и выдвинута гипотеза, что это преобразование связывает иерархию Дубровина–Жанга и DR-иерархию.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты работы докладывались автором на семинаре “Геометрия, топология и математическая физика” (руководители С. П. Новиков, В. М. Бухштабер), семинаре лаборатории кластерной геометрии (НИУ Высшая школа экономики), семинаре лаборатории алгебраической геометрии (НИУ Высшая школа экономики), заседании Московского математического общества, семинаре Центра перспективных исследований им. И. М. Кричевера (Сколтех), семинаре “Seminar in Real & Complex Geometry” университета Тель-Авива, семинаре “Beijing-Novosibirsk Seminar on Geometry and Mathematical Physics”, семинаре “BIMSA Integrable Systems Seminar”, семинаре математического факультета университета Падуи, семинаре Центра интегрируемых систем Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, семинаре “Algebraic geometry and moduli seminar” Федерального института технологий Цюриха, семинаре “Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика” (Независимый московский университет), а также на конференциях, в том числе:

- международные конференции “Dynamics in Siberia – 2019, 2021, 2022, 2024”, Новосибирск;
- конференции “Дни геометрии в Новосибирске – 2020, 2021, 2022, 2023”, Новосибирск;
- международные конференции “Integrable Systems and Their Applications - 2022, 2023”, Сочи;
- международная конференция “SCMS Workshop on enumerative geometry”, Шанхай, Китай, 11–15 марта, 2024 г.;
- международная конференция “Workshop on Geometry and Integrable Systems”, Пекин, Китай, 15–16 января 2024 г.;
- международная школа-конференция “Enumerative geometry, quantisation and moduli spaces”, Четраро, Италия, 4–8 сентября 2023 г.;
- международная конференция “At the Crossroads of Topology and Enumerative Geometry”, Иерусалим, Израиль, 5–9 июня 2023 г.;
- международная конференция “Moduli spaces: theory and coding”, Ле Диаблерэ, Швейцария, 27 февраля – 3 марта 2023 г.;
- международная конференция “Integrability, Enumerative Geometry and Quantization”, Стони-Брук, США, 29 августа – 2 сентября, 2022 г. (удалённый доклад):
- международная конференция “Nonlinear Waves and Frobenius Structures in Geometry and Physics”, памяти Бориса Анатольевича Дубровина, Москва, 17–19 ноября 2021 г.;

– международная конференция “Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics”, памяти Бориса Анатольевича Дубровина, проведена удалённо, 28 июня – 2 июля 2021 г.;

– “Конференция международных математических центров мирового уровня”, Сочи, 9–13 августа, 2021 г.;

– международная конференция “International Congress on Mathematical Physics”, Женева, Швейцария, 2–7 августа 2021 г.;

– международная конференция “3rd IBS-CGP & BICMR Joint Symplectic Geometry Workshop”, Поханг, Южная Корея, 24–26 сентября 2019 г.;

– международная конференция “Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives”, посвящённая 80-летнему юбилею Владимира Евгеньевича Захарова, Ярославль, 5–9 августа 2019 г.;

– международная конференция “Workshop on Geometry and Integrable Systems”, Чэнду, Китай, 19–23 ноября 2018 г.;

– международная конференция “Flat Surfaces and Algebraic Curves’, Обервольфах, Германия, 16–22 сентября 2018 г.;

– международная конференция “Russian–Chinese Conference on Integrable Systems and Geometry”, Санкт-Петербург, 18–26 августа 2018 г.;

– международная конференция “Differential Algebra and Related Topics IX”, Лидс, Великобритания, 30 июля – 2 августа 2018 г.;

– международная конференция “6th International Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, and Topological Recursion”, Москва, 4–9 июня 2018 г.;

– международная конференция “Geometry of Integrable systems”, Триест, Италия, 7–9 июня 2017 г.;

– международная конференция “Workshop on Enumerative Geometry”, Париж, Франция, 13–17 марта 2017 г.;

– международная конференция “Moduli space, conformal field theory and matrix models”, Окинава, Япония, 24–27 октября 2016 г.;

– международная конференция “Random Geometry and Physics”, Париж, Франция, 17–21 октября 2016 г.;

- международная конференция “5th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Numbers and Cohomological Field Theories”, Москва, 6–11 июня 2016 г.;
- международная конференция “2016 Workshop on Symplectic Geometry and Mathematical Physics”, Пекин, Китай, 23–27 мая 2016 г.;
- международная конференция “Xmas Workshop 2014 on Moduli Spaces and Integrable Systems”, Генуя, Италия, 18–20 декабря 2014 г.;
- международная конференция “Mirror Symmetry and Spin Curves”, Кортона, Италия, 28–30 апреля 2014 г.;
- международная конференция “Cohomology of the moduli space of curves”, Цюрих, Швейцария, 10–12 октября 2013 г.;
- международная конференция “Hamiltonian PDEs, Frobenius Manifolds and Deligne–Mamford Moduli Spaces”, Триест, Италия, 16–20 сентября 2013 г.;
- международная конференция “Analysis and Singularities”, посвящённая 75-летию со дня рождения Владимира Игоревича Арнольда, Москва, 17–21 декабря 2012 г;
- международная конференция “Algebraic Structures in Integrable Systems”, Москва, 3–7 декабря 2012 г.;
- международная конференция “3rd Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, Knots, and Topological Recursion”, Москва, 28 мая – 2 июня 2012 г.;
- международная конференция “Contemporary Ways of Integrability”, Лиссабон, Португалия, 16–19 мая 2012 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих 14-ти работах автора: [1], [2], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 3-х глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы исследования, кратко рассмотрена история задач и их современное состояние, сформулированы основные результаты и описано содержание работы.

В первой главе мы напомним необходимые сведения о геометрии пространств модулей стабильных кривых, докажем соотношение коммутативности, в котором участвуют DR-циклы, и подробно обсудим известные результаты о когомологических теориях поля. Далее мы приведём нужные нам результаты из теории эволюционных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной, а также докажем ряд результатов об однозначной восстанавливаемости интегрируемых систем по ограниченным данным.

§1.1 посвящён геометрии пространств модулей.

В §1.1.1 мы введём понятие *стабильной кривой*, а также их пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

В §1.1.2 мы определим основные отображения между пространствами модулей: *отображения забывания* и *отображения склейки*.

В §1.1.3 мы введём *пси-классы* $\psi_i \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$ и *каппа-классы* $\kappa_j \in H^{2j}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$, на основе которых, с помощью отображений забывания и склейки, мы введём понятие понятие *тавтологических когомологий*, образующих подалгебру в алгебре $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$. Мы приведём простейшие соотношения между тавтологическими классами когомологий. В частности, мы приведём *соотношение ассоциативности* в группе когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}, \mathbb{Q})$, которое играет ключевую роль для установления связи между топологией пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ и интегрируемыми системами гидродинамического типа.

В §1.1.4 мы подробно остановимся на *DR-циклах*, являющихся тавтологическими классами когомологий и играющих центральную роль в данной работе. Мы приведём определение DR-циклов, основанное на пространстве модулей *стабильных относительных отображений* в комплексную проективную прямую $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, а также их основные свойства. Мы докажем ключевое *соотношение коммутативности*, в котором участвуют DR-циклы. Это соотношение обобщает соотношение ассоциативности и играет решающую роль для установления связи между топологией пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ и дисперсионными интегрируемыми системами.

В §1.2 мы обсудим когомологические теории поля (КогТП).

В §1.2.1–1.2.3 мы приведём определение, опишем основные примеры, введём понятия однородных и полупростых КогТП.

В §1.2.4 мы введём понятие КогТП в роде 0, а также соответствующего *потенциала Дубровина–Фробениуса*. Мы сформулируем результат Манина о том, что сопоставление КогТП в роде 0 её потенциала Дубровина–Фробениуса устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством КогТП в роде 0 и множеством решений расширенной системы уравнений ассоциа-

тивности.

В §1.2.5 мы приведём результат Телемана о классификации полупростых КогТП, который будет важен для доказательства существования иерархии Дубровина–Жанга для произвольной полупростой КогТП.

§1.3 посвящён необходимым нам результатам из теории эволюционных УрЧП с одной пространственной переменной.

В §1.3.1 мы введём алгебру *дифференциальных многочленов*, пространство *локальных функционалов*, скобки Пуассона на пространстве локальных функционалов, а также понятие гамильтоновой системы УрЧП. Мы обсудим определённый тип замен переменных в теории эволюционных УрЧП, называемые *преобразованиями Миуры*. Далее мы обсудим, как формальное разложение в ряд Фурье позволяет установить изоморфизм алгебры дифференциальных многочленов с некоторой другой алгеброй. Эта конструкция будет для нас важна при построении DR-иерархий, стартуя с произвольной КогТП. Мы кратко обсудим понятие бигамильтоновых систем УрЧП. В конце §1.3.1 мы введём расширение пространства локальных функционалов и *скобку Схоутена–Нийенхейса* на нём, которая даёт удобный инструмент для работы со скобками Пуассона.

В §1.3.2 мы докажем ряд результатов о возможности однозначно восстановить интегрируемую систему, исходя из ограниченного набора данных. Эти результаты будут для нас важны в дальнейшем для установления связи между различными интегрируемыми системами, состоящими из бесконечного числа потоков.

В §1.3.3 мы напомним конструкцию иерархии Кортевега–де Фриза, а также описание её бигамильтоновой структуры.

В §1.3.4, стартуя с произвольного решения расширенной системы уравнений ассоциативности, мы приведём конструкцию *базовой иерархии*. Эта иерархия была введена Дубровиным [34], однако наш подход несколько отличается, так как основан на использовании КогТП в роде 0, соответствующей заданному решению.

В §1.3.5 мы докажем ряд вспомогательных результатов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Вторая глава является центральной в данной работе. Стартуя с произвольной КогТП, мы приведём конструкцию гамильтоновой системы УрЧП, которую мы называем *DR-иерархией*, установим различные её свойства, а также явно вычислим DR-иерархию для ряда конкретных КогТП, устанавливая связь с известными иерархиями математической физики.

В §2.1, стартуя с произвольной КогТП, мы приведём конструкцию DR-иерархии. Мы докажем коммутацию гамильтонианов иерархии, основываясь на соотношении коммутативности, доказанном в §1.1.4. Мы также установим простейшие свойства DR-иерархии. В частности, мы покажем, что в роде 0 DR-иерархия совпадает с базовой иерархией.

В §2.2 мы вычислим DR-иерархию в конкретных примерах: для тривиальной КогТП, для КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа, для КогТП, задаваемой классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$, а также для КогТП, задаваемой классами Виттена. В этих случаях DR-иерархия либо совпадает, либо связана простым преобразованием, соответственно, с иерархией КдФ, иерархией уравнения двухслойной жидкости, расширенной иерархией Тоды, а также с иерархией Гельфанда–Дикого.

В §2.3 мы докажем рекурсивное соотношение, позволяющее восстанавливать плотности гамильтонианов DR-иерархии, зная лишь одну выделенную линейную комбинацию гамильтонианов. Удивительным образом, рекурсивное соотношение такого вида в литературе никогда ранее не встречалось.

В §2.4 мы приведём явную формулу для гамильтонианов DR-иерархии в приближении до рода 1.

В §2.5 мы построим квантование DR-иерархии.

В §2.5.1 мы напомним определение *умножения Мояля*, задающего квантование пуассоновой алгебры, чьими элементами являются гамильтонианы DR-иерархии.

В §2.5.2 мы построим деформированные гамильтонианы DR-иерархии, которую мы называем *квантовыми гамильтонианами*. Мы докажем, что квантовые гамильтонианы коммутируют относительно умножения Мояля.

В §2.5.3 мы разберём примеры с тривиальной КогТП, КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа, а также с КогТП, задаваемой классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой. В этих случаях мы получим квантования, соответственно, иерархии КдФ, иерархии уравнения двухслойной жидкости, расширенной иерархии Тоды. Все эти квантования ранее в литературе не встречались.

В §2.5.4 мы построим квантовый аналог рекурсии из §2.3.

В §2.6 мы приведём явную формулу для дифференциального оператора и сформулируем гипотезу, что этот оператор наделяет DR-иерархию бигамильтоновой структурой. Мы проделаем ряд проверок гипотезы: докажем кососимметричность оператора, проверим соотношение бигамильтоновой рекурсии в простейшем случае, докажем гипотезу в роде 0, докажем, что скобка Схоутена–Нийенхейса построенного оператора с оператором, задающим гамильтонову структуру, равна 0. Мы также докажем гипотезу для тривильной КогТП, для КогТП, заданной классами Громова–Виттена комплексной проективной прямой, а также для КогТП, заданной классами Виттена при $r \leq 5$.

Третья глава посвящена иерархиям Дубровина–Жанга. Мы обобщим теорию Дубровина–Жанга для подкрученных потенциалов произвольных КогТП, сформулируем гипотезу о существовании иерархии, а также докажем теорему о единственности иерархии. Мы докажем гипотезу о существовании иерархии Дубровина–Жанга для произвольных полупростых КогТП

и явно вычислим иерархию для КогТП, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа. Мы сформулируем гипотезу об эквивалентности иерархии Дубровина–Жанга и DR-иерархии и докажем её в ряде случаев.

В §3.1 мы введём понятие *подкрученного потенциала* произвольной КогТП. В англоязычной литературе эти потенциалы называются “descendent potentials”. Частным случаем подкрученного потенциала является потенциал Громова–Виттена гладкого проективного многообразия.

В §3.2 мы сформулируем гипотезу о существовании гамильтоновой иерархии, у которой заданный подкрученный потенциал задаёт решение и гамильтонианы определённым образом. Мы докажем теорему о единственности такой иерархии. Эту иерархию мы называем *иерархией Дубровина–Жанга*, соответствующей заданному подкрученному потенциалу.

В §3.3 мы обсудим известные примеры иерархий Дубровина–Жанга.

В §3.4 мы докажем теорему о существовании иерархии Дубровина–Жанга для подкрученного потенциала произвольной полупростой КогТП.

В §3.5 мы вычислим иерархию Дубровина–Жанга для КогТП, заданной полным классом Черна расслоения Ходжа, доказав, что она связана с иерархией уравнения двухслойной жидкости некоторым явно описанным преобразованием Миуры.

В §3.6 мы сформулируем гипотезу о том, что если для потенциала заданной КогТП иерархия Дубровина–Жанга существует, то она связана с DR-иерархией преобразованием Миуры. Мы приведём явное описание этого преобразования Миуры. Мы докажем гипотезу для всех примеров DR-иерархий, вычисленных в §2.2, а также для произвольной КогТП в приближении до рода 1.

В **заключении** диссертации мы изложим итоги выполненного исследования и перспективы дальнейшей разработки темы.

Благодарности

Работа была выполнена на Факультете математики Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” и в Центре перспективных исследований имени И.М. Кричевера Сколковского института науки и технологий.

Автор выражает благодарность своему научному консультанту С.М. Гусейн-Заде за постоянное внимание и многочисленные полезные советы. Автор благодарен В.М. Бухштаберу за поддержку и внимание.

Глава 1

Предварительные сведения

Соглашения и обозначения

- Все алгебраические многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел.
- Для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ мы обозначаем $[n] := \{1, \ldots, n\}$.
- Мы используем стандартное соглашение о суммировании по повторяющимся верхним и нижним греческим индексам, если не оговорено противное.
- Для заданного топологического пространства X мы обозначаем через $H^i(X)$ группу когомологий с коэффициентами в $\mathbb{C}$. Обозначим $H^{\mathrm{e}}(X) := \bigoplus_{i \geq 0} H^{2i}(X)$.
- Для вектора $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ и подмножества $I \subset [n]$ мы введём обозначения $a_I := \sum_{i \in I} a_i$ и $A_I := (a_{i_1}, \ldots, a_{i_{|I|}})$, где $i_1 < \ldots < i_{|I|}$ – числа, из которых состоит подмножество $I \subset [n]$.
- Для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ мы будем обозначать через $\mathcal{P}_n$ множество всех разбиений λ числа n. Для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l \geq 1$, мы обозначаем $l(\lambda) := l$ и $m_i(\lambda) := |\{1 \leq j \leq l | \lambda_j = i\}|$.
- Через B_n мы обозначаем числа Бернулли, $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}$.
- Рассмотрим положительное целое число N и формальные переменные t_a^α, $\alpha \in [N]$, $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Для $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ обозначим через $\mathbb{C}[[t_*^*]]^{(d)} \subset \mathbb{C}[[t_*^*]]$ идеал, образованный бесконечными линейными комбинациями мономов $\prod t_{d_i}^{\alpha_i}$, удовлетворяющих свойству $\sum d_i \geq d$.
- У нас будет часто появляться формальный ряд $S(z) := \frac{e^{z/2} - e^{-z/2}}{z} \in \mathbb{Q}[[z]]$.

1.1 Пространства модулей стабильных кривых

1.1.1 Понятие стабильной кривой и их пространств модулей

Под кривой C мы будем понимать проективную кривую, причём будем считать её связной, если не оговорено противное. Через $C^{\mathrm{sing}} \subset C$ мы будем обозначать множество особых точек. *Помеченной гладкой кривой* $(C; x_1, \ldots, x_n)$ называется гладкая кривая C, на которой отмечено n попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in C$. Такая кривая называется *стабильной*, если её группа автоморфизмов конечна, что эквивалентно условию $2g - 2 + n > 0$. Пару чисел $(g, n) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$, удовлетворяющую условию $2g - 2 + n > 0$, мы будем называть *стабильной парой*. Пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ определяется как множество классов изоморфизма стабильных помеченных гладких кривых рода g с n отмеченными точками.

При описании пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \supset \mathcal{M}_{g,n}$ важную роль играет комбинаторный объект, называемый *стабильным графом*. Назовём *обобщённым графом* граф самого общего вида, то есть мы допускаем петли и кратные рёбра, где каждой вершине приписано целое неотрицательное число, и также из вершин могут торчать половинки рёбер, которые мы называем *листьями* (в англоязычной литературе используется термин “legs”). Формально говоря, *обобщённым графом* рода g с n отмеченными листьями называется следующий набор данных:

$$\Gamma = (V, H, g\colon V \to \mathbb{Z}_{\geq 0}, v\colon H \to V, \iota\colon H \to H, i\colon L \to [n]),$$

где

- V – множество вершин графа, значение $g(v)$ мы будем называть *родом* вершины, через $n(v)$ мы обозначаем валентность вершины v;
- H – множество полурёбер графа;
- отображение $v\colon H \to V$ задаёт вершину графа, к которой прикреплено каждое полуребро $h \in H$;
- отображение $\iota\colon H \to H$ является инволюцией, L – это множество её неподвижных точек, являющееся множеством *листьев* графа;
- отображение $i\colon L \to [n]$ является биекцией, оно задаёт нумерацию листьев;
- множество 2-циклов инволюции $\iota\colon H \to H$ обозначается через E и является множеством рёбер нашего графа (мы допускаем кратные рёбра, а также петли);
- пара (V, E) определяет связный граф;

- выполняется соотношение $g = \sum_{v \in V} g(v) + b_1(\Gamma)$, где $b_1(\Gamma)$ обозначает первое число Бетти графа (V, E).

Мы будем часто писать $V(\Gamma)$, $H(\Gamma)$, $E(\Gamma)$, $L(\Gamma)$ вместо V, H, E, L, чтобы подчеркнуть, у какого графа рассматриваются соответствующие множества. Под *изоморфизмом* двух обобщённых графов Γ_1 и Γ_2 мы понимаем пару биекций $V(\Gamma_1) \xrightarrow{\sim} V(\Gamma_2)$ и $H(\Gamma_1) \xrightarrow{\sim} H(\Gamma_2)$, согласованную со всеми дополнительными структурами. Обозначим через $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ группу автоморфизмов обобщённого графа Γ.

Стабильным графом называется обобщённый граф, у которого в каждой вершине $v \in V$ выполняется соотношение $2g(v) - 2 + n(v) > 0$. Обозначим через $G_{g,n}$ множество классов изоморфизма стабильных графов рода g с n отмеченными листьями. Множество $G_{g,n}$ конечно, и оно непусто тогда и только тогда, когда пара (g, n) стабильная. У нас будут встречаться суммирования по множеству $G_{g,n}$: условимся, что запись $\sum_{\Gamma \in G_{g,n}}$ означает, что суммирование идёт по представителям всех классов изоморфизма.

Нодальная кривая – это связная проективная кривая, имеющая особенности не сложнее точек простого самопересечения. *Помеченной нодальной кривой* $(C; x_1, \ldots, x_n)$ называется нодальная кривая C, на которой отмечено n попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n \in C$, лежащих на гладкой части кривой. Эквивалентным образом, помеченную нодальную кривую можно рассматривать как несвязное объединение $\bigsqcup_{i=1}^{k} (C_i; x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i})$ помеченных гладких кривых $(C_i; x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i})$, где мы отождествляем некоторые пары отмеченных точке, причём требуется, чтобы получившееся топологическое пространство было связным. Образы кривых C_i при этом отождествлении мы будем называть *компонентами* помеченной нодальной кривой. Помеченной нодальной кривой сопоставляется *двойственный граф*, который является обобщённым графом: вершины соответствуют кривым C_i, рёбра соответствуют парам отождествляемых точек, родом вершины является род соответствующей кривой, отмеченным точкам $x_1, \ldots, x_n$ соответствуют листья графа (см. рисунок 1.1). *Стабильная кривая* – это помеченная нодальная кривая, группа автоморфизмов которой конечна, что эквивалентно тому, что двойственный граф является стабильным.

Рассмотрим помеченную нодальную кривую $(C; x_1, \ldots, x_n)$ и предположим, что $2g(C) - 2 + n > 0$. Стягивая все компоненты помеченной нодальной кривой, у которых соответствующие вершины в двойственном графе не удовлетворяют условию $2g(v) - 2 + n(v) > 0$, мы получим стабильную кривую, которая называется *стабилизацией* исходной помеченной нодальной кривой.

Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ определяется как множество классов изоморфизма стабильных кривых рода g с n отмеченными точками. Это пространство непусто тогда и только тогда, когда пара (g, n) стабильная. Для краткости, мы будем часто опускать упоминание условия стабильности, предполагая, что оно выполняется, если рассматривается соответствующее пространство

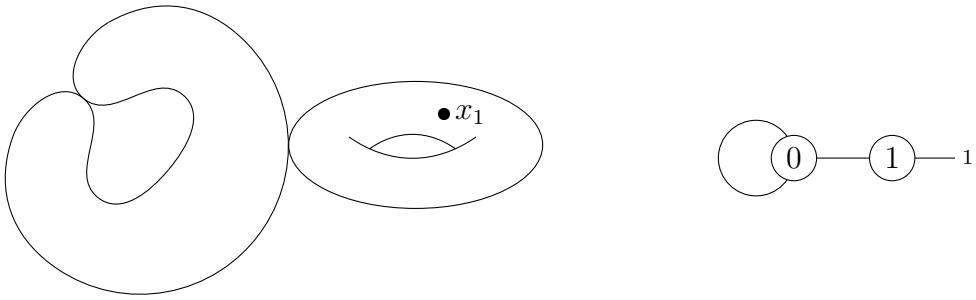


Рис. 1.1: Помеченная нодальная кривая и её двойственный граф.

модулей.

На пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ имеется структура аналитического орбиобразия, которую мы и будем по умолчанию иметь ввиду. Следовательно, на $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ имеется двойственность Пуанкаре, соответствующее отображение мы будем обозначать через

$$\mathrm{PD}\colon H_k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}) \to H^{2(3g-3+n)-k}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}).$$

С точки зрения алгебраической геометрии на пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ имеется структура гладкого стэка Делиня–Мамфорда. За дальнейшими подробностями мы отсылаем читателя к работам [83, 74, 31, 79].

Пространство $\mathcal{M}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ является открытым и всюду плотным подмножеством. Дополнение $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\backslash\mathcal{M}_{g,n}$ называется *границей* и обозначается через $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. В пространстве модулей имеется также другое открытое, всюду плотное подмножество $\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}$, определяемое как множество классов изоморфизма стабильных кривых, двойственный граф которых является деревом. Таким образом, имеется цепочка вложений $\mathcal{M}_{g,n} \subset \mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

1.1.2 Отображения между пространствами модулей

Нам будут важны два типа естественных отображений между пространствами модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$: *отображения забывания* и *отображения склейки*. Эти отображения играют ключевую роль при определении понятия когомологической теории поля.

Рассмотрим стабильную пару (g,n). Выберем $i \in [n+1]$. Рассмотрим стабильную кривую $(C;p_1,\dots,p_{n+1})$ рода g. Если забыть точку p_i, перенумеровать точки $p_{i+1},\dots,p_{n+1}$ числами от i до n и применить стабилизацию, то получится стабильная кривая с n отмеченными точками. Эта операция определяет отображение $\pi_i\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, которое называется *отображением забывания*. Мы будем часто пользоваться формулой проекции для отображения забывания:

$$(\pi_{n+1})_*\left(\pi_{n+1}^*(\alpha)\cdot\beta\right) = \alpha\cdot(\pi_{n+1})_*(\beta), \quad \alpha \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}), \quad \beta \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}),$$

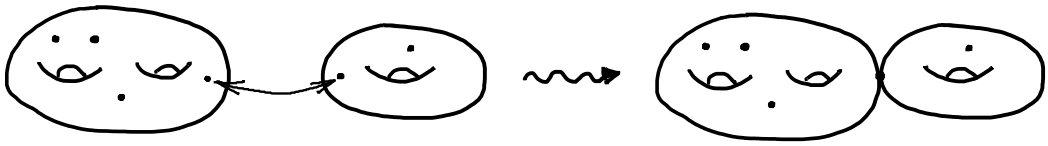


Рис. 1.2: Склейка двух точек на разных стабильных кривых индуцирует отображение $\mathrm{gl}_{I,J}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1}\to\overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$.

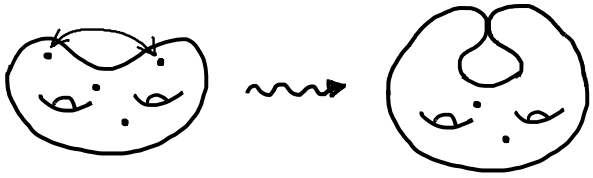


Рис. 1.3: Склейка двух точек на одной стабильной кривой индуцирует отображение $\widetilde{\mathrm{gl}}_{i,j}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}\to\overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}$.

а также её частным случаем

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\left(\pi_{n+1}^*(\alpha)\cdot\beta\right)=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}\left(\alpha\cdot(\pi_{n+1})_*(\beta)\right),\quad \alpha\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}),\quad \beta\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}).$$

Для подмножества $I\subset[n]$ такого, что пара $(g,n-|I|)$ является стабильной, определим отображение $\pi_I\colon\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n-|I|}$ как композицию отображений забывания, которые забывают отмеченные точки, пронумерованные множеством I.

Рассмотрим две стабильные пары (g_1,n_1+1), (g_2,n_2+1), а также разбиение $I\sqcup J=[n_1+n_2]$, где $|I|=n_1$ и $|J|=n_2$. Пусть $I=\{i_1,\ldots,i_{n_1}\}$, $i_1<\ldots<i_{n_1}$, и $J=\{j_1,\ldots,j_{n_2}\}$, $j_1<\ldots<j_{n_2}$. Рассмотрим произвольные стабильные кривые $(C_1;p_1,\ldots,p_{n_1+1})$ и $(C_2;q_1,\ldots,q_{n_2+1})$ родов g_1 и g_2, соответственно. Отождествив точки p_{n_1+1} и q_{n_2+1}, перенумеровав точки $p_1,\ldots,p_{n_1}$ числами $i_1,\ldots,i_{n_1}$, а точки $q_1,\ldots,q_{n_2}$ – числами $j_1,\ldots,j_{n_2}$, мы получим стабильную кривую рода g_1+g_2 с (n_1+n_2)-мя отмеченными точками. Эта операция определяет отображение $\mathrm{gl}_{I,J}\colon\overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1}\to\overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$, называемое *отображением склейки* (см. рисунок 1.2).

С другой стороны, пусть у нас есть стабильная пара $(g,n+2)$ и $i\neq j\in[n+2]$. Если отождествить отмеченные точки с номерами i и j на стабильной кривой рода g с $(n+2)$-мя отмеченными точками, очевидным образом перенумеровать оставшиеся n отмеченных точек, то мы получим стабильную кривую рода g с n отмеченными точками. Эта операция определяет отображение $\widetilde{\mathrm{gl}}_{i,j}\colon\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}\to\overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}$, которое также называется *отображением склейки* (см. рисунок 1.3).

Нам будет полезно ввести обозначение для некоторой композиции описанных выше отображений склейки. А именно, для целого $k\geq 1$ рассмотрим две стабильные пары (g_1,n_1+k) и

(g_2, n_2+k), а также разбиение $I \sqcup J = [n_1+n_2]$, где $|I| = n_1$ и $|J| = n_2$. Рассмотрим произвольные стабильные кривые $(C_1; p_1, \ldots, p_{n_1+k})$ и $(C_2; q_1, \ldots, q_{n_2+k})$ родов g_1 и g_2, соответственно. Отождествив точки p_{n_1+i} и q_{n_2+i} для каждого $1 \leq i \leq k$, перенумеровав точки $p_1, \ldots, p_{n_1}$ и $q_1, \ldots, q_{n_2}$ в соответствии с разбиением $I \sqcup J = [n_1+n_2]$, мы получим стабильную кривую рода g_1+g_2+k-1 с (n_1+n_2)-мя отмеченными точками. Эта операция определяет отображение $\mathrm{gl}^{(k)}_{I,J} \colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+k} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+k} \to \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2+k-1,n_1+n_2}$. Ясно, что $\mathrm{gl}^{(1)}_{I,J} = \mathrm{gl}_{I,J}$.

1.1.3 Тавтологические классы когомологий

В этом разделе мы приведём основные определения и факты, касающиеся некоторой подалгебры $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \subset H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$, называемой алгеброй *тавтологических когомологий*. Читатель может найти подробности, например, в работе [70].

Приведём сначала простейшие примеры классов когомологий на пространстве модулей, которые, как мы потом увидим, являются тавтологическими. Обозначим через $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, n$, комплексное линейное расслоение над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, слоем которого над точкой, представленной стабильной кривой $(C; x_1, \ldots, x_n)$, является кокасательное пространство к кривой C в точке x_i. Первые классы Черна этих расслоений обозначаются через

$$\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

и называются *пси-классами*.

Каппа-классы определяются как

$$\kappa_i := (\pi_{n+1})_*(\psi_{n+1}^{i+1}) \in H^{2i}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}), \quad i \geq 0,$$

где $\pi_{n+1} \colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – отображение забывания. Заметим, что $\kappa_0 = 2g-2+n \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$.

Обозначим через $\mathbb{E}$ комплексное векторное расслоение ранга g над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, слоем которого над точкой, представленной стабильной кривой $(C; x_1, \ldots, x_n)$, является пространство голоморфных дифференциалов на C. Это расслоение называется *расслоением Ходжа*, его классы Черна обозначаются через

$$\lambda_i := c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$$

и называются *классами Ходжа*.

Для любого $\Gamma \in G_{g,n}$ рассмотрим пространство $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma := \prod_{v \in V(\Gamma)} \overline{\mathcal{M}}_{g(v),n(v)}$ и каноническое отображение $\xi_\Gamma \colon \overline{\mathcal{M}}_\Gamma \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, которое задаётся отождествлением точек на стабильных кривых из пространств $\overline{\mathcal{M}}_{g(v),n(v)}$, соответствующих полурёбрам, образующим одно ребро. Предположим, что заданы числа $x_i[v], y[h] \geq 0$, для всех $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $v \in V(\Gamma)$ и $h \in H(\Gamma)$. Определим *базовый когомологический класс* на $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$ равенством

$$\gamma = \prod_{v \in V(\Gamma)} \prod_{i \geq 1} \kappa_i[v]^{x_i[v]} \cdot \prod_{h \in H(\Gamma)} \psi_h^{y[h]} \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_\Gamma, \mathbb{Q}),$$

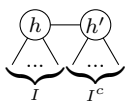
где $\kappa_i[v]$ – это i-ый каппа-класс на $\overline{\mathcal{M}}_{g(v),n(v)}$, а ψ_h – это пси-класс на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g(v(h)),n(v(h))}$. Класс когомологий на $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ вида $(\xi_\Gamma)_*(\gamma)$, где $\Gamma \in G_{g,n}$, а γ – это базовый когомологический класс на $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$, называется *базовым тавтологическим классом*. Обозначим через $R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ векторное подпространство в $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$, порождённое всеми базовыми тавтологическими классами. Оно является подалгеброй в $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$, называемой алгеброй *тавтологических когомологий* пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Мы видим, что все тавтологические классы имеют чётную степень. Обозначим

$$\begin{aligned} R^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) &:= R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \cap H^{2i}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}),\\ R^i(\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}) &:= R^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\big|_{\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}},\\ R^i(\mathcal{M}_{g,n}) &:= R^i(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\big|_{\mathcal{M}_{g,n}}. \end{aligned}$$

Классы Ходжа λ_i являются тавтологическими (см., напр., [40]).

Базовый тавтологический класс $(\xi_\Gamma)_*(1)$ на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g(\Gamma),|L(\Gamma)|}$ мы будем называть *граничным классом* и обозначать рисунком графа Γ.

Приведём теперь основные соотношения между тавтологическими классами. Для целых $0 \le h \le g$ и подмножества $I \subset [n]$ таких, что пары $(h, |I|+1)$ и $(g-h, n-|I|+1)$ являются стабильными, введём обозначение

$\delta_h^I :=$  $\in R^1(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}), \quad I^c := [n]\backslash I, \quad h' := g-h.$

Будем считать, что $\delta_h^I := 0$, если одна из пар $(h, |I|+1)$ и $(h', |I^c|+1)$ является нестабильной.

- Для любой стабильной пары (g,n) и $i \in [n]$ выполняется равенство

$$\psi_i = \pi_{n+1}^*(\psi_i) + \delta_0^{\{i,n+1\}} \in R^1(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}). \tag{1.1}$$

- Умножив равенство (1.1) на ψ_i, мы получим $\psi_i^2 = \psi_i \cdot \pi_{n+1}^*(\psi_i)$, откуда мы получаем, что для любого $d \ge 0$ выполняется

$$\psi_i^{d+1} = \pi_{n+1}^*(\psi_i^{d+1}) + \delta_0^{\{i,n+1\}}\pi_{n+1}^*(\psi_i^d).$$

  Рассмотрим произвольный набор целых чисел $d_1,\dots,d_n \ge 0$. Учитывая, что $\delta_0^{\{i,n+1\}}\delta_0^{\{j,n+1\}} = 0$ при $i \ne j$, мы получаем

$$\prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i} = \pi_{n+1}^*\left(\prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}\right) + \sum_{i\in[n],\, d_i>0} \delta_0^{\{i,n+1\}}\pi_{n+1}^*\left(\psi_i^{d_i-1}\prod_{j\ne i}\psi_j^{d_j}\right). \tag{1.2}$$

- Для любой стабильной пары (g,n) выполняется следующее соотношение на классы Ходжа:

$$\left(\sum_{i=0}^{g}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=0}^{g}(-1)^i\lambda_i\right)=1\in R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}),$$

из которого в частности следует, что $\lambda_g^2=0$, если $g>0$.

- Пси-классы на пространствах модулей $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ и $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$, а также класс λ_1 на пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{1,n}$ можно выразить как линейную комбинацию граничных классов:

$$\psi_1=\sum_{\substack{I\subset[n]\\1\in I,\,2,3\notin I}}\delta_0^I\in R^1(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}),\quad n\geq 4, \tag{1.3}$$

$$\psi_1=\frac{1}{24}\ \text{}+\sum_{\substack{I\subset[n]\\1\in I}}\delta_0^I\in R^1(\overline{\mathcal{M}}_{1,n}), \tag{1.4}$$

$$\lambda_1=\frac{1}{24}\ \text{}\in R^1(\overline{\mathcal{M}}_{1,n}). \tag{1.5}$$

- Для любой четвёрки попарно различных чисел $i,j,k,l\in[n]$ имеется соотношение

$$\sum_{\substack{I\subset[n]\\i,j\in I\not\ni k,l}}\delta_0^I=\sum_{\substack{I\subset[n]\\i,k\in I\not\ni j,l}}\delta_0^I\in R^1(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}). \tag{1.6}$$

Это соотношение называется *соотношением ассоциативности*.

1.1.4 DR-циклы

Определение

Предположим, что $g,n_0,n_1,n_2,d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ и пусть $\mu^1=(\mu_1^1,\dots,\mu_{n_1}^1)$, $\mu^2=(\mu_1^2,\dots,\mu_{n_2}^2)$ – два набора из целых положительных чисел таких, что $\sum_{i=1}^{n_j}\mu_i^j=d$, $j=1,2$. *Стабильное относительное отображение* в непараметризованную проективную прямую $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$

$$\Big((C;p_1,\dots,p_{n_0},q_1^1,\dots,q_{n_1}^1,q_1^2,\dots,q_{n_2}^2)\xrightarrow{f}(T;0,\infty)\Big) \tag{1.7}$$

состоит из следующих данных:

(1) $(C;p_1,\dots,p_{n_0},q_1^1,\dots,q_{n_1}^1,q_1^2,\dots,q_{n_2}^2)$ – помеченная нодальная кривая рода g;

(2) $(T;0,\infty)$ – помеченная нодальная кривая рода 0, представляющая из себя цепочку проективных прямых, причём точки 0 и ∞ лежат на концевых компонентах этой цепочки;

(3) $f\colon C\to T$ – алгебраическое отображение, для которого выполняются следующие два условия:

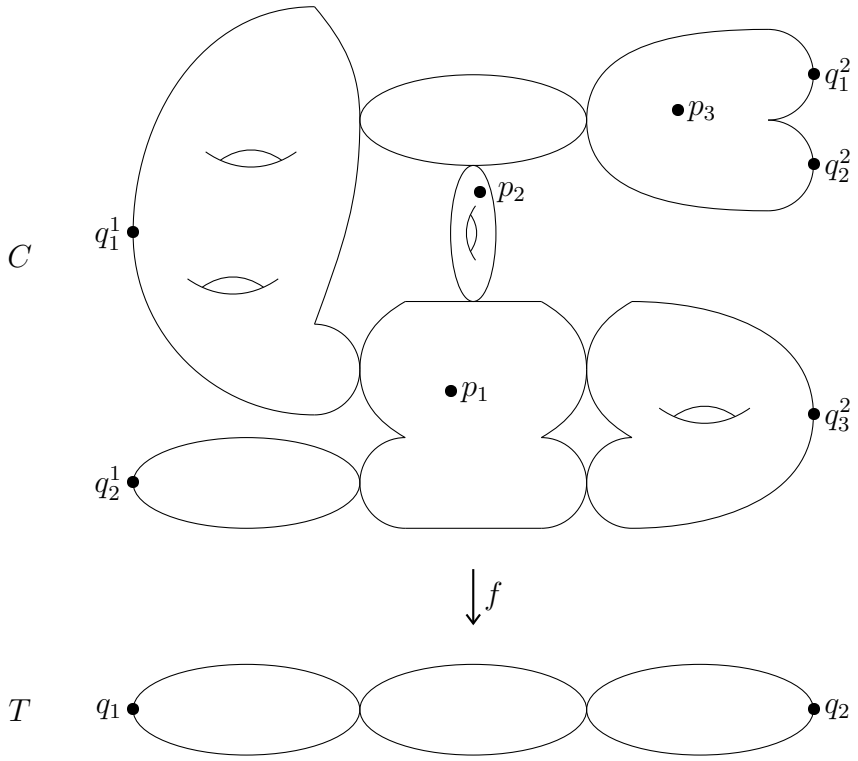


Рис. 1.4: Стабильное относительное отображение.

а) $f^{-1}(0) = \{q_1^1, \ldots, q_{n_1}^1\}$ и $f^{-1}(\infty) = \{q_1^2, \ldots, q_{n_2}^2\}$, причём порядок ветвления отображения f в точке q_i^j равен μ_i^j;

б) Прообразом каждой точки простого самопересечения на кривой T является объединение точек простого самопересечения на кривой C. Более того, пусть $q \in T$ – простая точка самопересечения и $p \in f^{-1}(q)$. Тогда требуется, чтобы можно было представить кривые C и T в окрестности точек p и q в виде $\{uv = 0\}$ и $\{xy = 0\}$, соответственно, таким образом, чтобы отображение f имело вид $(u, v) \mapsto (u^m, v^m) = (x, y)$ для некоторого целого числа $m \geq 1$;

(4) Требуется, чтобы описанная выше структура имела конечную группу автоморфизмов. Под *автоморфизмом* мы понимаем пару автоморфизмов $\alpha\colon C \to C$ и $\beta\colon T \to T$, которые сохраняют отмеченные точки и коммутируют с отображением f.

Пример стабильного относительного отображения изображён на рисунке 1.4. Неприводимая компонента кривой, содержащая на рисунке точку p_2, отображается под действием отображения f в точку.

Стабильные относительные отображения $(C \xrightarrow{f} T)$ и $(C' \xrightarrow{f'} T')$ считаются *изоморфными*, если существуют изоморфизмы $\alpha\colon C \to C'$ и $\beta\colon T \to T'$, которые сохраняют отмеченные точки и коммутируют с отображениями f и f'. Множество классов изоморфизма стабильных относительных отображений в непараметризованную проективную прямую $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ обозначается через

$\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)$ и называется *пространством модулей стабильных относительных отображений* (см., напр., [51]). Это пространство является компактным топологическим пространством, и, более того, на нём имеется структура стэка Делиня–Мамфорда. Пространство модулей стабильных относительных отображений $\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)$ обладает так называемым *виртуальным фундаментальным классом*

$$[\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)]^{\mathrm{virt}} \in H_{2\cdot\mathrm{vdim}\,\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)}(\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2),\mathbb{Q}),$$

где

$$\mathrm{vdim}\,\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2) := 2g-3+n_0+n_1+n_2. \tag{1.8}$$

Предположим, что $2g-2+n_0+n_1+n_2>0$. Обозначим через $\mathrm{st}\colon \overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2)\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n_0+n_1+n_2}$ отображение, сопоставляющее стабильному относительному отображению (1.7) стабилизацию помеченной нодальной кривой $(C;p_1,\ldots,p_{n_0},q^1_1,\ldots,q^1_{n_1},q^2_1,\ldots,q^2_{n_2})$.

Рассмотрим вектор из n целых чисел $A=(a_1,\ldots,a_n)$, удовлетворяющих условию $\sum a_i=0$; такой вектор мы будем называть *вектором DR-данных*. Пусть $1\le i_1<i_2<\ldots<i_{n_1}\le n$ – индексы, нумерующие положительные числа среди набора $a_1,\ldots,a_n$, а $1\le j_1<j_2<\ldots<j_{n_2}\le n$ – индексы нумерующие отрицательные числа. Таким образом, оставшиеся $n_0:=n-n_1-n_2$ чисел из набора $a_1,\ldots,a_n$ равны нулю. Определим наборы $\mu^1=(\mu^1_1,\ldots,\mu^1_{n_1})$ и $\mu^2=(\mu^2_1,\ldots,\mu^2_{n_2})$ равенствами $\mu^1_k:=a_{i_k}$ и $\mu^2_k:=-a_{j_k}$. Обозначим

$$\overline{\mathcal{M}}_{g;A}:=\overline{\mathcal{M}}^{\sim}_{g,n_0}(\mu^1,\mu^2).$$

При этом каждая отмеченная точка на стабильном относительном отображении из пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g;A}$, то есть точка ветвления или одна из n_0 дополнительных отмеченных точек, соответствует какому-то a_i, и мы считаем, что эта отмеченная точка занумерована числом i.

Предположим, что (g,n) – стабильная пара. *Цикл двухточечных ветвлений*, который мы будем кратко называть *DR-циклом*, определяется как

$$\mathrm{DR}_g(A):=\mathrm{PD}\left(\mathrm{st}_*\left([\overline{\mathcal{M}}_{g;A}]^{\mathrm{virt}}\right)\right)\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}).$$

Из формулы (1.8) следует, что $\mathrm{DR}_g(A)\in H^{2g}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$. DR-цикл является тавтологическим классом когомологий [43]. Явная формула, выражающая DR-цикл через базовые тавтологические классы, была получена в работе [54]. Мы приведём её в следующем разделе.

Основные свойства

Перечислим основные свойства DR-цикла (см., напр., [54, раздел 0.5], [22, предложение 4.6], [24, пример 3.7]):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{DR}_0(a_1,\dots,a_n) = 1,\\
&\mathrm{DR}_g(0,0,\dots,0) = (-1)^g\lambda_g,\\
&\mathrm{DR}_g(a_1,\dots,a_n,0) = \pi_{n+1}^*\left(\mathrm{DR}_g(a_1,\dots,a_n)\right), \qquad (1.9)\\
&(\pi_{[n+g]\setminus[n]})_*\left(\mathrm{DR}_g(a_1,\dots,a_{n+g})\right) = g!\prod_{i=1}^{g} a_{n+i}^2. \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Имеется простая формула для ограничения DR-цикла на пространство $\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}$:

$$\mathrm{DR}_g(a_1,\dots,a_n)|_{\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}} = \frac{1}{g!}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2\psi_i}{2} - \frac{1}{4}\sum_{I\subset[n]}\sum_{h=0}^{g} a_I^2\delta_h^I\right)^g. \qquad (1.11)$$

Она называется *формулой Хайна* [53, 52]. Эта формула имеет простое, но очень важное для дальнейшего следствие.

Лемма 1.1. *Для любого класса когомологий $\omega \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ интеграл*

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \lambda_g\mathrm{DR}_g\left(b_1,\dots,b_{n-1},-\sum b_i\right)\omega$$

как функция от $b_1,\dots,b_{n-1}\in\mathbb{Z}$, является однородным многочленом степени $2g$.

Доказательство. Так как $\lambda_g|_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\setminus\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}} = 0$, для любого класса $\theta\in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, удовлетворяющего свойству $\theta|_{\mathcal{M}^{\mathrm{ct}}_{g,n}} = 0$, мы имеем $\lambda_g\theta = 0$. Значит, пользуясь формулой Хайна, мы получаем

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \lambda_g\mathrm{DR}_g\left(b_1,\dots,b_{n-1},-\sum b_i\right)\omega = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \lambda_g\left[\frac{1}{g!}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2\psi_i}{2} - \frac{1}{4}\sum_{I\subset[n]}\sum_{h=0}^{g} a_I^2\delta_h^I\right)^g\right]\omega,$$

где $(a_1,\dots,a_n) := (b_1,\dots,b_{n-1},-\sum b_i)$, что и доказывает лемму. □

Приведём теперь формулу, явно выражающую DR-цикл через базовые тавтологические классы уже на всём пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Пусть $A = (a_1,\dots,a_n)$ – вектор DR-данных. Рассмотрим $\Gamma\in G_{g,n}$ и $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$. *Весовая функция по модулю r* на Γ – это функция

$$w\colon H(\Gamma)\to\{0,\dots,r-1\},$$

удовлетворяющая следующим трём свойствам:

(1) для любого листа $l_i\in L(\Gamma)$ выполняется $w(l_i) = a_i \mod r$;

(2) для любого ребра $e = \{h, h'\} \in E(\Gamma)$ выполняется $w(h) + w(h') = 0 \mod r$;

(3) для любой вершины $v \in V(\Gamma)$ мы имеем $\sum_{h \in H(\Gamma),\, v(h)=v} w(h) = 0 \mod r$.

Обозначим через $W_{\Gamma,r}$ множество весовых функций по модулю r на Γ. Мы имеем $|W_{\Gamma,r}| = r^{b_1(\Gamma)}$.

Обозначим через $P_g^{d,r}(A)$ компоненту степени $2d$ когомологического класса

$$\sum_{\Gamma \in G_{g,n}} \sum_{w \in W_{\Gamma,r}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\Gamma)|} \frac{1}{r^{b_1(\Gamma)}} \times$$
$$\times\, (\xi_\Gamma)_* \left[\prod_{i=1}^{n} \exp(a_i^2 \psi_{l_i}) \prod_{e=\{h,h'\} \in E(\Gamma)} \frac{1 - \exp\left(-w(h)w(h')(\psi_h + \psi_{h'})\right)}{\psi_h + \psi_{h'}} \right] \in R^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

Заметим, что множитель $\frac{1-\exp(-w(h)w(h')(\psi_h+\psi_{h'}))}{\psi_h+\psi_{h'}}$ корректно определён, так как знаменатель формально делит числитель. В статье [54] доказано, что для фиксированных g, A и d класс $P_g^{d,r}(A) \in R^d(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ является многочленом от r при всех достаточно больших r. Обозначим через $P_g^d(A)$ константный член в получающемся многочлене от r. В работе [54] доказано, что

$$\mathrm{DR}_g(A) = 2^{-g} P_g^g(A).$$

Эту формулу называют *формулой Пикстона*.

В недавней работе [77] с помощью формулы Пикстона было доказано, что когомологический класс $\mathrm{DR}_g\left(b_1, \ldots, b_{n-1}, -\sum b_i\right)$, как функция от $b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{Z}$, является многочленом степени $2g$ с коэффициентами в пространстве $R^g(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$.

В работе [28] доказано, что класс $P_g^d(A)$ зануляется при $d > g$.

Соотношение коммутативности на DR-циклы

Для набора целочисленных векторов $A_1, \ldots, A_l$ такого, что сумма всех компонент этих векторов равна нулю, мы будем обозначать через $\mathrm{DR}_g(A_1, \ldots, A_l)$ DR-цикл с вектором DR-данных, очевидным образом составленным из компонент векторов A_i.

Пусть $n \geq 2$ и рассмотрим вектор DR-данных $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Для пары чисел (a, b), равной $(1, 2)$ или $(2, 1)$, определим следующий класс в пространстве $R^{g+1}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2})$:

$$D_{a,b;A,g} := \sum_{\substack{I \sqcup J = [n+2] \\ n+a \in I,\, n+b \in J \\ a_{I \setminus \{n+a\}} > 0}} \sum_{\substack{g_1, g_2 \geq 0,\, p \geq 1 \\ g_1 + g_2 + p - 1 = g}} \sum_{\substack{K = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^p \\ a_{I \setminus \{n+a\}} = \sum_{j=1}^p k_j}} \frac{\prod_{j=1}^p k_j}{p!} \times \tag{1.12}$$
$$\times\, (\mathrm{gl}_{I,J}^{(p)})_* \left(\mathrm{DR}_{g_1}(A_{I \setminus \{n+a\}}, 0, -K) \times \mathrm{DR}_{g_2}(A_{J \setminus \{n+b\}}, 0, K) \right).$$

Теорема 1.2. *Для любых $g \geq 0$, $n \geq 2$ и вектора DR-данных $A = (a_1, \ldots, a_n)$ выполняется соотношение*

$$D_{1,2;A,g} = D_{2,1;A,g} \in R^{g+1}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}). \tag{1.13}$$

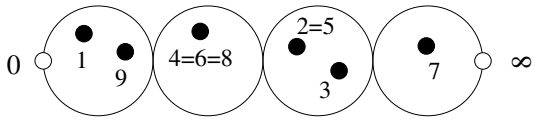


Рис. 1.5: Нодальная кривая с белыми и чёрными отмеченными точками, соответствующая точке пространства LM_9.

Мы называем это соотношение соотношением коммутативности на DR-циклы.

Доказательство. Доказательство использует компактификацию пространства модулей $\mathcal{M}_{m+2}$, $m \geq 1$, отличную от компактификации Делиня–Мамфорда $\overline{\mathcal{M}}_{m+2}$. Эта компактификация называется *пространством Лосева–Манина* [62] и обозначается через LM_m. Точки пространства Лосева–Манина соответствуют классам изоморфизма нодальных кривых, имеющих вид цепочки проективных прямых, которые наделены $(m+2)$-мя отмеченными точками, лежащими на гладкой части кривой, и которые имеют два типа (см. рисунок 1.5):

- имеются две различные *белые* отмеченные точки, обозначаемые через 0 и ∞, которые располагаются на концевых сферах цепочки;
- имеются m *чёрных* отмеченных точек, занумерованных числами от 1 до m, которые могут сливаться друг с другом, но не с белыми точками, причём на каждой сфере цепочки должна лежать по крайней мере одна чёрная точка.

Пространство Лосева–Манина обладает структурой гладкого проективного многообразия.

Для разбиения $I \sqcup J = [m]$, удовлетворяющего $|I|, |J| \geq 1$, обозначим через $D_{I,J} \subset \mathrm{LM}_m$ дивизор, который является замыканием множества точек в пространстве LM_m, соответствующих нодальным кривым с одной особой точкой, причём сфера, содержащая точку 0, содержит черные точки, занумерованные числами из множества I, а сфера, содержащая точку ∞, содержит чёрные точки, занумерованные числами из множества J. Для любых различных чисел $i, j \in [m]$ имеется соотношение [62, теорема 2.7.1]

$$\sum_{\substack{I \sqcup J = [m] \\ i \in I,\, j \in J}} [D_{I,J}] = \sum_{\substack{I \sqcup J = [m] \\ j \in I,\, i \in J}} [D_{I,J}] \in H_2(\mathrm{LM}_m, \mathbb{Q}). \tag{1.14}$$

Рассмотрим стабильную пару (g, n), вектор DR-данных $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и пространство модулей стабильных относительных отображений $\overline{\mathcal{M}}_{g;A}$. Обозначим $I_0 := \{i \in [n] | a_i = 0\} \subset [n]$ и $n_0 := |I_0|$. Для дальнейших рассуждений нам потребуется отображение

$$q \colon \overline{\mathcal{M}}_{g;A} \to \mathrm{LM}_{r+n_0}/S_r,$$

где $r := 2g - 2 + n - n_0$, версия которого для пространства модулей стабильных отображений была построена в работе [46]. Мы определим это отображение в три шага.

1. Рассмотрим сюръективный морфизм $f\colon C \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, где C – гладкая кривая, а также зафиксируем подмножество $S \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, состоящее из двух точек. Для точки $x \in C$ мы будем обозначать через $\mathrm{mult}_x(f)$ кратность отображения f в точке x (то есть локально в окрестности точки x отображение f имеет вид $z \mapsto z^{\mathrm{mult}_x(f)}$). Зададим элемент $\mathrm{br}_S(f)$ в симметрической степени $S^r(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$, где $r := 2g(C) - 2 + |f^{-1}(S)|$, равенством
$$\mathrm{br}_S(f) := \sum_{x \in C \setminus f^{-1}(S)} (\mathrm{mult}_x(f) - 1)[f(x)] \in S^r(\mathbb{C}\mathrm{P}^1).$$

2. Рассмотрим теперь морфизм $f\colon C \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, где C – нодальная кривая, а также подмножество $S \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, состоящее из двух точек, такое, что множество $f^{-1}(S)$ состоит из гладких точек кривой C. Рассмотрим нормализацию $\nu\colon \widetilde{C} \to C$ кривой C и обозначим $\widetilde{f} := f \circ \nu\colon \widetilde{C} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Разложим $\widetilde{C} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_a \sqcup B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_b$, где кривые $A_1, \ldots, A_a$ сюръективно отображаются на $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, а каждая из кривых $B_1, \ldots, B_b$ отображается в точку, $p_j := f(B_j) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Зададим элемент $\mathrm{br}_S(f) \in S^r(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$, где $r := 2g(C) - 2 + |f^{-1}(S)|$, равенством (см. [46, формула (5)])
$$\mathrm{br}_S(f) := \sum_{i=1}^{a} \mathrm{br}_S\left(\widetilde{f}|_{A_i}\right) + \sum_{j=1}^{n} (2g(B_j) - 2)[p_j] + 2[f(C^{\mathrm{sing}})].$$

3. Рассмотрим теперь стабильное относительно отображение (1.7). Обозначим через $T_1, \ldots, T_m$ неприводимые компоненты кривой T. Обозначим $S := \{0, \infty\} \cup T^{\mathrm{sing}} \subset T$. Для каждого i множество $T_i \cap S$ состоит из двух точек. Определим элемент $\mathrm{br}(f)$ в симметрической степени $S^r(T)$, где $r := 2g(C) - 2 + n_1 + n_2$, равенством
$$\mathrm{br}(f) := \sum_{i=1}^{m} \mathrm{br}_{S \cap T_i}\left(f|_{f^{-1}(T_i)}\right) \in S^r(T).$$

   Мы рассматриваем элемент $\mathrm{br}(f)$ как r неупорядоченных точек на T, причём все эти точки лежат на гладкой части кривой T, а также отличны от точек $0, \infty$. Кривая T вместе с r неупорядоченными точками из элемента $\mathrm{br}(f)$, а также n_0 точками $f(p_1), \ldots, f(p_{n_0})$ задаёт элемент в пространстве LM_{r+n_0}/S_r. Таким образом, мы построили отображение $\overline{\mathcal{M}}_{g;A} \to \mathrm{LM}_{r+n_0}/S_r$, которое мы обозначаем через q. Заметим, что при этом n_0 чёрных занумерованных точек на кривых из пространства LM_{r+n_0}/S_r естественным образом занумерованы числами из множества I_0.

Таким образом, мы имеем два отображения
$$\mathrm{LM}_{r+n_0}/S_r \xleftarrow{q} \overline{\mathcal{M}}_{g;A} \xrightarrow{\mathrm{st}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}.$$

Пространство LM_{r+n_0}/S_r является орбиобразием, поэтому на нём имеется двойственность Пуанкаре. Для чисел $r', r'' \geq 0$, удовлетворяющих $r' + r'' = r$, и разбиения $\alpha \sqcup \beta = I_0$ таких, что

$r'+|\alpha|>0$ и $r''+|\beta|>0$, рассмотрим дивизор $D_{(r',\alpha|r'',\beta)}\subset \mathrm{LM}_{r+n_0}/S_r$, который является замыканием множества точек в пространстве LM_{r+n_0}/S_r, соответствующих нодальным кривым с одной особой точкой, причём сфера, содержащая точку 0, содержит r' ненумерованных черных точек и черные точки, занумерованные числами из множества α, а сфера, содержащая точку ∞, содержит r'' ненумерованных черных точек и черные точки, занумерованные числами из множества β. Тогда имеется формула [24, леммы 2.3 и 2.4]

$$\mathrm{PD}\left(\mathrm{st}_*\left([\overline{\mathcal{M}}_{g,A}]^{\mathrm{virt}}\cap q^*\left(\mathrm{PD}\left(\left[D_{(r',\alpha|r'',\beta)}\right]\right)\right)\right)\right)=\sum_{\substack{I\sqcup J=[n]\\ \alpha\subset I,\,\beta\subset J\\ a_I>0}}\ \sum_{\substack{g_1,g_2\geq 0,\,p\geq 1\\ 2g_1-2+|I\setminus\alpha|+p=r'\\ 2g_2-2+|J\setminus\beta|+p=r''}}\ \sum_{\substack{K=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p_{\geq 1}\\ a_I=\sum_{j=1}^p k_j}}\frac{\prod_{j=1}^p k_j}{p!}\times \tag{1.15}$$

$$\times\,(\mathrm{gl}^{(p)}_{I,J})_*\left(\mathrm{DR}_{g_1}(A_I,-K)\times\mathrm{DR}_{g_2}(A_J,K)\right).$$

Пусть $n\geq 2$, рассмотрим произвольный вектор DR-данных $A=(a_1,\ldots,a_n)$, а также вектор DR-данных $\widetilde{A}:=(a_1,\ldots,a_n,0,0)$. Обозначим $\widetilde{I}_0:=\{i\in[n]|a_i=0\}\cup\{n+1,n+2\}\subset[n+2]$ и $\widetilde{n}_0:=|\widetilde{I}_0|$. Рассмотрим отображения

$$\mathrm{LM}_{r+\widetilde{n}_0}/S_r\xleftarrow{q}\overline{\mathcal{M}}_{g;\widetilde{A}}\xrightarrow{\mathrm{st}}\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2},$$

где $r=2g+n-\widetilde{n}_0$. Пользуясь проекцией $\mathrm{LM}_{r+\widetilde{n}_0}\to\mathrm{LM}_{r+\widetilde{n}_0}/S_r$, из соотношения (1.14) мы получаем соотношение

$$\sum_{\substack{r'+r''=r,\,\alpha\sqcup\beta=\widetilde{I}_0\\ n+1\in\alpha,\,n+2\in\beta}}[D_{(r',\alpha|r'',\beta)}]=\sum_{\substack{r'+r''=r,\,\alpha\sqcup\beta=\widetilde{I}_0\\ n+2\in\alpha,\,n+1\in\beta}}[D_{(r',\alpha|r'',\beta)}]\in H_2(\mathrm{LM}_{r+\widetilde{n}_0}/S_r,\mathbb{Q}).$$

Осталось только заметить, что из формулы (1.15) вытекает, что

$$D_{a,b;A,g}=\mathrm{PD}\left(\mathrm{st}_*\left([\overline{\mathcal{M}}_{g,\widetilde{A}}]^{\mathrm{virt}}\cap q^*\left(\mathrm{PD}\left(\sum_{\substack{r'+r''=r,\,\alpha\sqcup\beta=\widetilde{I}_0\\ n+a\in\alpha,\,n+b\in\beta}}[D_{(r',\alpha|r'',\beta)}]\right)\right)\right)\right),\quad \{a,b\}=\{1,2\},$$

и теорема доказана. □

Замечание 1.3. В роде 0 мы имеем

$$D_{a,b;A,0}=\sum_{\substack{I\subset[n+2]\\ n+a\in I\not\ni n+b\\ a_{I\setminus\{n+a\}}>0}}a_{I\setminus\{n+a\}}\delta_0^I,$$

и значит соотношение (1.13) принимает вид

$$\sum_{\substack{I\subset[n+2]\\ n+1\in I\not\ni n+2\\ a_{I\setminus\{n+a\}}>0}}a_{I\setminus\{n+a\}}\delta_0^I=\sum_{\substack{I\subset[n+2]\\ n+2\in I\not\ni n+1\\ a_{I\setminus\{n+a\}}>0}}a_{I\setminus\{n+a\}}\delta_0^I. \tag{1.16}$$

Выберем $A = (1, -1, 0, \dots, 0)$, тогда соотношение (1.16) даст в точности соотношение (1.6) для $i = 1, j = n+1, k = n+2, l = 2$. Таким образом, соотношение ассоциативности является частным случаем соотношения коммутативности на DR-циклы.

Произведение DR-цикла и пси-класса

Теорема 1.4 ([24]). *Пусть $A = (a_1, \dots, a_n)$ – вектор DR-данных и $s \in [n]$. Тогда имеется формула*

$$a_s\psi_s \mathrm{DR}_g(A) = \tag{1.17}$$
$$= \sum_{\substack{I \sqcup J = [n] \\ a_I > 0}} \sum_{g_1, g_2 \geq 0, p \geq 1 \atop g_1 + g_2 + p - 1 = g} \sum_{\substack{K = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p_{\geq 1} \\ a_I = \sum_{j=1}^p k_j}} \frac{\rho}{2g - 2 + n} \frac{\prod_{j=1}^p k_j}{p!} (\mathrm{gl}^{(p)}_{I,J})_* \left(\mathrm{DR}_{g_1}(A_I, -K) \times \mathrm{DR}_{g_2}(A_J, K) \right),$$

где число ρ определяется следующим образом:

$$\rho := \begin{cases} 2g_2 - 2 + |J| + p, & \text{если } s \in I, \\ -(2g_1 - 2 + |I| + p), & \text{если } s \in J. \end{cases}$$

С помощью этой теоремы в статье [24, теорема 1] была выведена следующая формула, которая будет нам полезна:

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{2g-3+n} \mathrm{DR}_g(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{Coef}_{z^{2g}} \left(\frac{\prod_{i=2}^n S(a_i z)}{S(z)} \right). \tag{1.18}$$

Замечание 1.5. Строго говоря, теорема была доказана в работе [24, теорема 4] при условии $a_s \neq 0$. Однако, случай $a_s = 0$ легко выводится из соотношения коммутативности (1.13). Действительно, предположим, что $a_s = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $s = n$. Положим $\widetilde{A} := (a_1, \dots, a_{n-1})$. Тогда правая часть равенства (1.17) равна

$$\frac{1}{2g - 2 + n} (\pi_{n+1})_* \left(\psi_{n+1} (D_{1,2;\widetilde{A},g} - D_{2,1;\widetilde{A},g}) \right),$$

что по соотношению коммутативности равно 0.

1.2 Когомологические теории поля

1.2.1 Основные определения

Определение 1.6 ([57]). Рассмотрим конечномерное векторное пространство V над полем $\mathbb{C}$. Зафиксируем невырожденную симметричную билинейную форму $\eta\colon V \times V \to \mathbb{C}$, традиционно называемую *метрикой*, на пространстве V, а также вектор $e \in V$, который мы будем называть

единицей. Когомологической теорией поля (КогТП) называется набор линейных отображений $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, заданных для всех стабильных пар $(g,n) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

1. Отображения $c_{g,n}$ являются эквивариантными относительно действия симметрической группы S_n. Здесь мы рассматриваем S_n-действие на тензорной степени $V^{\otimes n}$, получаемое перестановками множителей, а S_n-действие на когомологиях $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ индуцируется S_n-действием на пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, задаваемым перестановками отмеченных точек.

2. Для любых векторов $v, w \in V$ выполняется равенство $\eta(v,w) = c_{0,3}(e \otimes v \otimes w) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,3}) = \mathbb{C}$.

3. Для любой стабильной пары (g,n) и векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ выполняется равенство

$$\pi_{n+1}^* \left(c_{g,n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\right) = c_{g,n+1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes e).$$

4. Выберем базис $e_1, \ldots, e_{\dim V}$ в пространстве V и рассмотрим матрицу $(\eta_{\alpha\beta})$, где $\eta_{\alpha\beta} := \eta(e_\alpha, e_\beta)$, которую мы также как и метрику будем обозначать через η. Положим $(\eta^{\alpha\beta}) := \eta^{-1}$. Рассмотрим отображение склейки $\mathrm{gl}_{[n_1],[n_1+n_2]\setminus[n_1]}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$. Тогда для любых векторов $v_1, \ldots, v_{n_1+n_2} \in V$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}\mathrm{gl}^*_{[n_1],[n_1+n_2]\setminus[n_1]} \left(c_{g_1+g_2,n_1+n_2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1+n_2})\right) = \\ = c_{g_1,n_1+1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1} \otimes e_\alpha) \times c_{g_2,n_2+1}(v_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes v_{n_1+n_2} \otimes e_\beta)\eta^{\alpha\beta}. \quad (1.19)\end{aligned}$$

Схожее свойство выполняется и для отображения склейки $\widetilde{\mathrm{gl}}_{n+1,n+2}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}$:

$$\widetilde{\mathrm{gl}}^*_{n+1,n+2} \left(c_{g+1,n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\right) = c_{g,n+2}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes e_\alpha \otimes e_\beta)\eta^{\alpha\beta}. \quad (1.20)$$

Выполнение свойства 4 не зависит от выбора базиса в пространстве V. Векторное пространство V часто называют *фазовым пространством* когомологической теории поля, а его размерность – *рангом* когомологической теории поля.

Замечание 1.7. Из свойств 1 и 4 в определении легко вывести очевидно формулируемые обобщения равенства (1.19) для произвольного разбиения $I \sqcup J = [n_1 + n_2]$, а также равенства (1.20) для отображения склейки $\widetilde{\mathrm{gl}}_{i,j}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}$ с произвольными $i \neq j \in [n+2]$.

Договоримся, что при выборе базиса $e_1, \ldots, e_N \in V$ мы будем обозначать через $A^\alpha \in \mathbb{C}$ коэффициенты в разложении единицы по базису, $e = A^\alpha e_\alpha$.

Замечание 1.8. Пусть K – произвольная $\mathbb{C}$-алгебра. Мы можем определить *когомологическую теорию поля с коэффициентами в алгебре* K как набор линейных отображений $c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to$

$H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \otimes_{\mathbb{C}} K$, удовлетворяющий тому же набору свойств из определения 1.6. Такие когомологические теории поля появляются в теории Громова–Виттена гладких проективных многообразий. Когомологические теории поля с коэффициентами в алгебре мы будем часто называть просто когомологическими теориями поля.

Корреляторами заданной КогТП называются числа

$$\langle \tau_{d_1}(v_1) \cdots \tau_{d_n}(v_n) \rangle_{g,n} := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i) \prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}, \quad v_1, \ldots, v_n \in V, \quad d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Пусть t_a^α, $\alpha \in [N]$, $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – формальные переменные. *Потенциал* нашей КогТП определяется как

$$\mathcal{F}(t_*^*, \varepsilon) = \sum_{g \geq 0} \varepsilon^{2g} \mathcal{F}_g(t_*^*) := \sum_{g,n \geq 0} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [N] \\ d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{d_i}(e_{\alpha_i}) \right\rangle_{g,n} \prod_{i=1}^n t_{d_i}^{\alpha_i} \in \mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]. \tag{1.21}$$

Хорошо известны следующие равенства, называемые *струнным* и *дилатонным* равенством:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_0^{\mathbb{1}}} = \sum_{p \geq 0} t_{p+1}^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_p^\alpha} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} t_0^\alpha t_0^\beta + \varepsilon^2 \langle \tau_0(e) \rangle_{1,1}, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1^{\mathbb{1}}} = \sum_{p \geq 0} t_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_p^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon} - 2\mathcal{F} + \varepsilon^2 \frac{N}{24}, \tag{1.23}$$

которые следуют из равенства (1.2), а также свойства $\kappa_0 = 2g - 2 + n \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$. Здесь мы используем обозначение $\frac{\partial}{\partial t_d^{\mathbb{1}}} := A^\alpha \frac{\partial}{\partial t_d^\alpha}$.

1.2.2 Примеры

Простейшим примером КогТП является *тривиальная КогТП* с $V = \mathbb{C}$, $e_1 = e = 1$, $(e_1, e_1) = 1$ и $c_{g,n}^{\mathrm{triv}}(e_1^{\otimes n}) := 1 \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. Более содержательные примеры КогТП приведены ниже.

Классы Ходжа

Пусть $V = \mathbb{C}$, $e_1 = e = 1$ и $(e_1, e_1) = 1$. Обозначим через $\mathrm{Ch}_i(\mathbb{E})$ i-ую компоненту характера Черна расслоения Ходжа. Известно, что (см., напр., [64])

1. для любого $i \geq 1$ выполняется $\mathrm{Ch}_{2i}(\mathbb{E}) = 0$;
2. для любой последовательности чисел $\gamma_i \in \mathbb{C}$, $i \geq 1$, набор линейных отображений $c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}} \colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, заданных равенством

$$c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}(e_1^{\otimes n}) := e^{\sum_{i \geq 1} \gamma_i \mathrm{Ch}_{2i-1}(\mathbb{E})},$$

образует КогТП.

Когомологические теории поля в степени 0

Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$. Легко видеть, что семейство отображений $\widetilde{c}_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, задаваемых равенством

$$\widetilde{c}_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i) := c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)|_{H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})},$$

также образует КогТП.

Более того, произвольная КогТП в степени 0 $\{\widetilde{c}_{g,n}\}$ (то есть $\widetilde{c}_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i) \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$) однозначно восстанавливается по следующим данным. Выберем для удобства базис $e_1, \ldots, e_N \in V$ и определим константы $c^\alpha_{\beta\gamma} \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta, \gamma \in [N]$, равенством

$$c^\alpha_{\beta\gamma} := \eta^{\alpha\theta} c_{0,3}(e_\theta \otimes e_\beta \otimes e_\gamma). \tag{1.24}$$

Тогда константы $c^\alpha_{\beta\gamma}$ определяют на пространстве V структуру коммутативной ассоциативной алгебры с единицей e [57]. Мы будем обозначать умножение символом $\circ$. Заметим, что выполняется следующее равенство:

$$\eta(v_1 \circ v_2, v_3) = \eta(v_1, v_2 \circ v_3), \quad v_1, v_2, v_3 \in V. \tag{1.25}$$

Конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра, наделённая симметричной невырожденной билинейной формой, удовлетворяющей свойству (1.25), называется *фробениусовой алгеброй*. КогТП в степени 0 $\{\widetilde{c}_{g,n}\}$ однозначно определяется своей фробениусовой алгеброй. Чтобы это увидеть, для каждой стабильной пары (g,n) нужно выбрать граф $\Gamma \in G_{g,n}$ такой, что $g(v) = 0$ и $n(v) = 3$ для каждой $v \in V(\Gamma)$. Тогда пространство $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$ является точкой, и значение $\widetilde{c}_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) = \mathbb{C}$ можно вычислить, посчитав обратный образ $\xi_\Gamma^*(\widetilde{c}_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}))$ с помощью свойства 4 из определения 1.6. Например,

$$c_{0,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = c^{\mu_1}_{\alpha_1\alpha_2} c^{\mu_2}_{\mu_1\alpha_3} \cdots c^{\mu_{n-2}}_{\mu_{n-3}\alpha_{n-1}} \eta_{\mu_{n-2}\alpha_n}, \quad n \geq 3,$$

$$c_{1,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = \begin{cases} c^\mu_{\alpha_1\mu}, & \text{если } n \geq 1, \\ c^{\mu_1}_{\alpha_1\alpha_2} c^{\mu_2}_{\mu_1\alpha_3} \cdots c^{\mu_{n-1}}_{\mu_{n-2}\alpha_n} c^\nu_{\mu_{n-1}\nu}, & \text{если } n \geq 2. \end{cases}$$

Верно и обратное утверждение: произвольная фробениусова алгебра однозначно определяет некоторую КогТП в степени 0 [5]. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между КогТП в степени 0 и фробениусовыми алгебрами.

Теория Громова-Виттена

Пусть X – гладкое проективное многообразие. Предположим, что когомологии многообразия X не содержат нечётной части, $H^*(X) = H^{\mathrm{e}}(X)$. Пусть $(C; x_1, \ldots, x_n)$ и $(C'; x'_1, \ldots, x'_n)$ – помеченные нодальные кривые. Два алгебраических отображения

$$f\colon (C; x_1, \ldots, x_n) \to X, \quad f'\colon (C'; x'_1, \ldots, x'_n) \to X$$

считаются *изоморфными*, если существует изоморфизм $h\colon C \to C'$ такой, что $h(x_i) = x'_i$, $1 \leq i \leq n$, и $f' \circ h = f$. Алгебраическое отображение $f\colon (C; x_1, \ldots, x_n) \to X$ помеченной нодальной кривой в пространство X называется *стабильным*, если оно имеет конечную группу автоморфизмов.

Пусть $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ – произвольный класс. Обозначим через $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ множество классов изоморфизма стабильных отображений $f\colon (C; x_1, \ldots, x_n) \to X$, для которых $g(C) = g$ и $f_*([C]) = \beta$. Это пространство называется *пространством модулей стабильных отображений* [57]. Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ является компактным топологическим пространством. Более того, на нём имеется структура стэка Делиня–Мамфорда [12]. Пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ обладает так называемым *виртуальным фундаментальным классом* [11, 58] $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\mathrm{virt}}$, лежащим в пространстве $H_{2 \cdot \operatorname{vdim} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta), \mathbb{Q})$, где

$$\operatorname{vdim} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) := (3 - \dim X)(g - 1) + \int_\beta c_1(TX) + n. \tag{1.26}$$

Здесь TX обозначает касательное расслоение к многообразию X, а $\dim X$ обозначает комплексную размерность. По определению, виртуальный фундаментальный класс равен нулю, если $\operatorname{vdim} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) < 0$.

Для каждого $i \in [n]$ обозначим через $\mathrm{ev}_i\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \to X$ отображение, сопоставляющее стабильному отображению $f\colon (C; x_1, \ldots, x_n) \to X$ точку $f(x_i) \in X$. Предположим, что пара (g, n) стабильная. Обозначим через $\mathrm{st}\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta) \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ отображение, которое сопоставляет стабильному отображению $f\colon (C; x_1, \ldots, x_n) \to X$ стабилизацию помеченной нодальной кривой $(C; x_1, \ldots, x_n)$.

Полугруппа эффективных классов $E \subset H_2(X, \mathbb{Z})$ определяется как полугруппа, порождённая классами вида $f_*([C])$, где $f\colon C \to X$ – алгебраическое отображение гладкой комплексной кривой C в многообразие X. *Кольцо Новикова* $\mathcal{N}_X$ многообразия X – это векторное пространство, состоящее из возможно бесконечных линейных комбинаций с комплексными коэффициентами формальных символов q^β, $\beta \in E$, $\mathcal{N}_X := \left\{ \sum_{\beta \in E} a_\beta q^\beta \middle| a_\beta \in \mathbb{C} \right\}$, и со структурой умножения, заданного равенством $q^{\beta_1} \cdot q^{\beta_2} := q^{\beta_1 + \beta_2}$. Умножение определено корректно, потому что любой эффективный класс $\beta \in E$ может быть представлен в виде суммы $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $\beta_1, \beta_2 \in E$, только конечным числом различных способов. Очевидно, что пространство $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ непусто, только если $\beta \in E$. Для любого $\beta \in E$ определим отображение $c^X_{g,n,\beta}\colon H^*(X)^{\otimes n} \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ равенством

$$c^X_{g,n,\beta}(\otimes_{i=1}^n v_i) := \mathrm{PD}\left(\mathrm{st}_*\left([\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)]^{\mathrm{virt}} \cap \prod_{i=1}^n \mathrm{ev}_i^*(v_i)\right)\right), \quad v_1, \ldots, v_n \in H^*(X).$$

В работе [57] доказано, что набор отображений $c^X_{g,n}\colon H^*(X)^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{N}_X$, определённый равенством $c^X_{g,n} := \sum_{\beta \in E} q^\beta c^X_{g,n,\beta}$, задаёт когомологическую теорию поля с коэффициентами в кольце Новикова $\mathcal{N}_X$. Фазовым пространством при этом является пространство когомологий

$H^*(X)$, билинейная форма η на нём задаётся спариванием Пуанкаре, а единицей e является единица в когомологиях $H^*(X)$.

Пример 1.9. Рассмотрим в качестве многообразия X проективную прямую $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Обозначим через $\omega \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{Z})$ класс когомологий, двойственный точке. Сопоставление классу гомологий $\beta \in H_2(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{Z})$ числа $\int_\beta \omega \in \mathbb{Z}$ задаёт отождествления $E = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\mathcal{N}_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} = \mathbb{C}[[q]]$. Таким образом, отображение $c_{g,n}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}$ принимает значения в пространстве $H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})[[q]]$. На самом деле, из формулы (1.26) легко понять, что отображение $c_{g,n}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}$ принимает значения в меньшем пространстве $H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})[q]$. Значит, на КогТП $\{c_{g,n}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}\}$ можно смотреть как на семейство КогТП с коэффициентами в $\mathbb{C}$, зависящих от параметра q, который может быть произвольным комплексным числом.

Когомологические теории поля, возникающие в теории Громова–Виттена, обладают несколькими специфическими свойствами. Во-первых, для любой стабильной пары (g, n) и когомологических классов $v_1, \ldots, v_n \in H^*(X)$, $\gamma \in H^2(X)$ выполняется [57, раздел 2.2.4]

$$(\pi_{n+1})_*(c_{g,n+1,\beta}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \gamma)) = \left(\int_\beta \gamma\right) c_{g,n,\beta}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Во-вторых, в случае $\beta = 0$ мы имеем $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, 0) = X \times \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ и

$$[X \times \overline{\mathcal{M}}_{g,n}]^{\mathrm{virt}} = [X \times \overline{\mathcal{M}}_{g,n}] \cap c_{g \cdot \dim X}(TX \boxtimes \mathbb{E}^*),$$

где через $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \times X]$ мы обозначаем обычный фундаментальный класс.

Пример 1.10.

- Предположим, что $\dim(X) = 1$. Тогда

$$[X \times \overline{\mathcal{M}}_{g,n}]^{\mathrm{virt}} = [X \times \overline{\mathcal{M}}_{g,n}] \cap \left((-1)^g \lambda_g + (-1)^{g-1} c_1(X) \lambda_{g-1}\right).$$

- Предположим, что $\dim(X) = 2$. Тогда

$$[X \times \overline{\mathcal{M}}_{g,n}]^{\mathrm{virt}} = [X \times \overline{\mathcal{M}}_{g,n}] \cap \begin{cases} c_2(X), & \text{если } g = 0, \\ c_2(X) - c_1(X)\lambda_1, & \text{если } g = 1, \\ c_1(X)^2 \lambda_g \lambda_{g-2} - c_1(X) \lambda_g \lambda_{g-1}, & \text{если } g \geq 2. \end{cases}$$

Спинорные кривые и класс Виттена

Зафиксируем целое число $r \geq 2$. *Класс Виттена* [81] представляет собой класс когомологий $W_{g,n}^r(m_1, \ldots, m_n) \in H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q})$, параметризуемый целыми числами $0 \leq m_1, \ldots, m_n \leq r-2$. Ключевым объектом в его определении является пространство модулей спинорных кривых. Зафиксируем целые числа $0 \leq m_1, \ldots, m_n \leq r-2$. *Гладкой спинорной кривой* называется тройка

$$\left((C; x_1, \ldots, x_n), L, \phi\colon L^{\otimes r} \xrightarrow{\sim} T^*C(-m_1 x_1 - \ldots - m_n x_n)\right), \tag{1.27}$$

где $(C; x_1, \dots, x_n)$ – помеченная гладкая кривая рода g, L – голоморфное линейное расслоение над кривой C, а $\phi\colon L^{\otimes r} \xrightarrow{\sim} T^*C(-m_1x_1 - \dots - m_nx_n)$ – изоморфизм. Ясно, что для существования изоморфизма ϕ необходимо выполнение условия $2g - 2 - \sum m_i \in r\mathbb{Z}$. Предположим, что это условие выполняется и что $2g - 2 + n > 0$. Обозначим через $\mathcal{M}_{g,n}^{r,\overline{m}}$, где $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n)$, множество классов изоморфизма гладких спинорных кривых. Оно называется *пространством модулей спинорных кривых*, и на нём имеется структура аналитического орбиобразия размерности $3g - 3 + n$.

Рассмотрим проекцию $\pi\colon \mathcal{M}_{g,n}^{r,\overline{m}} \to \mathcal{M}_{g,n}$, сопоставляющую спинорной кривой (1.27) помеченную кривую $(C; x_1, \dots, x_n)$. Отображение π является накрытием степени r^{2g}. Предположим теперь, что $g = 0$. Рассмотрим спинорную кривую (1.27). Мы видим, что $\deg L = \frac{-2-\sum m_i}{r} < 0$, и поэтому $\dim H^0(C, L) = 0$. По теореме Римана–Роха, мы получаем $\dim H^1(C, L) = -1 - \deg L = \frac{-(r-2)+\sum m_i}{r}$. Семейство векторных пространств над пространством модулей $\mathcal{M}_{0,n}^{r,\overline{m}}$, задаваемых группами $H^1(C, L)^*$, обладает структурой векторного расслоения, которое мы обозначим через $\mathcal{W}$. Пространство $\mathcal{M}_{0,n}^{r,\overline{m}}$ имеет компактификацию $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{r,\overline{m}}$, сходную по конструкции с компактификацией $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ пространства $\mathcal{M}_{0,n}$. При этом проекция $\pi\colon \mathcal{M}_{0,n}^{r,\overline{m}} \to \mathcal{M}_{0,n}$ продолжается до проекции $\overline{\pi}\colon \overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{r,\overline{m}} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, а расслоение $\mathcal{W}$ над пространством $\mathcal{M}_{0,n}^{r,\overline{m}}$ продолжается до расслоения $\overline{\mathcal{W}}$ над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{r,\overline{m}}$. Обозначим через $c_{\mathrm{top}}(\overline{\mathcal{W}}) \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n}^{r,\overline{m}})$ старший класс Черна расслоения $\overline{\mathcal{W}}$. Тогда класс когомологий $W_{0,n}^r(m_1, \dots, m_n)$ определяется равенством $W_{0,n}^r(m_1, \dots, m_n) := \overline{\pi}_*(c_{\mathrm{top}}(\overline{\mathcal{W}}))$. Ясно, что степень этого класса равна $2\frac{-(r-2)+\sum m_i}{r}$. В случае, когда $\frac{-(r-2)+\sum m_i}{r} \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, класс $W_{0,n}^r(m_1, \dots, m_n)$ полагается равным нулю. В старших родах имеются разные конструкции, содержащиеся в статьях [27, 29, 45, 67, 73]. Тот факт, что эти конструкции определяют один и тот же класс когомологий, был доказан в [71]. В этой же статье доказано, что класс Виттена является тавтологическим классом когомологий.

В общем случае класс Виттена $W_{g,n}^r(m_1, \dots, m_n)$ является ненулевым, только если выполняется $\frac{(g-1)(r-2)+\sum m_i}{r} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, и в этом случае он имеет степень $\deg W_{g,n}^r(m_1, \dots, m_n) = 2\frac{(g-1)(r-2)+\sum m_i}{r}$. Более того, зафиксируем векторное пространство V размерности $r-1$ с базисом $e_1, \dots, e_{r-1}$ и зададим на нём симметричную билинейную форму η равенством $\eta(e_i, e_j) := \delta_{i+j,r}$. Тогда семейство линейных отображений $c_{g,n}^{r\text{-spin}}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, задаваемых равенством

$$c_{g,n}^{r\text{-spin}}(e_{m_1+1} \otimes \dots \otimes e_{m_n+1}) := W_{g,n}^r(m_1, \dots, m_n), \quad 0 \leq m_1, \dots, m_n \leq r-2,$$

образует когомологическую теорию поля с единицей e_1. Заметим, что если $r = 2$, то выполняется $W_{g,n}^2(0, 0, \dots, 0) = 1 \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, поэтому $c_{g,n}^{2\text{-spin}}$ совпадает с тривиальной когомологической теорией поля.

1.2.3 Однородные и полупростые когомологические теории поля

Обозначим через $\mathrm{Deg}\colon H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ линейный оператор, действующий на подпространстве $H^k(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ умножением на k.

Определение 1.11. Рассмотрим КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$. Предположим, что векторное пространство V является градуированным, причём $\deg e = 0$. Выберем однородный базис $e_1, \dots, e_N \in V$, $\deg e_\alpha = q_\alpha \in \mathbb{C}$. КогТП называется *однородной*, если существуют константы $r^1, \dots, r^N, \delta \in \mathbb{C}$ такие, что для любой стабильной пары (g,n) и индексов $1 \le \alpha_1, \dots, \alpha_n \le N$ выполняется свойство

$$\frac{1}{2}\operatorname{Deg} c_{g,n}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\right) + (\pi_{n+1})_*\left(c_{g,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes r^\gamma e_\gamma\right)\right) = \left(\sum_{i=1}^n q_{\alpha_i} + (g-1)\delta\right) c_{g,n}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\right). \tag{1.28}$$

Число δ называется *конформной размерностью* КогТП.

Пример 1.12.

1. Тривиальная КогТП $\{c^{\mathrm{triv}}_{g,n}\}$ с очевидностью является однородной с $e_1 = e$ и $q_1 = r^1 = \delta = 0$.
2. Рассмотрим КогТП $\{c^X_{g,n}\}$ из раздела 1.2.2. Определение однородной КогТП с коэффициентами в произвольной алгебре даётся ровно таким же образом, как и определение 1.11. Выберем однородный базис $e_1, \dots, e_N \in H^{\mathrm{e}}(X)$, $e_i \in H^{2d_i}(X)$. Тогда КогТП $\{c^X_{g,n}\}$ является однородной с $q_i = d_i$, $\delta = \dim X$ и константами r^α, определяемыми равенством $c_1(TX) = r^\alpha e_\alpha$.
3. КогТП $\{c^{r\text{-spin}}_{g,n}\}$ из раздела 1.2.2 является однородной с константами $q_i = \frac{i-1}{r}$, $r^i = 0$ и $\delta = \frac{r-2}{r}$.

Следующее утверждение хорошо известно, однако, для удобства читателя, мы приведём короткое доказательство.

Предложение 1.13. *Рассмотрим произвольную однородную КогТП. Тогда выполняется соотношение*

$$\left(\sum_{n\ge 0}(1-q_\alpha-n)t^\alpha_n\frac{\partial}{\partial t^\alpha_n} + r^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha_0} - \sum_{n\ge 0}A^\alpha_\beta t^\beta_{n+1}\frac{\partial}{\partial t^\alpha_n} + \frac{3-\delta}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)\mathcal{F} = \\ = (3-\delta)\mathcal{F} + \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}t^\alpha_0 t^\beta_0 + \varepsilon^2 r^\gamma\left\langle\tau_0(e_\gamma)\right\rangle_1, \tag{1.29}$$

где $A^\alpha_\beta := \eta^{\alpha\mu}A_{\mu\beta} = r^\gamma c^\alpha_{\gamma\beta}$.

Доказательство. Умножим обе части соотношения (1.28) на $\prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}$, проинтегрируем по $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, умножим обе части на $\varepsilon^{2g}\frac{\prod t_{d_i}^{\alpha_i}}{n!}$ и просуммируем по всем стабильным парам (g,n) и всем наборам $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in [N]$ и $d_1,\dots,d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Если, пользуясь равенством (1.2), заметить, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} (\pi_{n+1})_* \left(c_{g,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes r^\gamma e_\gamma\right)\right) \prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} c_{g,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes r^\gamma e_\gamma\right) \pi_{n+1}^* \left(\prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}\right) =$$

$$= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} c_{g,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes r^\gamma e_\gamma\right) \prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i} - \sum_{\substack{i\in[n]\\ d_i>0}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \delta_0^{\{i,n+1\}} c_{g,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes r^\gamma e_\gamma\right) \pi_{n+1}^* \left(\psi_i^{d_i-1} \prod_{j\neq i} \psi_j^{d_j}\right),$$

где интеграл под знаком суммы $\sum_{\substack{i\in[n]\\ d_i>0}}$ равен

$$A_{\alpha_i}^{\beta} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} c_{g,n}\left(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_{i-1}} \otimes e_\beta \otimes e_{\alpha_{i+1}} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}\right) \psi_i^{d_i-1} \prod_{j\neq i} \psi_j^{d_j},$$

то мы получим требуемое равенство (1.29). □

Определение 1.14. КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ называется *полупростой*, если соответствующая фробениусова алгебра (см. раздел 1.2.2) не имеет нильпотентов.

Пример 1.15.

1. КогТП $\{c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}\}$ является полупростой, так как соответствующая фробениусова алгебра совпадает с алгеброй комплексных чисел $\mathbb{C}$.

2. КогТП $\{c_{g,n}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}\}$ из примера 1.9, которую мы рассматриваем как семейство КогТП, зависящих от комплексного параметра q, является полупростой при $q \neq 0$, и не является полупростой при $q = 0$: если в качестве базиса e_1, e_2 в $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ выбрать единицу и класс, двойственный точке, то структурные константы задаются равенствами $c_{\beta,1}^{\alpha} = c_{1,\beta}^{\alpha} = \delta_\beta^\alpha$, $c_{2,2}^2 = 0$, $c_{2,2}^1 = q$.

3. КогТП $\{c_{g,n}^{r\text{-spin}}\}$ из раздела 1.2.2 не является полупростой для $r \geq 3$: структурные константы задаются равенством $c_{\alpha\beta}^{\gamma} = \delta_{\alpha+\beta-1}^{\gamma}$.

Важность полупростых однородных КогТП во многом обусловлена следующим результатом.

Теорема 1.16 ([78])**.** *Рассмотрим произвольную полупростую однородную КогТП* $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$. *Тогда классы в роде* 0 $c_{0,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)$, $v_i \in V$, *однозначно определяют классы* $c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)$ *во всех старших родах* $g \geq 1$.

На самом деле, теорема из работы [78] содержит также явную формулу, выражающую классы в старших родах через некие величины, вычисляемые по данным в роде 0. Более того, имеется вариант этой теоремы для произвольных полупростых, необязательно однородных, КогТП. Мы обсудим это в разделе 1.2.5.

1.2.4 Когомологические теории поля в роде 0

Определение 1.17. Так же как и в определении 1.6, зафиксируем векторное пространство V, метрику $\eta\colon V\times V\to\mathbb{C}$ и единицу $e\in V$. *Когомологической теорией поля в роде* 0 называется набор линейных отображений $c_{0,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$, $n\geq 3$, удовлетворяющих свойствам 1, 2, 3 для $g=0$ из определения 1.6, а также равенству (1.19) для $g_1=g_2=0$.

Замечание 1.18. Очевидно, что для произвольной КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ множество отображений $\{c_{0,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})\}$ является КогТП в роде 0. Однако, существуют КогТП в роде 0, которые нельзя продолжить до КогТП во всех родах.

Определение 1.19. *Потенциалом Дубровина–Фробениуса* заданной КогТП в роде 0 называется следующий формальный степенной ряд от переменных $t^1,\dots,t^N$:

$$F(t^1,\dots,t^N):=\sum_{n\geq 3}\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]}\left\langle\prod_{i=1}^{n}\tau_0(e_{\alpha_i})\right\rangle_{0,n}\frac{\prod_{i=1}^{n}t^{\alpha_i}}{n!}.$$

Из соотношения ассоциативности (1.6) и определения КогТП в роде 0 сразу следует, что потенциал Дубровина–Фробениуса удовлетворяет следующей системе УрЧП:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha\partial t^\beta\partial t^\mu}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\nu\partial t^\gamma\partial t^\delta}=\frac{\partial^3 F}{\partial t^\delta\partial t^\beta\partial t^\mu}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^3 F}{\partial t^\nu\partial t^\gamma\partial t^\alpha},\qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in[N],\tag{1.30}$$

$$A^\nu\frac{\partial^3 F}{\partial t^\nu\partial t^\alpha\partial t^\beta}=\eta_{\alpha\beta},\qquad \alpha,\beta\in[N],\tag{1.31}$$

где систему уравнений (1.30) называют *уравнениями ассоциативности*. Мы называем систему уравнений (1.30)–(1.31) *расширенной системой уравнений ассоциативности*. Оказывается, что имеет место и обратное утверждение.

Теорема 1.20 (теорема 4.3 в [4])**.** *Пусть задана невырожденная симметричная матрица* $(\eta_{\alpha\beta})\in\mathrm{Mat}_{N,N}(\mathbb{C})$ *и вектор* $(A^1,\dots,A^N)\in\mathbb{C}^N$. *Тогда для произвольного ряда* $F\in\mathbb{C}[[t^1,\dots,t^N]]$, *являющегося решением системы уравнений* (1.30)–(1.31) *и начинающегося с кубических членов, существует единственная КогТП в роде* 0 $\{c_{0,n}\colon(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})\}$, *для которой ряд* F *является потенциалом Дубровина–Фробениуса (в качестве базиса* $e_1,\dots,e_N\in\mathbb{C}^N$ *берётся стандартный базис), матрица* $(\eta_{\alpha\beta})$ *задаёт метрику, а вектор* $(A^1,\dots,A^N)\in\mathbb{C}^N$ *является единицей.*

Пример 1.21.

- Для тривиальной КогТП $\{c^{\mathrm{triv}}_{g,n}\}$ потенциал Дубровина–Фробениуса равен $F(t^1)=\frac{(t^1)^3}{6}$.
- Для КогТП $\{c^{\mathbb{CP}^1}_{g,n}\}$ потенциал Дубровина–Фробениуса равен

$$F(t^1,t^2)=\frac{(t^1)^2t^2}{2}+q\left(e^{t^2}-1-t^2-\frac{(t^2)^2}{2}\right),$$

где в качестве базиса e_1, e_2 в пространстве $V = H^*(\mathbb{CP}^1)$ мы выбираем единицу и класс, двойственный точке.

- Обозначим через $F^{r\text{-spin}}(t^1, \dots, t^{r-1})$ потенциал Дубровина–Фробениуса КогТП $\{c_{g,n}^{r\text{-spin}}\}$. Мы имеем (см., напр., [72, теорема 2])

$$\begin{aligned}
F^{3\text{-spin}} =& \frac{(t^1)^2 t^2}{2} + \frac{(t^2)^4}{72}, \\
F^{4\text{-spin}} =& \frac{(t^1)^2 t^3}{2} + \frac{t^1 (t^2)^2}{2} + \frac{(t^2)^2 (t^3)^2}{16} + \frac{(t^3)^5}{960}, \\
F^{5\text{-spin}} =& \frac{(t^1)^2 t^4}{2} + t^1 t^2 t^3 + \frac{(t^2)^3}{6} + \frac{(t^3)^4}{60} + \frac{t^2 (t^3)^2 t^4}{10} + \frac{(t^2)^2 (t^4)^2}{20} + \frac{(t^3)^2 (t^4)^3}{150} + \frac{(t^4)^6}{15000}.
\end{aligned}$$

Следующее утверждение хорошо известно (см., напр., [78]), однако, для удобства читателя, мы приведём короткое доказательство.

Предложение 1.22. *Рассмотрим произвольную однородную КогТП в роде* 0.

1. *Выполняется следующее равенство:*

$$((1 - q_\nu) t^\nu + r^\nu) \frac{\partial F}{\partial t^\nu} = (3 - \delta) F + \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta, \tag{1.32}$$

   где $A_{\alpha\beta} := r^\gamma c_{0,3}(e_\gamma \otimes e_\alpha \otimes e_\beta)$.

2. *Выполняется соотношение* $(q_\alpha + q_\beta - \delta)\eta_{\alpha\beta} = 0$ *для всех* $\alpha, \beta \in [N]$.

Доказательство. Первая часть предложения сразу следует из соотношения (1.28) при $g = 0$, если проинтегрировать обе его части по $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, заметить, что

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \frac{1}{2} \operatorname{Deg} c_{0,n}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\right) = (n-3) \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} c_{0,n}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\right),$$

умножить обе части на $\frac{\prod t^{\alpha_i}}{n!}$ и просуммировать по $n \geq 3$ и всем наборам $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [N]$. Для доказательства второй части предложения продифференцируем обе части равенства (1.32) по t^α, t^β и t^γ:

$$((1 - q_\nu) t^\nu + r^\nu) \frac{\partial}{\partial t^\nu} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} = (q_\alpha + q_\beta + q^\gamma - \delta) \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}.$$

Умножим теперь обе части на A^α и просуммируем по α, используя равенство (1.31):

$$0 = A^\alpha q_\alpha \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma} + (q_\beta + q_\gamma - \delta)\eta_{\beta\gamma}.$$

Осталось только заметить, что из свойства $\deg e = 0$ следует, что $A^\alpha q_\alpha = 0$ для любого фиксированного α. □

Как и в условиях теоремы 1.20, рассмотрим произвольное решение $F \in \mathbb{C}[[t^1, \dots, t^N]]$ системы уравнений (1.30)–(1.31), начинающееся с кубических членов. Пусть $\{c_{0,n} \colon (\mathbb{C}^N)^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})\}$ – соответствующая КогТП в роде 0. *Потенциал* нашей КогТП в роде 0 определяется как формальный ряд от переменных t^α_a, $\alpha \in [N]$, $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, задаваемый равенством

$$\mathcal{F}_0(t^*_*) := \sum_{n \geq 3} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [N] \\ d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} \left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{d_i}(e_{\alpha_i}) \right\rangle_{0,n} \prod_{i=1}^n t^{\alpha_i}_{d_i} \in \mathbb{C}[[t^*_*]].$$

Мы будем также называть ряд $\mathcal{F}_0$ *потенциалом в роде ноль*, соответствующим формальному ряду F. Ряд $\mathcal{F}_0$ удовлетворяет следующим равенствам, которые вытекают, соответственно, из когомологических соотношений (1.2), (1.6) и (1.3):

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t^{\mathbb{1}}_0} = \sum_{n \geq 0} t^\alpha_{n+1} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_n} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} t^\alpha_0 t^\beta_0, \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_a \partial t^\beta_b \partial t^\mu_0} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t^\nu_0 \partial t^\gamma_c \partial t^\delta_d} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t^\delta_d \partial t^\beta_b \partial t^\mu_0} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t^\nu_0 \partial t^\gamma_c \partial t^\alpha_a}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in [N], \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_{a+1} \partial t^\beta_b \partial t^\gamma_c} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_a \partial t^\mu_0} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t^\nu_0 \partial t^\beta_b \partial t^\gamma_c}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in [N], \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{1.35}$$

Ясно, что ряд $\mathcal{F}_0$ однозначно определяется системой соотношений (1.35), условием, что он начинается с кубических членов, а также начальным условием $\mathcal{F}_0|_{t^\alpha_{\geq 1} = 0} = F$, где мы отождествляем $t^\alpha = t^\alpha_0$.

1.2.5 Описание всех полупростых когомологических теорий поля

В этом разделе мы приведём описание Телемана [78] всех полупростых КогТП. Оказывается, что все такие КогТП состоят из тавтологических классов когомологий, и эти классы можно явно описывать с помощью стабильных графов.

Определим *когомологическую теорию поля без единицы* $\{c_{g,n} \colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ таким же образом, как и в определении 1.6, с той лишь разницей, что мы не требуем наличия единицы $e \in V$ и выполнения свойств 2 и 3 из определения.

Рассмотрим векторное пространство V с невырожденной симметричной билинейной формой η. Определим следующую группу:

$$G_{\eta,+} := \left\{ R(z) = 1 + \sum_{i \geq 1} R_i z^i \in \mathrm{End}(V)[[z]] \,\middle|\, R(z) R^*(-z) = 1 \right\}, \tag{1.36}$$

где звёздочкой мы обозначаем сопряжение по отношению к билинейной форме η. Сопоставим элементу $R(z) \in G_{\eta,+}$ элемент $B_R \in V^{\otimes 2}[[z, w]]$ следующим образом: выберем базис $e_1, \dots, e_N \in V$, и тогда

$$B_R(z, w) := \frac{\eta^{\alpha\beta} - (R^{-1})^\alpha_\mu(z) \eta^{\mu\nu} (R^{-1})^\beta_\nu(w)}{z + w} e_\alpha \otimes e_\beta \in V^{\otimes 2}[[z, w]].$$

Тот факт, что числитель делится на знаменатель в формуле, следует из условия $R(z)R^*(-z)=1$.

Пусть $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ – произвольная КогТП без единицы и $R(z)\in G_{\eta,+}$. Определим отображения $(Rc)_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ равенством

$$(Rc)_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i):=\sum_{\Gamma\in G_{g,n}}\frac{1}{|\mathrm{Aut}(\Gamma)|}(\xi_\Gamma)_*\left[\prod_{v\in V(\Gamma)}c_{g(v),n(v)}\prod_{i=1}^n R^{-1}(\psi_i)v_i\prod_{e=\{h',h''\}\in E(\Gamma)}B_R(\psi_{h'},\psi_{h''})\right].$$

Поясним, как вычисляется значение $(Rc)_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i)$ по этой формуле. Припишем каждому полуребру $h\in H(\Gamma)$ копию пространства V, которую мы обозначим через V_h, а также двойственное пространство V_h^*. Мы будем рассматривать отображение $c_{g(v),n(v)}$, приписанное вершине $v\in V(\Gamma)$, как элемент пространства $H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g(v),n(v)})\otimes\bigotimes_{h\in H(\Gamma),\,v(h)=v}V_h^*$. Для каждого $1\le i\le n$ мы рассматриваем выражение $R^{-1}(\psi_i)v_i$ как элемент пространства $H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g(v(l_i)),n(v(l_i))})\otimes V_{l_i}$. Выражение $B_R(\psi_{h'},\psi_{h''})$ мы рассматриваем как элемент пространства $H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g(v(h')),n(v(h'))})\otimes H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g(v(h'')),n(v(h''))})\otimes V_{h'}\otimes V_{h''}$. Перемножая, для каждой вершины $v\in V(\Gamma)$, классы когомологий на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_{g(v),n(v)}$, мы рассматриваем тензорное произведение

$$\bigotimes_{v\in V(\Gamma)}c_{g(v),n(v)}\otimes\bigotimes_{i=1}^n R^{-1}(\psi_i)v_i\otimes\bigotimes_{e=\{h',h''\}\in E(\Gamma)}B_R(\psi_{h'},\psi_{h''})$$

как элемент пространства $H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_\Gamma)\otimes\bigotimes_{h\in H(\Gamma)}V_h\otimes V_h^*$. Далее, для каждого полуребра $h\in H(\Gamma)$ мы применяем отображение свёртки $V_h\otimes V_h^*\to\mathbb{C}$ и получаем класс когомологий на пространстве $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma$, который мы обозначаем через

$$\prod_{v\in V(\Gamma)}c_{g(v),n(v)}\prod_{i=1}^n R^{-1}(\psi_i)v_i\prod_{e=\{h',h''\}\in E(\Gamma)}B_R(\psi_{h'},\psi_{h''}).$$

Для произвольной КогТП без единицы $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и элемента $T(z)\in z^2V[[z]]$ определим отображения $(Tc)_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ равенством

$$(Tc)_{g,n}(\otimes_{i=1}^n v_i):=\sum_{m\ge0}\frac{1}{m!}(\pi_{[n+m]\setminus[n]})_*\left(c_{g,n+m}(\otimes_{i=1}^n v_i\otimes\otimes_{k=n+1}^{n+m}T(\psi_k)\right),$$

Теорема 1.23 (см., напр., [71])**.**

1. *Для произвольной КогТП без единицы $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и элемента $R(z)\in G_{\eta,+}$ семейство отображений $\{(Rc)_{g,n}\}$ является КогТП без единицы. Это задаёт действие группы $G_{\eta,+}$ на множестве КогТП без единицы с фиксированной метрикой η.*

2. *Для произвольной КогТП без единицы $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и элемента $T(z)\in z^2V[[z]]$ семейство отображений $\{(Tc)_{g,n}\}$ является КогТП без единицы. Это задаёт действие абелевой группы $z^2V[[z]]$ на множестве КогТП без единицы с фиксированной метрикой η.*

3. *Для произвольной КогТП* $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ *и элемента* $R(z) \in G_{\eta,+}$ *определим элемент* $T_R(z) := z(R(z)e - e) \in z^2T[[z]]$. *Тогда множество отображений* $\{(T_RRc)_{g,n}\}$ *является КогТП. Это задаёт действие группы* $G_{\eta,+}$ *на множестве КогТП с фиксированной метрикой* η *и единицей* e.

Для произвольных КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и элемента $R(z) \in G_{\eta,+}$ введём обозначение $(R.c)_{g,n} := (T_RRc)_{g,n}$. Построенное действие группы $G_{\eta,+}$ на множестве КогТП с фиксированной метрикой η и единицей e называется действие Гивенталя.

Теорема 1.24 ([78]). *Зафиксируем пространство* V *с метрикой* η. *Для любой полупростой КогТП* $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ *существуют единственная КогТП в степени* 0 $\{\widetilde{c}_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ *и элемент* $R(z) \in G_{\eta,+}$ *такие, что* $c_{g,n} = (R.\widetilde{c})_{g,n}$. *Таким образом, множество всех полупростых КогТП с фазовым пространством* V *находится во взаимно однозначном соответствии с парами, состоящими из структуры фробениусовой алгебры на пространстве* V *и элемента* $R(z) \in G_{\eta,+}$.

Действие группы Гивенталя на КогТП индуцирует действие на их потенциалах. Опишем это действие. Рассмотрим алгебру Ли группы $G_{\eta,+}$:

$$\mathfrak{g}_{\eta,+} = \left\{ r(z) = \sum_{i\geq 1} r_i z^i \in z\operatorname{End}(V)[[z]] \,\middle|\, r_i^* = (-1)^{i+1} r_i \right\}.$$

Определим следующие дифференциальные операторы:

$$\widehat{r(z)} := -\sum_{i\geq 1,\, j\geq 0} (r_i)^\mu_\nu q_j^\nu \frac{\partial}{\partial q^\mu_{i+j}} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j\geq 0} (-1)^j (r_{i+j+1})^\alpha_\mu \eta^{\mu\beta} \frac{\partial^2}{\partial q_i^\alpha \partial q_j^\beta}, \quad r(z) \in \mathfrak{g}_{\eta,+},$$

где мы используем переменные $q^\alpha_a := t^\alpha_a - A^\alpha \delta_{a,1}$. Заметим, что для любых $r(z), \widetilde{r}(z) \in \mathfrak{g}_{\eta,+}$ выполняется

$$\left[\widehat{r(z)}, \widehat{\widetilde{r}(z)}\right] = [\widehat{r(z), \widetilde{r}(z)}].$$

Заметим теперь, что для любой КогТП $\{c_{g,n}\}$ и любого элемента $r(z) \in \mathfrak{g}_{\eta,+}$, мы имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \tau}\big(\exp(\tau r(z)).c\big)_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\Big|_{\tau=0} = \\
&= \sum_{l\geq 1} (r_l)^\mu_{\mathbb{1}} (\pi_{n+1})_* \left(\psi_{n+1}^{l+1} c_{g,n+1}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes e_\mu)\right) \\
&- \sum_{l\geq 1} \sum_{j=1}^n (r_l)^\mu_{\alpha_j} \psi_j^l c_{g,n}(\otimes_{i=1}^{j-1} e_{\alpha_i} \otimes e_\mu \otimes \otimes_{i=j+1}^n e_{\alpha_i}) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,l\geq 0 \\ g_1,g_2\geq 0 \\ g_1+g_2=g \\ I\sqcup J=[n]}} (-1)^l (r_{k+l+1})^\alpha_\gamma \eta^{\gamma\beta} (\mathrm{gl}_{I,J})_* \left(\left(\psi^k_{|I|+1} c_{g_1,|I|+1}(\otimes_{i\in I} e_{\alpha_i} \otimes e_\alpha)\right) \times \left(\psi^l_{|J|+1} c_{g_2,|J|+1}(\otimes_{j\in J} e_{\alpha_j} \otimes e_\beta)\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k,l\geq 0} (-1)^l (r_{k+l+1})^\alpha_\gamma \eta^{\gamma\beta} (\widetilde{\mathrm{gl}}_{n+1,n+2})_* \left(\psi^k_{n+1} \psi^l_{n+2} c_{g-1,n+2}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes e_\alpha \otimes e_\beta)\right),
\end{aligned}$$

где мы обозначаем $(r_l)^\alpha_{\mathbb{1}} := A^\mu(r_l)^\alpha_\mu$. Для потенциала $\mathcal{F}$ заданной КогТП и элемента $R(z) \in G_{\eta,+}$ мы будем обозначать через $R.\mathcal{F}$ потенциал КогТП $(R.c)_{g,n}$. Заметим, что для любого элемента $r(z) \in \mathfrak{g}_{\eta,+}$ выполняется

$$\varepsilon^{-2}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\big(\exp(\tau r(z)).\mathcal{F}\big)\Big|_{\tau=0} = \frac{\widehat{r(z)}\exp(\varepsilon^{-2}\mathcal{F})}{\exp(\varepsilon^{-2}\mathcal{F})}. \tag{1.37}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\exp\left(\varepsilon^{-2}R(z).\mathcal{F}\right) := \exp\left(\widehat{r(z)}\right)\exp\left(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}\right), \quad R(z) = \exp(r(z)).$$

1.3 Формальная теория эволюционных уравнений в частных производных

1.3.1 Основные понятия

Дифференциальные многочлены и эволюционные УрЧП

Пусть $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ и $u^1, \dots, u^N$ – формальные переменные. Сопоставим переменным $u^1, \dots, u^N$ дополнительные формальные переменные u^α_d, $\alpha \in N$, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, и назовём алгеброй *дифференциальных многочленов* от переменных $u^1, \dots, u^N$ алгебру

$$\mathcal{A}_u := \mathbb{C}[[u^*]][u^*_{\geq 1}].$$

Мы будем обозначать $u^\alpha_0 := u^\alpha$. Определим оператор ∂_x в алгебре $\mathcal{A}_u$ равенством

$$\partial_x := \sum_{i\geq 0} u^\alpha_{i+1}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_i}.$$

Мы имеем $u^\alpha_i = \partial^i_x u^\alpha$, и мы будем использовать обозначения $u^\alpha_x := u^\alpha_1, u^\alpha_{xx} := u^\alpha_2, \dots$. В алгебре $\mathcal{A}_u$ имеется градуировка, определяемая равенством $\deg u^\alpha_d := d$. Пространство дифференциальных многочленов степени k мы будем обозначать через $\mathcal{A}_{u;k} \subset \mathcal{A}_u$. Введём дополнительную формальную переменную ε и алгебру $\widehat{\mathcal{A}}_u := \mathcal{A}_u[[\varepsilon]]$, элементы которой мы будем также называть дифференциальными многочленами. Положим $\deg\varepsilon := -1$. Через $\widehat{\mathcal{A}}_{u;k} \subset \widehat{\mathcal{A}}_u$ мы обозначаем подпространство степени k.

Линейный оператор $H\colon \widehat{\mathcal{A}}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$ называется *эволюционным*, если H удовлетворяет правилу Лейбница и коммутирует с оператором ∂_x. Оператор H является эволюционным тогда и только тогда, когда он имеет вид $H = H_{\overline{P}} := \sum_{n\geq 0}(\partial^n_x P^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_n}$ для некоторого $\overline{P} = (P^1, \dots, P^N) \in \widehat{\mathcal{A}}^N_u$. Коммутатор двух эволюционных операторов является эволюционным и задаётся следующей формулой:

$$[H_{\overline{P}}, H_{\overline{Q}}] = H_{\overline{R}}, \quad \text{где } R^\alpha := H_{\overline{P}}Q^\alpha - H_{\overline{Q}}P^\alpha. \tag{1.38}$$

Эволюционной системой уравнений в частных производных с одной пространственной переменной x, зависимыми переменными $u^1, \dots, u^N$ и временем t называется система вида

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = P^\alpha(u^*, u^*_x, \dots, \varepsilon), \quad \alpha \in [N], \tag{1.39}$$

где $P^\alpha \in \widehat{\mathcal{A}}_u$. Мы будем иногда обозначать через $\frac{\partial}{\partial t}$ эволюционный оператор $H_{\overline{P}}$, соответствующий этой системе. Мы будем говорить, что две такие системы $\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = P^\alpha$ и $\frac{\partial u^\alpha}{\partial s} = Q^\alpha$ *согласованы*, или что потоки $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial s}$ *коммутируют*, если $[H_{\overline{P}}, H_{\overline{Q}}] = 0$.

Система УрЧП вида (1.39) называется системой *гидродинамического типа*, если $P^\alpha \in \mathcal{A}_{u;1}$ для всех $\alpha \in [N]$. *Интегрируемой системой* мы будем называть набор из эволюционных систем

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t_i} = P^\alpha_i(u^*, u^*_x, \dots, \varepsilon), \quad 1 \le \alpha \le N, \quad i \in I,$$

где времена t_i индексированы элементами конечного или счётного множества I, и где все потоки $\frac{\partial}{\partial t_i}$ попарно коммутируют. Интегрируемость системы эквивалентна тому, что система имеет решение $\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N) \in \mathbb{C}[[x, t_*, \varepsilon]]^N$ для любых начальных данных $\mathbf{u}^\alpha|_{t_*=0} = f^\alpha \in \mathbb{C}[[x, \varepsilon]]$, удовлетворяющих условию $f^\alpha|_{x=\varepsilon=0} = 0$.

Локальные функционалы и скобки Пуассона

Введём пространства *локальных фунционалов*

$$\Lambda_u := \mathcal{A}_u/(\mathrm{Im}(\partial_x) \oplus \mathbb{C}), \qquad \widehat{\Lambda}_u := \Lambda_u[[\varepsilon]].$$

Для каждого $\alpha \in [N]$ оператор *вариационной производной* $\frac{\delta}{\delta u^\alpha} \colon \widehat{\mathcal{A}}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$ определяется как

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} := \sum_{i \ge 0} (-\partial_x)^i \circ \frac{\partial}{\partial u^\alpha_i}. \tag{1.40}$$

Мы имеем $\mathrm{Im}(\partial_x) \oplus \mathbb{C} \subset \mathrm{Ker}\left(\frac{\delta}{\delta u^\alpha}\right)$, в силу чего линейное отображение $\frac{\delta}{\delta u^\alpha} \colon \widehat{\Lambda}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$ корректно определённо. Образ дифференциального многочлена $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u$ под действием канонической проекции $\widehat{\mathcal{A}}_u \to \widehat{\Lambda}_u$ мы будем обозначать через $\int f dx$. Дифференциальный многочлен f называется в этом случае *плотностью* локального функционала $\int f dx$. Важно отметить, что локальный функционал $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\alpha} = 0$ для любого α. Так как эволюционный оператор коммутирует с ∂_x, действие такого оператора корректно определено в пространстве локальных функционалов.

Под *дифференциальным оператором* на пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_u$ мы будем понимать оператор вида $\sum_{i,j \ge 0} f^{[i]}_j \varepsilon^i \partial^j_x$, где $f^{[i]}_j \in \mathcal{A}_u$ и для каждого фиксированного i сумма $\sum_{j \ge 0} f^{[i]}_j \partial^j_x$ содержит лишь конечное число ненулевых членов. В силу условия конечности, действие такого оператора на пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_u$ корректно определено.

Сопоставим каждому дифференциальному многочлену $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u$ набор дифференциальных операторов $L^k_\alpha(f)$, $\alpha \in [N]$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, равенством

$$L^k_\alpha(f) := \sum_{i \geq k} \binom{i}{k} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha_i} \partial_x^{i-k}.$$

Мы будем также обозначать $L_\alpha(f) := L^0_\alpha(f)$. Операторы $L^k_\alpha(f)$ удовлетворяют свойству

$$L^k_\alpha(\partial_x f) = \partial_x \circ L^k_\alpha(f) + L^{k-1}_\alpha(f), \quad k \geq 0, \tag{1.41}$$

где мы используем соглашение $L^l_\alpha(f) := 0$ при $l < 0$.

Под *матричным дифференциальным оператором* мы будем понимать $N \times N$ матрицу $K = (K^{\mu\nu})$, состоящую из дифференциальных операторов $K^{\mu\nu}$. *Сопряжённый* оператор $K^\dagger = \left((K^\dagger)^{\mu\nu}\right)$ определяется равенством

$$(K^\dagger)^{\mu\nu} := \sum_{j \geq 0} (-\partial_x)^j \circ K^{\nu\mu}_j,$$

где $K^{\alpha\beta} = \sum_{j \geq 0} K^{\alpha\beta}_j \partial^j_x$ и $K^{\alpha\beta}_j \in \widehat{\mathcal{A}}_u$. Операция сопряжения является инволюцией, $(K^\dagger)^\dagger = K$. Мы будем называть оператор K *кососимметрическим*, если выполняется $K^\dagger = -K$.

Мы будем говорить, что матричный дифференциальный оператор $K = (K^{\alpha\beta})$ имеет *степень* 1, если $K^{\alpha\beta} = \sum_{i,j \geq 0} K^{\alpha\beta;[i]}_j \varepsilon^i \partial^j_x$, где $K^{\alpha\beta;[i]}_j \in \mathcal{A}_{u;1+i-j}$. Мы назовём такой оператор *невырожденным*, если выполняется $\det \left(K^{\alpha\beta;[0]}_1\right)\Big|_{u^*=0} \neq 0$.

Введём теперь определёный класс пуассоновых структур на пространстве локальных функционалов. Пусть K – матричный дифференциальный оператор. Определим билинейную форму $\{\cdot,\cdot\}_K \colon \widehat{\Lambda}_u \times \widehat{\Lambda}_u \to \widehat{\Lambda}_u$ формулой

$$\{\overline{f}, \overline{g}\}_K := \int \frac{\delta \overline{f}}{\delta u^\alpha} K^{\alpha\beta} \frac{\delta \overline{g}}{\delta u^\beta} dx, \quad \overline{f}, \overline{g} \in \widehat{\Lambda}_u.$$

Назовём оператор K *пуассоновым*, если скобка $\{\cdot,\cdot\}_K$ является скобкой Пуассона, то есть она кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. Кососимметричность скобки $\{\cdot,\cdot\}_K$ эквивалентна кососимметричности оператора K. Важным примером пуассонова оператора является оператор $\eta\partial_x$, где $\eta = (\eta^{\alpha\beta})$ – произвольная симметричная матрица с комплексными коэффициентами. Оператор вида $K = \left(g^{\alpha\beta}\partial_x + b^{\alpha\beta}_\gamma u^\gamma_x\right)$, где $g^{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}_\gamma \in \mathbb{C}[[u^*]]$, называют оператором *гидродинамического типа*.

Для фиксированного матричного дифференциального оператора K определим билинейное отображение $\{\cdot,\cdot\}_K \colon \widehat{\mathcal{A}}_u \times \widehat{\Lambda}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$ равенством

$$\{f, \overline{g}\}_K := \sum_{n \geq 0} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha_n} \partial^n_x \left(K^{\alpha\beta} \frac{\delta \overline{g}}{\delta u^\beta} \right) \in \widehat{\mathcal{A}}_u, \quad f \in \widehat{\mathcal{A}}_u, \quad \overline{g} \in \widehat{\Lambda}_u.$$

Ясно, что оператор $\{\cdot, \overline{g}\}_K \colon \widehat{\mathcal{A}}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$ является эволюционным оператором и что выполняется $\int \{f, \overline{g}\}_K dx = \left\{\int f dx, \overline{g}\right\}_K$. Оператор K является пуассоновым тогда и только тогда, когда выполняется $\{\cdot, \{\overline{g}, \overline{h}\}_K\}_K = \{\{\cdot, \overline{g}\}_K, \overline{h}\}_K - \{\{\cdot, \overline{h}\}_K, \overline{g}\}_K$ для любых $\overline{g}, \overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u$.

Система эволюционных УрЧП (1.39) называется *гамильтоновой*, если существует пуассонов оператор K и локальный функционал $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u$ такие, что $P^\alpha = K^{\alpha\beta}\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\beta}$ (что эквивалентно тому, что эволюционный оператор $H_{\overline{P}}$ совпадает с оператором $\{\cdot, \overline{h}\}_K$). Локальный функционал $\overline{h}$ называется в этом случае *гамильтонианом* системы (1.39). Согласованность двух гамильтоновых систем $\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = K^{\alpha\beta}\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\beta}$ и $\frac{\partial u^\alpha}{\partial s} = K^{\alpha\beta}\frac{\delta \overline{g}}{\delta u^\beta}$ эквивалентна равенству $\{\overline{h}, \overline{g}\}_K = 0$.

Преобразования Миуры

Введём класс замен переменных, который мы будем использовать при изучении эволюционных систем уравнений в частных производных. Помимо переменных $u^1, \dots, u^N$, рассмотрим новые переменные $w^1, \dots, w^N$, а также соответствующие пространства дифференциальных многочленов и локальных функционалов.

Определение 1.25. *Преобразованием Миуры* называется замена переменных вида

$$u^\alpha \mapsto w^\alpha(u^*_*, \varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k f^\alpha_k(u^*_*), \quad \alpha = 1, \dots, N, \tag{1.42}$$

$$f^\alpha_k \in \mathcal{A}_{u;k}, \quad f^\alpha_0|_{u^*=0} = 0, \quad \det\left(\frac{\partial f^\alpha_0}{\partial u^\beta}\right)\Big|_{u^*=0} \neq 0. \tag{1.43}$$

С помощью замены (1.42) любой дифференциальный многочлен $f(u^*_*, \varepsilon) \in \widehat{\mathcal{A}}_u$ можно переписать в виде дифференциального многочлена от переменных w^α, который мы обозначим через $f(w^*_*, \varepsilon)$. Таким образом, преобразование Миуры задаёт изоморфизм алгебр $\widehat{\mathcal{A}}_u \cong \widehat{\mathcal{A}}_w$. Преобразования Миуры образуют группу.

Изоморфизм $\widehat{\mathcal{A}}_u \cong \widehat{\mathcal{A}}_w$, задаваемый преобразованием Миуры, сохраняет дифференциальную градуировку. Более того, этот изоморфизм отождествляет операторы ∂_x, действующие в пространствах $\widehat{\mathcal{A}}_u$ и $\widehat{\mathcal{A}}_w$. Поэтому преобразование Миуры индуцирует изоморфизм пространств локальных фунционалов $\widehat{\Lambda}_u \cong \widehat{\Lambda}_w$. Локальный функционал $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u$, переписанный в переменных w^α, мы будем обозначать через $\overline{h}[w]$.

Преобразование Миуры отождествляет множества эволюционных операторов, действующих в пространствах $\widehat{\mathcal{A}}_u$ и $\widehat{\mathcal{A}}_w$. Таким образом, для произвольного набора $\overline{P} \in \widehat{\mathcal{A}}^N_u$ эволюционный оператор $H_{\overline{P}}$ в пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_u$ соответствует эволюционному оператору $H_{\overline{Q}}$ в пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_w$ для некоторого $\overline{Q} \in \widehat{\mathcal{A}}^N_w$. Мы будем говорить, что преобразование Миуры (1.42) переводит систему эволюционных уравнений $\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = P^\alpha$ в систему эволюционных уравнений $\frac{\partial w^\alpha}{\partial t} = Q^\alpha$.

Рассмотрим матричный дифференциальный оператор K, локальный функционал $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u$ и соответствующий эволюционный оператор $\{\cdot, \overline{h}\}_K \colon \widehat{\mathcal{A}}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$. Так как преобразование Миуры отождествляет множества эволюционных операторов на $\widehat{\mathcal{A}}_u$ и $\widehat{\mathcal{A}}_w$, оператору $\{\cdot, \overline{h}\}_K$ на $\widehat{\mathcal{A}}_u$ соответствует эволюционный оператор на $\widehat{\mathcal{A}}_w$, и этот оператор совпадает с оператором $\{\cdot, \overline{h}[w]\}_{K_w}$,

где матричный дифференциальный оператор $K_w = (K_w^{\alpha\beta})$ задаётся формулой

$$K_w^{\alpha\beta} := L_\mu(w^\alpha(u_*^*,\varepsilon)) \circ K^{\mu\nu} \circ L_\nu(w^\beta(u_*^*,\varepsilon))^\dagger = \sum_{p,q\geq 0} \frac{\partial w^\alpha(u_*^*,\varepsilon)}{\partial u_p^\mu} \partial_x^p \circ K^{\mu\nu} \circ (-\partial_x)^q \circ \frac{\partial w^\beta(u_*^*,\varepsilon)}{\partial u_q^\nu}. \tag{1.44}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\{\overline{f},\overline{g}\}_K[w] = \{\overline{f}[w],\overline{g}[w]\}_{K_w}$ для любых локальных функционалов $\overline{f},\overline{g} \in \widehat{\Lambda}_u$. Иными словами, скобка $\{\cdot,\cdot\}_K$ на $\widehat{\Lambda}_u$ переходит под действием преобразования Миуры в скобку $\{\cdot,\cdot\}_{K_w}$ на $\widehat{\Lambda}_w$. Если K – пуассонов оператор, то гамильтонова система уравнений

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = K^{\alpha\mu}\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\mu}$$

переходит под действием преобразования Миуры в гамильтонову систему

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t} = K_w^{\alpha\mu}\frac{\delta \overline{h}[w]}{\delta w^\mu}.$$

Теорема 1.26 ([48, 30]). *Пусть K – невырожденный пуассонов матричный оператор степени 1. Тогда существует преобразование Миуры $u^\alpha \mapsto w^\alpha(u_*^*,\varepsilon)$ такое, что $K_w = (\eta^{\alpha\beta})\partial_x$ для некоторой невырожденной симметричной матрицы $(\eta^{\alpha\beta})$ с комплексными коэффициентами.*

Для любой невырожденной симметричной матрицы $(\eta^{\alpha\beta})$ с комплексными коэффициентами пространство локальных функционалов $\overline{h}$ таких, что эволюционный оператор $\{\cdot,\overline{h}\}_{(\eta^{\alpha\beta})\partial_x}$ на пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_u$ равен нулю, N-мерно с базисом $\int u^1 dx, \dots, \int u^N dx$. Пользуясь предыдущей теоремой, мы заключаем, что для любого невырожденного пуассонова матричного оператора K степени 1 пространство локальных функционалов $\overline{h}$ таких, что эволюционный оператор $\{\cdot,\overline{h}\}_K$ на пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_u$ равен нулю, также N-мерно.

Формальное разложение в ряд Фурье

При изучении DR-иерархий очень удобно описывать дифференциальные многочлены и локальные функционалы в других координатах. Введём формальные переменные p_a^α, $\alpha \in [N]$, $a \in \mathbb{Z}$, и рассмотрим алгебру $\widehat{\mathcal{B}}_N := \mathbb{C}[p_{\geq 1}^*][[p_{\leq 0}^*,\varepsilon]]$. Определим линейное отображение $\phi\colon \widehat{\mathcal{A}}_u \to \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix},e^{-ix}]]$ равенством $\phi(f) := f\big|_{u_d^\alpha \mapsto \sum_{a\in\mathbb{Z}}(ia)^d p_a^\alpha e^{iax}}$, $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u$. Отображение ϕ является вложением. Нам будет полезно рассматривать дифференциальные многочлены как элементы пространства $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix},e^{-ix}]]$, пользуясь вложением ϕ. Поэтому мы будем часто обозначать образ дифференциального многочлена f в пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix},e^{-ix}]]$ тем же символом f.

Для $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u$ рассмотрим разложение $\phi(f) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} \phi_a(f)e^{iax}$, $\phi_a(f) \in \widehat{\mathcal{B}}_N$. Обозначим $\widetilde{\phi}_0(f) := \phi_0(f) - \phi_0(f)|_{p_*^*=0}$. Мы имеем $\mathrm{Im}(\partial_x) \oplus \mathbb{C}[[\varepsilon]] \subset \mathrm{Ker}(\widetilde{\phi}_0)$. Значит, отображение $\widetilde{\phi}_0\colon \widehat{\Lambda}_u \to \widehat{\mathcal{B}}_N$ корректно определено. Оно является вложением. Как и с дифференциальными многочленами,

образ локального функционала $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u$ в пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N$ под действием вложения $\widetilde{\phi}_0$ будет часто обозначаться тем же символом $\overline{h}$.

Если рассматривать пространства $\widehat{\mathcal{A}}_u$ и $\widehat{\Lambda}_u$ как подпространства в пространствах $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]]$ и $\widehat{\mathcal{B}}_N$, соответственно, то мы имеем

$$\widehat{\mathcal{A}}_u = \left\{ \sum_{k,n\geq 0} \varepsilon^k \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}}} e^{ix\sum a_j} P_{k;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(a_1,\ldots,a_n) \prod_{j=1}^{n} p_{a_j}^{\alpha_j} \,\middle|\, P_{k;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n] \right\},$$

$$\widehat{\Lambda}_u = \left\{ \sum_{k\geq 0,\, n\geq 1} \varepsilon^k \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}\\ \sum a_j=0}} P_{k;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(a_1,\ldots,a_n) \prod_{j=1}^{n} p_{a_j}^{\alpha_j} \,\middle|\, P_{k;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n] \right\}.$$

Если рассматривать дифференциальные многочлены и локальные функционалы как элементы пространств $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]]$ и $\widehat{\mathcal{B}}_N$, соответственно, то оператор вариационной производной $\frac{\delta}{\delta u^\alpha}\colon \widehat{\Lambda}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$ переписывается в виде $\sum_{a\in\mathbb{Z}} e^{-iax}\frac{\partial}{\partial p_a^\alpha}$. Точнее говоря, следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Lambda}_u & \xrightarrow{\frac{\delta}{\delta u^\alpha}} & \widehat{\mathcal{A}}_u \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\phi}_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \widehat{\mathcal{B}}_N & \xrightarrow{\sum_{a\in\mathbb{Z}} e^{-iax}\frac{\partial}{\partial p_a^\alpha}} & \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]] \end{array} \tag{1.45}$$

Пусть $\eta = (\eta^{\alpha\beta})$ – произвольная симметричная матрица с комплексными коэффициентами. Билинейные отображения $\{\cdot,\cdot\}_{\eta\partial_x}\colon \widehat{\mathcal{A}}_u \times \widehat{\Lambda}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$ и $\{\cdot,\cdot\}_{\eta\partial_x}\colon \widehat{\Lambda}_u \times \widehat{\Lambda}_u \to \widehat{\Lambda}_u$ имеют простое описание в терминах пространств $\widehat{\mathcal{B}}_N$ и $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]]$. Определим билинейное отображение $\{\cdot,\cdot\}_\eta\colon \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]] \times \widehat{\mathcal{B}}_N \to \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]]$ равенством $\{f, \overline{h}\}_\eta := \sum_{a\in\mathbb{Z}} ia\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial p_a^\alpha}\frac{\partial \overline{h}}{\partial p_{-a}^\beta}$, $f \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]]$, $\overline{h} \in \widehat{\mathcal{B}}_N$. Тогда следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{A}}_u \times \widehat{\Lambda}_u & \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}_{\eta\partial_x}} & \widehat{\mathcal{A}}_u \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi\times\widetilde{\phi}_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]] \times \widehat{\mathcal{B}}_N & \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}_\eta} & \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]] \end{array}$$

Ограничение билинейного отображения $\{\cdot,\cdot\}_\eta\colon \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]] \times \widehat{\mathcal{B}}_N \to \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]]$ на $\widehat{\mathcal{B}}_N \times \widehat{\mathcal{B}}_N \subset \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}]] \times \widehat{\mathcal{B}}_N$ даёт билинейное отображение $\{\cdot,\cdot\}_\eta\colon \widehat{\mathcal{B}}_N \times \widehat{\mathcal{B}}_N \to \widehat{\mathcal{B}}_N$, которое является скобкой Пуассона. При этом следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Lambda}_u \times \widehat{\Lambda}_u & \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}_{\eta\partial_x}} & \widehat{\Lambda}_u \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\phi}_0\times\widetilde{\phi}_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\phi}_0} \\ \widehat{\mathcal{B}}_N \times \widehat{\mathcal{B}}_N & \xrightarrow{\{\cdot,\cdot\}_\eta} & \widehat{\mathcal{B}}_N \end{array}$$

Бигамильтоновы иерархии

Два пуассоновых оператора K_1 и K_2 называются *согласованными*, если их линейная комбинация $K_1 + \lambda K_2$ является пуассоновым оператором для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим гамильтонову иерархию

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t^\beta_q} = K_1^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{h}_{\beta,q}}{\delta u^\mu}, \quad \alpha, \beta \in [N], \quad q \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

где пуассонов оператор K_1 является невырожденным и имеет степень 1. Зафиксируем N линейно независимых локальных функционалов $\overline{h}_{\alpha,-1}$, $\alpha \in [N]$, таких, что эволюционные операторы $\{\cdot, \overline{h}_{\alpha,-1}\}_{K_1}$ равны нулю. Иерархия называется *бигамильтоновой*, если существует пуассонов оператор K_2, согласованный с оператором K_1 и такой, что выполняется соотношение (в пространстве эволюционных операторов на $\widehat{\mathcal{A}}_u$)

$$\{\cdot, \overline{h}_{\alpha,i-1}\}_{K_2} = \sum_{j=0}^{i} R^{j,\beta}_{i,\alpha} \{\cdot, \overline{h}_{\beta,i-j}\}_{K_1}, \quad \alpha \in [N], \quad i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{1.46}$$

где $R^j_i = (R^{j,\beta}_{i,\alpha}) \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\mathbb{C})$, $0 \leq j \leq i$, и все матрицы R^0_i обратимы за исключением конечного числа. Соотношение (1.46) называется *бигамильтоновой рекурсией*. Заметим, что если все матрицы R^0_i являются обратимыми, то бигамильтонова рекурсия (1.46) задаёт все локальные функционалы $\overline{h}_{\alpha,i}$ с $i \geq 0$ однозначно с точностью до некоторого треугольного преобразования

$$\overline{h}_{\alpha,i} \mapsto \overline{h}_{\alpha,i} + \sum_{j=1}^{i+1} A^{j,\beta}_{i,\alpha} \overline{h}_{\beta,i-j}, \quad \alpha \in [N], \quad i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad A^{j,\beta}_{i,\alpha} \in \mathbb{C}.$$

Наоборот, предположим, что (K_1, K_2) – пара согласованных пуассоновых операторов степени 1, причём оператор K_1 невырожденный. Тогда они порождают бигамильтонову иерархию: выберем N линейно независимых локальных функционалов $\overline{h}_{\alpha,-1}$ таких, что эволюционные операторы $\{\cdot, \overline{h}_{\alpha,-1}\}_{K_1}$ равны нулю, тогда существует набор локальных функционалов $\overline{h}_{\alpha,i}$, $\alpha \in [N]$, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, такой, что выполняется соотношение

$$\{\cdot, \overline{h}_{\alpha,i-1}\}_{K_2} = \{\cdot, \overline{h}_{\alpha,i}\}_{K_1}, \quad \alpha \in [N], \quad i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Все локальные функционалы $\overline{h}_{\alpha,i}$ тогда попарно коммутируют относительно как скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{K_1}$, так и скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{K_2}$.

Расширения пространств дифференциальных многочленов и локальных функционалов и скобка Схоутена–Ниенхейса

В этом разделе мы введём расширения пространств дифференциальных многочленов и локальных функционалов, а также скобку Схоутена–Ниенхейса, которая позволит сформулиро-

вать явное алгебраическое условие для проверки того, что заданный матричный оператор является пуассоновым. Подробности, вместе с доказательствами, можно найти, например, в работе [60].

Обозначим через $\mathcal{A}_u^*$ алгебру многочленов от переменных $u^\alpha_{\geq 1}$, а также от новых формальных переменных $\theta_{\alpha,k}$, $\alpha \in [N]$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, которые мы будем считать нечётными (то есть, они антикоммутируют между собой и коммутируют с переменными u^α_d), с коэффициентами, являющимися формальными рядами от переменных u^α. Мы будем обозначать $\theta_\alpha := \theta_{\alpha,0}$. Обозначим $\widehat{\mathcal{A}}_u^* := \mathcal{A}_u^*[[\varepsilon]]$. Введём на алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_u^*$ градуировку, которую будем называть *супер-градуировкой* и обозначать через $\deg_\theta$, равенством $\deg_\theta \theta_{\alpha,k} := 1$ и $\deg_\theta u^\alpha_k = \deg_\theta \varepsilon := 0$. Заметим, что однородная компонента супер-степени 0 в алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_u^*$ совпадает с алгеброй дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_u$. Однородную компоненту супер-степени p в алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_u^*$ мы будем обозначать через $\widehat{\mathcal{A}}_u^p$.

Градуировка deg на алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_u = \widehat{\mathcal{A}}_u^0 \subset \widehat{\mathcal{A}}_u^*$ переносится на всю алгебру $\widehat{\mathcal{A}}_u^*$, полагая $\deg \theta_{\alpha,k} := k$. Мы будем иногда называть эту градуировку *стандартной градуировкой*, чтобы отличать её от супер-градуировки. Однородную компонету стандартной степени d в алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_u^*$ мы будем обозначать через $\widehat{\mathcal{A}}_{u;d}^*$, и мы также будем использовать обозначение $\widehat{\mathcal{A}}_{u;d}^p := \widehat{\mathcal{A}}_{u;d}^* \cap \widehat{\mathcal{A}}_u^p$.

Оператор ∂_x переносится с алгебры $\widehat{\mathcal{A}}_u^0$ на всю алгебру $\widehat{\mathcal{A}}_u^*$ равенством

$$\partial_x := \sum_{k\geq 0} u^\alpha_{k+1} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_k} + \sum_{k\geq 0} \theta_{\alpha,k+1} \frac{\partial}{\partial \theta_{\alpha,k}}.$$

Он увеличивает стандартную степень на 1 и сохраняет супер-степень. Значит, как стандартная градуировка, так и супер-градуировка, переносятся на пространство

$$\widehat{\Lambda}_u^* := \widehat{\mathcal{A}}_u^* \Big/ (\mathbb{C}[[\varepsilon]] \oplus \operatorname{Im} \partial_x),$$

которое называется пространством *локальных поливекторных полей*. Соответствующие однородные компоненты мы будем обозначать через $\widehat{\Lambda}_{u;d}^p$. Для элемента $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u^*$ его образ в пространстве $\widehat{\Lambda}_u^*$ будет обозначаться через $\int f dx$.

Вариационные производные $\frac{\delta}{\delta u^\alpha}$ и $\frac{\delta}{\delta \theta_\alpha}$ в алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_u^*$ определяются равенствами

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} := \sum_{i\geq 0} (-\partial_x)^i \circ \frac{\partial}{\partial u^\alpha_i}, \qquad \frac{\delta}{\delta \theta_\alpha} := \sum_{i\geq 0} (-\partial_x)^i \circ \frac{\partial}{\partial \theta_{\alpha,i}},$$

и, так как они зануляются на подпространстве $\mathbb{C}[[\varepsilon]] \oplus \operatorname{Im} \partial_x$, вариационные производные корректно определены на пространстве $\widehat{\Lambda}_u^*$: $\frac{\delta}{\delta u^\alpha}, \frac{\delta}{\delta \theta_\alpha} \colon \widehat{\Lambda}_u^* \to \widehat{\mathcal{A}}_u^*$.

Имеется биекция между пространством $(\widehat{\mathcal{A}}_u^0)^N$ и пространством $\widehat{\Lambda}_u^1$, называемым пространством *локальных векторых полей*, задаваемая равенством

$$(\widehat{\mathcal{A}}_u^0)^N \ni \overline{Q} = (Q^1, \dots, Q^N) \mapsto V_{\overline{Q}} := \int Q^\alpha \theta_\alpha dx \in \widehat{\Lambda}_u^1.$$

Имеется также биекция между пространством кососимметрических матричных операторов $K = (K^{\alpha\beta})$, $K^{\alpha\beta} = \sum_{s\geq 0} K^{\alpha\beta}_s \partial^s_x$, и пространством $\widehat{\Lambda}^2_u$, называемым пространством *локальных бивекторных полей*, задаваемая равенством

$$K \mapsto B_K := \frac{1}{2}\int \sum_{s\geq 0} K^{\alpha\beta}_s \theta_{\alpha,0}\theta_{\beta,s} dx \in \widehat{\Lambda}^2_u.$$

Определение 1.27. Для каждых $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *скобка Схоутена–Ниенхейса* $[\cdot,\cdot]\colon \widehat{\Lambda}^p_u \times \widehat{\Lambda}^q_u \to \widehat{\Lambda}^{p+q-1}_u$ определяется равенством

$$[P,Q] := \int \left(\frac{\delta P}{\delta \theta_\alpha}\frac{\delta Q}{\delta u^\alpha} + (-1)^p \frac{\delta P}{\delta u^\alpha}\frac{\delta Q}{\delta \theta_\alpha}\right) dx.$$

Для любых элементов $P \in \widehat{\Lambda}^p_u$, $Q \in \widehat{\Lambda}^q_u$, $R \in \widehat{\Lambda}^r_u$ имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &[P,Q] = (-1)^{pq}[Q,P],\\ &(-1)^{pr}[[P,Q],R] + (-1)^{rq}[[R,P],Q] + (-1)^{qp}[[Q,R],P] = 0. \end{aligned}$$

Кососимметрический оператор K является пуассоновым тогда и только тогда, когда выполняется равенство $[B_K, B_K] = 0$. Выполняется свойство

$$[[R, B_K], B_K] = 0, \quad \text{где} \quad K - \text{пуассонов оператор и } R \in \widehat{\Lambda}^p_u. \tag{1.47}$$

Пара кососимметрических операторов (K_1, K_2) является парой согласованных пуассоновых операторов тогда и только тогда, когда выполняются равенства $[K_1, K_1] = [K_1, K_2] = [K_2, K_2] = 0$.

Имеется следующая связь введённых выше понятий с эволюционными операторами. Для любого вектора $\overline{P} \in (\widehat{\mathcal{A}}^0_u)^N$ и локального функционала $\overline{f}$ выполняется $[V_{\overline{P}}, \overline{f}] = H_{\overline{P}}(\overline{f})$. Для любых двух векторов $\overline{P}, \overline{Q} \in (\widehat{\mathcal{A}}^0_u)^N$ выполняется $[V_{\overline{P}}, V_{\overline{Q}}] = V_{\overline{R}}$, где $\overline{R} \in (\widehat{\mathcal{A}}^0_u)^N$ определяется в (1.38).

Для кососимметрического оператора K, вектора $\overline{Q} \in (\widehat{\mathcal{A}}^0_u)^N$ и локальных функционалов $\overline{f}, \overline{g} \in \widehat{\Lambda}^0_u$ выполняются следующие свойства:

$$\begin{aligned} &\{\overline{f}, \overline{g}\}_K = [[B_K, \overline{f}], \overline{g}],\\ &\frac{\delta B_K}{\delta \theta_\alpha} = \sum_{s\geq 0} K^{\alpha\beta}_s \theta_{\beta,s} \in \widehat{\mathcal{A}}^1_u,\\ &[\overline{f}, B_K] = -V_{\overline{P}}, \quad P^\alpha = \sum_{s\geq 0} K^{\alpha\beta}_s \partial^s_x \frac{\delta \overline{f}}{\delta u^\beta}. \end{aligned}$$

Определим кососимметрический оператор $H_{\overline{Q}}.K$ равенством

$$(H_{\overline{Q}}.K)^{\alpha\beta} := -L_\mu(Q^\alpha)\circ K^{\mu\beta} - K^{\alpha\nu}\circ L_\nu(Q^\beta)^\dagger + \sum_{s\geq 0} H_{\overline{Q}}(K^{\alpha\beta}_s)\partial^s_x. \tag{1.48}$$

Тогда мы имеем

$$[V_{\overline{Q}}, B_K] = B_{H_{\overline{Q}}.K}. \tag{1.49}$$

1.3.2 Теоремы о восстановлении для интегрируемых систем

Теорема 1.28. *Рассмотрим алгебру дифференциальных многочленов от одной переменной u и пару согласованных УрЧП*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = P, \quad P \in \widehat{\mathcal{A}}_{u;0}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = Q, \quad Q \in \widehat{\mathcal{A}}_{u;0}, \end{cases}$$

таких, что $P = \varepsilon f(u)u_x + O(\varepsilon^2)$, где $f'(u) \neq 0$. Тогда Q имеет вид $Q = \varepsilon h(u)u_x + O(\varepsilon^2)$ и, более того, Q однозначно определяется по P и h.

Доказательство. Пусть $Q = g(u) + O(\varepsilon)$. Мы имеем

$$H_P Q - H_Q P = \varepsilon \left(f(u)u_x g'(u) - g(u)f'(u)u_x - f(u)\partial_x g(u) \right) + O(\varepsilon^2) = -\varepsilon g(u)f'(u)u_x + O(\varepsilon^2).$$

Так как $H_P Q - H_Q P = 0$, мы получаем $g = 0$. Значит, Q имеет вид $Q = \varepsilon h(u)u_x + O(\varepsilon^2)$.

По линейности, достаточно теперь доказать, что если $h = 0$, то $Q = 0$. Предположим обратное, то есть $Q = \varepsilon^k R + O(\varepsilon^{k+1})$, где $k \geq 2$ и $0 \neq R \in \mathcal{A}_{u;k}$. Мы имеем

$$H_P Q - H_Q P = \varepsilon^{k+1} \left(H_{f(u)u_x} R - H_R(f(u)u_x) \right) + O(\varepsilon^{k+2}).$$

Так как $H_P Q - H_Q P = 0$, мы заключаем, что $H_{f(u)u_x} R - H_R(f(u)u_x) = 0$. С другой стороны, вычислим это выражение напрямую:

$$\begin{aligned} H_{f(u)u_x} R - H_R(f(u)u_x) &= \sum_{n \geq 0} \partial_x^n (f u_x) \frac{\partial R}{\partial u_n} - R f' u_x - f \partial_x R = \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(f u_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \partial_x^j f \cdot u_{n+1-j} \right) \frac{\partial R}{\partial u_n} - R f' u_x - f \partial_x R = \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \partial_x^j f \cdot u_{n+1-j} \right) \frac{\partial R}{\partial u_n} - R f' u_x. \end{aligned}$$

Разложим теперь

$$R = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_k} c_\lambda(u) u_\lambda, \quad c_\lambda(u) \in \mathbb{C}[[u]],$$

где для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ мы используем обозначение $u_\lambda := u_{\lambda_1} \cdots u_{\lambda_l}$. Обозначим через μ лексикографически максимальное разбиение числа k такое, что $c_\mu \neq 0$. Легко понять, что для любого $n \geq 1$ и $\nu > \widetilde{\mu} := (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{l(\mu)}, 1) \in \mathcal{P}_{k+1}$ коэффициент при u_ν в выражении

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \partial_x^j f \cdot u_{n+1-j} \frac{\partial R}{\partial u_n}$$

равен 0, и что также выполняется

$$\operatorname{Coef}_{u_{\tilde{\mu}}}\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\partial_x^j f\cdot u_{n+1-j}\frac{\partial R}{\partial u_n}\right)=\begin{cases}(n+1)m_n(\mu)f'c_\mu, & \text{если } n\geq 2,\\ m_1(\mu)f'c_\mu, & \text{если } n=1.\end{cases}$$

В результате, мы получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Coef}_{u_{\tilde{\mu}}}\left(H_{f(u)u_x}R-H_R(f(u)u_x)\right)&=\left(\sum_{n\geq 1}(n+1)m_n(\mu)-m_1(\mu)-1\right)f'c_\mu=\\ &=(k+l(\mu)-m_1(\mu)-1)f'c_\mu,\end{aligned}$$

что не является нулём, так как $k\geq 2$ и $l(\mu)\geq m_1(\mu)$. Это противоречит предположению, что $R=0$, а значит теорема доказана. □

Следствие 1.29. *Рассмотрим алгебру дифференциальных многочленов и пространство локальных функционалов от одной переменной и. Зафиксируем локальный функционал $\overline{h}\in\widehat{\Lambda}_{u;0}$ вида $\overline{h}=\int p(u)dx+O(\varepsilon)$, где $p'''(u)\neq 0$.*

1. *Предположим, что для локального функционала $\overline{g}\in\widehat{\Lambda}_{u;0}$ выполняется $\{\overline{h},\overline{g}\}_{\partial_x}=0$. Тогда $\overline{g}$ определяется по $\overline{h}$ и $\operatorname{Coef}_{\varepsilon^0}(\overline{g})$ однозначно.*

2. *Если для локальных функционалов $\overline{g}_1,\overline{g}_2\in\widehat{\Lambda}_{u;0}$ выполняется $\{\overline{h},\overline{g}_1\}_{\partial_x}=\{\overline{h},\overline{g}_2\}_{\partial_x}=0$, тогда $\{\overline{g}_1,\overline{g}_2\}_{\partial_x}=0$.*

Доказательство. 1. Раз $\{\overline{h},\overline{g}\}_{\partial_x}=0$, значит УрЧП

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\underbrace{\varepsilon\partial_x\frac{\delta\overline{h}}{\delta u}}_{=:P}\quad\text{и}\quad\frac{\partial u}{\partial s}=\underbrace{\varepsilon\partial_x\frac{\delta\overline{g}}{\delta u}}_{=:Q}$$

согласованы, причём $P=\varepsilon p''(u)u_x+O(\varepsilon^2)$. По теореме 1.28, $Q=\varepsilon\partial_x\frac{\delta\overline{g}}{\delta u}$ однозначно восстанавливается по P и $\operatorname{Coef}_\varepsilon(Q)=\operatorname{Coef}_{\varepsilon^0}\left(\partial_x\frac{\delta\overline{g}}{\delta u}\right)$. Так как ядро оператора $\partial_x\colon\mathcal{A}_u\to\mathcal{A}_u$ совпадает с константами, а отображение $\frac{\delta}{\delta u}\colon\Lambda_u\to\mathcal{A}_u$ является вложением, мы заключаем, что $\overline{g}$ однозначно восстанавливается по Q и $\operatorname{Coef}_{\varepsilon^0}(\overline{g})$.

2. Из равенств $\{\overline{h},\overline{g}_1\}_{\partial_x}=\{\overline{h},\overline{g}_2\}_{\partial_x}=0$ и тождества Якоби следует, что $\{\overline{h},\varepsilon\{\overline{g}_1,\overline{g}_2\}_{\partial_x}\}_{\partial_x}=0$. Осталось заметить, что $\varepsilon\{\overline{g}_1,\overline{g}_2\}_{\partial_x}\in\widehat{\Lambda}_{u;0}$, $\operatorname{Coef}_{\varepsilon^0}(\varepsilon\{\overline{g}_1,\overline{g}_2\}_{\partial_x})=0$, а затем воспользоваться первой частью следствия. □

Следующее очевидное утверждение будет нам очень полезно, поэтому мы сформулируем его в виде отдельной леммы.

Лемма 1.30. *Рассмотрим целое положительное число N и алгебру формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]]$ от переменных t^α_a, $\alpha\in[N]$, $a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, и ε. Предположим, что семейство формальных рядов $\widetilde{w}^\alpha_n\in\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]]$, $\alpha\in[N]$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, удовлетворяет условию*

$$\widetilde{w}^\alpha_n = t^\alpha_n + \delta_{n,1}A^\alpha + R^\alpha_n(t^*_*) + O(\varepsilon), \quad \text{для некоторых } R^\alpha_n\in\mathbb{C}[[t^*_*]]^{(n+1)} \text{ и } A^\alpha\in\mathbb{C}. \tag{1.50}$$

Тогда произвольный формальный ряд из алгебры $\mathbb{C}[[t^*_*,\varepsilon]]$ можно представить в виде формального ряда от выражений $\left(\widetilde{w}^\beta_b - \delta_{b,1}A^\beta\right)$ и ε единственным образом. В частности, для любых двух дифференциальных многочленов $P,Q\in\widehat{\mathcal{A}}_w$ из равенства $P|_{w^\alpha_a\mapsto\widetilde{w}^\alpha_a} = Q|_{w^\alpha_a\mapsto\widetilde{w}^\alpha_a}$ вытекает, что $P=Q$.

Теорема 1.31. *Рассмотрим целое число $N\geq 1$ и алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_w$, соответствующую формальным переменным $w^1,\dots,w^N$. Рассмотрим интегрируемую систему*

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^\beta_b} = \partial_x P^\alpha_{\beta,b}, \quad P^\alpha_{\beta,b}\in\widehat{\mathcal{A}}_{w;0}, \quad \alpha,\beta\in[N],\ b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{1.51}$$

и ненулевой вектор $(A^1,\dots,A^N)\in\mathbb{C}^N$, удовлетворяющие свойствам

$$P^\alpha_{\beta,b}\big|_{w^*_*=\varepsilon=0} = 0, \qquad P^\alpha_{\mathbb{1},0} = w^\alpha, \qquad \frac{\partial P^\alpha_{\beta,b}}{\partial w^{\mathbb{1}}} = \begin{cases} P^\alpha_{\beta,b-1}, & \text{если } b\geq 1,\\ \delta^\alpha_\beta, & \text{если } b=0,\end{cases}$$

где $P^\alpha_{\mathbb{1},0} := A^\gamma P^\alpha_{\gamma,0}$ и $\frac{\partial}{\partial w^{\mathbb{1}}} := A^\gamma\frac{\partial}{\partial w^\gamma}$. Тогда все дифференциальные многочлены $P^\alpha_{\beta,b}$ однозначно определяются набором из N дифференциальных многочленов $(P^1_{\mathbb{1},1},\dots P^N_{\mathbb{1},1})$.

Доказательство. Рассмотрим решение $(w^{\mathrm{sp};1},\dots,w^{\mathrm{sp};N})\in\mathbb{C}[[x,t^*_*,\varepsilon]]^N$ системы (1.51), задаваемое начальным условием $w^{\mathrm{sp};\alpha}|_{t^*_*=0} = A^\alpha x$. Обозначим $w^{\mathrm{sp};\alpha}_n := \partial^n_x w^{\mathrm{sp};\alpha}$. Заметим сразу, что $\partial_x w^{\mathrm{sp};\alpha} = \frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t^{\mathbb{1}}_0}$.

Лемма 1.32. *Мы имеем равенства*

$$\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t^{\mathbb{1}}_0} - \sum_{n\geq 0} t^\gamma_{n+1}\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t^\gamma_n} = A^\alpha, \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t^{\mathbb{1}}_1} - \varepsilon\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial\varepsilon} - x\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial x} - \sum_{n\geq 0} t^\gamma_n\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t^\gamma_n} = 0, \tag{1.53}$$

$$w^{\mathrm{sp};\alpha}_n|_{x=0} = t^\alpha_n + \delta_{n,1}A^\alpha + Q^\alpha_n + O(\varepsilon) \quad \text{для некоторых } Q^\alpha_n\in\mathbb{C}[[t^*_*]]^{(n+1)}, \tag{1.54}$$

$$\left.\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t^\beta_b}\right|_{x=t^*_*=\varepsilon=0} = \delta^\alpha_\beta\delta_{b,0}. \tag{1.55}$$

Доказательство. Рассмотрим формальные переменные v^α, $\alpha\in[N]$, и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_v$. Свяжем переменные v^α_d, $d\geq 1$, с переменными w^β_q,

$q \geq 0$, равенством $w_d^\alpha = v_{d+1}^\alpha$. Из согласованности системы (1.51) следует, что система

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t_b^\beta} = P_{\beta,b}^\alpha, \quad \alpha, \beta \in [N],\ b \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

также согласована. Рассмотрим её решение $(v^{\mathrm{sp};1}, \dots, v^{\mathrm{sp};N})$, задаваемое начальным условием $v^{\mathrm{sp};\alpha}|_{t_*^*=0} = A^\alpha \frac{x^2}{2}$. Ясно, что $\partial_x v^{\mathrm{sp};\alpha} = \frac{\partial v^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_0^{\mathbb{1}}} = w^{\mathrm{sp};\alpha}$.

Мы утверждаем, что

$$\frac{\partial v^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_0^{\mathbb{1}}} - \sum_{n\geq 0} t_{n+1}^\gamma \frac{\partial v^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_n^\gamma} = t_0^\alpha + A^\alpha x. \tag{1.56}$$

Действительно, рассмотрим оператор $L := \frac{\partial}{\partial t_0^{\mathbb{1}}} - \sum_{d\geq 0} t_{d+1}^\mu \frac{\partial}{\partial t_d^\mu}$. Ясно, что выполняется равенство $Lv^{\mathrm{sp};\alpha}|_{t_*^*=0} = A^\alpha x$. Далее мы вычисляем

$$\frac{\partial}{\partial t_q^\beta}\left(Lv^{\mathrm{sp};\alpha}\right) = L\frac{\partial v^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_q^\beta} - \frac{\partial v^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_{q-1}^\beta} = \sum_{n\geq 1} \left.\frac{\partial P_{\beta,q}^\alpha}{\partial v_n^\gamma}\right|_{v_m^\mu \mapsto v_m^{\mathrm{sp};\mu}} \partial_x^n (Lv^{\mathrm{sp};\gamma}) - \left. P_{\beta,q-1}^\alpha\right|_{v_m^\mu \mapsto v_m^{\mathrm{sp};\mu}}.$$

Здесь мы по определению полагаем $\frac{\partial}{\partial t_{-1}^\beta} := 0$ и $P_{\beta,-1}^\alpha := 0$. Мы получаем систему УрЧП

$$\frac{\partial}{\partial t_q^\beta}\left(Lv^{\mathrm{sp};\alpha}\right) = \sum_{n\geq 1} \left.\frac{\partial P_{\beta,q}^\alpha}{\partial v_n^\gamma}\right|_{v_m^\mu \mapsto v_m^{\mathrm{sp};\mu}} \partial_x^n (Lv^{\mathrm{sp};\gamma}) - \left. P_{\beta,q-1}^\alpha\right|_{v_m^\mu \mapsto v_m^{\mathrm{sp};\mu}}, \quad \alpha, \beta \in [N],\ q \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

на формальные ряды $Lv^{\mathrm{sp};1}, \dots, Lv^{\mathrm{sp};N}$. Решение этой системы однозначно задаётся начальным условием. Используя тот факт, что $\frac{\partial P_{\beta,b}^\alpha}{\partial v_1^{\mathbb{1}}} = \frac{\partial P_{\beta,b}^\alpha}{\partial w^{\mathbb{1}}} = \begin{cases} P_{\beta,b-1}^\alpha, & \text{если } b \geq 1, \\ \delta_\beta^\alpha, & \text{если } b = 0, \end{cases}$ легко проверить, что $Lv^{\mathrm{sp};\alpha} = t_0^\alpha + A^\alpha x$ является решением системы. Таким образом, равенство (1.56) доказано.

Применив оператор ∂_x к равенству (1.56), мы получим равенство (1.52). Заметим, что из равенства (1.56) следует, что $w^{\mathrm{sp};\alpha}|_{t_{\geq 1}^*=0} = t_0^\alpha + A^\alpha x$, и значит равенство (1.54) верно для $n = 0$. Из равенства (1.52) вытекает, что

$$w_n^{\mathrm{sp};\alpha}|_{x=0} = \delta_{n,1} A^\alpha + \left(\sum_{k\geq 0} t_{k+1}^\gamma \frac{\partial}{\partial t_k^\gamma}\right)^n (w^{\mathrm{sp};\alpha}|_{x=0}),$$

откуда мы заключаем, что равенство (1.54) верно для всех $n \geq 0$.

Докажем теперь равенство (1.53). Введём оператор $O := \frac{\partial}{\partial t_1^{\mathbb{1}}} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - x\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n\geq 0} t_n^\gamma \frac{\partial}{\partial t_n^\gamma}$. Мы имеем

$$Ow^{\mathrm{sp};\alpha}|_{t_*^*=0} = \left.\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_1^{\mathbb{1}}}\right|_{t_*^*=0} - A^\alpha x = \left.\frac{\partial^2 v^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_1^{\mathbb{1}} \partial t_0^{\mathbb{1}}}\right|_{t_*^*=0} - A^\alpha x \overset{(1.56)}{=} \left.\frac{\partial v^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_0^{\mathbb{1}}}\right|_{t_*^*=0} - A^\alpha x = 0.$$

Далее мы вычисляем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_q^\beta}(Ow^{\mathrm{sp};\alpha}) =& O\left(\partial_x P^\alpha_{\beta,q}|_{w^\mu_m\mapsto w^{\mathrm{sp};\mu}_m}\right) - \partial_x P^\alpha_{\beta,q}|_{w^\mu_m\mapsto w^{\mathrm{sp};\mu}_m} = \\ =& \sum_{n\geq 0}\left.\frac{\partial(\partial_x P^\alpha_{\beta,q})}{\partial w^\gamma_n}\right|_{w^\mu_m\mapsto w^{\mathrm{sp};\mu}_m} Ow^{\mathrm{sp};\gamma}_n - \left.\left(\varepsilon\frac{\partial(\partial_x P^\alpha_{\beta,q})}{\partial\varepsilon} + \partial_x P^\alpha_{\beta,q}\right)\right|_{w^\mu_m\mapsto w^{\mathrm{sp};\mu}_m} = \\ =& \sum_{n\geq 0}\left.\frac{\partial(\partial_x P^\alpha_{\beta,q})}{\partial w^\gamma_n}\right|_{w^\mu_m\mapsto w^{\mathrm{sp};\mu}_m} (\partial_x^n(Ow^{\mathrm{sp};\gamma}) + nw^{\mathrm{sp};\alpha}_n) - \left.\left(\varepsilon\frac{\partial(\partial_x P^\alpha_{\beta,q})}{\partial\varepsilon} + \partial_x P^\alpha_{\beta,q}\right)\right|_{w^\mu_m\mapsto w^{\mathrm{sp};\mu}_m}.\end{aligned}$$

Из свойства $\partial_x P^\alpha_{\beta,q}\in\widehat{\mathcal{A}}_{w;1}$ следует, что последнее выражение равно $\sum_{n\geq 0}\left.\frac{\partial(\partial_x P^\alpha_{\beta,q})}{\partial w^\gamma_n}\right|_{w^\mu_m\mapsto w^{\mathrm{sp};\mu}_m}\partial_x^n(Ow^{\mathrm{sp};\gamma})$. Таким образом, мы получаем систему УрЧП

$$\frac{\partial}{\partial t_q^\beta}(Ow^{\mathrm{sp};\alpha}) = \sum_{n\geq 0}\left.\frac{\partial(\partial_x P^\alpha_{\beta,q})}{\partial w^\gamma_n}\right|_{w^\mu_m\mapsto w^{\mathrm{sp};\mu}_m}\partial_x^n(Ow^{\mathrm{sp};\gamma})$$

для рядов $Ow^{\mathrm{sp};1},\dots,Ow^{\mathrm{sp};N}$. Так как выполняется $(Ow^{\mathrm{sp};\alpha})|_{t^*_*=0}=0$, а также с очевидностью подстановка $Ow^{\mathrm{sp};\alpha}=0$ задаёт решение системы, мы заключаем, что равенство (1.53) верно.

Для того, чтобы доказать равенство (1.55), мы используем свойство (1.54) и проводим вычисление

$$\left.\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t_b^\beta}\right|_{x=t^*_*=\varepsilon=0} = \left.\left(\partial_x P^\alpha_{\beta,b}|_{w^\gamma_r\mapsto w^{\mathrm{sp};\gamma}_r}\right)\right|_{x=t^*_*=\varepsilon=0} = \left.\frac{\partial P^\alpha_{\beta,b}}{\partial w^\gamma}\right|_{w^*_*=\varepsilon=0} A^\gamma = \left.\frac{\partial P^\alpha_{\beta,b}}{\partial w^{\mathbb{1}}}\right|_{w^*_*=\varepsilon=0} = \delta^\alpha_\beta\delta_{b,0}.$$

□

Из свойства (1.54) и леммы 1.30 следует, что все дифференциальные многочлены $\partial_x P^\alpha_{\beta,b}$ однозначно определяются решением $(w^{\mathrm{sp};1},\dots,w^{\mathrm{sp};N})$ системы (1.51). Так как $P^\alpha_{\beta,b}|_{w^*_*=0}=0$, дифференциальные многочлены $P^\alpha_{\beta,b}$ также однозначно задаются этим решением. Таким образом, достаточно доказать, что решение $(w^{\mathrm{sp};1},\dots,w^{\mathrm{sp};N})$ однозначно задаётся набором дифференциальных многочленов $P^\alpha_{\mathbb{1},1}$, $1\leq\alpha\leq N$. Так как $\frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial x} = \frac{\partial w^{\mathrm{sp};\alpha}}{\partial t^{\mathbb{1}}_0}$, достаточно показать, как восстановить ряды $w^{\mathrm{sp};\alpha}|_{x=0}$.

Обозначим через $c^{\alpha;\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{k;d_1,\dots,d_n}$ коэффициент при мономе $\varepsilon^k t^{\alpha_1}_{d_1}\cdots t^{\alpha_n}_{d_n}$ в ряде $w^{\mathrm{sp};\alpha}|_{x=0}$. Ясно, что он может быть ненулевым, только если $n\geq 1$. Мы будем называть эти коэффициенты *c-коэффициентами*. Мы будем говорить, что мультииндекс коэффициента $c^{\alpha;\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{k;d_1,\dots,d_n}$, в сравнении с мультииндексом другого коэффициента $c^{\beta;\beta_1,\dots,\beta_m}_{l;q_1,\dots,q_m}$,

- имеет *меньший порядок*, если $k<l$;
- имеет *меньшую длину*, если $n<m$;
- имеет *меньший вес*, если $\sum d_i<\sum q_j$;
- *меньше*, если $k<l$ или ($k=l$ и $n<m$) или ($k=l, n=m$ и $\sum d_i<\sum q_j$).

Из равенства (1.53), а также уравнений для потока $\frac{\partial}{\partial t_1^{\mathbb{1}}}$, следует, что

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+\sum_{r\geq 0}t_r^\gamma\frac{\partial}{\partial t_r^\gamma}\right)\left(w^{\mathrm{sp};\alpha}\big|_{x=0}\right)=\left(\partial_x P^\alpha_{\mathbb{1},1}\big|_{w_r^\gamma\mapsto w_r^{\mathrm{sp};\gamma}}\right)\Big|_{x=0}. \tag{1.57}$$

Покажем, что это равенство позволяет рекурсивно вычислить все c-коэффициенты. Действительно, коэффициент при мономе $\varepsilon^k t_{d_1}^{\alpha_1}\cdots t_{d_n}^{\alpha_n}$ в левой части равенства (1.57) равен $(k+n)c^{\alpha;\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{k;d_1,\dots,d_n}$. Посмотрим теперь на коэффициент при мономе $\varepsilon^k t_{d_1}^{\alpha_1}\cdots t_{d_n}^{\alpha_n}$ в правой части равенства (1.57). Заметим, что коэффициент при мономе $\varepsilon^k t_{d_1}^{\alpha_1}\cdots t_{d_n}^{\alpha_n}$ в ряде

1. $w_l^{\mathrm{sp};\alpha}\big|_{x=0}$, $l>0$, равен либо $\delta_{k,0}\delta_{l,1}A^\alpha$, при $n=0$, либо, при $n\geq 1$, является линейной комбинацией c-коэффициентов с мультииндексом порядка k и длины n, но с весом меньше, чем $\sum d_i$ (это следует из равенства (1.52));

2. $\left(\varepsilon^l w_{q_1}^{\mathrm{sp};\beta_1}\cdots w_{q_m}^{\mathrm{sp};\beta_m}\right)\big|_{x=0}$, $l>0$, является многочленом от c-коэффициентов с мультииндексом порядка меньше, чем k;

3. $\left(w^{\mathrm{sp};\beta_1}\cdots w^{\mathrm{sp};\beta_m}w_x^{\mathrm{sp};\beta}\right)\big|_{x=0}$, $m\geq 2$, является многочленом от c-коэффициентов с мультииндексом порядка меньше, чем k, или порядка k, но длины меньше, чем n;

4. $\left(w^{\mathrm{sp};\beta_1}w_x^{\mathrm{sp};\beta}\right)\big|_{x=0}$ равен $A^\beta c^{\beta_1;\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{k;d_1,\dots,d_n}$ плюс многочлен от c-коэффициентов с мультииндексом порядка меньше, чем k, либо порядка k, но длины меньше, чем n.

Так как $\frac{\partial P^\alpha_{\mathbb{1},1}}{\partial w^\gamma}A^\gamma=\frac{\partial P^\alpha_{\mathbb{1},1}}{\partial w^{\mathbb{1}}}=P^\alpha_{\mathbb{1},0}=w^\alpha$, мы заключаем, что коэффициент при мономе $\varepsilon^k t_{d_1}^{\alpha_1}\cdots t_{d_n}^{\alpha_n}$ в правой части равенства (1.57) равен $c^{\alpha;\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{k;d_1,\dots,d_n}$ плюс многочлен от c-коэффициентов с меньшим мультииндексом. Значит, при $k+n\geq 2$, равенство (1.57) позволяет вычислить коэффициент $c^{\alpha;\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{k;d_1,\dots,d_n}$ в терминах c-коэффициентов с меньшим мультииндексом. Таким образом, c-коэффициенты с $k=0$ и $n=1$ являются начальными данными для описанной выше рекурсивной процедуры, и их мы знаем: $c^{\alpha;\alpha_1}_{0;d_1}=\delta^{\alpha,\alpha_1}\delta_{d_1,0}$. □

Следствие 1.33. *Рассмотрим целое число $N\geq 1$, алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_w$, соответствующую формальным переменным $w^1,\dots,w^N$, симметричную невырожденную матрицу $\eta=(\eta_{\alpha\beta})\in\mathrm{Mat}_{N,N}(\mathbb{C})$, а также ненулевой вектор $(A^1,\dots,A^N)\in\mathbb{C}^N$. Рассмотрим гамильтонову интегрируемую систему*

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t_b^\beta}=\eta^{\alpha\mu}\partial_x\frac{\delta\overline{h}_{\beta,b}}{\delta w^\mu},\quad \overline{h}_{\beta,b}\in\widehat{\Lambda}_{w;0},\quad \alpha,\beta\in[N],\ b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{1.58}$$

удовлетворяющую свойствам

$$\left.\frac{\delta\overline{h}_{\beta,b}}{\delta w^\mu}\right|_{w^*_*=\varepsilon=0}=0,\qquad \overline{h}_{\mathbb{1},0}=\frac{1}{2}\int\eta_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta dx,\qquad \frac{\partial\overline{h}_{\beta,b}}{\partial w^{\mathbb{1}}}=\begin{cases}\overline{h}_{\beta,b-1}, & \text{если } b\geq 1,\\ \int\eta_{\beta\mu}w^\mu dx, & \text{если } b=0.\end{cases}$$

Тогда все гамильтонианы $\overline{h}_{\beta,b}$ однозначно определяются локальным функционалом $\overline{h}_{\mathbb{1},1}$.

Доказательство. Мы видим, что наша система имеет вид $\frac{\partial w^\alpha}{\partial t^\beta_b} = \partial_x P^\alpha_{\beta,b}$, где дифференциальные многочлены $P^\alpha_{\beta,b} = \eta^{\alpha\mu}\frac{\delta \overline{h}_{\beta,b}}{\delta w^\mu}$ удовлетворяют всем условиям предыдущего предложения. Значит, дифференциальные многочлены $P^\alpha_{\beta,b}$ однозначно определяются набором дифференциальных многочленов $(P^1_{\mathbb{1},1}, \dots, P^N_{\mathbb{1},1})$, а значит и локальным функционалом $\overline{h}_{\mathbb{1},1}$. Осталось только заметить, что каждый локальный функционал однозначно задаётся набором своих вариационных производных по всем переменным. □

1.3.3 Иерархия Кортевега–де Фриза

Важнейшей системой УрЧП в теории интегрируемых систем, связанных с пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, является иерархия Кортевега–де Фриза. В этом разделе мы зафиксируем нормализацию уравнений и гамильтонианов иерархии, которая будет наиболее удобна для нас.

Рассмотрим формальную переменную u и соответствующую алгебру дифференцильных многочленов $\mathcal{A}_u$. Мы будем рассматривать *псевдодифференциальные операторы* с коэффициентами в алгебре $\mathcal{A}_u[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$: $A = \sum_{n=-\infty}^m a_n \partial_x^n$, $a_n \in \mathcal{A}_u[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$, $m \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим оператор

$$L := \partial_x^2 + 2\varepsilon^{-2}u.$$

Иерархией Кортевега–де Фриза (КдФ) называется следующая система УрЧП:

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n+1)!!}\left[\left(L^{n+\frac{1}{2}}\right)_+, L\right], \quad n \geq 0.$$

Все уравнения иерархии КдФ попарно согласованы, вот первые несколько из них:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t_0} &= u_x,\\
\frac{\partial u}{\partial t_1} &= \partial_x\left(\frac{u^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{12}u_{xx}\right),\\
\frac{\partial u}{\partial t_2} &= \partial_x\left(\frac{u^3}{6} + \varepsilon^2\left(\frac{u_x^2}{24} + \frac{uu_{xx}}{12}\right) + \varepsilon^4\frac{u_{xxxx}}{240}\right).
\end{aligned}$$

Иерархия КдФ обладает гамильтоновой структурой. Скобка Пуассона задаётся оператором ∂_x, а гамильтонианы – формулой $\overline{h}^{\mathrm{KdV}}_d := \frac{\varepsilon^{2d+4}}{(2d+3)!!}\int \operatorname{res} L^{\frac{2d+3}{2}}dx$, $d \geq 0$. Вот первые несколько гамильтонианов иерархии:

$$\begin{aligned}
\overline{h}^{\mathrm{KdV}}_0 &= \int \frac{u^2}{2}dx,\\
\overline{h}^{\mathrm{KdV}}_1 &= \int \left(\frac{u^3}{6} + \frac{\varepsilon^2}{24}uu_{xx}\right)dx,\\
\overline{h}^{\mathrm{KdV}}_2 &= \int \left(\frac{u^4}{24} + \frac{\varepsilon^2}{48}u^2u_{xx} + \frac{\varepsilon^4}{480}u_{xx}^2\right).
\end{aligned}$$

Гамильтонианы иерархии имеют вид $\overline{h}_d^{\mathrm{KdV}} = \int \frac{u^{d+2}}{(d+2)!}dx + O(\varepsilon)$.

Иерархия КдФ является бигамильтоновой [63]: пара согласованных скобок Пуассона задаётся равенством

$$(K_1, K_2) = \left(\partial_x, u\partial_x + \frac{1}{2}u_x + \frac{\varepsilon^2}{8}\right), \tag{1.59}$$

а бигамильтонова рекурсия (1.46) принимает вид

$$\left\{\cdot, \overline{h}_d^{\mathrm{KdV}}\right\}_{K_2} = \left(d + \frac{3}{2}\right)\left\{\cdot, \overline{h}_{d+1}^{\mathrm{KdV}}\right\}_{K_1}, \quad d \geq -1, \tag{1.60}$$

где $\overline{h}_{-1}^{\mathrm{KdV}} := \int u dx$.

1.3.4 Базовая иерархия для решения уравнений ассоциативности

Мы построим здесь иерархию гидродинамического типа, соответствующую произвольному решению системы уравнений (1.30)–(1.31). Эта иерархия была построена в работе Дубровина [34], однако наш подход несколько отличается, так как мы используем потенциал КогТП в роде 0 для построения иерархии.

Рассмотрим произвольную симметричную невырожденную матрицу $\eta = (\eta_{\alpha\beta}) \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\mathbb{C})$, ненулевой вектор $(A^1, \dots, A^N) \in \mathbb{C}^N$ и произвольное решение $F(t^1, \dots, t^N) \in \mathbb{C}[[t^1, \dots, t^N]]$ системы уравнений (1.30)–(1.31), начинающееся с кубических членов. Рассмотрим соответствующий потенциал в роде ноль $\mathcal{F}_0(t^*_*)$. Рассмотрим формальные переменные $v^1, \dots, v^N$ и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_v$.

Лемма 1.34. *Существует единственное семейство матриц*

$$\Omega^{[0]}_{a,b} = (\Omega^{[0]}_{\alpha,a;\beta,b}) \in \mathrm{Mat}_{N,N}\left(\mathbb{C}[[v^1, \dots, v^N]]\right), \quad a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

удовлетворяющее следующим соотношениям:

$$\Omega^{[0]}_{a,b}\Big|_{v^*=0} = 0, \quad \Omega^{[0]}_{a,b} = \Omega^{[0]}_{b,a}, \quad \Omega^{[0]}_{\alpha,0;\beta,0} = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\right|_{t^*=v^*}, \quad d\Omega^{[0]}_{a+1,b} = \Omega^{[0]}_{a,0}\eta^{-1}d\Omega^{[0]}_{0,b}, \tag{1.61}$$

где через $d(\cdot)$ мы обозначаем дифференциал.

Доказательство. Из соотношения (1.35) сразу следует, что семейство матриц $\Omega^{[0]}_{a,b}$, задаваемых равенством

$$\Omega^{[0]}_{\alpha,a;\beta,b} = \left.\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_a \partial t^\beta_b}\right|_{t^\gamma_c \mapsto \delta_{c,0}v^\gamma}, \tag{1.62}$$

удовлетворяет соотношениям (1.61). Тот факт, что соотношения (1.61) задают семейство матриц $\Omega^{[0]}_{a,b}$ однозначно, очевиден. □

Определение 1.35. Система гидродинамического типа

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^\beta_b} = \eta^{\alpha\gamma}\partial_x \Omega^{[0]}_{\gamma,0;\beta,b}, \quad \alpha,\beta \in [N], \quad b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{1.63}$$

называется *базовой иерархией* (в англоязычной литературе используется термин "principal hierarchy"), соответствующей решению F системы уравнений (1.30)–(1.31).

Теорема 1.36. *Базовая иерархия является интегрируемой, а также гамильтоновой: скобка Пуассона задаётся оператором $\eta^{-1}\partial_x$, а гамильтонианы $\overline{h}^{[0]}_{\alpha,a}$ – равенством $\overline{h}^{[0]}_{\alpha,a} := \int \Omega^{[0]}_{\mathbb{1},0;\alpha,a+1}dx$.*

Доказательство. Для доказательства интегрируемости вычислим

$$\frac{\partial}{\partial t^\gamma_c}\frac{\partial v^\alpha}{\partial t^\beta_b} = \partial_x\left(\eta^{\nu\delta}\partial_x\Omega^{[0]}_{\delta,0;\gamma,c}\eta^{\alpha\mu}\frac{\partial\Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,b}}{\partial v^\nu}\right) = \partial_x\left(\eta^{\alpha\mu}v^\theta_x\underline{\frac{\partial\Omega^{[0]}_{\gamma,c;\delta,0}}{\partial v^\theta}\eta^{\delta\nu}\frac{\partial\Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,b}}{\partial v^\nu}}\right).$$

Тот факт, что подчёркнутое выражение симметрично относительно перестановки пар индексов $(\beta,b)\leftrightarrow(\gamma,c)$, сразу следует из соотношения (1.34) и формулы (1.62). Значит, интегрируемость доказана. Для доказательства гамильтоновости нужно лишь проверить, что $\frac{\partial}{\partial v^\gamma}\Omega^{[0]}_{\mathbb{1},0;\alpha,p+1} = \Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,p}$, но это следует из струнного равенства (1.33): нужно продифференцировать его по t^α_{p+1} и t^γ_0, а потом положить все переменные t^θ_d с $d\geq 1$ равными нулю. □

Определим формальные ряды $v^{\mathrm{top};1},\dots,v^{\mathrm{top};N}\in\mathbb{C}[[t^*_*]]$ равенством $v^{\mathrm{top};\alpha} := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial t^{\mathbb{1}}_0\partial t^\mu_0}$. Заметим, что из струнного равенства (1.33) следует, что $(v^{\mathrm{top}})^\gamma|_{t^*_{\geq 1}=0} = t^\gamma_0$.

Предложение 1.37. *Для любых $\alpha,\beta\in[N]$ и $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется*

$$\frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_a\partial t^\beta_b} = \Omega^{[0]}_{\alpha,a;\beta,b}\Big|_{v^\gamma=v^{\mathrm{top};\gamma}}. \tag{1.64}$$

Доказательство. Рассмотрим следующее семейство операторов:

$$P_{\gamma,c} := \frac{\partial}{\partial t^\gamma_c} - \frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial t^\gamma_{c-1}\partial t^\mu_0}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial t^\nu_0}, \quad \gamma\in[N], \quad c\geq 1.$$

Ясно, что если для ряда $f\in\mathbb{C}[[t^*_*]]$, удовлетворяющего $f|_{t^*_{\geq 1}=0}=0$, выполняется система соотношений $P_{\gamma,c}(f)=0$ для всех $\gamma\in[N]$ и $c\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, то ряд f равен 0. Из равенства (1.35) следует, что выполняются равенства $P_{\gamma,c}\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_a\partial t^\beta_b}\right) = 0 = P_{\gamma,c}\left(\Omega^{[0]}_{\alpha,a;\beta,b}\Big|_{v^\gamma=v^{\mathrm{top};\gamma}}\right)$. С другой стороны, так как $(v^{\mathrm{top}})^\gamma|_{t^*_{\geq 1}=0}=t^\gamma_0$, равенство (1.64) выполняется, если положить $t^*_{\geq 1}=0$. Отсюда мы заключаем, что равенство (1.64) верно. □

Следствие 1.38. *Набор формальных рядов $(v^{\mathrm{top};1}|_{t^\gamma_0\mapsto t^\gamma_0+A^\gamma x},\dots,v^{\mathrm{top};N}|_{t^\gamma_0\mapsto t^\gamma_0+A^\gamma x})$ является решением базовой иерархии.*

1.3.5 Вспомогательные результаты

Логарифм псевдоразностного оператора

В этом разделе мы кратко приведём конструкцию логарифма псевдоразностного оператора (см. подробности в [25, 49]). Эта конструкция понадобится нам при рассмотрении интегрируемых систем, связанных с теорией Громова–Виттена комплексной проективной прямой.

Рассмотрим формальные переменные $u^1, \dots, u^N$ и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_u$. Мы будем рассматривать формальные ряды Лорана вида

$$A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{k\varepsilon\partial_x}, \quad a_k \in \widehat{\mathcal{A}}_u, \tag{1.65}$$

которые будем называть *псевдоразностными операторами*. Векторное пространство таких операторов мы будем обозначать через $\mathcal{V}_u$. Оператор $e^{k\varepsilon\partial_x}$ мы будем также обозначать через Λ^k. Обозначим $A_+ := \sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_k\Lambda^k$ и $\operatorname{res}(A) := a_0$. Заметим, что если сумма в (1.65) является конечной, то корректно определено действие оператора A в пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_u$. Для $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u$ мы будем обозначать $f(x+k\varepsilon) := \Lambda^k f$. Определим следующие подпространства в $\mathcal{V}_u$:

$$\mathcal{V}_{u;+} := \left\{ A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Lambda^k \in \mathcal{V}_u \,\middle|\, a_k = 0 \text{ для достаточно больших } k \right\},$$
$$\mathcal{V}_{u;-} := \left\{ A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Lambda^k \in \mathcal{V}_u \,\middle|\, a_k = 0 \text{ для достаточно малых } k \right\}.$$

Ясно, что пространства $\mathcal{V}_{u;+}$ и $\mathcal{V}_{u;-}$ являются алгебрами относительно операции композиции. Для оператора $A = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Lambda^k$ определим

$$A^\dagger := \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(x-k\varepsilon)\Lambda^{-k}.$$

Ясно, что отображение $A \mapsto A^\dagger$ задаёт инволюцию пространства $\mathcal{V}_u$, а также изоморфно отображает $\mathcal{V}_{u;\pm}$ на $\mathcal{V}_{u;\mp}$. Для любых $A, B \in \mathcal{V}_{u;\pm}$ выполняется $(A\circ B)^\dagger = B^\dagger \circ A^\dagger$.

Рассмотрим псевдоразностный оператор вида

$$A = e^b\Lambda + \sum_{k\geq 0} a_k\Lambda^{-k}, \quad b, a_k \in \widehat{\mathcal{A}}_u.$$

Нашей целью является определение логарифма

$$\log_+(A) = \varepsilon\partial_x + \frac{\varepsilon\partial_x}{\Lambda-1}b + \sum_{i\geq 1} f_i\Lambda^{-i},$$

где $f_i \in \widehat{\mathcal{A}}_u$, ключевым свойством которого является соотношение

$$[\log_+(A), A^m] = 0, \quad m \geq 1. \tag{1.66}$$

Рассмотрим для этого элементы $b, a_0, a_1, \ldots$ как формальные переменные и обозначим через $\mathcal{R}_a$ алгебру, порождённую элементами $b, e^{\pm b}, a_0, a_1, \ldots$, а также дополнительными переменными $\partial_x^d b$ и $\partial_x^d a_i$, $d \geq 1$. Аналогичным образом, рассмотрим формальные переменные $q, p_1, p_2, \ldots$ и обозначим через $\mathcal{R}_p$ алгебру, порождённую элементами $q, e^{\pm q}, p_1, p_2, \ldots$, а также дополнительными переменными $\partial_x^d q$ и $\partial_x^d p_i$, $d \geq 1$. Обозначим $\widehat{\mathcal{R}}_a := \mathcal{R}_a[[\varepsilon]]$ и $\widehat{\mathcal{R}}_p := \mathcal{R}_p[[\varepsilon]]$. Рассмотрим псевдоразностный оператор

$$P := e^q + \sum_{i \geq 1} p_i \Lambda^{-i}.$$

Определим гомоморфизм алгебр $\phi\colon \widehat{\mathcal{R}}_a \to \widehat{\mathcal{R}}_p$ равенством

$$\phi(\partial_x^d b) := \partial_x^d \left((1-\Lambda)q\right), \qquad \phi(\partial_x^d a_i) := \partial_x^d \left(\mathrm{Coef}_{\Lambda^{-i}} \left(P \circ \Lambda \circ P^{-1}\right)\right).$$

Несложно понять, что гомоморфизм ϕ является вложением. По определению, выполняется

$$\phi(A) = P \circ \Lambda \circ P^{-1},$$

где обозначение $\phi(A)$ означает, что отображение ϕ применяется к коэффициентам оператора A. Обозначим $\mathcal{B}_+ := \frac{\varepsilon \partial_x}{\Lambda - 1}$.

Лемма 1.39. *Существует единственный оператор* $\log_+(A)$ *вида*

$$\log_+(A) = \varepsilon \partial_x + \mathcal{B}_+ b + \sum_{i \geq 1} f_i \Lambda^{-i}, \quad f_i \in \widehat{\mathcal{R}}_{a;0},$$

такой, что $\phi(\log_+(A)) = P \circ \varepsilon \partial_x \circ P^{-1}$.

Доказательство. В целях краткости, для $f \in \widehat{\mathcal{R}}_a$ мы будем обозначать образ $\phi(f)$ через f. Мы имеем $P \circ \varepsilon \partial_x \circ P^{-1} = \varepsilon \partial_x - \varepsilon P_x \circ P^{-1}$. Разложим теперь

$$-\varepsilon P_x \circ P^{-1} = \sum_{i \geq 0} f_i \Lambda^{-i}.$$

Прямое вычисление показывает, что $f_0 = -\varepsilon q_x = \mathcal{B}_+ b$. Нужно теперь доказать, что $f_i \in \widehat{\mathcal{R}}_a$ для всех i. Рассмотрим оператор $\widetilde{P} := e^{-q} P$. Мы имеем

$$-\varepsilon \widetilde{P}_x \circ \widetilde{P}^{-1} = \varepsilon q_x - \varepsilon e^{-q} P_x \circ P^{-1} \circ e^q =: \sum_{i \geq 1} \widetilde{f}_i \Lambda^{-i}.$$

Так как

$$e^{-q} \Lambda^{-k} e^q = \prod_{i=1}^{k} e^{b(x - i\varepsilon)}, \quad k \geq 1, \tag{1.67}$$

мы имеем $f_k = \widetilde{f}_k \prod_{i=1}^{k} e^{-b(x-i\varepsilon)}$ для $k \geq 1$. Значит, достаточно доказать, что $\widetilde{f}_i \in \widehat{\mathcal{R}}_a$ для всех i. Опять же из (1.67) следует, что у оператора

$$\widetilde{A} := e^{-q} A \circ e^{q} =: \Lambda + \sum_{i \geq 0} \widetilde{a}_i \Lambda^{-i}$$

все коэффициенты $\widetilde{a}_i$ принадлежат алгебре $\widehat{\mathcal{R}}_a$. Имеем $[\widetilde{P} \circ \varepsilon\partial_x \circ \widetilde{P}^{-1}, \widetilde{A}^m] = 0$ для любого $m \geq 1$, откуда следует, что

$$\operatorname{res}[-\varepsilon \widetilde{P}_x \circ \widetilde{P}^{-1}, \widetilde{A}^m] = -\varepsilon \partial_x \operatorname{res}(\widetilde{A}^m), \quad m \geq 1, \tag{1.68}$$

где обозначение $\widetilde{P}_x$ означает, что мы применяем оператор ∂_x к коэффициентам оператора $\widetilde{P}$. При $m = 1$ из равенства (1.68) немедленно вытекает, что

$$\widetilde{f}_1 = \mathcal{B}_+ \widetilde{a}_0.$$

Далее, рассматривая равенства (1.68) для $m = 2, 3, \ldots$ уже несложно вывести по индукции, что $\widetilde{f}_i \in \widehat{\mathcal{R}}_a$ для всех i. □

Из свойства $\phi(\log_+(A)) = P \circ \varepsilon\partial_x \circ P^{-1}$ немедленно вытекает соотношение (1.66). Ясно также, что вместо переменных $b, a_0, a_1, \ldots$ можно подставлять дифференциальные многочлены из алгебры $\widehat{\mathcal{A}}_u$, при этом соотношение (1.66) по-прежнему будет выполняться.

Пример 1.40. Продолжив вычисление коэффициентов $\widetilde{f}_i$ со помощью соотношения (1.68) в доказательстве леммы, мы получаем, что

$$\widetilde{f}_2 = \mathcal{B}_+ \left(\widetilde{a}_1 + (\Lambda + 1)^{-1}(\widetilde{a}_0^2) \right) - (\Lambda + 1)^{-1} \left((\mathcal{B}_+ \widetilde{a}_0)(\Lambda^{-1} + 1)\widetilde{a}_0 \right).$$

Элементарными вычислениями проверяется, что

$$\widetilde{f}_2 = \mathcal{B}_+ \left(\widetilde{a}_1 + \frac{1}{2}\widetilde{a}_0^2 \right) - \widetilde{a}_0 (x - \varepsilon) \mathcal{B}_+ \widetilde{a}_0.$$

В итоге, мы получаем, что

$$\begin{aligned} &\log_+ \left(e^b \Lambda + a_0 + a_1 \Lambda^{-1} + \ldots \right) = \\ =&\varepsilon\partial_x + \mathcal{B}_+ b \\ &+ e^{-b(x-\varepsilon)} \left(\mathcal{B}_+ a_0 \right) \Lambda^{-1} \\ &+ e^{-b(x-\varepsilon)} e^{-b(x-2\varepsilon)} \left(\mathcal{B}_+ \left(e^{b(x-\varepsilon)} a_1 + \frac{1}{2} a_0^2 \right) - a_0 (x - \varepsilon) \mathcal{B}_+ a_0 \right) \Lambda^{-2} + \ldots . \end{aligned}$$

Для псевдоразностного оператора вида

$$A = e^b \Lambda^{-1} + \sum_{k \geq 0} a_k \Lambda^k, \quad b, a_k \in \widehat{\mathcal{A}}_u,$$

определим логарифм второго типа:

$$\begin{aligned}\log_-(A) &:= \left(\log_+\left(A^\dagger\right)\right)^\dagger = \\ &= -\varepsilon\partial_x + \mathcal{B}_- b \\ &\quad + e^{-b(x+\varepsilon)}\left(\mathcal{B}_- a_0\right)\Lambda \\ &\quad + e^{-b(x+\varepsilon)}e^{-b(x+2\varepsilon)}\left(\mathcal{B}_-\left(e^{b(x+\varepsilon)}a_1 + \frac{1}{2}a_0(x+\varepsilon)^2\right) - a_0(x+\varepsilon)\mathcal{B}_- a_0(x+\varepsilon)\right)\Lambda^2 + \dots,\end{aligned}$$

где мы обозначаем $\mathcal{B}_- := \frac{\varepsilon\partial_x}{1-\Lambda^{-1}}$. Следующая лемма будет нам полезна при рассмотрении расширенной иерархии Тоды в разделе 2.2.3.

Лемма 1.41. *Рассмотрим псевдоразностный оператор вида*

$$A = qe^b\Lambda^{-1} + \sum_{k\geq 0} a_k\Lambda^k, \quad b, a_k \in \widehat{\mathcal{A}}_u, \quad q \in \mathbb{C}^*.$$

Тогда логарифм $\log_-(A)$*, как функция от* q*, имеет вид*

$$\log_-(A) = -\varepsilon\partial_x + \log q + \mathcal{B}_- b + \sum_{i\geq 1} f_i\Lambda^i,$$

где $f_i = \sum_{j=1}^i q^{-j} f_{i,j}$ *и* $f_{i,j} \in \widehat{\mathcal{A}}_u$.

Доказательство. Запишем соотношение

$$\left[-\varepsilon\partial_x + \log q + \mathcal{B}_- b + \sum_{i\geq 1} f_i\Lambda^i, \left(qe^b\Lambda^{-1} + \sum_{k\geq 0} a_k\Lambda^k\right)^m\right] = 0, \quad m \geq 1.$$

Тот факт, что f_i имеет требуемый вид, легко устанавливается с помощью этого соотношения индукцией по i. □

Вариационные производные и матричные дифференциальные операторы

Данный раздел содержит технические результаты, которые понадобятся нам в разделах 2.6 и 3.4.

Опредим операторы $\mathcal{T}_{\alpha,k}\colon \widehat{\mathcal{A}}_u \to \widehat{\mathcal{A}}_u$, $\alpha \in [N]$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, равенством

$$\mathcal{T}_{\alpha,k} := \sum_{n\geq k}\binom{n}{k}(-\partial_x)^{n-k} \circ \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha}.$$

Ясно, что $\mathcal{T}_{\alpha,0} = \frac{\delta}{\delta u^\alpha}$. Операторы $\mathcal{T}_{\alpha,k}$ удовлетворяют следующим свойствам (см. напр. [6, 59]):

$$\mathcal{T}_{\alpha,k+1} \circ \partial_x = \mathcal{T}_{\alpha,k},$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\gamma_n} \circ \frac{\delta}{\delta u^\xi} = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k \mathcal{T}_{\xi,k} \circ \frac{\partial}{\partial u^\gamma_{n-k}}, \tag{1.69}$$

$$\frac{\delta}{\delta u^\xi}(XY) = \sum_{k\ge 0} \left(\mathcal{T}_{\xi,k} X (-\partial_x)^k Y + (-\partial_x)^k X \mathcal{T}_{\xi,k} Y \right), \tag{1.70}$$

$$\mathcal{T}_{\xi,p}(XY) = \sum_{k\ge 0} \binom{k+p}{k} \left(\mathcal{T}_{\xi,k+p} X (-\partial_x)^k Y + (-\partial_x)^k X \mathcal{T}_{\xi,k+p} Y \right), \tag{1.71}$$

где X, Y – произвольные дифференциальные многочлены.

Пусть $\eta = (\eta^{\alpha\beta})$ – произвольная симметричная $N \times N$ матрица с комплексными коэффициентами. Сопоставим каждому локальному функционалу $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u$ набор из матричных дифференциальных операторов $\widehat{\Omega}^k(\overline{h}) = \left(\widehat{\Omega}^k(\overline{h})^{\alpha\beta}\right)$, $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, равенством

$$\widehat{\Omega}^k(\overline{h})^{\alpha\beta} := \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} L^k_\nu \left(\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\mu} \right) = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} \sum_{i\ge k} \binom{i}{k} \left(\frac{\partial}{\partial u^\nu_i} \frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\mu} \right) \partial_x^{i-k}.$$

Мы будем также обозначать $\widehat{\Omega}(\overline{h}) := \widehat{\Omega}^0(\overline{h})$.

Лемма 1.42. *Для любого локальноо функционала $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u$ выполняется $\widehat{\Omega}^k(\overline{h})^\dagger = (-1)^k \widehat{\Omega}^k(\overline{h})$.*

Доказательство. Нам нужно проверить, что

$$\left(L^k_\mu \left(\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\nu} \right) \right)^\dagger = (-1)^k L^k_\nu \left(\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\mu} \right).$$

Мы вычисляем

$$\left(L^k_\mu \left(\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\nu} \right) \right)^\dagger = \sum_{i\ge 0} \binom{k+i}{i} (-\partial_x)^i \circ \frac{\partial}{\partial u^\mu_{k+i}} \frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\nu} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \binom{k+i+j}{i,j} (-\partial_x)^i \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu_{k+i+j}} \frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\nu} \right) (-\partial_x)^j.$$

В силу тождества (см., напр., [59, лемма 2.1.5(i)])

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu_t} \circ \frac{\delta}{\delta u^\nu} = (-1)^t \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+t}{t} (-\partial_x)^l \circ \frac{\partial}{\partial u^\nu_{t+l}} \circ \frac{\delta}{\delta u^\mu},$$

последнее выражение равно

$$\sum_{i,j,l=0}^{\infty} (-1)^{k+i+j} \binom{k+i+j+l}{i,j,l} (-\partial_x)^{i+l} \left(\frac{\partial}{\partial u^\nu_{k+i+j+l}} \frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\mu} \right) (-\partial_x)^j.$$

Так как для всех $t \ge 1$ выполняется $\sum_{i+l=t} \frac{1}{i!l!} (-1)^i (-\partial_x)^{i+l} = 0$, получившееся выражение равно

$$(-1)^k \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} \frac{\partial}{\partial u^\nu_{k+j}} \frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\mu} \partial_x^j = (-1)^k L^k_\nu \left(\frac{\delta \overline{h}}{\delta u^\mu} \right),$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 1.43. *Рассмотрим кососимметрический оператор $K = (K^{\alpha\beta})$ и набор дифференциальных многочленов $\overline{P} = (P^1, \dots, P^N)$. Тогда выполняется*

$$\left[K^{\beta\xi} \circ \frac{\delta}{\delta w^\xi}, H_{\overline{P}}\right] = -L_\gamma(P^\beta) \circ K^{\gamma\xi} \circ \frac{\delta}{\delta w^\xi} - (H_{\overline{P}}.K)^{\beta\xi} \circ \frac{\delta}{\delta w^\xi},$$

где мы напоминаем обозначение (1.48).

Доказательство. Возьмём произвольный локальный функционал $\overline{h}$. Мы вычисляем с помощью скобки Схоутена–Нийенхейса:

$$\begin{aligned}
\int \theta_\beta \left[K^{\beta\xi} \circ \frac{\delta}{\delta w^\xi}, H_{\overline{P}}\right] \overline{h} dx &= \int \theta_\beta K^{\beta\xi} \left(\frac{\delta}{\delta w^\xi}(H_{\overline{P}}\overline{h})\right) dx - \int \theta_\beta H_{\overline{P}} \left(K^{\beta\xi} \frac{\delta \overline{h}}{\delta w^\xi}\right) dx = \\
&= -[[V_{\overline{P}}, \overline{h}], B_K] - \int \theta_\beta H_{\overline{P}} \left(K^{\beta\xi} \frac{\delta \overline{h}}{\delta w^\xi}\right) dx = \\
&= [[B_K, V_{\overline{P}}], \overline{h}] + [[\overline{h}, B_K], V_{\overline{P}}] - \int \theta_\beta H_{\overline{P}} \left(K^{\beta\xi} \frac{\delta \overline{h}}{\delta w^\xi}\right) dx = \\
&= [[B_K, V_{\overline{P}}], \overline{h}] - \left[\int \theta_\beta K^{\beta\xi} \frac{\delta \overline{h}}{\delta w^\xi} dx, V_{\overline{P}}\right] - \int \theta_\beta H_{\overline{P}} \left(K^{\beta\xi} \frac{\delta \overline{h}}{\delta w^\xi}\right) dx = \\
&= [[B_K, V_{\overline{P}}], \overline{h}] - \int \theta_\beta L_\gamma(P^\beta) \left(K^{\gamma\xi} \frac{\delta \overline{h}}{\delta w^\xi}\right) dx.
\end{aligned}$$

□

Лемма 1.44. *Для любых дифференциальных многочленов A, B и индексов $\gamma, \zeta \in [N]$ мы имеем равенство*

$$\left[A\partial_x^s \circ \frac{\delta}{\delta u^\gamma}, \sum_{n\geq 0} \partial_x^n B \frac{\partial}{\partial u_n^\zeta}\right] = A\partial_x^s \circ \sum_{j\geq 0} \mathcal{T}_{\gamma,j} B(-\partial_x)^j \circ \frac{\delta}{\delta u^\zeta} - \sum_{n\geq 0} \partial_x^n B \frac{\partial A}{\partial u_n^\zeta} \partial_x^s \circ \frac{\delta}{\delta u^\gamma}.$$

Доказательство. Так как операторы ∂_x и $\sum_{n\geq 0} \partial_x^n B \frac{\partial}{\partial u_n^\zeta}$ коммутируют, достаточно доказать, что

$$\left[\frac{\delta}{\delta u^\gamma}, \sum_{n\geq 0} \partial_x^n B \frac{\partial}{\partial u_n^\zeta}\right] = \sum_{j\geq 0} \mathcal{T}_{\gamma,j} B(-\partial_x)^j \circ \frac{\delta}{\delta u^\zeta}. \tag{1.72}$$

Мы вычисляем

$$\frac{\delta}{\delta u^\gamma} \circ \sum_{n\geq 0} \partial_x^n B \frac{\partial}{\partial u_n^\zeta} = \sum_{m,n\geq 0} (-1)^m \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \partial_x^{n+i} B \partial_x^{m-i} \circ \frac{\partial}{\partial u_m^\gamma} \circ \frac{\partial}{\partial u_n^\zeta} + \sum_{j,n\geq 0} \mathcal{T}_{\gamma,j} \partial_x^n B(-\partial_x)^j \circ \frac{\partial}{\partial u_n^\zeta}.$$

Так как $\mathcal{T}_{\gamma,j} \circ \partial_x^n = \mathcal{T}_{\gamma,j-n}$, второе слагаемое равно $\sum_{j\geq 0} \mathcal{T}_{\gamma,j} B(-\partial_x)^j \circ \frac{\delta}{\delta u^\zeta}$. С другой стороны, опять пользуясь коммутацией операторов ∂_x и $\sum_{n\geq 0} \partial_x^n B \frac{\partial}{\partial u_n^\zeta}$, легко видеть, что первое слагаемое равно оператору $\sum_{n\geq 0} \partial_x^n B \frac{\partial}{\partial u_n^\zeta} \circ \frac{\delta}{\delta u^\gamma}$, откуда немедленно следует равенство (1.72). □

Глава 2

DR-иерархии

2.1 Конструкция

Рассмотрим произвольную КогТП $\left\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\right\}$. Пусть $\dim V=N$, зафиксируем базис $e_1,\dots,e_N\in V$. Для $g\geq 0$ и $n\geq 1+\delta_{g,0}$ рассмотрим интеграл

$$P_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n}(a_1,\dots,a_n):=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\mathrm{DR}_g\left(-\sum a_i,a_1,\dots,a_n\right)\lambda_g\psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}). \tag{2.1}$$

Из леммы 1.1 следует, что интеграл (2.1) является однородным многочленом степени $2g$ от переменных $a_1,\dots,a_n$:

$$P_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n}(a_1,\dots,a_n)=\sum_{\substack{b_1,\dots,b_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ b_1+\dots+b_n=2g}} P^{b_1,\dots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n}a_1^{b_1}\cdots a_n^{b_n},\quad P^{b_1,\dots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n}\in\mathbb{C}.$$

Рассмотрим теперь формальные переменные $u^1,\dots,u^N$ и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_u$. Определим следующие дифференциальные многочлены:

$$g_{\alpha,d}(u^*_*,\varepsilon):=\sum_{\substack{g\geq 0\\ n\geq 1+\delta_{g,0}}}\frac{\varepsilon^{2g}}{n!}\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]}\sum_{\substack{b_1,\dots,b_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\\ b_1+\dots+b_n=2g}}P^{b_1,\dots,b_n}_{\alpha,d,g;\alpha_1,\dots,\alpha_n}u^{\alpha_1}_{b_1}\cdots u^{\alpha_n}_{b_n}\in\widehat{\mathcal{A}}_u,\quad \alpha\in[N],\ d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Ясно, что $\deg g_{\alpha,d}=0$. Вспомним вложение $\widehat{\mathcal{A}}_u\hookrightarrow\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix},e^{-ix}]]$, определяемое формальным разложением в ряд Фурье $u^\alpha_d\mapsto\partial_x^d\left(\sum_{a\in\mathbb{Z}}p^\alpha_a e^{iax}\right)$ (см. раздел 1.3.1). Ясно, что как элемент пространства $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix},e^{-ix}]]$ дифференциальный многочлен $g_{\alpha,d}$ имеет вид

$$g_{\alpha,d}=\sum_{\substack{g\geq 0\\ n\geq 1+\delta_{g,0}}}\frac{(-\varepsilon^2)^g}{n!}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}}}\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\mathrm{DR}_g\left(-\sum a_j,a_1,\dots,a_n\right)\lambda_g\psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right)\times$$
$$\times\left(\prod_{i=1}^n p^{\alpha_i}_{a_i}\right)e^{ix\sum_j a_j}.$$

Рассмотрим локальные функционалы

$$\overline{g}_{\alpha,d} := \int g_{\alpha,d}dx \in \widehat{\Lambda}_{u;0}$$

и пуассонов оператор $\eta^{-1}\partial_x = (\eta^{\alpha\beta}\partial_x)$. Заметим, что как элементы пространства $\widehat{\mathcal{B}}_N$ локальные функционалы $\overline{g}_{\alpha,d}$ имеют вид

$$\overline{g}_{\alpha,d} = \sum_{g\geq 0,\, n\geq 2} \frac{(-\varepsilon^2)^g}{n!} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ \sum a_i=0}} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(0,a_1,\dots,a_n\right)\lambda_g\psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \right) \prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}.$$

Обратим внимание, что суммирование по n здесь начинается с 2, в то время как в формуле для $g_{\alpha,d}$ суммирование начинается с $1+\delta_{g,0}$. Это объясняется тем, что вклад с $n=1$ зануляется в локальном функционале, потому что при $g\geq 1$ выполняется $\mathrm{DR}_g(0,0)\lambda_g = (-1)^g\lambda_g^2 = 0$.

Теорема 2.1. *Для любых $\alpha_1,\alpha_2\in[N]$ и $d_1,d_2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется равенство*

$$\{\overline{g}_{\alpha_1,d_1},\overline{g}_{\alpha_2,d_2}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = 0.$$

Доказательство. Умножим класс $D_{a,b;A,g}$ (см. формулу (1.12)) на класс λ_g. Заметим, что

$$(\mathrm{gl}_{I,J}^{(p)})^*(\lambda_g) = \begin{cases} \lambda_{g_1}\times\lambda_{g_2}, & \text{если } p=1,\\ 0, & \text{если } p\geq 2, \end{cases}$$

поэтому мы имеем

$$\lambda_g D_{a,b;A,g} = \sum_{\substack{I\sqcup J=[n+2]\\ n+a\in I,\, n+b\in J\\ a_{I\setminus\{n+a\}}>0}} \sum_{\substack{g_1,g_2\geq 0\\ g_1+g_2=g}} a_{I\setminus\{n+a\}}\times$$
$$\times\,(\mathrm{gl}_{I,J})_*\left(\lambda_{g_1}\mathrm{DR}_{g_1}(A_{I\setminus\{n+a\}},0,-a_{I\setminus\{n+a\}})\times\lambda_{g_2}\mathrm{DR}_{g_2}(A_{J\setminus\{n+b\}},0,a_{I\setminus\{n+a\}})\right).$$

Заметим, что сумма $\lambda_g D_{1,2;A,g} - \lambda_g D_{2,1;A,g}$ записывается следующим образом:

$$\lambda_g(D_{1,2;A,g}-D_{2,1;A,g}) = \sum_{\substack{I\sqcup J=[n+2]\\ n+1\in I,\, n+2\in J}} \sum_{\substack{g_1,g_2\geq 0\\ g_1+g_2=g}} a_{I\setminus\{n+a\}}\times \tag{2.2}$$
$$\times\,(\mathrm{gl}_{I,J})_*\left(\lambda_{g_1}\mathrm{DR}_{g_1}(A_{I\setminus\{n+a\}},0,-a_{I\setminus\{n+a\}})\times\lambda_{g_2}\mathrm{DR}_{g_2}(A_{J\setminus\{n+b\}},0,a_{I\setminus\{n+a\}})\right),$$

что по теореме 1.2 равно 0. Умножим теперь правую часть равенства (2.2) на $c_{g,n+2}(\otimes_{i=1}^n e_{\mu_i}\otimes e_{\alpha_1}\otimes e_{\alpha_2})\psi_{n+1}^{d_1}\psi_{n+2}^{d_2}$, проинтегрируем по $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}$, а дальше умножим на $(-\varepsilon^2)^g\frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\mu_i}}{n!}$ и просуммируем по $g\geq 0$, $n\geq 2$, $\mu_1,\dots,\mu_n\in[N]$ и всем возможным векторам DR-данных A. Мы получим в точности выражение

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\frac{\partial\overline{g}_{\alpha_1,d_1}}{\partial p_k^\mu}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\overline{g}_{\alpha_2,d_2}}{\partial p_{-k}^\nu} = -i\{\overline{g}_{\alpha_1,d_1},\overline{g}_{\alpha_2,d_2}\}_{\eta^{-1}},$$

которое по теореме 1.2 равно 0, что и доказывает нашу теорему. □

Определение 2.2. Интегрируемая гамильтонова система уравнений, задаваемая локальными функционалами $\overline{g}_{\beta,d}$, $\beta \in [N]$, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, вместе с пуассоновым оператором $\eta^{-1}\partial_x$,

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t^\beta_d} = \eta^{\alpha\mu}\partial_x \frac{\delta \overline{g}_{\beta,d}}{\delta u^\mu}, \quad \alpha, \beta \in [N], \quad d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{2.3}$$

называется *DR-иерархией.*

Сформулируем сразу результат о структуре DR-иерархии в роде ноль.

Теорема 2.3. *Мы имеем* $\overline{g}_{\alpha,d}\big|_{\varepsilon=0} = \overline{h}^{[0]}_{\alpha,d}\Big|_{v^\gamma=u^\gamma}$ *(см. раздел 1.3.4). Иначе говоря, DR-иерархия в роде ноль совпадает с базовой иерархией.*

Доказательство. Так как $\mathrm{DR}_0(a_1,\dots,a_n) = \lambda_0 = 1 \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0,n},\mathbb{Q})$, мы получаем, что

$$\overline{g}_{\alpha,d}\big|_{\varepsilon=0} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_d}\Big|_{t^\beta_b \mapsto \delta_{b,0}u^\beta} \right) dx \overset{(1.33)}{=\!=\!=} \int \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_{d+1}\partial t^{\mathbb{1}}_0}\Big|_{t^\beta_b \mapsto \delta_{b,0}u^\beta} \right) dx = \overline{h}^{[0]}_{\alpha,d}\Big|_{v^\gamma=u^\gamma},$$

что и требовалось доказать. □

Тесно связанным с гамильтонианами DR-иерархии является следующий локальный функционал:

$$\overline{g} := \sum_{g\geq 0,\, n\geq 2} \frac{(-\varepsilon^2)^g}{n!} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in [N] \\ a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Z} \\ \sum a_i = 0}} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \mathrm{DR}_g\left(a_1,\dots,a_n\right) \lambda_g c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \right) \prod_{i=1}^n p^{\alpha_i}_{a_i}.$$

Заметим сразу, что локальный функционал $\overline{g}$ имеет вид $\overline{g} = \int F(u^1,\dots,u^N)dx + O(\varepsilon^2)$, где F – это потенциал Дубровина–Фробениуса нашей КогТП.

Договоримся, что нижний индекс $\mathbb{1}$ обозначает линейную комбинацию соответствующих объектов с индексом α и коэффициентом A^α. Например, $g_{\mathbb{1},d} := A^\alpha g_{\alpha,d}$ и $\frac{\partial}{\partial t^{\mathbb{1}}_d} := A^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha_d}$.

Лемма 2.4. *Имеют место равенства*

$$\overline{g}_{\mathbb{1},0} = \frac{1}{2}\int \eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta dx, \tag{2.4}$$

$$\overline{g}_{\mathbb{1},1} = (D-2)\overline{g}, \tag{2.5}$$

$$g_{\alpha,0} = \frac{\delta \overline{g}}{\delta u^\alpha}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \overline{g}_{\alpha,d}}{\partial u^{\mathbb{1}}} = \begin{cases} \overline{g}_{\alpha,d-1}, & \text{если } d \geq 1, \\ \int \eta_{\alpha\mu}u^\mu dx, & \text{если } d = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

где $D := \sum_{n\geq 0}(n+1)u^\alpha_n \frac{\partial}{\partial u^\alpha_n}$.

Доказательство. Для доказательства равенства (2.4) заметим, что если пара (g,n) стабильная, то интеграл

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(0,a_1,\dots,a_n\right)\lambda_g c_{g,n+1}(e\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})$$

равен нулю, потому что подинтегральное выражение равно (мы используем свойство (1.9))

$$\pi_{n+1}^*\left(\mathrm{DR}_g\left(a_1,\dots,a_n\right)\lambda_g c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right).$$

В формуле для гамильтонианов DR-иерархии пара (g,n) может быть нестабильной, только если $(g,n)=(0,2)$, а в этом случае мы получаем интеграл

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} \mathrm{DR}_0\left(0,a,-a\right)c_{0,3}(e\otimes e_\alpha\otimes e_\beta)=\eta_{\alpha\beta},$$

откуда и следует первое равенство.

Для доказательства равенства (2.5) мы вычисляем

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(0,a_1,\dots,a_n\right)\psi_1\lambda_g c_{g,n+1}(e\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})=$$
$$=\begin{cases}(2g-2+n)\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}\mathrm{DR}_g\left(a_1,\dots,a_n\right)\lambda_g c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}), & \text{если пара } (g,n) \text{ стабильная,}\\ 0, & \text{если пара } (g,n) \text{ нестабильная,}\end{cases}$$

где в первом случае мы представили интеграл в виде

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\psi_1\pi_1^*\left(\mathrm{DR}_g\left(a_1,\dots,a_n\right)\lambda_g c_{g,n+1}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right)$$

и воспользовались формулой проекции вместе с равенством $(\pi_1)_*(\psi_1)=2g-2+n$. Второе равенство доказано.

Равенство (2.6) следует из определений локального функционала $\overline{g}$ и дифференциального многочлена $g_{\alpha,0}$, а также из коммутативности диаграммы (1.45).

Равенство (2.7) при $d=0$ следует из равенств (2.4) и (2.6). Если же $d\geq 1$, то мы имеем

$$\frac{\partial\overline{g}_{\alpha,d}}{\partial u^{\mathbb{1}}}=\sum_{\substack{g\geq 0\\ n\geq 2}}\frac{(-\varepsilon^2)^g}{n!}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ \sum a_i=0}}\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}}\underbrace{\mathrm{DR}_g\left(0,a_1,\dots,a_n,0\right)\lambda_g\psi_1^d c_{g,n+2}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\otimes e)}_{=\psi_1^d\pi_{n+2}^*\left(\mathrm{DR}_g(0,a_1,\dots,a_n)\lambda_g c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right)}\right)\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i},$$

что равно $\overline{g}_{\alpha,d-1}$, потому что $(\pi_{n+2})_*(\psi_1^d)=\psi_1^{d-1}$. □

Немедленным следствием леммы является следующее утверждение, которое позволит устанавливать связь DR-иерархии с другими иерархиями.

Следствие 2.5. *DR-иерархия удовлетворяет условиям следствия 1.33.*

Лемма 2.6. *Имеется равенство* $\frac{\partial}{\partial u_{xx}^{\mathbb{1}}}\left(\frac{\delta\overline{g}_{\mathbb{1},1}}{\delta u^{\mathbb{1}}}\right)\Big|_{u_*^*=0}=\varepsilon^2\frac{N}{12}$.

Доказательство. Нужная формула следует из вычисления

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1 \underbrace{\mathrm{DR}_1(0,a,-a)\lambda_1 c_{1,3}(e^{\otimes 3})}_{=\pi_1^*(\mathrm{DR}_1(a,-a)\lambda_1 c_{1,2}(e^{\otimes 2}))} = 2\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \mathrm{DR}_1(a,-a)\underbrace{\lambda_1 c_{1,2}(e^{\otimes 2})}_{=\pi_1^*(\lambda_1 c_{1,1}(e))} \overset{(1.10)}{=\!=\!=}$$

$$= 2a^2 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \lambda_1 c_{1,1}(e) =$$

$$= \frac{a^2}{12}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \Big(1 \text{—} \overset{0}{\bigcirc} \Big) c_{1,1}(e) =$$

$$= \frac{N}{12}a^2.$$

□

2.2 Примеры

В случае КогТП ранга 1 мы не будем писать верхний индекс у переменных u_d^1 в DR-иерархии.

2.2.1 Тривиальная когомологическая теория поля и иерархия КдФ

Теорема 2.7. *DR-иерархия, соответствующая тривиальной когомологической теории поля, совпадает с иерархией КдФ.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что $\overline{g}_d = \overline{h}_d^{\mathrm{KdV}}$, $d \geq 0$. Следуя конструкции DR-иерархии, рассмотрим интегралы

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(0,a_1,\dots,a_n\right)\lambda_g\psi_1^d, \quad g\geq 0, \quad n\geq 2, \tag{2.8}$$

где $\sum a_i = 0$. Мы знаем, что $\mathrm{DR}_0(0,a_1,\dots,a_n) = \lambda_0 = 1 \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1},\mathbb{Q})$, поэтому при $g=0$ интеграл (2.8) равен 1, если $n = d+2$, и равен 0 иначе. Таким образом, мы получаем, что $\overline{g}_d = \int \frac{u^{d+2}}{(d+2)!}dx + O(\varepsilon^2)$.

Вычислим теперь гамильтониан $\overline{g}_1$. Рассмотрим интеграл (2.8) при $d=1$ и $g\geq 1$. Степень класса когомологий под знаком интеграла равна $2(2g+1)$, а вещественная размерность пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ равна $2(3g-2+n)$, поэтому интеграл (2.8) не равен нулю только если $2g+1 = 3g-2+n \Leftrightarrow g-3+n=0$. Значит нам нужно рассмотреть только случай $(g,n)=(1,2)$. Обозначим $a := a_1$, тогда $a_2 = -a$. Мы вычисляем

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \mathrm{DR}_1(0,a,-a)\lambda_1\psi_1 \overset{(1.9)}{=\!=\!=} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \pi_1^*\left(\mathrm{DR}_1(a,-a)\lambda_1\right)\psi_1 = 2\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \mathrm{DR}_1(a,-a)\lambda_1 =$$

$$= 2\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \mathrm{DR}_1(a,-a)\pi_2^*(\lambda_1) = 2\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} (\pi_2)_*(\mathrm{DR}_1(a,-a))\lambda_1 \overset{(1.10)}{=\!=\!=}$$

$$= 2a^2\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \lambda_1 = \frac{a^2}{12},$$

откуда заключаем, что $\overline{g}_1 = \int \left(\frac{u^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{uu_{xx}}{24}\right) dx$.

Мы видим, что $\overline{g}_1 = \overline{h}_1^{\mathrm{KdV}}$, а также, что как $\overline{g}_d$, так и $\overline{h}_d^{\mathrm{KdV}}$, имеют вид $\int \frac{u^{d+2}}{(d+2)!} dx + O(\varepsilon)$. Пользуясь следствием 1.29, мы заключаем, что $\overline{g}_d = \overline{h}_d^{\mathrm{KdV}}$ для всех d. □

2.2.2 Классы Ходжа и иерархия уравнения двухслойной жидкости

Пусть μ – произвольное комплексное число и рассмотрим КогТП $\{c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}\}$ из раздела 1.2.2, задаваемую значениями параметров $\gamma_i = (2i-2)!\mu^{2i-1}$, $i \geq 1$. Вычисление

$$\prod_{i=1}^{g}(1+\mu x_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{g}\log(1+\mu x_i)\right) = \exp\left(\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(k-1)!\mu^k \sum_{i=1}^{g}\frac{x_i^k}{k!}\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{l\geq 1}(2l-2)!\mu^{2l-1}\mathrm{Ch}_{2l-1}(\mathbb{E})\right),$$

где x_i – корни Черна расслоения Ходжа, показывает, что

$$c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}(e_1^{\otimes n}) = 1 + \mu\lambda_1 + \ldots + \mu^g\lambda_g \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

Рассмотрим следующее УрЧП:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = uu_x + \sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\mu^{g-1}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}u_{2g+1},$$

где через B_n мы обозначаем числа Бернулли, $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}$. Это УрЧП называется *уравнением двухслойной жидкости* (в англоязычной литературе оно называется "*Intermediate Long Wave equation*"). Уравнение двухслойной жидкости гамильтоново: скобка Пуассона задаётся оператором ∂_x, а гамильтониан $\overline{h}_1^{\mathrm{ILW}}$ – равенством

$$\overline{h}_1^{\mathrm{ILW}} := \int \left(\frac{u^3}{6} + \sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\mu^{g-1}\frac{|B_{2g}|}{2(2g)!}uu_{2g}\right) dx.$$

Для каждого значения $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существует единственный локальный функционал $\overline{h}_d^{\mathrm{ILW}} \in \widehat{\Lambda}_{u;0}$ вида $\overline{h}_d^{\mathrm{ILW}} = \int \frac{u^{d+2}}{(d+2)!}dx + O(\varepsilon)$ такой, что $\left\{\overline{h}_d^{\mathrm{ILW}}, \overline{h}_1^{\mathrm{ILW}}\right\}_{\partial_x} = 0$: существование доказано в работе [75], а единственность следует из следствия 1.29. Опять же из следствия 1.29 следует, что $\left\{\overline{h}_m^{\mathrm{ILW}}, \overline{h}_n^{\mathrm{ILW}}\right\}_{\partial_x} = 0$ для всех $m, n \geq 0$. Таким образом, локальные функционалы $\overline{h}_d^{\mathrm{ILW}}$, $d \geq 0$, вместе с пуассоновым оператором ∂_x порождают гамильтонову интегрируемую систему, которая называется *иерархией уравнения двухслойной жидкости*.

Замечание 2.8. Строго говоря, в статье [75] построена последовательность локальных функционалов, коммутирующих с $\overline{h}_1^{\mathrm{ILW}}$, и которые приводятся к виду $\int \frac{u^{d+2}}{(d+2)!}dx + O(\varepsilon)$ треугольной заменой переменных (см. подробное обсуждение в работе [14, раздел 8]).

Теорема 2.9. *DR-иерархия, соответствующая КогТП* $\{c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}\}$ *со значениями параметров* $\gamma_i = (2i-2)!\mu^{2i-1}$, *совпадает с иерархией уравнения двухслойной жидкости.*

Доказательство. Так как в роде ноль КогТП $\{c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}\}$ совпадает с тривиальной КогТП, мы получаем, что $\overline{g}_i = \int \left(\frac{u^{i+2}}{(i+2)!} + O(\varepsilon^2)\right) dx$.

Вычислим гамильтониан $\overline{g}_1$. Рассмотрим для этого интегралы

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g(0, a_1, \dots, a_n)\lambda_g(1 + \mu\lambda_1 + \dots + \mu^g\lambda_g)\psi_1, \quad g \geq 1, \quad n \geq 2,$$

где $\sum a_i = 0$. Из соображений размерности следует, что интеграл

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g(0, a_1, \dots, a_n)\lambda_g\lambda_j\psi_1$$

может быть отличен от нуля, только если $g - j = 3 - n$ и $j \leq g$. При этом случай $g = j \geq 1$ даёт тривиальный вклад, потому что $\lambda_g^2 = 0$ для $g \geq 1$. Таким образом, нетривиальный вклад в гамильтониан $\overline{g}_1$ в родах $g \geq 1$ вносят только интегралы

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,3}} \mathrm{DR}_g(0, a, -a)\lambda_g\lambda_{g-1}\psi_1 = &\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \mathrm{DR}_g(a, -a)\lambda_g\lambda_{g-1}\pi_{1*}(\psi_1) = \\ =&2g\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \mathrm{DR}_g(a, -a)\lambda_g\lambda_{g-1} = \\ =&a^{2g}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!},\end{aligned}$$

где мы воспользовались формулой

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \mathrm{DR}_g(a, -a)\lambda_g\lambda_{g-1} = a^{2g}\frac{|B_{2g}|}{2g(2g)!}, \tag{2.9}$$

доказаной, например, в работе [26, теорема 1.3]. Мы получаем, что $\overline{g}_1 = \overline{h}_1^{\mathrm{ILW}}$, и, пользуясь следствием 1.29, заключаем, что $\overline{g}_d = \overline{h}_d^{\mathrm{ILW}}$ для всех $d \geq 0$. □

2.2.3 Теория Громова–Виттена для $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ и расширенная иерархия Тоды

Рассмотрим КогТП $\{c_{g,n}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1} : H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ (см. пример 1.9) как семейство КогТП, зависящих от комплексного параметра q. В качестве базиса e_1, e_2 в пространстве $V = H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ выберем единицу и класс, двойственный точке.

Теорема 2.10. *Гамильтонианы* $\overline{g}_{2,0}$ *и* $\overline{g}_{1,1}$ *DR-иерархии, соответствующей КогТП* $\{c_{g,n}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}\}$, *имеют вид*

$$\overline{g}_{2,0} = \int \left(\frac{(u^1)^2}{2} + q\left(e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} - u^2\right)\right) dx, \tag{2.10}$$

$$\overline{g}_{1,1} = \int \left(\frac{(u^1)^2u^2}{2} + u^1\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\right) - 1\right)u^1 + q\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\right)u^2 - 2\right)e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} + qu^2\right) dx, \tag{2.11}$$

где мы напомним, что $S(z) = \frac{e^{z/2}-e^{-z/2}}{z}$.

Доказательство. Заметим сразу, что формулу (2.11) можно более явно переписать в следующем виде:

$$\overline{g}_{1,1} = \int \left(\frac{(u^1)^2 u^2}{2} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g} \frac{B_{2g}}{(2g)!} u^1 u^1_{2g} + q \left(\frac{e^{\frac{\varepsilon\partial_x}{2}} + e^{-\frac{\varepsilon\partial_x}{2}}}{2} u^2 - 2 \right) e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} + qu^2 \right) dx, \tag{2.12}$$

который будет нам более удобен для доказательства. Для вычисления гамильтониана $\overline{g}_{1,1}$ нам нужно вычислить интегралы

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \lambda_g \mathrm{DR}_g(0, a_1, \dots, a_n) \psi_1 c^{\mathbb{CP}^1}_{g,n+1,d}(e_1 \otimes e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}).$$

Подсчёт размерностей говорит нам, что этот интеграл нетривиален, только если $2(2d+n-2) = \sum_{i=1}^n \deg(e_{\alpha_i})$, откуда мы сразу получаем, что $d \leq 1$. Разложим

$$\overline{g}_{1,1} = \overline{g}^{(0)}_{1,1} + q\overline{g}^{(1)}_{1,1}, \quad \overline{g}^{(i)}_{1,1} \in \widehat{\Lambda}_{u;0}.$$

Вычислим $\overline{g}^{(0)}_{1,1}$. Для этого нам нужно вычислить интегралы

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \lambda_g \mathrm{DR}_g(0, a_1, \dots, a_n) \psi_1 c^{\mathbb{CP}^1}_{g,n+1,0} \left(e_1 \otimes e_1^{\otimes 2} \otimes e_2^{\otimes(n-2)} \right). \tag{2.13}$$

Из примера 1.10 следует, что

$$c^{\mathbb{CP}^1}_{g,a+b,0}(e_1^{\otimes a} \otimes e_2^{\otimes b}) = \begin{cases} 2(-1)^{g-1}\lambda_{g-1}, & \text{если } b = 0, \\ (-1)^g \lambda_g, & \text{если } b = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.14}$$

Заметим, что при $n = 3$ интеграл (2.13) зануляется при $g \geq 1$, так как $\lambda_g^2 = 0$; а при $g = 0$ этот интеграл равен 1. Таким образом, при $n = 3$ интеграл (2.13) даёт вклад в $\overline{g}^{(0)}_{1,1}$ в виде $\int \frac{(u^1)^2 u^2}{2} dx$. При $n = 2$ интеграл (2.13) равен

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,3}} \lambda_g \mathrm{DR}_g(0, a, -a) \psi_1 c^{\mathbb{CP}^1}_{g,3,0} \left(e_1^{\otimes 3} \right) = (-1)^{g-1} 4g \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \lambda_g \lambda_{g-1} \mathrm{DR}_g(a, -a) \overset{(2.9)}{=\!=} 2a^2 \frac{B_{2g}}{(2g)!},$$

что даёт вклад в $\overline{g}^{(0)}_{1,1}$ в виде $\int \left(\sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g} \frac{B_{2g}}{(2g)!} u^1 u^1_{2g} \right) dx$. Таким образом,

$$\overline{g}^{(0)}_{1,1} = \int \left(\frac{(u^1)^2 u^2}{2} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g} \frac{B_{2g}}{(2g)!} u^1 u^1_{2g} \right) dx.$$

Мы знаем, что $\overline{g}_{1,1} = (D-2)\overline{g}$. Из равенства $(\pi_{n+1})_* \left(c^{\mathbb{CP}^1}_{g,n+1,d}(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n} \otimes e_2) \right) = d \cdot c^{\mathbb{CP}^1}_{g,n,d}(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n})$ следует, что

$$\overline{g}_{2,0} = q\frac{d}{dq}\overline{g} + \int \frac{(u^1)^2}{2} dx.$$

Значит, гамильтониан $\overline{g}_{2,0}$ имеет вид

$$\overline{g}_{2,0} = \int \left(\frac{(u^1)^2}{2} + qf(u^2_*, \varepsilon) \right) dx, \quad f \in \widehat{\mathcal{A}}_{u^2;0}, \quad f|_{u^2_*=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial u^2_i} \right|_{u^2_*=0} = 0,$$

и более того

$$\overline{g}_{1,1} = \int \left(\frac{(u^1)^2 u^2}{2} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g} \frac{B_{2g}}{(2g)!} u^1 u^1_{2g} + q(D-2)f \right) dx. \tag{2.15}$$

Для доказательства равенства (2.10) нам нужно доказать, что

$$\int f dx \stackrel{?}{=} \int \left(e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} - u^2 \right) dx \tag{2.16}$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{\delta f}{\delta u^2} \stackrel{?}{=} S(\varepsilon\partial_x) e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} - 1. \tag{2.17}$$

Для доказательства равенства (2.17) возьмём коэффициент при q в коммутационном соотношении $\{\overline{g}_{2,0}, \overline{g}_{1,1}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = 0$: мы получим

$$\int \left(u^1 \partial_x \frac{\delta}{\delta u^2} \left((D-2)f \right) - \left(\partial_x \frac{\delta f}{\delta u^2} \right) \left(u^1 u^2 + 2 \sum_{g\geq 1} \frac{B_{2g}}{(2g)!} u^1_{2g} \right) \right) dx = 0.$$

Применяя вариационную производную $\frac{\delta}{\delta u^1}$, мы получаем

$$\partial_x \frac{\delta}{\delta u^2} \left((D-2)f \right) = u^2 \partial_x \frac{\delta f}{\delta u^2} + 2 \sum_{g\geq 1} \frac{B_{2g}}{(2g)!} \partial_x^{2g+1} \frac{\delta f}{\delta u^2} = 0.$$

Так как $[\frac{\delta}{\delta u^\alpha}, D] = \frac{\delta}{\delta u^\alpha}$ и $[\partial_x, D] = -\partial_x$, из этого равенства вытекает, что

$$(D-2)\partial_x \frac{\delta f}{\delta u^2} = u^2 \partial_x \frac{\delta f}{\delta u^2} + 2 \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g} \frac{B_{2g}}{(2g)!} \partial_x^{2g+1} \frac{\delta f}{\delta u^2}. \tag{2.18}$$

Докажем, что это равенство позволяет однозначно восстановить $\frac{\delta f}{\delta u^2}$, зная лишь коэффициент при u^2 в $\frac{\delta f}{\delta u^2}\big|_{\varepsilon=0}$.

Обозначим $r := \frac{\delta f}{\delta u^2} \in \widehat{\mathcal{A}}_{u^2;0}$. Напомним, что для произвольного разбиения λ мы используем обозначение $u^2_\lambda = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} u^2_{\lambda_i}$. Рассмотрим разложение

$$r = \sum_{g\geq 0} \varepsilon^{2g} \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_{2g} \\ l(\lambda)\geq 1}} c_\lambda u^2_\lambda, \quad c_\lambda \in \mathbb{C},$$

и обозначим

$$r_{d,g} := \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_{2g} \\ l(\lambda)=d}} c_\lambda u^2_\lambda, \quad g \geq 0, \quad d \geq 1.$$

Таким образом, мы имеем $r = \sum_{g\geq 0,\, d\geq 1} \varepsilon^{2g} r_{d,g}$. Положим, по определению, $r_{0,g} := 0$. Из равенства (2.18) вытекает следующая система соотношений:

$$(d+2g-1)\partial_x r_{d,g} = u^2 \partial_x r_{d-1,g} + 2\sum_{g_1=1}^{g} \frac{B_{2g_1}}{(2g_1)!}\partial_x^{2g_1+1} r_{d,g-g_1}, \quad d\geq 1, \quad g\geq 0.$$

Так как оператор $\partial_x \colon \mathcal{A}_{u^2} \to \mathcal{A}_{u^2}$ зануляет только константы, полученная система соотношений позволяет рекурсивно вычислить все дифференциальные многочлены $r_{d,g}$, начиная с дифференциального многочлена $r_{1,0}$, который в силу примера 1.21 равен $r_{1,0} = u^2$.

Таким образом, для доказательства равенства (2.17) достаточно проверить, что выполняется следующее тождество:

$$(D-2)\partial_x S(\varepsilon\partial_x) e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} \stackrel{?}{=} u\partial_x S(\varepsilon\partial_x) e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} + 2\sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g} \frac{B_{2g}}{(2g)!}\partial_x^{2g+1} S(\varepsilon\partial_x) e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2}.$$

Ясно, что достаточно доказать это тождество при $\varepsilon = 1$ (формально говоря, обе части равенства становятся тогда элементами алгебры $\mathbb{C}[[u^2, u_x^2, u_{xx}^2, \ldots]]$). Переобозначим также для краткости $u_i^2 = u_i$. Таким образом, нам нужно доказать тождество

$$(D-2)\partial_x S(\partial_x) e^{S(\partial_x)u} \stackrel{?}{=} u\partial_x S(\partial_x) e^{S(\partial_x)u} + 2\sum_{g\geq 1} \frac{B_{2g}}{(2g)!}\partial_x^{2g+1} S(\partial_x) e^{S(\partial_x)u}.$$

Пользуясь тем, что $\sum_{g\geq 0} \frac{B_{2g}}{(2g)!} z^{2g} = \frac{z}{2}\frac{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}$, переформулируем это тождество в следующем виде:

$$D\partial_x S(\partial_x) e^{S(\partial_x)u} \stackrel{?}{=} u\partial_x S(\partial_x) e^{S(\partial_x)u} + \partial_x \frac{e^{\frac{\partial_x}{2}}+e^{-\frac{\partial_x}{2}}}{e^{\frac{\partial_x}{2}}-e^{-\frac{\partial_x}{2}}} \partial_x S(\partial_x) e^{S(\partial_x)u}. \tag{2.19}$$

Легко видеть, что правая часть равна

$$u\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} - e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) e^{S(\partial_x)u} + \partial_x \left(e^{\frac{\partial_x}{2}} + e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) e^{S(\partial_x)u}.$$

Преобразуем теперь левую часть в (2.19). Так как $[D, \partial_x] = \partial_x$, мы получаем

$$[D, \partial_x S(\partial_x)] = \left[D, e^{\frac{\partial_x}{2}} - e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right] = \frac{\partial_x}{2}\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} + e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right),$$
$$D\partial_x S(\partial_x) e^{S(\partial_x)u} = \left(e^{\frac{\partial_x}{2}} - e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) De^{S(\partial_x)u} + \frac{\partial_x}{2}\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} + e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) e^{S(\partial_x)u}.$$

Значит, равенство (2.19) эквивалентно равенству

$$\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} - e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) De^{S(\partial_x)u} \stackrel{?}{=} u\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} - e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) e^{S(\partial_x)u} + \frac{\partial_x}{2}\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} + e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) e^{S(\partial_x)u}. \tag{2.20}$$

Мы имеем $De^{S(\partial_x)u} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} + e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) u \cdot e^{S(\partial_x)u}$. Значит, левая часть в (2.20) равна

$$\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} - e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right)\left[\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\partial_x}{2}} + e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right) u \cdot e^{S(\partial_x)u}\right] = \frac{1}{2}\left(e^{\partial_x}+1\right) u \cdot e^{\frac{e^{\partial_x}-1}{\partial_x}u} - \frac{1}{2}\left(1+e^{-\partial_x}\right) u \cdot e^{\frac{1-e^{-\partial_x}}{\partial_x}u}. \tag{2.21}$$

С другой стороны, правая часть в (2.20) равна

$$u\left(e^{\frac{\partial_x}{2}}-e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right)e^{S(\partial_x)u}+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\partial_x}{2}}+e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right)\left[\left(e^{\frac{\partial_x}{2}}-e^{-\frac{\partial_x}{2}}\right)u\cdot e^{S(\partial_x)u}\right]=$$
$$=u\left(e^{\frac{e^{\partial_x}-1}{\partial_x}u}-e^{\frac{1-e^{-\partial_x}}{\partial_x}u}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{\partial_x}-1\right)u\cdot e^{\frac{e^{\partial_x}-1}{\partial_x}u}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-\partial_x}\right)u\cdot e^{\frac{1-e^{-\partial_x}}{\partial_x}u},$$

и прямая проверка показывает, что получившееся выражение равно выражению в правой части равенства (2.21). Таким образом, формула (2.10) доказана.

Формула (2.12) следует из формул (2.10) и (2.15). □

Всю же DR-иерархию можно связать с *расширенной иерархией Тоды*, введённой в работе [25]. Рассмотрим формальные переменные v^1, v^2 и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_v$. Рассмотрим оператор

$$L:=\Lambda+v^1+qe^{v^2}\Lambda^{-1}.$$

Расширенная иерархия Тоды задаётся двумя цепочками локальных функционалов $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p}, \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p}$, $p\geq 0$, и пуассоновым оператором K^{Td}. Локальные функционалы $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p}$ и пуассонов оператор K^{Td} задаются равенствами

$$\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p}:=\frac{1}{(p+2)!}\int \mathrm{res}(L^{p+2})dx,\quad p\geq 0, \tag{2.22}$$
$$K^{\mathrm{Td}}:=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon^{-1}(e^{\varepsilon\partial_x}-1)\\ \varepsilon^{-1}(1-e^{-\varepsilon\partial_x}) & 0\end{pmatrix}.$$

Например,

$$\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,0}=\int\left(\frac{(v^1)^2}{2}+qe^{v^2}\right)dx.$$

Определение локальных функционалов $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p}$ более сложно. Предположим, что $q\neq 0$. Используя логарифмы $\log_+(L)$ и $\log_-(L)$, введённые в разделе 1.3.5, определим

$$\log(L):=\frac{1}{2}(\log_+(L)+\log_-(L))=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ldots+\left(\mathcal{B}_+\left(qe^{v^2}+\frac{1}{2}(v^1)^2\right)-v^1(x-\varepsilon)\mathcal{B}_+v^1\right)\Lambda^{-2}$$
$$+\left(\mathcal{B}_+v^1\right)\Lambda^{-1}+\mathcal{B}_-v^2+\log(q)+q^{-1}e^{-v^2(x+\varepsilon)}\left(\mathcal{B}_-v^1\right)\Lambda$$
$$+q^{-2}e^{-v^2(x+\varepsilon)}e^{-v^2(x+2\varepsilon)}\left(\mathcal{B}_-\left(qe^{v^2(x+\varepsilon)}+\frac{1}{2}v^1(x+\varepsilon)^2\right)-v^1(x+\varepsilon)\mathcal{B}_-v^1(x+\varepsilon)\right)\Lambda^2+\ldots\Big].$$

Тогда

$$\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p}:=\int\left(\frac{2}{(p+1)!}\,\mathrm{res}(L^{p+1}(\log L-\log q-H_{p+1}))\right)dx,\quad p\geq 0,$$

где $H_p := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$, если $p \geq 1$, и $H_0 := 0$. Например,

$$\begin{aligned}
\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,0} &= \int (v^1 \mathcal{B}_- v^2) dx, \\
\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,1} &= \int \left[\left(\frac{1}{2} \frac{(\Lambda+1)\varepsilon\partial_x}{\Lambda - 1} v^2 - 2 \right) q e^{v^2} + v^1 (\mathcal{B}_+ - 1) v^1 + \frac{(v^1)^2}{2} \mathcal{B}_- v^2 \right] dx.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Из леммы 1.41 легко вывести, что локальные функционалы $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p}$ полиномиально зависят от q.

В работе [25] вышеописанная конструкция приведена при $q = 1$ и доказано, что локальные функционалы $\overline{h}'^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p} := \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p}\Big|_{q=1}$ попарно коммутируют относительно скобки Пуассона, задаваемой оператором K^{Td}. Легко понять, что при $q \neq 0$ выполняется

$$\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p} = \left(\overline{h}'^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p} - \delta_{\alpha,1} (\log q) \overline{h}'^{\mathrm{Td}}_{2,p-1} \right) \Big|_{v^2 \mapsto v^2 + \log q}, \tag{2.24}$$

где $\overline{h}'^{\mathrm{Td}}_{2,-1} := \int v^1 dx$. Таким образом, $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p}$ также попарно коммутируют относительно скобки Пуассона, задаваемой оператором K^{Td}. Что касается уравнений расширенной иерархии Тоды, в работе [25] доказано, что при $q = 1$ уравнения иерархии можно описать следующим образом: $\frac{\partial L}{\partial t^1_p} = \varepsilon^{-1} \frac{2}{p!} [(L^p (\log L - H_p))_+, L]$, $\frac{\partial L}{\partial t^2_p} = \varepsilon^{-1} \frac{1}{(p+1)!} [(L^{p+1})_+, L]$. Учитывая равенство (2.24), мы получаем, что при произвольном q уравнения иерархия получаются следующими:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t^1_p} &= \varepsilon^{-1} \frac{2}{p!} [(L^p (\log L - \log q - H_p))_+, L], \\
\frac{\partial L}{\partial t^2_p} &= \varepsilon^{-1} \frac{1}{(p+1)!} [(L^{p+1})_+, L].
\end{aligned}$$

Определим 2×2 матрицы с комплексными коэффициентами $S_0 := 1, S_1, S_2, \ldots$ равенствами

$$(S_{2k-1})^\alpha_\beta = \begin{cases} \frac{1}{k!(k-1)!} q^k, & \text{если } \alpha = 1,\ \beta = 2, \\ -\frac{2H_{k-1}}{((k-1)!)^2} q^{k-1}, & \text{если } \alpha = 2,\ \beta = 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad (S_{2k})^\alpha_\beta = \begin{cases} \left(\frac{1}{(k!)^2} - \frac{2H_k}{k!(k-1)!} \right) q^k, & \text{если } \alpha = \beta = 1, \\ \frac{1}{(k!)^2} q^k, & \text{если } \alpha = \beta = 2, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{2.25}$$

Обозначим через $S_i^\dagger$ сопряжённые матрицы: $(S_i^\dagger)^\alpha_\beta := \eta^{\alpha\mu} (S_i)^\nu_\mu \eta_{\nu\beta}$. Определим $S(q,z) := \sum_{i \geq 0} S_i z^i$ и $S^\dagger(q,z) := \sum_{i \geq 0} S_i^\dagger z^i$.

Лемма 2.11. *Выполняется соотношение* $S(q,z) S^\dagger(q,-z) = \mathrm{Id}$.

Доказательство. Прямой проверкой легко убедиться, что выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial q} S(q,z) = z \left(\begin{pmatrix} 0 & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S(q,z) - S(q,z) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(S(q,z)S^\dagger(q,-z)\right) = z\left[\begin{pmatrix}0 & q\\ 1 & 0\end{pmatrix}, S(q,z)S^\dagger(q,-z)\right].$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial q}M(q,z) = z\left[\begin{pmatrix}0 & q\\ 1 & 0\end{pmatrix}, M(q,z)\right], \quad M(q,z)\in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q})[[q,z]],$$

однозначно задаёт формальный ряд $M(q,z)$ по начальному условию $M(0,z)$. Ясно, что ряд $M(q,z) = \mathrm{Id}$ является решением дифференциального уравнения. Очевидно, что выполняется $S(q,z)S^\dagger(q,-z)\big|_{q=0} = \mathrm{Id}$, откуда мы заключаем, что выполняется равенство $S(q,z)S^\dagger(q,-z) = \mathrm{Id}$. □

Определим $\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,-1} := \int v^{3-\alpha}dx$ для $\alpha = 1,2$.

Теорема 2.12. *Свяжем переменные v^1, v^2 и u^1, u^2 преобразованием Миуры $v^1(u^*_*,\varepsilon) = e^{\frac{\varepsilon\partial_x}{2}}u^1$, $v^2(u^*_*,\varepsilon) = S(\varepsilon\partial_x)u^2$. Тогда*

$$\overline{g}_{\alpha,p} = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i(S_i^\dagger)^\mu_\alpha \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\mu,p-i}[u], \quad \alpha = 1,2, \quad p\geq 0,$$

и $K^{\mathrm{Td}}_u = \eta^{-1}\partial_x$.

Доказательство. Равенство $K^{\mathrm{Td}}_u = \eta^{-1}\partial_x$ проверяется прямым вычислением. Обозначим $\overline{h}_{\alpha,p} := \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i(S_i^\dagger)^\mu_\alpha\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\mu,p-i}$, $\alpha = 1,2$, $p\geq -1$. Мы знаем, что

$$\{\overline{g}_{\alpha,p},\overline{g}_{\beta,d}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = \{\overline{h}_{\alpha,p}[u],\overline{h}_{\beta,d}[u]\}_{\eta^{-1}\partial_x} = 0.$$

Докажем теперь, что $\overline{g}_{\alpha,p} = \overline{h}_{\alpha,p}[u]$ с помощью следствия 1.33. В силу следствия 2.5, нам достаточно проверить, что $\overline{g}_{1,1} = \overline{h}_{1,1}[u]$, а также что локальные функционалы $\overline{h}_{\alpha,p}[u]$ удовлетворяют условиям следствия 1.33.

Мы вычисляем

$$\overline{h}_{1,1} = \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,1} + q\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,-1} = \int\left[\left(\frac{1}{2}\frac{(\Lambda+1)\varepsilon\partial_x}{\Lambda-1}v^2 - 2\right)qe^{v^2} + v^1(\mathcal{B}_+ - 1)v^1 + \frac{(v^1)^2}{2}\mathcal{B}_-v^2 + qv^2\right]dx,$$

и с помощью формул (2.12) и (2.23) несложно убедиться, что $\overline{g}_{1,1} = \overline{h}_{1,1}[u]$.

Докажем теперь, что $\frac{\partial}{\partial u^1}\overline{h}_{\alpha,p}[u] = \overline{h}_{\alpha,p-1}[u]$ для $p\geq 0$. Это равенство эквивалентно тому, что $\frac{\partial}{\partial v^1}\overline{h}_{\alpha,p} = \overline{h}_{\alpha,p-1}$, $p\geq 0$. В свою очередь, эти соотношения следуют из соотношений

$$\frac{\partial}{\partial v^1}\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p} = \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p-1}, \quad p\geq 0, \tag{2.26}$$

Докажем их. Так как $\frac{\partial}{\partial v^1}L = 1$, для $\alpha = 2$ соотношение (2.26) сразу следует из формулы (2.22). Для того, чтобы доказать равенство (2.26) при $\alpha = 1$, нужно вычислить $\frac{\partial}{\partial v^1}\log(L)$. Заметим, что оператор L принадлежит обоим алгебрам $\mathcal{V}_{v,+}$ и $\mathcal{V}_{v,-}$, и в обоих алгебрах у оператора L есть обратный. Для того, чтобы различать эти обратные элементы, введём обозначения $(L^{-1})_{\mathcal{V}_{v,+}}$ и $(L^{-1})_{\mathcal{V}_{v,-}}$. Из конструкции логарифма несложно вывести, что

$$\frac{\partial}{\partial v^1}\log_{\pm}(L) = (L^{-1})_{\mathcal{V}_{v,\pm}}.$$

Отсюда мы получаем, что $\frac{\partial}{\partial v^1}\left(L^{p+1}\log(L)\right) = (p+1)L^p\log(L) + L^p$, $p \geq 0$, и проверка равенства $\frac{\partial}{\partial v^1}\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p} = \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p-1}$ становится простым вычислением.

Мы имеем $\overline{h}_{1,0} = \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,0} = \int v^1\mathcal{B}_-v^2dx$, откуда мы получаем, что $\overline{h}_{1,0}[u] = \int u^1u^2dx$.

Осталось доказать, что $\left.\frac{\delta\overline{h}_{\alpha,p}[u]}{\delta u^\beta}\right|_{u^*_*=\varepsilon=0} = 0$ при $p \geq 0$. Это эквивалентно тому, что

$$\left.\frac{\delta\overline{h}_{\alpha,p}}{\delta v^\beta}\right|_{v^*_*=\varepsilon=0} = 0, \quad p \geq 0. \tag{2.27}$$

В силу равенства $\overline{h}_{\alpha,p} := \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i(S_i^\dagger)^\mu_\alpha\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\mu,p-i}$, а также соотношения $S(q,z)S^\dagger(q,-z) = \mathrm{Id}$, система равенств (2.27) эквивалентна системе

$$\left.\frac{\delta\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p}}{\delta v^\beta}\right|_{v^*_*=\varepsilon=0} = (S_{p+1})^\mu_\alpha\eta_{\mu\beta}, \quad p \geq 0. \tag{2.28}$$

Докажем равенство (2.28) для $\alpha = 2$ и $\beta = 1$:

$$\left.\frac{\delta\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p}}{\delta v^1}\right|_{v^*_*=\varepsilon=0} = \frac{1}{(p+2)!}\left.\frac{\partial}{\partial v^1}\operatorname{res}(L^{p+2})\right|_{v^*_*=\varepsilon=0} = \frac{1}{(p+1)!}\operatorname{res}\left[(\Lambda+q\Lambda^{-1})^{p+1}\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{q^k}{(k!)^2}, & \text{если } p+1 = 2k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

что и требовалось.

Докажем равенство (2.28) для $\alpha = \beta = 2$:

$$\left.\frac{\delta\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{2,p}}{\delta v^2}\right|_{v^*_*=\varepsilon=0} = \frac{1}{(p+2)!}\left.\frac{\partial}{\partial v^2}\operatorname{res}(L^{p+2})\right|_{v^*_*=\varepsilon=0} = \frac{1}{(p+1)!}\operatorname{res}\left[q\Lambda^{-1}(\Lambda+q\Lambda^{-1})^{p+1}\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{q^{k+1}}{k!(k+1)!}, & \text{если } p = 2k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

что и требовалось.

Докажем равенство (2.28) для $\alpha = \beta = 1$:

$$\left.\frac{\delta \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p}}{\delta v^1}\right|_{v^*_*=\varepsilon=0} = \frac{2}{(p+1)!}\,\frac{\partial}{\partial v^1}\operatorname{res}(L^{p+1}(\log L - \log q - H_{p+1}))\Big|_{v^*_*=\varepsilon=0} = \\ = \frac{2}{p!}\operatorname{res}(L^p(\log L - \log q - H_p))|_{v^*_*=\varepsilon=0}\,.$$

Легко убедиться, что

$$\log_\pm(L)|_{v^*_*=0} = \pm\varepsilon\partial_x + \log(1+q^\pm\Lambda^{\mp 2}),$$

где $\log(1+q^\pm\Lambda^{\mp 2}) := \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(q^\pm\Lambda^{\mp 2})^n$, откуда мы получаем

$$\frac{2}{p!}\operatorname{res}(L^p(\log L - \log q - H_p))|_{v^*_*=\varepsilon=0} = \\ = \frac{2}{p!}\operatorname{res}\left[\left(\Lambda + q\Lambda^{-1}\right)^p\left(\frac{1}{2}\log(1+q\Lambda^{-2}) + \frac{1}{2}\log(1+q^{-1}\Lambda^2) - H_p\right)\right].$$

Нам нужно доказать, что

$$\frac{2}{p!}\operatorname{res}\left[\left(\Lambda + q\Lambda^{-1}\right)^p\left(\frac{1}{2}\log(1+q\Lambda^{-2}) + \frac{1}{2}\log(1+q^{-1}\Lambda^2) - H_p\right)\right] = \begin{cases} -\frac{2H_k q^k}{(k!)^2}, & \text{если } p = 2k, \\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{2.29}$$

Заметим, что левая часть равна

$$\frac{2}{p!}\operatorname{res}\left[\left(\Lambda + q\Lambda^{-1}\right)^p\left(\log(1+q\Lambda^{-2}) - H_p\right)\right].$$

Ясно, что при нечётном p левая часть равна нулю. Таким образом, равенство (2.29) вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.13. *Для любого $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ имеется тождество*

$$\operatorname{res}\left[\left(\Lambda + q\Lambda^{-1}\right)^{2k}\log(1+q\Lambda^{-2})\right] = \binom{2k}{k}(H_{2k} - H_k)q^k. \tag{2.30}$$

Доказательство. Легко видеть, что левая часть равенства (2.30) является однородным многочленом от q степени k. Поэтому без ограничения общности мы можем положить $q = 1$. Запишем левую часть равенства (2.30) в виде

$$-\operatorname{res}_{z=\infty}\left[\left(z + z^{-1}\right)^{2k}\log(1+z^{-2})\frac{dz}{z}\right],$$

где мы рассматриваем выражение в квадратных скобках как голоморфную форму, определённую в проколотой окрестности бесконечности. Сделаем замену координат $z \mapsto w(z) = z + z^{-1}$ в окрестности бесконечности. Прямое вычисление показывает, что

$$\left(z + z^{-1}\right)^{2k}\log(1+z^{-2})\frac{dz}{z} = w^{2k}\log\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4w^{-2}}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-4w^{-2}}}\frac{dw}{w}.$$

Значит, равенство (2.30) эквивалентно тому, что

$$-\operatorname{res}_{w=\infty}\left[w^{2k}\log\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4w^{-2}}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-4w^{-2}}}\frac{dw}{w}\right]=\binom{2k}{k}(H_{2k}-H_k),$$

или, иначе говоря,

$$\log\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4w^{-2}}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-4w^{-2}}}=\sum_{k\geq 1}\binom{2k}{k}(H_{2k}-H_k)w^{-2k}. \tag{2.31}$$

Заметим, что $\binom{2k}{k}=(-4)^k\binom{-1/2}{k}$. Значит, равенство (2.31) можно эквивалентным образом переписать как

$$\log\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+w^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+w^2}}=\sum_{k\geq 1}\binom{-1/2}{k}(H_{2k}-H_k)w^{2k}, \tag{2.32}$$

где w – малое комплексное число. Заметим, что $H_{2k}-H_k=\int_0^1\frac{x^{2k}-x^k}{x-1}dx$. Таким образом, правая часть равенства (2.32) представляется в виде

$$\int_0^1\frac{\frac{1}{\sqrt{1+w^2x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+w^2x}}}{x-1}dx.$$

Значит, нам нужно доказать равенство

$$\log\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+w^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+w^2}}=\int_0^1\frac{\frac{1}{\sqrt{1+w^2x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+w^2x}}}{x-1}dx, \tag{2.33}$$

где w – малое комплесное число. Без ограничения общности, мы можем считать, что w – малое положительное вещественное число. С помощью стандартных вычислений мы получаем

$$\int_0^1\frac{\frac{1}{\sqrt{1+w^2x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+w^2x}}}{x-1}dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\left[\log\left(\frac{\sqrt{1+w^2x^2}-wx+w-\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1+w^2x^2}-wx+w+\sqrt{1+w^2}}\right)-\log\left(\frac{\sqrt{1+w^2}-\sqrt{1+w^2x}}{\sqrt{1+w^2}+\sqrt{1+w^2x}}\right)\right]\Bigg|_0^1,$$

и уже элементарная выкладка показывает, что последнее выражение равно левой части равенства (2.33). □

Докажем равенство (2.28) для $\alpha=1$ и $\beta=2$:

$$\frac{\delta\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{1,p}}{\delta v^2}\bigg|_{v_*^*=\varepsilon=0}=\frac{2}{(p+1)!}\frac{\partial}{\partial v^2}\operatorname{res}(L^{p+1}(\log L-\log q-H_{p+1}))\bigg|_{v_*^*=\varepsilon=0}=$$
$$=\frac{2}{p!}\operatorname{res}\left[q\Lambda^{-1}\left(\Lambda+q\Lambda^{-1}\right)^p\left(\frac{1}{2}\log(1+q\Lambda^{-2})+\frac{1}{2}\log(1+q^{-1}\Lambda^2)-H_p\right)\right]=$$
$$=\begin{cases}\left(\frac{1}{((k+1)!)^2}-\frac{2H_{k+1}}{(k+1)!k!}\right)q^{k+1}, & \text{если } p=2k+1,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

где последнее равенство легко выводится из равенства (2.29), пользуясь тем, что

$$\operatorname{res}\left[q\Lambda^{-1}\left(\Lambda+q\Lambda^{-1}\right)^{2k+1}\left(\log(1+q\Lambda^{-2})+\log(1+q^{-1}\Lambda^{2})\right)\right]= \\ =\frac{1}{2}\operatorname{res}\left[\left(\Lambda+q\Lambda^{-1}\right)^{2k+2}\left(\log(1+q\Lambda^{-2})+\log(1+q^{-1}\Lambda^{2})\right)\right].$$

Доказательство теоремы завершено. □

2.2.4 Класс Виттена и иерархии Гельфанда–Дикого

Рассмотрим КогТП $\{c^{r\text{-spin}}_{g,n}\}$ из раздела 1.2.2. Мы будем обозначать через $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{\alpha,d}$ гамильтонианы соответствующей DR-иерархии.

Теорема 2.14. *Мы имеем*

$$\overline{g}^{3\text{-}spin}_{1,1}=\int\left(\frac{(u^1)^2u^2}{2}+\frac{(u^2)^4}{36}+\varepsilon^2\left(\frac{(u^2)^2u^2_2}{48}+\frac{u^1u^1_2}{12}\right)+\frac{\varepsilon^4}{432}u^2u^2_4\right)dx, \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\overline{g}^{4\text{-}spin}_{1,1}=\int\Bigg[&\frac{(u^1)^2u^3}{2}+\frac{u^1(u^2)^2}{2}+\frac{(u^2)^2(u^3)^2}{8}+\frac{(u^3)^5}{320}+\\&\varepsilon^2\left(\frac{1}{8}u^1u^1_2+\frac{1}{64}u^3_2(u^2)^2+\frac{1}{16}u^3u^2u^2_2+\frac{1}{64}u^1_2(u^3)^2+\frac{1}{192}(u^3)^3u^3_2\right)+\\&\varepsilon^4\left(\frac{1}{160}u^2u^2_4+\frac{5}{4096}(u^3)^2u^3_4+\frac{3}{640}u^1u^3_4\right)+\\&\varepsilon^6\,\frac{1}{8192}u^3u^3_6\Bigg]dx,\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\overline{g}^{5\text{-}spin}_{1,1}=\int\Bigg[&\frac{(u^1)^2u^4}{2}+u^1u^2u^3+\frac{(u^2)^3}{6}+\frac{(u^3)^4}{30}+\frac{u^2(u^3)^2u^4}{5}+\frac{(u^2)^2(u^4)^2}{10}+\frac{(u^3)^2(u^4)^3}{50}+\frac{(u^4)^6}{3750}+\\&\varepsilon^2\left(\frac{1}{6}u^1u^1_2+\frac{3}{20}u^2u^3u^3_2+\frac{1}{10}u^2(u^3_1)^2+\frac{1}{20}u^1_2u^3u^4+\frac{1}{10}u^2u^2_2u^4+\frac{1}{40}(u^2_1)^2u^4\right.\\&\left.+\frac{1}{50}u^2u^4(u^4_1)^2+\frac{1}{75}u^2(u^4)^2u^4_2+\frac{1}{75}(u^3)^2u^4u^4_2+\frac{1}{50}u^3u^3_2(u^4)^2+\frac{1}{1200}(u^4)^4u^4_2\right)+\\&\varepsilon^4\left(\frac{7}{600}u^2u^2_4+\frac{11}{900}u^1u^3_4+\frac{7}{1200}u^2u^4u^4_4+\frac{17}{1200}u^2u^4_1u^4_3+\frac{71}{7200}u^2(u^4_2)^2+\frac{31}{3600}u^3u^3_4u^4\right.\\&\left.+\frac{7}{450}u^3_1u^3_3u^4+\frac{91}{7200}(u^3_2)^2u^4+\frac{13}{12000}(u^4_2)^2(u^4)^2+\frac{3}{4000}u^4_2(u^4_1)^2u^4\right)+\\&\varepsilon^6\left(\frac{53}{108000}u^3u^3_6+\frac{11}{18000}u^2u^4_6+\frac{1397}{6480000}(u^4_3)^2u^4+\frac{617}{1620000}u^4_4u^4_2u^4\right)+\\&\varepsilon^8\,\frac{107}{10800000}u^4u^4_8\Bigg]dx.\end{aligned}$$

Доказательство. Для вычисления гамильтониана $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}$ нужно вычислить интегралы вида

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g(0,a_1,\dots,a_n)\psi_1\lambda_g c^{r\text{-spin}}_{g,n+1}(e_1\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).$$

Так как $\deg c^{r\text{-spin}}_{g,n+1}(e_1\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = 2\frac{(g-1)(r-2)+\sum_{i=1}^n(\alpha_i-1)}{r}$, этот интеграл отличен от нуля только если $3g-2+n = 2g+1+\frac{(g-1)(r-2)+\sum_{i=1}^n(\alpha_i-1)}{r}$, что эквивалентно равенству

$$\sum_{i=1}^n (r-\alpha_i+1)+2g = 2r+2.$$

Таким образом, если мы зададим градуировку равенствами $|u^\alpha_k| := r-\alpha+1$ и $|\varepsilon| := 1$, то выполняется $|\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}| = 2r+2$, откуда сразу следует, что гамильтониан $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}$ является интегралом от дифференциального многочлена с конечным числом мономов, удовлетворяющих нужному условию однородности.

Вспомним также, что $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1} = (D-2)\overline{g}^{r\text{-spin}}$ и $\overline{g}^{r\text{-spin}} = \int F^{r\text{-spin}}(u^1,\dots,u^{r-1})dx + O(\varepsilon^2)$, где $F^{r\text{-spin}}$ – потенциал Дубровина–Фробениуса нашей КогТП. Явные формулы для потенциала $F^{r\text{-spin}}$ хорошо известны (см., напр., [72, теорема 2]), что позволяет нам вычислить $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}|_{\varepsilon=0}$.

Выразим затем гамильтонианы $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{\alpha,0}$ через гамильтониан $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}$ с помощью соотношения $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{\alpha,0} = \frac{\partial\overline{g}^{r\text{-spin}}}{\partial u^\alpha}$. Мы имеем коммутационные соотношения

$$\{\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}, \overline{g}^{r\text{-spin}}_{\alpha,0}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = 0, \quad \alpha = 1,\dots,r-1. \tag{2.36}$$

Оказывается, что в случае $r = 3,4,5$, если зафиксировать

$$\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}|_{\varepsilon=0} = \int (D-2)\left(F^{r\text{-spin}}(u^1,\dots,u^{r-1})\right)dx,$$

то соотношение однородности $|\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}| = 2r+2$ вместе с системой соотношений (2.36) однозначно определяют гамильтониан $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}$ с точностью до перемасштабирования вида $\varepsilon\mapsto\theta\varepsilon$, $\theta\in\mathbb{C}$. Окончательно зафиксировать гамильтониан $\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}$ позволяет тот факт, что $\mathrm{Coef}_{\varepsilon^2u^1_{xx}}\left(\frac{\delta\overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}}{\delta u^1}\right) = \frac{r-1}{12}$, который следует из леммы 2.6. Приведём теперь детали вычислений в каждом из случаев $r = 3,4,5$.

Пусть $r = 3$. Пользуясь формулой

$$F^{3\text{-spin}}(t^1,t^2) = \frac{(t^1)^2t^2}{2} + \frac{(t^2)^4}{72}$$

и соотношением однородности $|\overline{g}^{3\text{-spin}}_{1,1}| = 8$, мы записываем

$$\overline{g}^{3\text{-spin}}_{1,1} = \int\left[\frac{(u^1)^2u^2}{2} + \frac{(u^2)^4}{36} + \varepsilon^2\left(au^1u^1_{xx} + b(u^2)^2u^2_{xx}\right) + \varepsilon^4cu^2u^2_{xxxx}\right], \quad a,b,c,\in\mathbb{C}.$$

Далее мы вычисляем

$$\overline{g}^{\text{3-spin}}_{1,0} = \int u^1 u^2 dx, \qquad \overline{g}^{\text{3-spin}}_{2,0} = \int \left[\frac{(u^1)^2}{2} + \frac{(u^2)^3}{18} + \varepsilon^2 \frac{2}{3} b u^2 u^2_{xx} \right] dx. \tag{2.37}$$

Мы автоматически имеем $\{\overline{g}^{\text{3-spin}}_{1,0}, \overline{g}^{\text{3-spin}}_{1,1}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = 0$. С другой стороны, мы вычисляем

$$\frac{\delta}{\delta u^1}\{\overline{g}^{\text{3-spin}}_{2,0}, \overline{g}^{\text{3-spin}}_{1,1}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = (2a - 8b)\varepsilon^2 \left(u^2_x u^2_{xx} + \frac{1}{3} u^2 u^2_{xxx} \right) + \left(\frac{8}{3} ab - 2c \right) \varepsilon^4 u^2_{xxxxx},$$
$$\frac{\delta}{\delta u^2}\{\overline{g}^{\text{3-spin}}_{2,0}, \overline{g}^{\text{3-spin}}_{1,1}\}_{\eta^{-1}\partial_x} = \frac{-2a + 8b}{3} \varepsilon^2 u^2 u^1_{xxx} + \left(-\frac{8}{3} ab + 2c \right) \varepsilon^4 u^1_{xxxxx}.$$

Эти выражения должны быть равны нулю, поэтому мы получаем $b = \frac{a}{4}$ и $c = \frac{a^2}{3}$. Так как $a = \frac{r-1}{24} = 12$, формула (2.34) доказана.

Пусть $r = 4$. Пользуясь формулой

$$F^{\text{4-spin}}(t^1, t^2, t^3) = \frac{(t^1)^2 t^3}{2} + \frac{t^1 (t^2)^2}{2} + \frac{(t^2)^2 (t^3)^2}{16} + \frac{(t^3)^5}{960}$$

и соотношением однородности $|\overline{g}^{\text{4-spin}}_{1,1}| = 10$, мы записываем

$$\begin{aligned} \overline{g}^{\text{4-spin}}_{1,1} = \int \Bigg[& \frac{(u^1)^2 u^3}{2} + \frac{u^1 (u^2)^2}{2} + \frac{(u^2)^2 (u^3)^2}{8} + \frac{(u^3)^5}{320} + \\ & \varepsilon^2 \left(a u^1 u^1_{xx} + b u^1 u^3 u^3_{xx} + c u^1 (u^3_x)^2 + d u^2 u^2_{xx} u^3 + e (u^2_x)^2 u^3 + f (u^3)^3 u^3_{xx} \right) + \\ & \varepsilon^4 \left(g u^1 u^3_{xxxx} + h u^2 u^2_{xxxx} + k (u^3_{xx})^2 u^3 + l (u^3)^2 u^3_{xxxx} \right) + \\ & \varepsilon^6 \, m u^3 u^3_{xxxxxx} \Bigg] dx, \end{aligned}$$

где $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m \in \mathbb{C}$. Вычисления, проведённые с помощью программного пакета Wolfram Mathematica, показывают, что система соотношений (2.36) вместе с равенством $a = \frac{1}{8}$ позволяют однозначно вычислить все коэффициенты $b, c, d, e, f, g, h, k, l, m$, доказывая формулу (2.35).

В случае $r = 5$ мы пользуемся тем, что

$$F^{\text{5-spin}}(t^1, t^2, t^3, t^4) = \frac{(t^1)^2 t^4}{2} + t^1 t^2 t^3 + \frac{(t^2)^3}{6} + \frac{(t^3)^4}{60} + \frac{t^2 (t^3)^2 t^4}{10} + \frac{(t^2)^2 (t^4)^2}{20} + \frac{(t^3)^2 (t^4)^3}{150} + \frac{(t^4)^6}{15000},$$

и записываем общий вид гамильтониана $\overline{g}^{\text{5-spin}}_{1,1}$, используя условие однородности $|\overline{g}^{\text{5-spin}}_{1,1}| = 12$. Получающееся выражение содержит 29 неизвестных коэффициентов, мы его здесь не приводим. Вычисления, проделанные с помощью программного пакета Wolfram Mathematica, показывают, что система соотношений (2.36) вместе с равенством $\operatorname{Coef}_{\varepsilon^2 u^1_{xx}} \left(\frac{\delta \overline{g}^{\text{5-spin}}_{1,1}}{\delta u^1} \right) = \frac{1}{3}$ однозначно определяют гамильтониан $\overline{g}^{\text{5-spin}}_{1,1}$ и доказывают искомую формулу для гамильтониана $\overline{g}^{\text{5-spin}}_{1,1}$. $\square$

В общем случае имеется гипотеза о связи DR-иерархии, соответствующей КогТП $\{c_{g,n}^{r\text{-spin}}\}$, с *иерархией Гельфанда–Дикого* (см., напр., [32]). Кратко напомним определение последней. Рассмотрим формальные переменные $f_0, f_1, \dots, f_{r-2}$ и соответствующую алгебру дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_f$. Рассмотрим оператор

$$L := \partial_x^r + \sum_{i=0}^{r-2} \varepsilon^{i-r} f_i \partial_x^i.$$

Иерархией Гельфанда–Дикого называется следующая система УрЧП:

$$\frac{\partial L}{\partial T_m} = \varepsilon^{m-1}[(L^{m/r})_+, L], \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \backslash r\mathbb{Z}_{\geq 1}. \tag{2.38}$$

Гамильтонианы иерархии задаются формулой

$$\overline{h}_m^{\mathrm{GD}} := -\frac{r}{m+r} \varepsilon^{m+r+1} \int \operatorname{res}(L^{(m+r)/r}) dx, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \backslash r\mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Для описания скобки Пуассона рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$X := \sum_{i=0}^{r-2} (\varepsilon \partial_x)^{-i-1} \circ X_i,$$

где X_i – произвольные дифференциальные многочлены. Обозначим

$$\widetilde{L} := \varepsilon^r L = (\varepsilon \partial_x)^r + \sum_{i=0}^{r-2} f_i (\varepsilon \partial_x)^i.$$

Несложное вычисление показывает, что оператор $\varepsilon^{-1}[X, \widetilde{L}]_+$ имеет вид

$$\varepsilon^{-1}[X, \widetilde{L}]_+ = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq r-2} \left(\sum_{i \geq 0} K_i^{\mathrm{GD};\alpha\beta} \partial_x^i X_\beta \right) (\varepsilon \partial_x)^\alpha$$

для некоторых дифференциальных многочленов $K_i^{\mathrm{GD};\alpha\beta} \in \widehat{\mathcal{A}}_{f;1-i}$. В итоге, пуассонов оператор $K^{\mathrm{GD}} = (K^{\mathrm{GD};\alpha\beta})$ иерархии Гельфанда–Дикого задаётся формулой $K^{\mathrm{GD};\alpha\beta} := \sum_{i \geq 0} K_i^{\mathrm{GD};\alpha\beta} \partial_x^i$.

Для того, чтобы сформулировать гипотезу о связи DR-иерархии для КогТП $\{c_{g,n}^{r\text{-spin}}\}$ с иерархией Гельфанда–Дикого, удобно ввести промежуточные формальные переменные $w^1, \dots, w^{r-1}$ вместе с соответствующей алгеброй дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_w$. Определим следующие дифференциальные многочлены:

$$w^\alpha(u_*^*, \varepsilon) := \eta^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{g}_{\mu,0}^{r\text{-spin}}}{\delta u^1} \in \widehat{\mathcal{A}}_u, \tag{2.39}$$

$$w^\alpha(f_{*,*}, \varepsilon) = \frac{1}{(r-\alpha)(-r)^{\frac{r-\alpha-1}{2}}} \varepsilon^{r-\alpha+1} \operatorname{res}(L^{(r-\alpha)/r}) \in \widehat{\mathcal{A}}_f. \tag{2.40}$$

Лемма 2.15. *Дифференциальные многочлены $w^\alpha(u_*^*, \varepsilon)$ и $w^\alpha(f_{*,*}, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям в определении преобразования Миуры, см. определение 1.25.*

Доказательство. Нам нужно проверить, что эти дифференциальные многочлены имеют степень 0, а также, что выполняется условие невырожденности, см. последнее равенство в строке (1.43). Тот факт, что $\deg w^\alpha(u^*_*,\varepsilon)=0$, очевиден. Условие же невырожденности проверяется простым вычислением $\frac{\partial w^\alpha(u^*_*,\varepsilon)}{\partial u^\beta}\Big|_{u^*_*=\varepsilon=0}=\eta^{\alpha\mu}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} c^{r\text{-spin}}_{0,3}(e\otimes e_\mu\otimes e_\beta)=\delta^\alpha_\beta$. Значит, набор дифференциальных многочленов $w^\alpha(u^*_*,\varepsilon)$ задаёт преобразование Миуры.

Расширим градуировку deg с пространства $\widehat{\mathcal{A}}_f$ до пространства псевдодифференциальных операторов, положив $\deg\partial_x:=1$. Тогда $\deg L=r$ и $\deg(L^{(r-\alpha)/r})=r-\alpha$, откуда сразу следует, что $\deg w^\alpha(f_{*,*},\varepsilon)=0$. Далее мы вычисляем

$$\begin{aligned}w^\alpha(f_{*,*},\varepsilon)|_{f_{*,\geq 1}=0}=&\frac{1}{(r-\alpha)(-r)^{\frac{r-\alpha-1}{2}}}\operatorname{res}_{z=0}\left((z^r+f_{r-2}z^{r-2}+\ldots+f_0)^{(r-\alpha)/r}\right)=\\=&\frac{1}{(r-\alpha)(-r)^{\frac{r-\alpha-1}{2}}}\operatorname{res}_{z=0}\left(z^{r-\alpha}(1+f_{r-2}z^{-2}+\ldots+f_0z^{-r})^{(r-\alpha)/r}\right).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $w^\alpha(f_{*,*},\varepsilon)|_{f_{*,\geq 1}=0}$ является многочленом от $f_0,\ldots,f_{r-2}$, причём линейный член равен $\frac{1}{r(-r)^{\frac{r-\alpha-1}{2}}}f_{\alpha-1}$. Значит, набор дифференциальных многочленов $w^\alpha(f_{*,*},\varepsilon)$ задаёт преобразование Миуры. □

Таким образом, мы имеем преобразование Миуры, связывающее переменные f_α и u^β.

Гипотеза 2.16. *DR-иерархия и иерархия Гельфанда–Дикого связаны следующим образом:*

$$\overline{g}^{r\text{-spin}}_{\alpha,d}=\frac{1}{(-r)^{\frac{r+k-1}{2}-d}k!_r}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_k[u],\quad \alpha\in[r-1],\quad d\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\quad k=\alpha+rd,\quad k!_r:=\prod_{i=0}^{d}(\alpha+ri),$$
$$\eta^{-1}\partial_x=(-r)^{\frac{r}{2}}K^{\mathrm{GD}}_u.$$

Теорема 2.17. *Гипотеза 2.16 верна для $r\leq 5$.*

Доказательство.

Лемма 2.18. *Предположим, что для некоторого фиксированного r выполняется*

$$(-r)^{\frac{r}{2}}K^{\mathrm{GD}}_u=\eta^{-1}\partial_x,\qquad \overline{g}^{r\text{-spin}}_{1,1}=\frac{1}{(-r)^{r-1}(r+1)}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{r+1}[u].$$

Тогда гипотеза 2.16 верна для заданного r.

Доказательство. Воспользуемся следствием 1.33. Для этого нужно проверить выполнение следующих условий:

$$\frac{\delta\overline{h}^{\mathrm{GD}}_k[u]}{\delta u^\mu}\Big|_{u^*_*=\varepsilon=0}=0, \tag{2.41}$$

$$\frac{1}{(-r)^{\frac{r}{2}}}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_1[u]=\frac{1}{2}\int\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta dx, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial\overline{h}^{\mathrm{GD}}_k[u]}{\partial u^1}=\begin{cases}k(-r)^{\frac{r-2}{2}}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{k-r}[u], & \text{если } k\geq r+1,\\ (-r)^{\frac{r+k-1}{2}}k\int\eta_{k\mu}u^\mu dx, & \text{если } k\in[r-1].\end{cases} \tag{2.43}$$

Свойство (2.41) эквивалентно свойству $\frac{\delta\overline{h}_k^{\mathrm{GD}}}{\delta f_\mu}\Big|_{f_{*,*}=\varepsilon=0} = 0$, что, в свою очередь, следует из того, что $\mathrm{res}_{z=0}\left((z^r + f_{r-2}z^{r-2} + \ldots + f_0)^{(k+r)/r}\right)$ является многочленом от $f_0, f_1, \ldots, f_{r-2}$, который начинается с квадратичных членов. Так как $K^{\mathrm{GD};\alpha\mu}\frac{\delta\overline{h}_1^{\mathrm{GD}}}{\delta f_\mu} = \partial_x f_\alpha$, мы получаем $K_u^{\mathrm{GD};\alpha\mu}\frac{\delta\overline{h}_1^{\mathrm{GD}}[u]}{\delta u^\mu} = \partial_x u^\alpha$. Учитывая предположение $(-r)^{\frac{r}{2}}K_u^{\mathrm{GD}} = \eta^{-1}\partial_x$, мы заключаем, что свойство (2.42) выполняется.

Докажем теперь свойство (2.43). Пользуясь леммой 2.4, легко вывести, что $\frac{\partial w^\alpha(u^*_*,\varepsilon)}{\partial u^1} = \delta_1^\alpha$. Вычислим теперь $\frac{\partial w^\alpha(f_{*,*},\varepsilon)}{\partial f_0}$. Введём следующую градуировку: $\widetilde{\deg} f_{\alpha,i} := r - \alpha + i$, $\widetilde{\deg}\varepsilon := 0$, $\widetilde{\deg}\partial_x := 1$. Тогда $\widetilde{\deg} L = r$ и $\widetilde{\deg} w^\alpha(f_{*,*},\varepsilon) = r - \alpha + 1$. Пользуясь вычислением из леммы 2.15, мы получаем $\frac{\partial w^\alpha(f_{*,*},\varepsilon)}{\partial f_0} = \frac{1}{r(-r)^{\frac{r-2}{2}}}\delta_1^\alpha$. Значит,

$$\frac{\partial\overline{h}_k^{\mathrm{GD}}[u]}{\partial u^1} = r(-r)^{\frac{r-2}{2}}\frac{\partial\overline{h}_k^{\mathrm{GD}}}{\partial f_0}[u]. \tag{2.44}$$

Пользуясь тем, что $\frac{\partial L}{\partial f_0} = \varepsilon^{-r}$, мы получаем

$$\frac{\partial\overline{h}_k^{\mathrm{GD}}}{\partial f_0} = \begin{cases} \frac{k}{r}\overline{h}_{k-r}^{\mathrm{GD}}, & \text{если } k \geq r+1, \\ -k(-r)^{\frac{k-1}{2}}\int w^{r-k}(f_{*,*},\varepsilon)dx, & \text{если } k \in [r-1], \end{cases} \tag{2.45}$$

что сразу доказывает свойство (2.43) при $k \geq r+1$. Если же $k \in [r-1]$, то мы приходим в выводу, что свойство (2.43) эквивалентно равенству $\int w^\alpha(u^*_*,\varepsilon)dx = \int u^\alpha dx$.

Мы вычисляем

$$w^\alpha(u^*_*,\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \eta^{\alpha\mu}\sum_{n\geq 1}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[N]}\frac{\prod_{i=1}^n u^{\alpha_i}}{n!}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+2}} c_{0,n+2}^{r\text{-spin}}(e\otimes e_\mu\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = u^\alpha,$$

так как $c_{0,n+2}^{r\text{-spin}}(e\otimes e_\mu\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = \pi_1^*\left(c_{0,n+1}^{r\text{-spin}}(e_\mu\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right)$ при $n \geq 2$. Далее, в переменных p_c^γ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\eta_{\alpha\mu}\left(w^\mu(u^*_*,\varepsilon) - u^\mu\right) = \\
&= \sum_{g,n\geq 1}\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}}}\frac{(-\varepsilon^2)^g}{n!}e^{ix\sum a_j}\prod p_{a_j}^{\alpha_j}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}}\lambda_g\mathrm{DR}_g\left(-\sum a_j, 0, a_1, \ldots, a_n\right)c_{0,n+2}^{r\text{-spin}}(e\otimes e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = \\
&= \sum_{g,n\geq 1}\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}}}\frac{(-\varepsilon^2)^g}{n!}e^{ix\sum a_j}\prod p_{a_j}^{\alpha_j}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\lambda_g(\pi_1)_*\left(\mathrm{DR}_g\left(-\sum a_j, 0, a_1, \ldots, a_n\right)\right)c_{0,n+1}^{r\text{-spin}}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).
\end{aligned}$$

Последний интеграл является многочленом от $a_1, \ldots, a_n$, который равен нулю, если $\sum a_j = 0$ (в силу свойства (1.9)). Значит, этот многочлен делится на $\sum a_j$, откуда мы заключаем, что $\eta_{\alpha\mu}\left(w^\mu(u^*_*,\varepsilon) - u^\mu\right) \in \mathrm{Im}\,\partial_x$, что завершает доказательство. □

Рассмотрим по отдельности случаи $r = 2, 3, 4, 5$.

Случай $r=2$. Будем обозначать для краткости $f:=f_0$, $w:=w^1$, $u:=u^1$. Для иерархии Гельфанда–Дикого мы имеем

$$L=\partial_x^2+\varepsilon^{-2}f,\qquad \overline{h}^{\mathrm{GD}}_{2d+1}=-\frac{2\varepsilon^{2d+4}}{2d+3}\int \operatorname{res} L^{\frac{2d+3}{2}}dx,\qquad K^{\mathrm{GD}}=-2\partial_x.$$

Преобразования Миуры:

$$w(u_*,\varepsilon)=u,\qquad w(f_*,\varepsilon)=\frac{f}{2}.$$

При $k=2d+1$ мы имеем

$$\frac{1}{(-r)^{\frac{r+k-1}{2}-d}k!_r}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_k[u]=\frac{1}{-2(2d+1)!!}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{2d+1}[u]=\frac{\varepsilon^{2d+4}}{(2d+3)!!}\int\operatorname{res}\left((\partial_x^2+2\varepsilon^{-2}u)^{\frac{2d+3}{2}}\right)dx=\overline{h}^{\mathrm{KdV}}_d$$

и $-2K^{\mathrm{GD}}_u=\partial_x$. С другой стороны, КогТП $\{c^{2\text{-spin}}_{g,n}\}$ является тривиальной КогТП, поэтому DR-иерархия совпадает с иерархией КдФ. Значит, гипотеза 2.16 верна при $r=2$.

Случай $r=3$. Для иерархии Гельфанда–Дикого мы имеем

$$\begin{aligned}
L=&\partial_x^3+\varepsilon^{-2}f_1\partial_x+\varepsilon^{-3}f_0,\\
K^{\mathrm{GD}}=&\begin{pmatrix}0&-3\partial_x\\-3\partial_x&0\end{pmatrix},\\
\overline{h}^{\mathrm{GD}}_4=&\int\left(-\frac{2}{9}f_0^2f_1+\frac{f_1^4}{81}+\varepsilon\frac{2}{9}f_0f_1(f_1)_x+\varepsilon^2\left(-\frac{f_0(f_0)_{xx}}{9}+\frac{f_1^2(f_1)_{xx}}{18}\right)+\frac{\varepsilon^3}{9}f_0(f_1)_{xxx}+\frac{\varepsilon^4}{27}f_1(f_1)_{xxxx}\right)dx.
\end{aligned}$$

Преобразования Миуры (мы пользуемся формулами (2.37)):

$$\begin{aligned}
\left(w^1(u^*_*,\varepsilon),w^2(u^*_*,\varepsilon)\right)=&(u^1,u^2),\\
\left(w^1(f_{*,*},\varepsilon),w^2(f_{*,*},\varepsilon)\right)=&\left(\frac{1}{2\sqrt{-3}}\left(\frac{2}{3}f_0-\frac{\varepsilon}{3}(f_1)_x\right),\frac{f_1}{3}\right).
\end{aligned}$$

В итоге, пользуясь теоремой 2.14, прямой проверкой мы убеждаемся, что $(-3)^{\frac{3}{2}}K^{\mathrm{GD}}_u=\eta^{-1}\partial_x$ и $\frac{1}{(-3)^24}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_4[u]=\overline{g}^{3\text{-spin}}_{1,1}$. Из леммы 2.18 тогда следует, что гипотеза верна при $r=3$.

Случай $r=4$. Для иерархии Гельфанда–Дикого мы имеем

$$\begin{aligned}
L=&\partial_x^4+\varepsilon^{-2}f_2\partial_x^2+\varepsilon^{-3}f_1\partial_x+\varepsilon^{-4}f_0,\\
K^{\mathrm{GD}}=&\begin{pmatrix}-(f_2)_x-2f_2\partial_x-2\varepsilon^2\partial_x^3&2\varepsilon\partial_x^2&-4\partial_x\\-2\varepsilon\partial_x^2&-4\partial_x&0\\-4\partial_x&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Преобразования Миуры (мы пользуемся теоремой 2.14):

$$\begin{aligned}
\left(w^1(u^*_*,\varepsilon),w^2(u^*_*,\varepsilon),w^3(u^*_*,\varepsilon)\right)=&\left(u^1+\frac{\varepsilon^2}{96}u^3_{xx},u^2,u^3\right),\\
\left(w^1(f_{*,*},\varepsilon),w^2(f_{*,*},\varepsilon),w^3(f_{*,*},\varepsilon)\right)=&\left(-\frac{f_0}{16}+\frac{f_2^2}{128}+\frac{\varepsilon}{32}(f_1)_x-\frac{\varepsilon^2}{192}(f_2)_{xx},\frac{f_1}{8\sqrt{-1}}-\frac{\varepsilon}{8\sqrt{-1}}(f_2)_x,\frac{f_2}{4}\right).
\end{aligned}$$

Мы не приводим здесь выражения для гамильтониана $\overline{h}_5^{\mathrm{GD}}$ (оно очень велико), вычисления проводились с помощью программного пакета Wolfram Mathematica, с помощью которого мы также проверили (пользуясь теоремой 2.14), что $(-4)^2 K_u^{\mathrm{GD}} = \eta^{-1}\partial_x$ и $\frac{1}{(-4)^3 5}\overline{h}_5^{\mathrm{GD}}[u] = \overline{g}_{1,1}^{4\text{-spin}}$. Из леммы 2.18 тогда следует, что гипотеза верна при $r = 4$.

Случай $r = 5$. Для иерархии Гельфанда–Дикого мы имеем

$$L = \partial_x^5 + \varepsilon^{-2} f_3 \partial_x^3 + \varepsilon^{-3} f_2 \partial_x^2 + \varepsilon^{-4} f_1 \partial_x + \varepsilon^{-5} f_0,$$

$$K^{\mathrm{GD}} = \begin{pmatrix} -(f_2)_x - 2f_2\partial_x + \varepsilon\left((f_3)_{xx} + 2(f_3)_x\partial_x\right) & -2(f_3)_x - 3f_3\partial_x - 5\varepsilon^2\partial_x^3 & 5\varepsilon\partial_x^2 & -5\partial_x \\ -(f_3)_x - 3f_3\partial_x - 5\varepsilon^2\partial_x^3 & 0 & -5\partial_x & 0 \\ -5\varepsilon\partial_x^2 & -5\partial_x & 0 & 0 \\ -5\partial_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразования Миуры (мы пользуемся теоремой 2.14):

$$\begin{aligned}
&\left(w^1(u_*^*,\varepsilon), w^2(u_*^*,\varepsilon), w^3(u_*^*,\varepsilon), w^4(u_*^*,\varepsilon)\right) = \left(u^1 + \frac{\varepsilon^2}{60}u^3_{xx}, u^2 + \frac{\varepsilon^2}{60}u^4_{xx}, u^3, u^4\right), \\
&w^1(f_{*,*},\varepsilon) = -\frac{f_0}{25\sqrt{-5}} + \frac{f_2 f_3}{125\sqrt{-5}} + \varepsilon\left(\frac{(f_1)_x}{50\sqrt{-5}} - \frac{3f_3(f_3)_x}{250\sqrt{-5}}\right) - \varepsilon^3\frac{(f_3)_{xxx}}{100\sqrt{-5}}, \\
&w^2(f_{*,*},\varepsilon) = -\frac{f_1}{25} + \frac{f_3^2}{125} + \frac{\varepsilon}{25}(f_2)_x - \frac{\varepsilon^2}{75}(f_3)_{xx}, \\
&w^3(f_{*,*},\varepsilon) = \frac{f_2}{5\sqrt{-5}} - \frac{3\varepsilon}{10\sqrt{-5}}(f_3)_x, \\
&w^4(f_{*,*},\varepsilon) = \frac{f_3}{5}.
\end{aligned}$$

Пользуясь теоремой 2.14, с помощью программного пакета Wolfram Mathematica мы проверили, что $(-5)^{\frac{5}{2}} K_u^{\mathrm{GD}} = \eta^{-1}\partial_x$ и $\frac{1}{(-5)^4 6}\overline{h}_6^{\mathrm{GD}}[u] = \overline{g}_{1,1}^{5\text{-spin}}$. Из леммы 2.18 тогда следует, что гипотеза верна при $r = 5$. □

2.3 Рекурсия нового типа на плотности гамильтонианов

Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и соответствующую DR-иерархию. Введём дополнительные дифференциальные многочлены $g_{\alpha,-1} := \eta_{\alpha\mu}u^\mu$ и локальные функционалы $\overline{g}_{\alpha,-1} := \int g_{\alpha,-1}dx = \int \eta_{\alpha\mu}u^\mu dx$, $\alpha \in [N]$.

Теорема 2.19. *Имеет место следующая система соотношений:*

$$\partial_x\left((D-1)g_{\alpha,d+1}\right) = \{g_{\alpha,d}, \overline{g}_{\mathbb{1},1}\}_{\eta^{-1}\partial_x}, \quad \alpha \in [N], \quad d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}, \tag{2.46}$$

где мы напомним, что $D = \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \sum_{k\geq 0} u_k^\mu \frac{\partial}{\partial u_k^\mu}$.

Доказательство. В случае $d=-1$ равенство (2.46) эквивалентно равенству

$$\partial_x((D-1)g_{\alpha,0}) = \partial_x \frac{\delta \overline{g}_{1,1}}{\delta u^\alpha},$$

которое доказывается следующей выкладкой, основывающейся на лемме 2.4:

$$(D-1)g_{\alpha,0} = (D-1)\frac{\delta \overline{g}}{\delta u^\alpha} = \frac{\delta((D-2)\overline{g})}{\delta u^\alpha} = \frac{\delta \overline{g}_{1,1}}{\delta u^\alpha}.$$

Пусть $d \geq 0$. Рассмотрев соотношение (1.17) с $A = (-\sum_{j=1}^m b_j, b_1, \dots, b_m)$ и $s=1$, и умножив его на λ_g, мы получим

$$\begin{aligned} &-\left(\sum_{j=1}^m b_j\right)(2g-1+m)\lambda_g\psi_1 \mathrm{DR}_g\left(-\sum_{j=1}^m b_j, b_1, \dots, b_m\right) = \\ &= \sum_{\substack{I\sqcup J=[m+1]\\ 1\in I}} \sum_{\substack{g_1,g_2\geq 0\\ g_1+g_2=g}} (2g_2-1+|J|)a_I(\mathrm{gl}_{I,J})_* \left(\lambda_{g_1}\mathrm{DR}_{g_1}(A_I,-a_I)\times\lambda_{g_2}\mathrm{DR}_{g_2}(A_J,a_I)\right). \end{aligned}$$

Умножим это равенство на $\psi_1^d c_{g,m+1}(e_\alpha \otimes \otimes_{j=1}^m e_{\alpha_j})$, проинтегрируем по $\overline{\mathcal{M}}_{g,m+1}$, а дальше умножим на $e^{ix\sum_{j=1}^m b_j}\frac{\prod_{j=1}^m p_{b_j}^{\alpha_j}}{m!}$ и просуммируем по всем $g,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ и наборам $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in[N]^m$ и $(b_1,\dots,b_m)\in\mathbb{Z}^m$. Мы получим соотношение

$$i\partial_x\left((\widetilde{D}-1)g_{\alpha,d+1}\right) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\eta^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\alpha,d}}{\partial p_k^\mu}(\widetilde{D}-1)\frac{\partial \overline{g}}{\partial p_{-k}^\nu},$$

где $\widetilde{D} := \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k^\gamma \frac{\partial}{\partial p_k^\gamma}$. Так как, по лемме 2.4, выполняется $(\widetilde{D}-1)\frac{\partial\overline{g}}{\partial p_{-k}^\nu} = \frac{\partial((\widetilde{D}-2)\overline{g})}{\partial p_{-k}^\nu} = \frac{\partial \overline{g}_{\mathbb{1},1}}{\partial p_{-k}^\nu}$, мы получаем равенство (2.46). □

Набор соотношений (2.46) позволяет последовательно вычислять все дифференциальные многочлены $g_{\alpha,d}$, стартуя с дифференциальных многочленов $g_{\alpha,-1}=\eta_{\alpha\mu}u^\mu$. Подчеркнём, что для проведения рекурсивного вычисления нужно знать только лишь локальный функционал $\overline{g}_{\mathbb{1},1}$ и матрицу η. Отметим, что рекурсивные соотношения вида (2.46) никогда не встречались ранее в литературе.

Пример 2.20. Рассмотрим тривиальную КогТП. Мы знаем, что соответствующая DR-иерархия совпадает с иерархией КдФ. Система рекурсивных соотношений (2.46) даёт следующие выра-

жения для дифференциальных многочленов g_d:

$$
\begin{aligned}
g_{-1} &= u,\\
g_0 &= \frac{u^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{24}u_{xx},\\
g_1 &= \frac{u^3}{6} + \frac{\varepsilon^2}{24}uu_{xx} + \frac{\varepsilon^4}{1152}u_4,\\
g_2 &= \frac{u^4}{24} + \frac{\varepsilon^2}{48}u^2u_{xx} + \left(\frac{7u_{xx}^2}{5760} + \frac{uu_4}{1152}\right)\varepsilon^4 + \frac{\varepsilon^6}{82944}u_6,\\
g_3 &= \frac{u^5}{120} + \frac{\varepsilon^2}{144}u^3u_{xx} + \left(\frac{7uu_{xx}^2}{5760} + \frac{u^2u_4}{2304}\right)\varepsilon^4 + \left(\frac{u_3^2}{362880} + \frac{u_2u_4}{15360} + \frac{uu_6}{82944}\right)\varepsilon^6 + \frac{\varepsilon^8}{7962624}u_8,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Подчеркнём ещё раз, что даже для случая иерархии КдФ получающаяся рекурсивная процедура для вычисления плотностей гамильтонианов ранее в литературе не встречалась. Отметим ещё одну особенность. При проведении очередного рекурсивного шага нужно найти такой дифференциальный многочлен, что его образ под действием оператора ∂_x равен скобке $\{g_d, \overline{g}_1\}_{\partial_x}$. Стартуя с дифференциального многочлена $g_{-1} = u$, совершенно неочевидно, что на каждом шаге будет выполняться $\{g_d, \overline{g}_1\}_{\partial_x} \in \mathrm{Im}(\partial_x)$. Более того, мы не знаем, как это доказать, не используя отождествления иерархии КдФ с DR-иерархией.

Пример 2.21. Рассмотрим КогТП $\{c_{g,n}^{3\text{-spin}}\}$ и соответствующую DR-иерархию. По теореме 2.14, мы имеем

$$\overline{g}_{1,1}^{3\text{-spin}} = \int \left(\frac{(u^1)^2u^2}{2} + \frac{(u^2)^4}{36} + \varepsilon^2\left(\frac{(u^2)^2u_2^2}{48} + \frac{u^1u_2^1}{12}\right) + \frac{\varepsilon^4}{432}u^2u_4^2\right)dx.$$

Применяя систему рекурсивных соотношений (2.46), мы получаем следующие формулы:

$$
\begin{cases} g_{1,-1} = u^2, \\ g_{2,-1} = u^1; \end{cases}
\qquad
\begin{cases} g_{1,0} = u^1u^2 + \frac{1}{12}u_2^1\varepsilon^2, \\ g_{2,0} = \frac{\left(u^1\right)^2}{2} + \frac{\left(u^2\right)^3}{18} + \left(\frac{1}{72}\left(u_1^2\right)^2 + \frac{1}{36}u^2u_2^2\right)\varepsilon^2 + \frac{1}{864}u_4^2\varepsilon^4; \end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
g_{1,1} = \frac{1}{2}\left(u^1\right)^2u^2 + \frac{\left(u^2\right)^4}{36} + \left(\frac{1}{72}u^2\left(u_1^2\right)^2 + \frac{1}{12}u^1u_2^1 + \frac{1}{36}\left(u^2\right)^2u_2^2\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{7\left(u_2^2\right)^2}{2160} + \frac{7u_1^2u_3^2}{2160} + \frac{1}{432}u^2u_4^2\right)\varepsilon^4 + \frac{u_6^2\varepsilon^6}{15552},\\
g_{2,1} = \frac{\left(u^1\right)^3}{6} + \frac{1}{18}u^1\left(u^2\right)^3 + \left(\frac{1}{72}u^1\left(u_1^2\right)^2 + \frac{1}{72}\left(u^2\right)^2u_2^1 + \frac{1}{36}u^1u^2u_2^2\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{432}u_2^1u_2^2 + \frac{u_1^2u_3^1}{1080} + \frac{1}{864}u^2u_4^1 + \frac{1}{864}u^1u_4^2\right)\varepsilon^4 + \frac{u_6^1\varepsilon^6}{31104};
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
g_{1,2} = \left(\frac{1}{6}\left(u^1\right)^3u^2 + \frac{1}{36}u^1\left(u^2\right)^4\right) + \left(\frac{1}{72}u^1u^2\left(u_1^2\right)^2 + \frac{1}{24}\left(u^1\right)^2u_2^1 + \frac{1}{108}\left(u^2\right)^3u_2^1 + \frac{1}{36}u^1\left(u^2\right)^2u_2^2\right)\varepsilon^2\\
\quad + \left(\frac{7\left(u_1^2\right)^2u_2^1}{4320} + \frac{1}{180}u^2u_2^1u_2^2 + \frac{7u^1\left(u_2^2\right)^2}{2160} + \frac{u^2u_1^2u_3^1}{1080} + \frac{7u^1u_1^2u_3^2}{2160} + \frac{1}{864}\left(u^2\right)^2u_4^1 + \frac{1}{432}u^1u^2u_4^2\right)\varepsilon^4\\
\quad + \left(\frac{u_3^1u_3^2}{7776} + \frac{7u_2^2u_4^1}{25920} + \frac{u_2^1u_4^2}{4032} + \frac{u_1^2u_5^1}{12960} + \frac{u^2u_6^1}{15552} + \frac{u^1u_6^2}{15552}\right)\varepsilon^6 + \frac{u_8^1\varepsilon^8}{746496},\\
g_{2,2} = \frac{\left(u^1\right)^4}{24} + \frac{1}{36}\left(u^1\right)^2\left(u^2\right)^3 + \frac{\left(u^2\right)^6}{1620} + \left(\frac{1}{144}\left(u^1\right)^2\left(u_1^2\right)^2 + \frac{\left(u^2\right)^3\left(u_1^2\right)^2}{1296} + \frac{1}{72}u^1\left(u^2\right)^2u_2^1 + \frac{1}{72}\left(u^1\right)^2u^2u_2^2 + \frac{1}{648}\left(u^2\right)^4u_2^2\right)\varepsilon^2\\
\quad + \left(\frac{7\left(u_1^2\right)^4}{51840} + \frac{7u^2\left(u_2^1\right)^2}{4320} + \frac{7u^2\left(u_1^2\right)^2u_2^2}{12960} + \frac{u^1u_2^1u_2^2}{432} + \frac{7\left(u^2\right)^2\left(u_2^2\right)^2}{6480} + \frac{u^1u_1^2u_3^1}{1080} + \frac{7\left(u^2\right)^2u_1^2u_3^2}{12960} + \frac{u^1u^2u_4^1}{864} + \frac{\left(u^1\right)^2u_4^2}{1728} + \frac{\left(u^2\right)^3u_4^2}{3888}\right)\varepsilon^4\\
\quad + \left(\frac{11\left(u_2^2\right)^3}{116640} + \frac{\left(u_3^1\right)^2}{34020} + \frac{13u_1^2u_2^2u_3^2}{77760} + \frac{41u^2\left(u_3^2\right)^2}{466560} + \frac{11u_2^1u_4^1}{72576} + \frac{17\left(u_1^2\right)^2u_4^2}{311040} + \frac{u^2u_2^2u_4^2}{4320} + \frac{u^2u_1^2u_5^2}{17280} + \frac{u^1u_6^1}{31104} + \frac{\left(u^2\right)^2u_6^2}{46656}\right)\varepsilon^6\\
\quad + \left(\frac{47\left(u_4^2\right)^2}{5598720} + \frac{61u_3^2u_5^2}{5598720} + \frac{11u_2^2u_6^2}{1399680} + \frac{11u_1^2u_7^2}{5598720} + \frac{u^2u_8^2}{1119744}\right)\varepsilon^8 + \frac{u_{10}^2\varepsilon^{10}}{67184640}.
\end{cases}
$$

2.4 DR-иерархия в приближении до рода 1

Для произвольной КогТП $\{c_{g,n}\}$ рассмотрим соответствующую DR-иерархию и разложим

$$\overline{g}_{\alpha,d} = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^{2i} \overline{g}^{[2i]}_{\alpha,d}, \quad \overline{g}^{[2i]}_{\alpha,d} \in \Lambda_{u;2i}.$$

Обозначим $g^{[0]}_{\alpha,d} := g_{\alpha,d}|_{\varepsilon=0}$, $d \geq -1$, а также определим $g^{[0]}_{\alpha,-2} := 0$. Определим

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma} := \eta^{\alpha\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\mu \partial t^\beta \partial t^\gamma}\bigg|_{t^\nu = u^\nu}, \qquad C^{\alpha\gamma}_{\beta} := \eta^{\gamma\mu} C^{\alpha}_{\beta\mu},$$

где F – потенциал Дубровина–Фробениуса нашей КогТП.

Теорема 2.22. *Мы имеем*

$$\overline{g}^{[2]}_{\alpha,d} = -\frac{1}{24} \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\zeta} \eta^{\zeta\sigma} \frac{\partial}{\partial u^\sigma} (C^{\epsilon}_{\gamma\delta} C^{\mu}_{\epsilon\mu}) + \frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d-2}}{\partial u^\zeta} C^{\zeta}_{\nu\sigma} C^{\nu}_{\gamma\delta} C^{\sigma\mu}_{\mu} \right) u^\gamma_x u^\delta_x dx, \quad \alpha \in [N], \quad d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Доказательство. Из формулы (1.35) следует, что

$$\frac{\partial^2 g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\nu \partial u^\sigma} = \frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d-2}}{\partial u^\zeta} C^{\zeta}_{\nu\sigma}.$$

Значит, утверждение теоремы переписывается следующим образом:

$$\overline{g}^{[2]}_{\alpha,d} = -\frac{1}{24} \int \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\zeta} \eta^{\zeta\sigma} \frac{\partial}{\partial u^\sigma} (C^{\epsilon}_{\gamma\delta} C^{\mu}_{\epsilon\mu}) + \frac{\partial^2 g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\nu \partial u^\sigma} C^{\nu}_{\gamma\delta} C^{\sigma\mu}_{\mu} \right) u^\gamma_x u^\delta_x dx. \tag{2.47}$$

Введём вспомогательные ряды

$$f := F|_{t^\gamma = u^\gamma} \in \mathbb{C}[[u^1, \dots, u^N]],$$

$$\rho := \sum_{n\geq 1} \frac{\prod u^{\alpha_i}}{n!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,n}} \lambda_1 c_{1,n} \left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \right) \in \mathbb{C}[[u^1, \dots, u^N]],$$

$$\rho_{\alpha,d} := \sum_{n\geq 0} \frac{\prod u^{\alpha_i}}{n!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,n+1}} \lambda_1 \psi_1^d c_{1,n+1} \left(e_\alpha \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \right) \overset{(1.4)}{=\!=} \frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\lambda} \eta^{\lambda\theta} \frac{\partial \rho}{\partial u^\theta} \in \mathbb{C}[[u^1, \dots, u^N]].$$

С помощью формулы Хайна (1.11) мы вычисляем

$$\overline{g}^{[2]}_{\alpha,d} = -\sum_{n\geq 2} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_n \in \mathbb{Z} \\ a_1+\dots+a_n=0}} \frac{\prod p^{\alpha_i}_{a_i}}{n!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,n+1}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2} \psi_i - \frac{1}{2} \sum_{J\subset[n+1]} a_J^2 \delta_0^J \right) \lambda_1 \psi_{n+1}^d c_{1,n+1} \left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes e_\alpha \right),$$

где мы полагаем $a_{n+1} := 0$. Далее мы преобразуем

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2} \psi_i - \frac{1}{2} \sum_{J\subset[n+1]} a_J^2 \delta_0^J \right) \lambda_1 \overset{(1.4)}{=\!=} \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_1 + \sum_{J\subset[n+1]} \left(\sum_{j\in J} a_j^2 - a_J^2 \right) \delta_0^J \right) \lambda_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \lambda_1 \sum_{J\subset[n+1]} \left(\sum_{j\in J} a_j^2 - a_J^2 \right) \delta_0^J,$$

и получаем для $\overline{g}^{[2]}_{\alpha,d}$ выражение

$$\overline{g}^{[2]}_{\alpha,d} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\sum_{\substack{a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ a_1+\dots+a_n=0}}\frac{\prod p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,n+1}} c_{1,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\otimes e_\alpha\right)\lambda_1\psi_{n+1}^d\sum_{J\subset[n+1]}\left(\sum_{j\in J}a_j^2-a_J^2\right)\delta_0^J.$$

Мы разбиваем сумму по $J\subset[n+1]$ в предыдущей формуле на две суммы, в зависимости от того, принадлежит ли число $n+1$ множеству J или нет:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\sum_{\substack{a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ a_1+\dots+a_n=0}}\frac{\prod p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,n+1}} c_{1,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\otimes e_\alpha\right)\lambda_1\psi_{n+1}^d\sum_{n+1\in J\subset[n+1]}\left(\sum_{j\in J}a_j^2-a_J^2\right)\delta_0^J = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial^2 g^{[0]}_{\alpha,d}}{\partial u^\mu\partial u^\gamma}u^\gamma_{xx}-\partial_x^2\frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d}}{\partial u^\mu}\right)\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\rho}{\partial u^\nu}dx = \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\int\frac{\partial^3 g^{[0]}_{\alpha,d}}{\partial u^\mu\partial u^\gamma\partial u^\delta}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\rho}{\partial u^\nu}u^\gamma_x u^\delta_x dx = \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial u^\mu}\left(\frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\lambda}C^\lambda_{\gamma\delta}\right)\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\rho}{\partial u^\nu}u^\gamma_x u^\delta_x dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\sum_{\substack{a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ a_1+\dots+a_n=0}}\frac{\prod p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,n+1}} c_{1,n+1}\left(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}\otimes e_\alpha\right)\lambda_1\psi_{n+1}^d\sum_{n+1\notin J\subset[n+1]}\left(\sum_{j\in J}a_j^2-a_J^2\right)\delta_0^J = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^\mu\partial u^\gamma}u^\gamma_{xx}-\partial_x^2\frac{\partial f}{\partial u^\mu}\right)\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\rho_{\alpha,d}}{\partial u^\nu}dx = \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\int\frac{\partial\rho_{\alpha,d}}{\partial u^\mu}C^\mu_{\gamma\delta}u^\gamma_x u^\delta_x dx = \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial u^\mu}\left(\frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\lambda}\eta^{\lambda\theta}\frac{\partial\rho}{\partial u^\theta}\right)C^\mu_{\gamma\delta}u^\gamma_x u^\delta_x dx.
\end{aligned}$$

В итоге, мы получаем

$$\overline{g}^{[2]}_{\alpha,d} = -\frac{1}{2}\int\left[2\frac{\partial^2 g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\lambda\partial u^\mu}C^\lambda_{\gamma\delta}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\rho}{\partial u^\nu}+\frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d-1}}{\partial u^\lambda}\eta^{\lambda\theta}\frac{\partial}{\partial u^\theta}\left(C^\mu_{\gamma\delta}\frac{\partial\rho}{\partial u^\mu}\right)\right]u^\gamma_x u^\delta_x dx. \tag{2.48}$$

Из соотношения (1.5) следует, что

$$\rho = \frac{1}{24}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2 f}{\partial u^\mu\partial u^\nu}.$$

Подставив это выражение в правую части формулы (2.48), мы получим формулу (2.47). □

2.5 Квантование

В этом разделе мы покажем, что для произвольной КогТП соответствующая DR-иерархия обладает квантованием, которое очень естественно строится с помощью геометрии пространств

модулей кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Мы также докажем квантовое обобщение рекурсии на плотности гамильтонианов DR-иерархии, обсуждавшейся в разделе 2.3.

2.5.1 Основные понятия деформационного квантования

Напомним сначала кратко необходимые нам понятия деформационного квантования. Рассмотрим целое число $N \geq 1$, произвольную симметричную $N \times N$ матрицу с комплексными коэффициентами $M = (m^{\alpha\beta})$ и соответствующую скобку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_M$ на пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N$. Пусть $\hbar$ – формальная переменная. *Умножение Мояля* $\star$ на пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$ определяется формулой

$$f \star g := f\left(e^{\sum_{k>0} i\hbar k m^{\alpha\beta} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_k^\alpha} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_{-k}^\beta}}\right) g, \quad f,g \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]],$$

которую нужно понимать в следующем смысле: мы раскладываем экспоненту в ряд по $\hbar$, причём коэффициентами являются многочлены от частных производных по переменным p_a^α, а дальше применяем каждую частную производную либо к f, либо к g в зависимости от того, куда направлена стрелка над рассматриваемой частной производной. Иначе говоря, можно ввести дополнительный набор формальных переменных q_a^α, $\alpha \in [N]$, $a \in \mathbb{Z}$, и тогда, определив $g(q_*^*, \varepsilon, \hbar) := g|_{p_a^\alpha \mapsto q_a^\alpha}$, мы имеем

$$f \star g = e^{\sum_{k>0} i\hbar k m^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial p_k^\alpha} \frac{\partial}{\partial q_{-k}^\beta}} \left(f(p_*^*, \varepsilon, \hbar) g(q_*^*, \varepsilon, \hbar)\right)|_{q_c^\gamma \mapsto p_c^\gamma}.$$

Умножение Мояля задаёт на векторном пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$ структуру ассоциативной алгебры, мы будем называть эту алгебру *алгеброй Вейля*. Алгебра Вейля является деформационным квантованием пуассоновой алгебры $\left(\widehat{\mathcal{B}}_N, \{\cdot,\cdot\}_M\right)$ в том смысле, что для произвольных элементов $f = \sum_{i\geq 0} f_i \hbar^i \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$ и $h = \sum_{i\geq 0} h_i \hbar^i \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$, где $f_i, h_i \in \widehat{\mathcal{B}}_N$, выполняется $[f,h] = \hbar\{f_0, h_0\}_M + O(\hbar^2)$.

Предположим, что у нас есть набор элементов $\overline{h}_i \in \widehat{\mathcal{B}}_N$, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, удовлетворяющий свойству $\{\overline{h}_i, \overline{h}_j\}_M = 0$. *Квантованием* набора $(\overline{h}_i)_{i\geq 1}$ называется набор $(\overline{H}_i)_{i\geq 1}$, $\overline{H}_i \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$, удовлетворяющий свойствам $\overline{H}_i = \overline{h}_i + O(\hbar)$ и $[\overline{H}_i, \overline{H}_j] = 0$, где коммутатор берётся относительно умножения Мояля.

Докажем теперь ряд технических результатов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ и $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Для любого $S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим

$$\widetilde{C}^{d_1,d_2,\ldots,d_k}(S) := \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ a_1+\ldots+a_k = S}} a_1^{d_1} \ldots a_k^{d_k}.$$

Здесь мы определению полагаем $0^0 := 1$.

Лемма 2.23.

1. *Функция* $\widetilde{C}^{d_1,\dots,d_k}(S)$ *является многочленом от* S *с рациональными коэффициентами.*

2. *Степень этого многочлена равна* $k-1+\sum_{i=1}^k d_i$*, а коэффициент при старшей степени* S *равен* $\frac{\prod_{i=1}^k d_i!}{(k-1+\sum_{i=1}^k d_i)!}$.

Доказательство. Для $d \geq 0$ определим формальный ряд $\mathrm{Li}_{-d}(z)$ равенством

$$\mathrm{Li}_{-d}(z) := \sum_{k\geq 0} k^d z^k.$$

Ясно, что

$$\prod_{i=1}^k \mathrm{Li}_{-d_i}(z) = \sum_{S\geq 0} \widetilde{C}^{d_1,\dots,d_k}(S) z^S.$$

Далее мы вычисляем

$$\mathrm{Li}_{-d}(z) = \left(z\frac{d}{dz}\right)^d \frac{1}{1-z} = d!\frac{z^d}{(1-z)^{d+1}} + \sum_{i=2}^d a_{i,d}\frac{z^{i-1}}{(1-z)^i},$$

где $a_{i,d}$ – некоторые целые числа. Подставляя $\frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z} - 1$ в последнее выражение, мы представляем ряд $\mathrm{Li}_{-d}(z)$ в следующем виде:

$$\mathrm{Li}_{-d}(z) = \frac{d!}{(1-z)^{d+1}} + \sum_{i=1}^d \frac{b_{i,d}}{(1-z)^i}, \quad b_{i,d} \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда мы получаем

$$\prod_{i=1}^k \mathrm{Li}_{-d_i}(z) = \frac{\prod_{i=1}^k d_i!}{(1-z)^{k+\sum d_i}} + \sum_{i=1}^{k-1+\sum d_i} \frac{e_{i,d_1,\dots,d_k}}{(1-z)^i}, \quad e_{i,d_1,\dots,d_k} \in \mathbb{Z}. \tag{2.49}$$

Вспомним теперь, что для $d \geq 1$ мы имеем $\frac{1}{(1-z)^d} = \sum_{i\geq 0} \frac{(i+d-1)(i+d-2)\dots(i+1)}{(d-1)!} z^i$, откуда сразу следует, что коэффициент при z^S в правой части равенства (2.49) является многочленом от S. Вторая часть леммы отсюда также ясно следует. □

Рассмотрим разложение

$$\widetilde{C}^{d_1,\dots,d_k}(S) = \sum_{j=0}^{k-1+\sum d_i} \widetilde{C}_j^{d_1,\dots,d_k} S^j, \quad \widetilde{C}_j^{d_1,\dots,d_k} \in \mathbb{Q}.$$

Заметим, что если одно из d_i-ых ненулевое, то $\widetilde{C}^{d_1,\dots,d_k}(0) = \widetilde{C}_0^{d_1,\dots,d_k} = 0$.

Лемма 2.24. *Предположим, что* $d_1,\dots,d_k \geq 1$*. Тогда коэффициент* $\widetilde{C}_j^{d_1,\dots,d_k}$ *равен нулю, если* $j \neq k-1+\sum d_i \pmod 2$.

Доказательство. Мы имеем

$$\prod_{i=1}^{k}\mathrm{Li}_{-d_i}(z)=\sum_{j=1}^{k-1+\sum d_i}\widetilde{C}_j^{d_1,\dots,d_k}\mathrm{Li}_{-j}(z). \tag{2.50}$$

Из формулы $\mathrm{Li}_{-d}(z)=\left(z\frac{d}{dz}\right)^d\frac{1}{1-z}$ мы видим, что формальный ряд $\mathrm{Li}_{-d}(z)$ является разложением рациональной функции от z в нуле, а также, что

$$\mathrm{Li}_{-d}\left(\frac{1}{z}\right)=(-1)^{d+1}\mathrm{Li}_{-d}(z),\quad d\geq 1,$$

где это равенство рассматривается как равенство в пространстве $\mathbb{Q}(z)$. Сделав замену $z\mapsto\frac{1}{z}$ в равенстве (2.50), мы получим

$$\prod_{i=1}^{k}\mathrm{Li}_{-d_i}(z)=\sum_{j=1}^{k-1+\sum d_i}(-1)^{k-1+\sum d_i-j}\widetilde{C}_j^{d_1,\dots,d_k}\mathrm{Li}_{-j}(z).$$

Сравнивая это равенство с равенством (2.50) и пользуясь тем, что рациональные функции $\mathrm{Li}_{-d}(z)\in\mathbb{Q}(z)$, $d\geq 0$, линейно независимы, мы получаем утверждение леммы. □

Для $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ и $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ определим следующие числа

$$C_j^{a_1,\dots,a_n}:=i^{n-1+\sum a_i-j}\widetilde{C}_j^{a_1,\dots,a_n},\quad j\geq 1,$$

которые по предыдущей лемме являются рациональными. Для неотрицательных целых чисел s определим следующие выражения:

$$\delta_+^{(s)}(x):=\sum_{k\geq 0}(ik)^s e^{ikx}\in\mathbb{C}[[e^{ix}]],\qquad \delta_-^{(s)}(x):=\sum_{k<0}(ik)^s e^{ikx}\in\mathbb{C}[[e^{-ix}]],$$
$$\delta^{(s)}(x):=\delta_+^{(s)}(x)+\delta_-^{(s)}(x)\in\mathbb{C}[[e^{ix},e^{-ix}]].$$

Лемма 2.25. *Пусть $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ и $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$. Тогда мы имеем*

$$\prod_{i=1}^{n}\delta_+^{(a_i)}(x)=(-i)^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1+\sum a_i}C_j^{a_1,\dots,a_n}\delta_+^{(j)}(x).$$

Доказательство. Мы имеем

$$\prod_{i=1}^{n}\delta_+^{(a_i)}(x)=i^{\sum a_i}\sum_{S\geq 0}\widetilde{C}^{a_1,\dots,a_n}(S)e^{iSx}=\sum_{j=1}^{n-1+\sum a_i}i^{\sum a_i-j}\widetilde{C}_j^{a_1,\dots,a_n}\delta_+^{(j)}(x)=$$
$$=(-i)^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1+\sum a_i}i^{n-1+\sum a_i-j}\widetilde{C}_j^{a_1,\dots,a_n}\delta_+^{(j)}(x)=(-i)^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1+\sum a_i}C_j^{a_1,\dots,a_n}\delta_+^{(j)}.$$

□

Рассмотрим произвольные элементы $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u[[\hbar]]$ и $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u[[\hbar]]$, которые, в силу вложений $\widehat{\mathcal{A}}_u[[\hbar]] \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}, \hbar]]$ и $\widehat{\Lambda}_u[[\hbar]] \hookrightarrow \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$, мы рассматриваем также как элементы пространств $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}, \hbar]]$ и $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$, соответственно. Значит, определён коммутатор $[f, \overline{h}] \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}, \hbar]]$.

Лемма 2.26. *Для любых $f \in \widehat{\mathcal{A}}_u[[\hbar]]$ и $\overline{h} \in \widehat{\Lambda}_u[[\hbar]]$ мы имеем $[f, \overline{h}] \in \widehat{\mathcal{A}}_u[[\hbar]]$. Более того имеется следующая формула:*

$$[f, \overline{h}] = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ r_1, \ldots, r_n \geq 0 \\ s_1, \ldots, s_n \geq 0}} \frac{(-i)^{n-1}\hbar^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial u_{s_1}^{\alpha_1} \ldots \partial u_{s_n}^{\alpha_n}} (-1)^{\sum_{k=1}^n r_k} \left(\prod_{k=1}^n m^{\alpha_k \beta_k} \right) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{2n-1+\sum_{k=1}^n (s_k + r_k)} C_j^{s_1 + r_1 + 1, \ldots, s_n + r_n + 1} \partial_x^j \frac{\partial^n h}{\partial u_{r_1}^{\beta_1} \ldots \partial u_{r_n}^{\beta_n}},$$

где $\overline{h} = \int h dx$.

Доказательство. Обозначим $h(y) := h|_{u_k^\alpha \mapsto \sum_{a \in \mathbb{Z}} (ia)^k p_a^\alpha e^{iay}} \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{iy}, e^{-iy}, \hbar]]$. Заметим сразу, что $\frac{\partial}{\partial p_a^\alpha} f(x) = \sum_{s \geq 0} (ia)^s e^{iax} \frac{\partial f}{\partial u_s^\alpha}(x)$. Пользуясь этим, мы вычисляем

$$f(x) \star h(y) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ a_1, \ldots, a_n \geq 1}} \frac{\hbar^n}{n!} \frac{\partial^n f(x)}{\partial p_{a_1}^{\alpha_1} \ldots \partial p_{a_n}^{\alpha_n}} \left(\prod_{k=1}^n i a_k m^{\alpha_k \beta_k} \right) \frac{\partial^n h(y)}{\partial p_{-a_1}^{\beta_1} \ldots \partial u_{-a_n}^{\beta_n}} =$$
$$= \sum_{\substack{n \geq 0 \\ r_1, \ldots, r_n \geq 0 \\ s_1, \ldots, s_n \geq 0}} \frac{\hbar^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial u_{s_1}^{\alpha_1} \ldots \partial u_{s_n}^{\alpha_n}}(x) \left(\prod_{k=1}^n (-1)^{r_k} m^{\alpha_k \beta_k} \delta_+^{(r_k + s_k + 1)}(x - y) \right) \frac{\partial^n h}{\partial u_{r_1}^{\beta_1} \ldots \partial u_{r_n}^{\beta_n}}(y) =$$
$$= f(x)g(y) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ r_1, \ldots, r_n \geq 0 \\ s_1, \ldots, s_n \geq 0}} \frac{(-i)^{n-1}\hbar^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial u_{s_1}^{\alpha_1} \ldots \partial u_{s_n}^{\alpha_n}}(x) \frac{\partial^n h}{\partial u_{r_1}^{\beta_1} \ldots \partial u_{r_n}^{\beta_n}}(y) \times$$
$$\times \left(\prod_{k=1}^n (-1)^{r_k} m^{\alpha_k \beta_k} \right) \left(\sum_{j=1}^{2n-1+\sum_{k=1}^n (r_k + s_k)} C_j^{s_1 + r_1 + 1, \ldots, s_n + r_n + 1} \delta_+^{(j)}(x - y) \right).$$

Заметим теперь, что при вычислении $h(y) \star f(x)$ получается такое же выражение с той лишь разницей, что последний множитель заменится на

$$\left(\prod_{k=1}^n (-1)^{s_k} m^{\alpha_k \beta_k} \right) \left(\sum_{j=1}^{2n-1+\sum_{k=1}^n (r_k + s_k)} C_j^{s_1 + r_1 + 1, \ldots, s_n + r_n + 1} \delta_+^{(j)}(y - x) \right) =$$
$$= - \left(\prod_{k=1}^n (-1)^{r_k} m^{\alpha_k \beta_k} \right) \left(\sum_{j=1}^{2n-1+\sum_{k=1}^n (r_k + s_k)} C_j^{s_1 + r_1 + 1, \ldots, s_n + r_n + 1} \delta_-^{(j)}(x - y) \right),$$

где мы воспользовались леммой 2.24. В итоге, мы получаем

$$[f(x),h(y)]=\sum_{\substack{n\geq 1\\ r_1,\dots,r_n\geq 0\\ s_1,\dots,s_n\geq 0}}\frac{(-i)^{n-1}\hbar^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial u_{s_1}^{\alpha_1}\dots\partial u_{s_n}^{\alpha_n}}(x)\frac{\partial^n g}{\partial u_{r_1}^{\beta_1}\dots\partial u_{r_n}^{\beta_n}}(y)\times$$
$$\times\left(\prod_{k=1}^{n}(-1)^{r_k}m^{\alpha_k\beta_k}\right)\left(\sum_{j=1}^{2n-1+\sum_{k=1}^n(r_k+s_k)}C_j^{s_1+r_1+1,\dots,s_n+r_n+1}\delta^{(j)}(x-y)\right).$$

Для вычисления нужного нам коммутатора $[f,\overline{h}]$, необходимо теперь взять коэффициент при e^{i0y} в последнем выражении. Воспользовавшись очевидным тождеством $\mathrm{Coef}_{e^{i0y}}(\delta^{(j)}(x-y)Q(y))=\partial_x^j Q$, $Q\in\widehat{\mathcal{A}}_u[[\hbar]]$, мы сразу получим утверждение леммы. □

2.5.2 Квантовые гамильтонианы DR-иерархии

Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и соответствующую DR-иерархию. Мы будем рассматривать умножение Мояля на пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$, задаваемое матрицей $M=\eta^{-1}$. Для каждых $\alpha\in[N]$ и $d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим следующий элемент в пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$:

$$\overline{G}_{\alpha,d}:=\sum_{g\geq 0,\,n\geq 1}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ \sum a_i=0}}\frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!}\times$$
$$\times\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\mathrm{DR}_g\left(0,a_1,\dots,a_n\right)\left(\sum_{j=0}^{g}(i\hbar)^{g-j}(-\varepsilon^2)^j\lambda_j\right)\psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right).$$

Ясно, что $\overline{G}_{\alpha,d}=\overline{g}_{\alpha,d}+O(\hbar)$. В силу полиномиальности DR-цикла (см. раздел 1.1.4), мы имеем $\overline{G}_{\alpha,d}\in\widehat{\Lambda}_u[[\hbar]]$.

Теорема 2.27. *Для любых $\alpha_1,\alpha_2\in[N]$ и $d_1,d_2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется соотношение*

$$[\overline{G}_{\alpha_1,d_1},\overline{G}_{\alpha_2,d_2}]=0.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную КогТП $\{c'_{g,n}\colon V^{\otimes n}\to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и определим следующие элементы в пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$:

$$\overline{G}'_{\alpha,d}:=\sum_{g\geq 0,\,n\geq 1}(i\hbar)^g\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ \sum a_i=0}}\frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!}\times\left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}}\mathrm{DR}_g\left(0,a_1,\dots,a_n\right)\psi_1^d c'_{g,n+1}(e_\alpha\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right).$$

Из аксиом КогТП и определения умножения Мояля несложно понять, что если умножить класс $D_{1,2;A,g}$ на класс

$$(i\hbar)^g c'_{g,n+2}(\otimes_{j=1}^n e_{\mu_j}\otimes e_{\alpha_1}\otimes e_{\alpha_2})\psi_{n+1}^{d_1}\psi_{n+2}^{d_2},$$

проинтегрировать по $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}$, а дальше умножить на $\frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\mu_i}}{n!}$ и просуммировать по $g \geq 0$, $n \geq 2$, $\mu_1, \dots, \mu_n \in [N]$ и всем возможным векторам DR-данных A, то получится выражение

$$(i\hbar)^{-1} \left(\overline{G}'_{\alpha_1,d_1} \star \overline{G}'_{\alpha_2,d_2} - \overline{G}'_{\alpha_1,d_1} \cdot \overline{G}'_{\alpha_2,d_2} \right),$$

где точкой мы обозначаем обычное умножение. Значит, из соотношения $D_{1,2;A,g} - D_{2,1;A,g} = 0$ мы сразу получаем коммутационное соотношение $[\overline{G}'_{\alpha_1,d_1}, \overline{G}'_{\alpha_2,d_2}] = 0$. Осталось теперь только заметить, что если выбрать

$$c'_{g,n}(\otimes e_{\alpha_i}) = c_{g,n}(\otimes e_{\alpha_i}) \left(1 + \left(\frac{-\varepsilon^2}{i\hbar} \right) \lambda_1 + \ldots + \left(\frac{-\varepsilon^2}{i\hbar} \right)^g \lambda_g \right),$$

то мы получим в точности $\overline{G}'_{\alpha,d} = \overline{G}_{\alpha,d}$. □

Таким образом, набор элементов $\overline{G}_{\alpha,d} \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]]$, $\alpha \in [N]$, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, задаёт квантование набора гамильтонианов DR-иерархии. Мы будем называть набор элементов $(\overline{G}_{\alpha,d})$ *квантовой DR-иерархией*, а сами элементы $\overline{G}_{\alpha,d}$ – *квантовыми гамильтонианами*.

Лемма 2.28. *Мы имеем* $\overline{G}_{\mathbb{1},0} = \frac{1}{2} \int \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta dx$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству первого равенства в утверждении леммы 2.4. □

2.5.3 Примеры

Квантовая иерархия Кортевега–де Фриза

Рассмотрим тривиальную КогТП. Мы знаем, что соответствующая DR-иерархия совпадает с иерархией КдФ. Рассмотрим теперь квантовую DR-иерархию. Вычислим квантовую коррекцию $\overline{G}_d - \overline{g}_d$ для малых d. Мы уже знаем, что $\overline{G}_0 = \overline{g}_0 = \frac{1}{2} \int u^2 dx$. Пусть $d \geq 1$. Мы должны вычислить интегралы

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g(0, a_1, \dots, a_n) \psi_1^d \lambda_j, \quad g, n, d \geq 1, \quad j < g.$$

Из соображений размерности следует, что интеграл является ненулевым только если выполняется соотношение $2g - j + n = d + 2$.

Пусть $d = 1$. Соотношение $2g - j + n = 3$ выполняется только при $g = 1$, $j = 0$ и $n = 1$, и мы имеем

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \mathrm{DR}_1(0,0)\psi_1 = -\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \psi_1 \lambda_1 = -\frac{1}{24}.$$

Мы заключаем, что

$$\overline{G}_1 = \int \left(\frac{u^3}{6} + \frac{\varepsilon^2}{24} u u_{xx} - \frac{i\hbar}{24} u \right) dx.$$

Пусть $d=2$. Соотношение $2g-j+n=4$ выполняется только в двух случаях: при $g=1$, $j=0$, $n=2$ или $g=2$, $j=1$, $n=1$. Случай $g=1$, $j=0$, $n=2$ соответствует интегралу

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \mathrm{DR}_1(0,a,-a)\psi_1^2 \overset{(1.18)}{=\!=\!=} \mathrm{Coef}_{z^2}\left(\frac{S(az)S(az)}{S(z)}\right) = \frac{2a^2-1}{24},$$

что даёт вклад $i\hbar\frac{-2uu_{xx}-u^2}{48}$ в квантовый гамильтониан $\overline{G}_2$. Случай $g=2$, $j=1$, $n=1$ соответствует интегралу

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \mathrm{DR}_2(0,0)\psi_1^2\lambda_1 = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \lambda_2\lambda_1\psi_1 = \frac{1}{2880},$$

где в последнем равенстве мы использовали результат из статьи [41, формула (8)]. Это даёт вклад $-i\hbar\varepsilon^2\frac{u}{2880}$ в квантовый гамильтониан $\overline{G}_2$. В итоге,

$$\overline{G}_2 = \int\left(\frac{u^4}{24}+\varepsilon^2\frac{u^2u_{xx}}{48}+\varepsilon^4\frac{uu_{xxxx}}{480}-i\hbar\frac{2uu_{xx}+u^2}{48}-i\hbar\varepsilon^2\frac{u}{2880}\right)dx.$$

Квантовая иерархия уравнения двухслойной жидкости

Рассмотрим КогТП с $V=\mathbb{C}$, $e_1=1$, $\eta=1$, задаваемую равенством

$$c_{g,n}(e_1^{\otimes n}) = 1+\mu\lambda_1+\ldots+\mu^g\lambda_g \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}),$$

где μ – произвольный комплексный параметр. Как мы знаем из раздела 2.2.2, соответствующая DR-иерархия совпадает с иерархией уравнения двухслойной жидкости, и в частности

$$\overline{g}_1 := \int\left(\frac{u^3}{6}+\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\mu^{g-1}\frac{|B_{2g}|}{2(2g)!}uu_{2g}\right)dx.$$

Вычислим квантовый гамильтониан $\overline{G}_1$.

Лемма 2.29. *Мы имеем*

$$\overline{G}_1 = \int\left(\frac{u^3}{6}+\sum_{g\geq 1}(\varepsilon^2-i\hbar\mu)\varepsilon^{2g-2}\mu^{g-1}\frac{|B_{2g}|}{2(2g)!}uu_{2g}-\frac{i\hbar}{24}u\right)dx.$$

Доказательство. Вычислим разность $\overline{G}_1-\overline{g}_1$. Для этого мы должны вычислить интегралы

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g(0,a_1,\ldots,a_n)\psi_1\lambda_k\lambda_{g-j},$$

где $g,j,n\geq 1$ и $k\leq g$. Из соображений размерности следует, что должно выполняться равенство $(g-k)+j+n=3$. Возможен лишь следующий набор случаев:

1. $j=n=1$ и $k=g-1$.

2. $j=1$, $n=2$ и $k=g$.

3. $j=2$, $n=1$ и $k=g$.

Случай 1 соответствует интегралу

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \mathrm{DR}_g(0,0)\psi_1\lambda_{g-1}^2 = (-1)^g \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \psi_1\lambda_g\lambda_{g-1}^2 = \begin{cases} (-1)^g \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \psi_1\lambda_g(2\lambda_g\lambda_{g-2}) = 0, & \text{если } g\geq 2, \\ -\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \psi_1\lambda_1 = -\frac{1}{24}, & \text{если } g=1, \end{cases}$$

что даёт вклад $-\int \frac{i\hbar}{24} u dx$ в разность $\overline{G}_1 - \overline{g}_1$.

Случай 2 соответствует интегралу

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,3}} \mathrm{DR}_g(0,a,-a)\psi_1\lambda_g\lambda_{g-1} = a^{2g}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!},$$

где мы воспользовались результатом из статьи [26, теорема 1.3]. Соответствующий вклад в разность $\overline{G}_1 - \overline{g}_1$ получается следующим:

$$-i\hbar \int \left(\sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g-2}\mu^g \frac{|B_{2g}|}{2(2g)!} u u_{2g} \right) dx. \tag{2.51}$$

Случай 3 соответствует интегралу $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \mathrm{DR}_g(0,0)\psi_1\lambda_g\lambda_{g-2} = (-1)^g \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \psi_1\lambda_g^2\lambda_{g-2} = 0$, который не даёт никакого вклада. □

Квантовая расширенная иерархия Тоды

Рассмотрим КогТП $\{c_{g,n}^{\mathbb{CP}^1} : H^*(\mathbb{CP}^1)^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ (см. пример 1.9) как семейство КогТП, зависящих от комплексного параметра q. В качестве базиса e_1, e_2 в пространстве $V = H^*(\mathbb{CP}^1)$ выберем единицу и класс, двойственный точке. В разделе 2.2.3 мы описали соответствующую DR-иерархию, связав её с расширенной иерархией Тоды. Рассмотрим теперь квантовую DR-иерархию.

Предложение 2.30. *Мы имеем*

$$\begin{aligned} \overline{G}_{1,1} = \int \Bigg(& \frac{(u^1)^2u^2}{2} + u^1\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\right) - 1\right)u^1 + q\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\right)u^2 - 2\right)e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} + qu^2 \\ & + \frac{i\hbar}{\varepsilon^2}u^1\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\right) - 1\right)u^2 - \frac{i\hbar}{12}u^1\Bigg)dx. \end{aligned}$$

Доказательство. Классическая часть $\overline{G}_{1,1}\big|_{\hbar=0}$ установлена теоремой 2.10. Вычислим квантовую поправку. Нам нужно вычислить интегралы

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g(0,a_1,\dots,a_n)\psi_1\lambda_{g-j}c_{g,n+1,d}^{\mathbb{CP}^1}(e_1\otimes\otimes_{i=1}^n e_{\gamma_i}), \quad g,j,n\geq 1.$$

Из подсчёта размерностей вытекает, что интеграл нетривиален, только если выполняется соотношение

$$j = 2 - 2d + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\deg(e_{\gamma_i})}{2} - 1 \right).$$

Из того, что $j \geq 1$ и выражения в скобках неположительны, сразу следует, что $d = 0$. Значит,

$$j = 2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\deg(e_{\gamma_i})}{2} - 1 \right)$$

и $j \leq 2$. Вспомним, что

$$c^{\mathbb{CP}^1}_{g,a+b,0}(e_1^{\otimes a} \otimes e_2^{\otimes b}) = \begin{cases} 2(-1)^{g-1}\lambda_{g-1}, & \text{если } b = 0, \\ (-1)^g \lambda_g, & \text{если } b = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что $n \leq 2$. Дальнейшие вычисления разбиваются на несколько случаев:

1. $j = n = 1$, тогда $\gamma_1 = 1$;
2. $j = 1$ и $n = 2$, тогда $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{1, 2\}$;
3. $j = 2$, тогда $n = 1$ и $\gamma_1 = 2$.

Случай $j = n = 1$ соответствует интегралам

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \mathrm{DR}_g(0,0)\psi_1\lambda_{g-1}c^{\mathbb{CP}^1}_{g,2,0}\left(e_1^{\otimes 2}\right) = (-1)^g \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \lambda_g\psi_1\lambda_{g-1}c^{\mathbb{CP}^1}_{g,2,0}\left(e_1^{\otimes 2}\right) = -2\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \lambda_g\lambda_{g-1}^2\psi_1.$$

Так как $\lambda_{g-1}^2 = 2\lambda_{g-2}\lambda_g$ при $g \geq 2$, интеграл зануляется при $g \geq 2$. Если $g = 1$, интеграл равен $-\frac{1}{12}$, и соответствующий вклад в квантовый гамильтониан $\overline{G}_{1,1}$ равен

$$-\int \frac{i\hbar}{12} u^1 dx.$$

Случай $j = 1$ и $n = 2$ соответствует интегралам

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,3}} \mathrm{DR}_g(0,a,-a)\psi_1\lambda_{g-1}c^{\mathbb{CP}^1}_{g,3,0}\left(e_1^{\otimes 2}\otimes e_2\right) &= (-1)^g \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,3}} \mathrm{DR}_g(0,a,-a)\psi_1\lambda_{g-1}\lambda_g = \\ &= (-1)^g 2g \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \mathrm{DR}_g(a,-a)\lambda_{g-1}\lambda_g \overset{(2.9)}{=} \\ &= (-1)^g a^{2g}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}, \end{aligned}$$

которые дают следующий вклад в квантовый гамильтониан $\overline{G}_{1,1}$:

$$i\hbar \int \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2(g-1)} \frac{B_{2g}}{(2g)!} u_{2g}^2 u^1 dx = \int \frac{i\hbar}{\varepsilon^2} u^1 \left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\right) - 1 \right) u^2 dx.$$

Случай $j=2$ соответствует интегралам

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \mathrm{DR}_g(0,0)\psi_1\lambda_{g-2}c^{\mathbb{CP}^1}_{g,2,0}\,(e_1\otimes e_2) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,2}} \lambda_g^2\psi_1\lambda_{g-2} = 0,$$

и значит дополнительного вклада в квантовый гамильтониан этот случай не даёт. □

Мы доказали (см. теорему 2.12), что DR-иерархия для КогТП $\{c^{\mathbb{CP}^1}_{g,n}\}$ связана с расширенной иерархией Тоды преобразованием Миуры

$$v^1(u^*_*,\varepsilon) = e^{\frac{\varepsilon\partial_x}{2}}u^1, \qquad v^2(u^*_*,\varepsilon) = S(\varepsilon\partial_x)u^2, \tag{2.52}$$

и следующим треугольным преобразованием гамильтонианов:

$$\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p} = \sum_{i=0}^{p+1}(S_i)^\mu_\alpha \overline{g}_{\mu,p-i}[v], \tag{2.53}$$

где матрицы S_i были определены равенством (2.25). При этом $K^{\mathrm{Td}}_u = \eta^{-1}\partial_x$.

Полученное нами квантование DR-иерархии позволяет проквантовать расширенную иерархию Тоды. Действительно, рассмотрим алгебру

$$\widehat{\mathcal{B}}^{\sim}_2 := \mathbb{C}[\widetilde{p}^*_{\geq 1}][[\widetilde{p}^*_{\leq 0},\varepsilon]]$$

со скобкой Пуассона $\{\cdot,\cdot\}^\sim$, задаваемой равенством

$$\{\widetilde{p}^\alpha_m,\widetilde{p}^\beta_n\}^\sim := \frac{e^{im\varepsilon}-1}{\varepsilon}\delta_{m+n,0}\eta^{\alpha\beta}.$$

С помощью подстановки $v^\alpha_n \mapsto \sum_{a\in\mathbb{Z}}(ia)^n\widetilde{p}^\alpha_a e^{iax}$ гамильтонианы расширенной иерархии Тоды естественным образом становятся элементами пуассоновой алгебры $\widehat{\mathcal{B}}^{\sim}_2$, и там попарно коммутируют. Преобразование Миуры (2.52) индуцирует изоморфизм пуассоновых алгебр $\widehat{\mathcal{B}}_2$ и $\widehat{\mathcal{B}}^{\sim}_2$, задаваемый равенством

$$\widetilde{p}^1_n(p^*_*,\varepsilon) := e^{\frac{in\varepsilon}{2}}p^1_n, \qquad \widetilde{p}^2_n(p^*_*,\varepsilon) := S(in\varepsilon)p^2_n. \tag{2.54}$$

Деформационным квантованием пуассоновой алгебры $\widehat{\mathcal{B}}^{\sim}_2$ является деформированная алгебра Вейля $\widehat{\mathcal{B}}^{\sim}_2[[\hbar]]$, где деформированное умножение Мояля задаётся коммутационным соотношением

$$[\widetilde{p}^\alpha_m,\widetilde{p}^\beta_n] := \hbar\frac{e^{im\varepsilon}-1}{\varepsilon}\delta_{m+n,0}\eta^{\alpha\beta}.$$

Если мы применим отображение (2.54) к квантовым гамильтонианам $\overline{G}_{\alpha,p}$ и возьмём композицию с треугольным преобразованием (2.53), то мы получим квантовые гамильтонианы расширенной иерархии Тоды $\overline{H}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,p}$. Например, для квантового гамильтониана $\overline{H}^{\mathrm{Td}}_{1,1}$ мы получим выражение

$$\overline{H}^{\mathrm{Td}}_{1,1} = \int\left(\frac{(v^1)^2}{2}\mathcal{B}_-v^2 + \left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\right)-1\right)v^1\cdot\left(v^1+\frac{i\hbar}{\varepsilon^2}\mathcal{B}_-v^2\right)+\right.$$
$$\left.+q\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{\varepsilon\partial_x}{2}\right)v^2-2\right)e^{v^2}-\frac{i\hbar}{12}v^1\right)dx.$$

2.5.4 Квантовая рекурсия

В этом разделе мы докажем обобщение теоремы 2.19, дающее набор рекурсивных соотношений для вычисления квантовых гамильтонианов $\overline{G}_{\alpha,d}$, стартуя с квантового гамильтониана $\overline{G}_{\mathbb{1},1}$.

Для каждых $\alpha \in [N]$ и $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим следующий элемент в пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}, \hbar]]$:

$$G_{\alpha,d} := \sum_{g,n\geq 0} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}}} \frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!} e^{ix\sum a_j} \times$$
$$\times \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(-\sum a_j, a_1, \dots, a_n\right) \left(\sum_{j=0}^{g} (i\hbar)^{g-j} (-\varepsilon^2)^j \lambda_j \right) \psi_1^d c_{g,n+1}(e_\alpha \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \right).$$

Ясно, что $\overline{G}_{\alpha,d} = \int G_{\alpha,d} dx$ и $G_{\alpha,d} = g_{\alpha,d} + O(\hbar)$. В силу полиномиальности DR-цикла (см. раздел 1.1.4), мы имеем $G_{\alpha,d} \in \widehat{\mathcal{A}}_u[[\hbar]]$. Определим $G_{\alpha,-1} := \eta_{\alpha\mu} u^\mu$.

Определим

$$\overline{G} := \sum_{g\geq 0,\, n\geq 1} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}\\ \sum a_i = 0}} \frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \mathrm{DR}_g\left(a_1, \dots, a_n\right) \left(\sum_{j=0}^{g} (i\hbar)^{g-j} (-\varepsilon^2)^j \lambda_j \right) c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \right).$$

Лемма 2.31. *Имеют место равенства*

$$\overline{G}_{\mathbb{1},1} = (D^\hbar - 2)\overline{G}, \qquad \overline{G}_{\alpha,0} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial u^\alpha}, \qquad G_{\alpha,0} = \frac{\delta \overline{G}}{\delta u^\alpha},$$

где $D^\hbar := \sum_{n\geq 0} u_n^\alpha \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + 2\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 2.4. □

Теорема 2.32. *Для всех* $\alpha \in [N]$ *и* $d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ *мы имеем*

$$\partial_x (D^\hbar - 1) G_{\alpha,d+1} = \frac{1}{\hbar} \left[G_{\alpha,d}, \overline{G}_{\mathbb{1},1} \right]. \tag{2.55}$$

Доказательство. При $d = -1$ равенство (2.55) эквивалентно равенству

$$\partial_x ((D^\hbar - 1) G_{\alpha,0}) = \partial_x \frac{\delta \overline{G}_{1,1}}{\delta u^\alpha},$$

которое доказывается следующей выкладкой:

$$(D^\hbar - 1) G_{\alpha,0} = (D^\hbar - 1) \frac{\delta \overline{G}}{\delta u^\alpha} = \frac{\delta ((D^\hbar - 2)\overline{G})}{\delta u^\alpha} = \frac{\delta \overline{G}_{1,1}}{\delta u^\alpha}.$$

Предположим, что $d \geq 0$. Рассмотрим произвольную КогТП $\{c'_{g,n} \colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и определим следующие элементы в пространстве $\widehat{\mathcal{B}}_N[[e^{ix}, e^{-ix}, \hbar]]$:

$$G'_{\alpha,d} :=$$
$$= \sum_{g,n\geq 0} (i\hbar)^g \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}}} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(-\sum a_i, a_1, \dots, a_n\right) \psi_1^d c'_{g,n+1}(e_\alpha \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) \right) \frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!} e^{i(\sum a_j)x},$$

а также элемент

$$\overline{G}' := \sum_{g\geq 0,\, n\geq 1} (i\hbar)^g \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}\\ \sum a_i=0}} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \mathrm{DR}_g\left(a_1,\ldots,a_n\right) c'_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i})\right) \frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!} \in \widehat{\mathcal{B}}_N[[\hbar]].$$

Рассмотрим соотношение (1.17) с $A = (-\sum_{j=1}^m b_j, b_1, \ldots, b_m)$ и $s = 1$, умножим его на $\psi_1^d c'_{g,m+1}(e_\alpha \otimes \otimes_{j=1}^m e_{\alpha_j})$, проинтегрируем по $\overline{\mathcal{M}}_{g,m+1}$, а дальше умножим на $(2g-1+m)(i\hbar)^g e^{ix\sum_{j=1}^m b_j} \frac{\prod_{j=1}^m p_{b_j}^{\alpha_j}}{m!}$ и просуммируем по всем $g, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и наборам $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in [N]^m$ и $(b_1,\ldots,b_m) \in \mathbb{Z}^m$. Мы получим соотношение

$$i\partial_x\left((D^\hbar - 1)G'_{\alpha,d+1}\right) = \frac{1}{i\hbar}\left[(D^\hbar - 2)\overline{G}', G'_{\alpha,d}\right].$$

Подставив

$$c'_{g,n}(\otimes e_{\alpha_i}) = c_{g,n}(\otimes e_{\alpha_i})\left(1 + \left(\frac{-\varepsilon^2}{i\hbar}\right)\lambda_1 + \ldots + \left(\frac{-\varepsilon^2}{i\hbar}\right)^g \lambda_g\right),$$

мы получим

$$\partial_x\left((D^\hbar - 1)G_{\alpha,d+1}\right) = \frac{1}{\hbar}\left[G_{\alpha,d}, (D^\hbar - 2)\overline{G}\right],$$

и осталось только заметить, что $(D^\hbar - 2)\overline{G} = \overline{G}_{\mathbb{1},1}$. □

Лемма 2.33. *Для всех $\alpha \in [N]$ и $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется соотношение*

$$\frac{\partial G_{\alpha,d}}{\partial u^{\mathbb{1}}} = G_{\alpha,d-1}. \tag{2.56}$$

Доказательство. В случае $d = 0$ мы вычисляем

$$\frac{\partial G_{\alpha,0}}{\partial u^{\mathbb{1}}} = \frac{\partial \frac{\delta\overline{G}}{\delta u^\alpha}}{\partial u^{\mathbb{1}}} = \frac{\delta \frac{\partial\overline{G}}{\partial u^{\mathbb{1}}}}{\delta u^\alpha} = \frac{\delta\overline{G}_{\mathbb{1},0}}{\delta u^\alpha} = \eta_{\alpha\mu}u^\mu = G_{\alpha,-1}.$$

Предположим, что $d \geq 1$. Ясно, что

$$\frac{\partial G_{\alpha,d}}{\partial u^{\mathbb{1}}} = \sum_{g\geq 0,\, n\geq \delta_{g,0}} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in[N]\\ a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}}} \frac{\prod_{i=1}^n p_{a_i}^{\alpha_i}}{n!} e^{ix\sum a_j} \times$$
$$\times \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}} \mathrm{DR}_g\left(-\sum a_j, a_1, \ldots, a_n, 0\right)\left(\sum_{j=0}^g (i\hbar)^{g-j}(-\varepsilon^2)^j\lambda_j\right)\psi_1^d c_{g,n+2}(e_\alpha \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes e)\right).$$

Далее мы вычисляем

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2}} \mathrm{DR}_g\left(-\sum a_j, a_1, \ldots, a_n, 0\right)\left(\sum_{j=0}^g (i\hbar)^{g-j}(-\varepsilon^2)^j\lambda_j\right)\psi_1^d c_{g,n+2}(e_\alpha \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i} \otimes e) =$$
$$= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \mathrm{DR}_g\left(-\sum a_j, a_1, \ldots, a_n\right)\left(\sum_{j=0}^g (i\hbar)^{g-j}(-\varepsilon^2)^j\lambda_j\right)\underbrace{(\pi_{n+2})_*(\psi_1^d)}_{=\psi_1^{d-1}} c_{g,n+1}(e_\alpha \otimes \otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}),$$

с единственным исключением, когда $g = 0$ и $n = 1$: в этом случае первый интеграл равен 0. Лемма доказана. □

Ясно, что набор рекурсивных соотношений (2.55) позволяет восстановить дифференциальный многочлен $G_{\alpha,d+1} \in \widehat{\mathcal{A}}_u[[\hbar]]$, с точностью до константных членов (то есть элементов пространства $\mathbb{C}[[\varepsilon,\hbar]]$), если известны дифференциальный многочлен $G_{\alpha,d}$ и локальный функционал $\overline{G}_{1,1}$. С другой стороны, соотношение (2.55) нечувствительно к константным членам в $G_{\alpha,d}$. Мы видим, что все дифференциальные многочлены $G_{\alpha,d}$ восстанавливаются с точностью до константных членов по локальному функционалу $\overline{G}_{1,1}$ (учитывая тот факт, что $G_{\alpha,-1} = \eta_{\alpha\mu}u^\mu$). Константные члены можно после этого восстановить, используя соотношение (2.56). Мы заключаем, что все плотности $G_{\alpha,d}$ однозначно задаются локальным функционалом $\overline{G}_{1,1}$. Значит, и вся квантовая DR-иерархия восстанавливается по локальному функционалу $\overline{G}_{1,1}$.

Пример 2.34. Для тривиальной КогТП мы имеем

$$\overline{G}_1 = \int \left(\frac{u^3}{6} + \frac{\varepsilon^2}{24} u u_{xx} - \frac{i\hbar}{24} u \right) dx$$

и рекурсия (2.55) даёт следующие выражения для элементов G_0, G_1, G_2:

$$\begin{aligned}
G_0 =& \frac{u^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{24} u_{xx} - \frac{i\hbar}{24}, \\
G_1 =& \frac{u^3}{6} + \frac{\varepsilon^2}{24} u u_{xx} + \frac{\varepsilon^4}{1152} u_{xxxx} - i\hbar \frac{u + u_{xx}}{24} - \frac{i\hbar\varepsilon^2}{2880}, \\
G_2 =& \frac{u^4}{24} + \varepsilon^2 \frac{u^2 u_2}{48} + \varepsilon^4 \left(\frac{7u_2^2}{5760} + \frac{u u_4}{1152} \right) + \varepsilon^6 \frac{u_6}{82944} - i\hbar \frac{2uu_2 + u^2}{48} - i\hbar\varepsilon^2 \frac{u + 5u_2 + 4u_4}{2880} \\
& - \frac{i\hbar\varepsilon^4}{120960} - \hbar^2 \frac{7}{5760}.
\end{aligned}$$

2.6 Бигамильтонова структура DR-иерархии

2.6.1 Явная формула и основная гипотеза

Рассмотрим произвольную однородную КогТП $\{c_{g,n} \colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ (см. определение 1.11) и соответствующую DR-иерархию. Определим диагональную $N \times N$ матрицу

$$\mu := \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N), \quad \text{где} \quad \mu_\alpha := q_\alpha - \frac{\delta}{2}.$$

В силу предложения 1.22, выполняется соотношение

$$\mu\eta + \eta\mu = 0.$$

Рассмотрим оператор

$$\widehat{E} := \sum_{n \geq 0} \left((1 - q_\alpha) u_n^\alpha + \delta_{n,0} r^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial u_n^\alpha} + \frac{1 - \delta}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$$

в пространстве дифференциальных многочленов $\widehat{\mathcal{A}}_u$.

Напомним, что для произвольного локального функционала $\overline{h}$ определение матричных дифференциальных операторов $\widehat{\Omega}^k(\overline{h})$ было дано в разделе 1.3.5.

Определение 2.35. Определим матричный дифференциальный оператор K^{DR} равенством

$$K^{\mathrm{DR}} := \widehat{E}\left(\widehat{\Omega}(\overline{g})\right) \circ \partial_x + \widehat{\Omega}(\overline{g})_x \circ \left(\frac{1}{2} - \mu\right) + \partial_x \circ \widehat{\Omega}^1(\overline{g}) \circ \partial_x, \tag{2.57}$$

где обозначение $\widehat{E}\big(\widehat{\Omega}(\overline{g})\big)$ (соответственно, $\widehat{\Omega}(\overline{g})_x$) означает, что мы применяем оператор $\widehat{E}$ (соответственно, ∂_x) к коэффициентам оператора $\widehat{\Omega}(\overline{g})$.

Гипотеза 2.36.

1. *Оператор K^{DR} является пуассоновым и, более того, он согласован с оператором $\eta^{-1}\partial_x$.*

2. *Выполняется следующая система соотношений (в пространстве эволюционных операторов):*

$$\left\{\cdot, \overline{g}_{\alpha,d}\right\}_{K^{\mathrm{DR}}} = \left(d + \frac{3}{2} + \mu_\alpha\right)\left\{\cdot, \overline{g}_{\alpha,d+1}\right\}_{\eta^{-1}\partial_x} + A^\beta_\alpha \left\{\cdot, \overline{g}_{\beta,d}\right\}_{\eta^{-1}\partial_x}, \quad \alpha \in [N],\ d \in \mathbb{Z}_{\geq -1}, \tag{2.58}$$

где мы напомним, что $A^\beta_\alpha = \eta^{\beta\nu}A_{\nu\alpha}$ и $A_{\alpha\beta} = r^\nu c_{0,3}(e_\nu \otimes e_\alpha \otimes e_\beta)$.

Таким образом, гипотеза утверждает, что DR-иерархия является бигамильтоновой.

2.6.2 Частичные проверки гипотезы в общем случае

Кососимметричность скобки $\{\cdot,\cdot\}_{K^{\mathrm{DR}}}$

Лемма 2.37. *Имеется следующее выражение для оператора K^{DR}:*

$$K^{\mathrm{DR}} = \partial_x \circ \widehat{\Omega}(\overline{g}) \circ \left(\frac{1}{2} - \mu\right) + \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \circ \widehat{\Omega}(\overline{g}) \circ \partial_x + \eta^{-1}A\eta^{-1}\partial_x + \partial_x \circ \widehat{\Omega}^1(\overline{g}) \circ \partial_x, \tag{2.59}$$

где $A = (A_{\alpha\beta})$, а константы $A_{\alpha\beta}$ были определены в предложении 1.13.

Доказательство. Равенство (2.59) эквивалентно равенству

$$\widehat{E}\left(\widehat{\Omega}(\overline{g})\right) = \widehat{\Omega}(\overline{g}) \circ \left(\frac{1}{2} - \mu\right) + \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \circ \widehat{\Omega}(\overline{g}) + \eta^{-1}A\eta^{-1},$$

которое в свою очередь эквивалентно переписывается как

$$\widehat{E}\left(L_\alpha\left(\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\beta}\right)\right) = (q_\alpha + q_\beta + 1 - \delta)L_\alpha\left(\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\beta}\right) + A_{\alpha\beta}.$$

Заметим, что, так как $\dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = 3g-3+n$, выполняется равенство

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \lambda_g \mathrm{DR}_g(a_1,\dots,a_n)\frac{1}{2}\operatorname{Deg} c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = (g-3+n)\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \lambda_g \mathrm{DR}_g(a_1,\dots,a_n) c_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}).$$

Умножим обе части равенства (1.28) на $\lambda_g \mathrm{DR}_g(a_1,\dots,a_n)$, проинтегрируем по $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ и возьмём производящий ряд, мы получим

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \overline{g}}{\partial \varepsilon} - 3\overline{g} + \sum_{a\in\mathbb{Z}} p_a^\alpha \frac{\partial \overline{g}}{\partial p_a^\alpha}\right) + \left(r^\alpha \frac{\partial \overline{g}}{\partial u^\alpha} - \int \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta dx\right) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} q_\alpha p_a^\alpha \frac{\partial \overline{g}}{\partial p_a^\alpha} + \left(\frac{\delta}{2}\varepsilon\frac{\partial \overline{g}}{\partial \varepsilon} - \delta\overline{g}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{a\in\mathbb{Z}} (1-q_\alpha) p_a^\alpha \frac{\partial \overline{g}}{\partial p_a^\alpha} + r^\alpha \frac{\partial \overline{g}}{\partial u^\alpha} + \frac{1-\delta}{2}\varepsilon\frac{\partial \overline{g}}{\partial \varepsilon} = (3-\delta)\overline{g}.$$

Заметим, что в переменных u_d^α оператор $\sum_{a\in\mathbb{Z}}(1-q_\alpha)p_a^\alpha \frac{\partial}{\partial p_a^\alpha}$ переписывается как $\sum_{k\geq 0}(1-q_\alpha)u_k^\alpha \frac{\partial}{\partial u_k^\alpha}$. Значит,

$$\widehat{E}(\overline{g}) = (3-\delta)\overline{g} + \int \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta dx,$$

откуда следует, что

$$\widehat{E}\left(L_\alpha\left(\frac{\delta \overline{g}}{\delta u^\beta}\right)\right) = L_\alpha\left(\frac{\delta(\widehat{E}\overline{g})}{\delta u^\beta}\right) - (2-q_\alpha-q_\beta)L_\alpha\left(\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\beta}\right) = (q_\alpha+q_\beta+1-\delta)L_\alpha\left(\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\beta}\right) + A_{\alpha\beta},$$

что и требовалось. □

Следствие 2.38. *Оператор K^{DR} удовлетворяет свойству $(K^{\mathrm{DR}})^\dagger = -K^{\mathrm{DR}}$, и значит скобка $\{\cdot,\cdot\}_{K^{\mathrm{DR}}}$ кососимметрична.*

Доказательство. Немедленно вытекает из предыдущей леммы и леммы 1.42. □

Бигамильтонова рекурсия при $d=-1$

Предложение 2.39. *Равенство (2.58) выполняется при $d=-1$.*

Доказательство. При $d=-1$ равенство (2.58) эквивалентно равенству

$$K^{\mathrm{DR};\beta\gamma}\frac{\delta}{\delta u^\gamma}\left(\int \eta_{\alpha\nu}u^\nu dx\right) = \left(\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)\eta^{\beta\gamma}\partial_x\frac{\delta\overline{g}_{\alpha,0}}{\delta u^\gamma} + A_\alpha^\nu \eta^{\beta\gamma}\partial_x\frac{\delta}{\delta u^\gamma}\left(\int \eta_{\nu\theta}u^\theta dx\right).$$

Вариационная производная локального функционала $\int u^* dx$ равна константе, поэтому, раскрывая определение оператора K^{DR}, мы получаем, что предыдущее равенство эквивалентно

$$\widehat{\Omega}(\overline{g})_x^{\beta\gamma}\left(\left(\frac{1}{2}-\mu_\gamma\right)\eta_{\gamma\alpha}\right) = \left(\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)\eta^{\beta\gamma}\partial_x\frac{\delta\overline{g}_{\alpha,0}}{\delta u^\gamma}.$$

Раскрывая определение оператора $\widehat{\Omega}(\overline{g})$ и используя свойство $\mu\eta+\eta\mu=0$, мы видим, что предыдущее равенство эквивалентно равенству

$$\left(\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)\eta^{\beta\gamma}\partial_x\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\gamma}\right)=\left(\mu_\alpha+\frac{1}{2}\right)\eta^{\beta\gamma}\partial_x\frac{\delta\overline{g}_{\alpha,0}}{\delta u^\gamma},$$

для доказательства которого нужно лишь заметить, что

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\gamma}\right)=\frac{\delta}{\delta u^\gamma}\left(\frac{\partial\overline{g}}{\partial u^\alpha}\right)\overset{\text{лемма 2.4}}{=}\frac{\delta\overline{g}_{\alpha,0}}{\delta u^\gamma}.$$

□

Род 0

Под проверкой гипотезы 2.36 в роде 0 мы имеем в виду её проверку, если положить $\varepsilon=0$.

Предложение 2.40. *Гипотеза 2.36 верна в роде* 0.

Доказательство. Рассмотрим потенциал Дубровина–Фробениуса $F=F(t^1,\dots,t^N)$, ассоциированный с нашей КогТП. Мы имеем $\overline{g}|_{\varepsilon=0}=\int F(u^1,\dots,u^N)dx$ и значит

$$K^{\mathrm{DR};\alpha\beta,[0]}:=K^{\mathrm{DR};\alpha\beta}\big|_{\varepsilon=0}=g^{\alpha\beta}\partial_x+\partial_x b^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}-\mu_\beta\right),\quad\text{где}$$

$$b^{\alpha\beta}:=\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\frac{\partial^2F}{\partial t^\mu\partial t^\nu}\bigg|_{t^\theta\mapsto u^\theta}\quad\text{и}\quad g^{\alpha\beta}:=((1-q_\nu)u^\nu+r^\nu)\frac{\partial b^{\alpha\beta}}{\partial u^\nu}.$$

Тот факт, что пара операторов $(\eta^{-1}\partial_x,K^{\mathrm{DR};[0]})$ образует пару согласованных пуассоновых операторов, был доказан в работе [34, теорема 6.3]. Значит, первая часть гипотезы доказана при $\varepsilon=0$.

Докажем теперь вторую часть гипотезы при $\varepsilon=0$. Мы уже знаем, что равенство (2.58) верно при $d=-1$. Пусть $d\geq 0$. Обозначим $g^{[0]}_{\alpha,d}:=g_{\alpha,d}|_{\varepsilon=0}$. Заметим, что $g^{[0]}_{\alpha,d}=\frac{\partial\mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_d}\Big|_{t^\beta_b\mapsto u^\beta\delta_{b,0}}$, где $\mathcal{F}_0$ – потенциал нашей КогТП в роде 0 (см. раздел 1.2.4). Нам нужно проверить, что

$$K^{\mathrm{DR};\beta\gamma,[0]}\frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d}}{\partial u^\gamma}\overset{?}{=}\left(d+\frac{3}{2}+\mu_\alpha\right)\eta^{\beta\gamma}\partial_x\frac{\partial g^{[0]}_{\alpha,d+1}}{\partial u^\gamma}+\eta^{\beta\gamma}\partial_x\frac{\partial g^{[0]}_{\mu,d}}{\partial u^\gamma}A^\mu_\alpha$$

или, что эквивалентно,

$$K^{\mathrm{DR};\beta\gamma,[0]}\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d}\overset{?}{=}\underbrace{\left(d+\frac{3}{2}+\mu_\alpha\right)\eta^{\beta\gamma}\partial_x\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d+1}+\eta^{\beta\gamma}\partial_x\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\mu,d}A^\mu_\alpha}_{=\eta^{\beta\gamma}\partial_x\left((d+\frac{3}{2}+\mu_\alpha)\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d+1}+\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\mu,d}A^\mu_\alpha\right)},\tag{2.60}$$

где определение $\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d}$ было дано в разделе 1.3.4.

Пользуясь тем, что $K^{\mathrm{DR}} = -(K^{\mathrm{DR}})^\dagger$, мы получаем

$$K^{\mathrm{DR};\beta\gamma,[0]}\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d} = \left(\partial_x \circ g^{\beta\gamma} + \left(\mu_\beta - \frac{1}{2}\right)\partial_x b^{\beta\gamma}\right)\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d}.$$

Из равенства (1.35) следует, что $g^{\beta\gamma}\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d} = \eta^{\beta\gamma}((1-q_\nu)u^\nu + r^\nu)\frac{\partial\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d+1}}{\partial u^\nu}$ и $\partial_x b^{\beta\gamma}\cdot\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d} = \eta^{\beta\gamma}\partial_x\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d+1}$. Таким образом, левая часть равенства (2.60) равна

$$\eta^{\beta\gamma}\partial_x\left(((1-q_\nu)u^\nu + r^\nu)\frac{\partial\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d+1}}{\partial u^\nu} + \left(-\mu_\gamma - \frac{1}{2}\right)\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d+1}\right),$$

где мы воспользовались соотношением $\mu\eta + \eta\mu = 0$. Значит, равенство (2.60) следует из

$$((1-q_\nu)u^\nu + r^\nu)\frac{\partial\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d+1}}{\partial u^\nu} \stackrel{?}{=} (d+2+\mu_\alpha+\mu_\gamma)\,\Omega^{[0]}_{\gamma,0;\alpha,d+1} + \Omega^{[0]}_{\gamma,0;\mu,d}A^\mu_\alpha,$$

которое доказывается применением оператора $\frac{\partial^2}{\partial t_0^\gamma \partial t^\alpha_{d+1}}$ к обеим частям равенства (1.29), после чего нужно заменить $t^\nu_p \mapsto \delta_{p,0}u^\nu$. □

Скобка Схоутена–Ниенхейса операторов $\eta^{-1}\partial_x$ и K^{DR}

Как мы обсуждали в разделе 1.3.1, тот факт, что оператор K^{DR} является пуассоновым и согласован с пуассоновым оператором $\eta^{-1}\partial_x$, равносилен системе из двух равенств:

$$[B_{K^{\mathrm{DR}}}, B_{K^{\mathrm{DR}}}] = 0, \qquad [B_{K^{\mathrm{DR}}}, B_{\eta^{-1}\partial_x}] = 0.$$

Мы можем доказать второе равенство.

Предложение 2.41. *Мы имеем* $[B_{K^{\mathrm{DR}}}, B_{\eta^{-1}\partial_x}] = 0$.

Доказательство. Из равенства (1.47) следует, что для доказательства предложения нам достаточно представить локальное бивекторное поле $B_{K^{\mathrm{DR}}}$ в виде $[V_{\overline{R}}, B_{\eta^{-1}\partial_x}]$ для некоторого вектора $\overline{R} \in (\widehat{\mathcal{A}}^0_u)^N$. Это будет содержанием леммы 2.42.

Выберем плотность $g \in \widehat{\mathcal{A}}^0_{u;0}$ для локального функционала $\overline{g} \in \widehat{\Lambda}^0_{u;0}$ и определим вектор $\overline{R} = (R^1, \dots, R^N) \in (\widehat{\mathcal{A}}^0_{u;0})^N$ равенством

$$R^\alpha := \eta^{\alpha\beta}\left(\left(-\frac{1}{2} - \mu_\beta\right)\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\beta} - \frac{1}{2}A_{\beta\gamma}u^\gamma + \partial_x\mathcal{T}_{\beta,1}(g)\right),$$

где оператор $\mathcal{T}_{\beta,1}$ определён в разделе 1.3.5. Заметим, что если выбрать другую плотность локального функционала $\overline{g}$, $g \mapsto g + \partial_x h$, $h \in \widehat{\mathcal{A}}^0_{u;-1}$, то локальное векторное поле $V_{\overline{R}}$ поменяется следующим образом: $V_{\overline{R}} \mapsto V_{\overline{R}} - [\int h dx, B_{\eta^{-1}\partial_x}]$. Следовательно, скобка Схоутена–Ниенхейса $[V_{\overline{R}}, B_{\eta^{-1}\partial_x}]$ не зависит от выбора плотности локального функционала $\overline{g}$.

Лемма 2.42. *Мы имеем* $B_{K^{\mathrm{DR}}} = [V_{\overline{R}}, B_{\eta^{-1}\partial_x}]$.

Доказательство. В процессе доказательства, для сокращения записи, мы будем обозначать оператор K^{DR} через K. Разобъём дифференциальный многочлен R^α в сумму $R^\alpha = R^\alpha_1 + R^\alpha_2 + R^\alpha_3$, где

$$R^\alpha_1 := -\eta^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}+\mu_\beta\right)\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\beta}, \qquad R^\alpha_2 := -\frac{1}{2}A^\alpha_\gamma u^\gamma, \qquad R^\alpha_3 := \eta^{\alpha\beta}\partial_x\mathcal{T}_{\beta,1}(g).$$

Пользуясь равенством (2.59), разобъём оператор K в сумму трёх кососимметрических операторов, $K = K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)}$, где

$$\begin{aligned}
K^{(1)} &:= \partial_x \circ \widehat{\Omega}(\overline{g}) \circ \left(\frac{1}{2}-\mu\right) + \left(\frac{1}{2}-\mu\right)\circ\widehat{\Omega}(\overline{g})\circ\partial_x,\\
K^{(2)} &:= \eta^{-1}A\eta^{-1}\partial_x,\\
K^{(3)} &:= \partial_x\circ\widehat{\Omega}^1(\overline{g})\circ\partial_x.
\end{aligned}$$

Докажем, что для $i = 1,2,3$ выполняется $B_{K^{(i)}} = [V_{\overline{R}_i}, B_{\eta^{-1}\partial_x}]$.

При $i = 1$ мы вычисляем

$$\begin{aligned}
K^{(1);\alpha\beta} &= \left(\partial_x\circ\widehat{\Omega}(\overline{g})^\dagger\circ\left(\frac{1}{2}-\mu\right) + \left(\frac{1}{2}-\mu\right)\circ\widehat{\Omega}(\overline{g})\circ\partial_x\right)^{\alpha\beta} =\\
&= \eta^{\alpha\nu}\partial_x\circ L_\nu\left(\eta^{\beta\gamma}\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\gamma}\left(\frac{1}{2}-\mu_\beta\right)\right)^\dagger + L_\nu\left(\eta^{\alpha\gamma}\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\gamma}\left(\frac{1}{2}-\mu_\alpha\right)\right)\circ\eta^{\nu\beta}\partial_x =\\
&= \eta^{\alpha\nu}\partial_x\circ L_\nu\left(\eta^{\beta\gamma}\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\gamma}\left(\frac{1}{2}+\mu_\gamma\right)\right)^\dagger + L_\nu\left(\eta^{\alpha\gamma}\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\gamma}\left(\frac{1}{2}+\mu_\gamma\right)\right)\circ\eta^{\nu\beta}\partial_x.
\end{aligned}$$

Из равенства (1.49) следует теперь, что $B_{K^{(1)}} = [V_{\overline{R}_1}, B_{\eta^{-1}\partial_x}]$.

При $i = 2$ мы вычисляем

$$K^{(2);\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(A^\alpha_\nu\circ\eta^{\nu\beta}\partial_x + \eta^{\alpha\nu}\partial_x\circ A^\beta_\nu\right),$$

и, опять применяя равенство (1.49), мы получаем соотношение $B_{K^{(2)}} = [V_{\overline{R}_2}, B_{\eta^{-1}\partial_x}]$.

При $i = 3$, пользуясь соотношением (1.41), мы вычисляем

$$\begin{aligned}
K^{(3);\alpha\beta} &= \partial_x\circ\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}L^1_\nu\left(\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^\mu}\right)\circ\partial_x =\\
&= \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\partial_x\circ\left(\sum_{m\geq0}(-\partial_x)^m\circ L^1_\nu\left(\frac{\partial g}{\partial u^\mu_m}\right) + \sum_{m\geq1}(-1)^m m\partial_x^{m-1}\circ L^0_\nu\left(\frac{\partial g}{\partial u^\mu_m}\right)\right)\circ\partial_x =\\
&= \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\sum_{m,n\geq0}(-\partial_x)^{m+1}\circ\left((m+1)\frac{\partial^2 g}{\partial u^\mu_{m+1}\partial u^\nu_n} - (n+1)\frac{\partial^2 g}{\partial u^\mu_m\partial u^\nu_{n+1}}\right)\circ\partial_x^{n+1} =\\
&= \left(\sum_{m\geq0}(m+1)(-\partial_x)^{m+1}\circ L_\nu\left(\eta^{\alpha\mu}\frac{\partial g}{\partial u^\mu_{m+1}}\right)\right)\circ\eta^{\nu\beta}\partial_x\\
&\quad + \eta^{\alpha\mu}\partial_x\circ\left(\sum_{n\geq0}L_\mu\left(\eta^{\beta\nu}\frac{\partial g}{\partial u^\nu_{n+1}}\right)^\dagger\circ(n+1)\partial_x^{n+1}\right) =\\
&= L_\nu\left(-\eta^{\alpha\mu}\partial_x\mathcal{T}_{\mu,1}(g)\right)\circ\eta^{\nu\beta}\partial_x + \eta^{\alpha\mu}\partial_x\circ L_\mu\left(-\eta^{\beta\nu}\partial_x\mathcal{T}_{\nu,1}(g)\right)^\dagger,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $B_{K^{(3)}} = [V_{\overline{R}_3}, B_{\eta^{-1}\partial_x}]$. □

Доказательство леммы завершает доказательство предложения. □

2.6.3 Проверка гипотезы в примерах

Тривиальная когомологическая теория поля

Теорема 2.43. *Гипотеза 2.36 верна для тривиальной КогТП* $\{c^{\mathrm{triv}}_{g,n} \colon \mathbb{C}^{\otimes n} \to H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$.

Доказательство. Мы знаем, что DR-иерархия, соответствующая тривиальной КогТП, совпадает с иерархией КдФ. Мы имеем $q_1 = r^1 = \delta = A_{1,1} = \mu_1 = 0$ и

$$\overline{g} = \int \left(\frac{u^3}{6} + \varepsilon^2 \frac{u u_{xx}}{48} \right) dx, \qquad \frac{\delta \overline{g}}{\delta u} = \frac{u^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{u_{xx}}{24}, \qquad \widehat{\Omega}(\overline{g}) = u + \frac{\varepsilon^2}{24}\partial_x^2, \qquad \widehat{\Omega}^1(\overline{g}) = \frac{\varepsilon^2}{12}\partial_x.$$

Пользуясь формулой (2.57), мы получаем

$$K^{\mathrm{DR}} = u\partial_x + \frac{1}{2}u_x + \frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3.$$

Мы видим, что пара $(\partial_x, K^{\mathrm{DR}})$ в точности совпадает с парой согласованных пуассоновых операторов, задающих бигамильтонову структуру иерархии КдФ (см. равенство (1.59)). Соотношение бигамильтоновой рекурсии для иерархии КдФ (см. равенство (1.60)) совпадает с соотношением (2.58). □

Теория Громова–Виттена для $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$

Рассмотрим КогТП $\{c^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{g,n} \colon H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ (см. пример 1.9) как семейство КогТП, зависящих от комплексного параметра q. В качестве базиса e_1, e_2 в пространстве $V = H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ выберем единицу и класс, двойственный точке.

Теорема 2.44. *Гипотеза 2.36 верна для КогТП* $\{c^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{g,n} \colon H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$.

Доказательство. Мы имеем

$$(q_1, q_2) = (0, 1), \quad (r^1, r^2) = (0, 2), \quad \delta = 1, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A = (A^\alpha_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 2q \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{g} = \int \left(\frac{(u^1)^2 u^2}{2} + \sum_{g \geq 1} \varepsilon^{2g} \frac{B_{2g}}{(2g)(2g)!} u^1 u^1_{2g} + q \left(e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} - u^2 - \frac{(u^2)^2}{2} \right) \right) dx,$$

см. формулы (2.15) и (2.16) (напомним, что $\overline{g}_{1,1} = (D-2)\overline{g}$). Мы далее вычисляем

$$\frac{\delta\overline{g}}{\delta u^1} = u^1u^2 + \sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\frac{B_{2g}}{g(2g)!}u^1_{2g}, \qquad \frac{\delta\overline{g}}{\delta u^2} = \frac{(u^1)^2}{2} + q\left(S(\varepsilon\partial_x)e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2} - 1 - u^2\right),$$

$$\widehat{\Omega}(\overline{g}) = \begin{pmatrix} q\left(S(\varepsilon\partial_x)\circ e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2}S(\varepsilon\partial_x) - 1\right) & u^1 \\ u^1 & u^2 + \sum_{g\geq 1}\frac{B_{2g}}{g(2g)!}(\varepsilon\partial_x)^{2g} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\Omega}^1(\overline{g}) = \begin{pmatrix} q\varepsilon\left(S(\varepsilon\partial_x)\circ e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2}S'(\varepsilon\partial_x) + S'(\varepsilon\partial_x)\circ e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2}S(\varepsilon\partial_x)\right) & 0 \\ 0 & \sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\frac{2B_{2g}}{(2g)!}\partial_x^{2g-1} \end{pmatrix}.$$

В итоге, мы получаем

$$K^{\mathrm{DR}} = \begin{pmatrix} q\left(S(\varepsilon\partial_x)\partial_x\circ e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2}\widetilde{S}(\varepsilon\partial_x) + \widetilde{S}(\varepsilon\partial_x)\circ e^{S(\varepsilon\partial_x)u^2}S(\varepsilon\partial_x)\partial_x\right) & u^1\partial_x \\ \partial_x\circ u^1 & \sum_{g\geq 0}\varepsilon^{2g}\frac{2B_{2g}}{(2g)!}\partial_x^{2g+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q\varepsilon^{-1}\left(e^{\frac{e^{\varepsilon\partial_x}-1}{\varepsilon\partial_x}u^2}e^{\varepsilon\partial_x} - e^{\frac{1-e^{-\varepsilon\partial_x}}{\varepsilon\partial_x}u^2}e^{-\varepsilon\partial_x}\right) & u^1\partial_x \\ \partial_x\circ u^1 & \frac{e^{\varepsilon\partial_x}+1}{e^{\varepsilon\partial_x}-1}\varepsilon\partial_x^2 \end{pmatrix},$$

где мы используем обозначение $\widetilde{S}(z) := \frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{2}$.

По теореме 2.12, преобразование Миуры $(v^1(u^*_*,\varepsilon), v^2(u^*_*,\varepsilon)) = \left(e^{\frac{\varepsilon\partial_x}{2}}u^1, S(\varepsilon\partial_x)u^2\right)$ связывает DR-иерархию и расширенную иерархию Тоды следующим образом:

$$\overline{g}_{\alpha,p} = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i(S_i^\dagger)^\mu_\alpha\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\mu,p-i}[u], \quad \alpha = 1,2, \quad p\geq -1,$$
$$\eta^{-1}\partial_x = K^{\mathrm{Td}}_u.$$

Обозначим $K^{\mathrm{Td}}_1 := K^{\mathrm{Td}}$. Расширенная иерархия Тоды является бигамильтоновой [25, теорема 3.1]: второй пуассонов оператор задаётся равенством

$$K^{\mathrm{Td}}_2 := \begin{pmatrix} q\varepsilon^{-1}\left(e^{\varepsilon\partial_x}\circ e^{v^2} - e^{v^2}e^{-\varepsilon\partial_x}\right) & \varepsilon^{-1}v^1\left(e^{\varepsilon\partial_x}-1\right) \\ \varepsilon^{-1}\left(1-e^{-\varepsilon\partial_x}\right)\circ v^1 & \varepsilon^{-1}\left(e^{\varepsilon\partial_x}-e^{-\varepsilon\partial_x}\right) \end{pmatrix},$$

а бигамильтонова рекурсия – равенством

$$\left\{\cdot,\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,d}\right\}_{K^{\mathrm{Td}}_2} = \left(d+\frac{3}{2}+\mu_\alpha\right)\left\{\cdot,\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,d+1}\right\}_{K^{\mathrm{Td}}_1} + R^\beta_\alpha\left\{\cdot,\overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\beta,d}\right\}_{K^{\mathrm{Td}}_1}, \quad \alpha = 1,2, \quad d\geq -1,$$

где

$$R = (R^\beta_\alpha) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямое вычисление показывает, что $K^{\mathrm{Td}}_{2;u} = K^{\mathrm{DR}}$, что доказывает первую часть гипотезы.

Что касается второй части гипотезы, введём производящий ряд

$$\overline{h}^{\mathrm{Td}}(z) := \left(\sum_{d\geq -1} \overline{h}^{\mathrm{Td}}_{\alpha,d} z^{d+1} \right)_{\alpha=1,2},$$

являющийся вектор-строкой. Тогда соотношение бигамильтоновой рекурсия для расширенной иерархии Тоды эквивалентным образом переписывается как

$$z\left\{\cdot, \overline{h}^{\mathrm{Td}}(z)\right\}_{K_2^{\mathrm{Td}}} = \left(\frac{1}{2} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{\cdot, \overline{h}^{\mathrm{Td}}(z)\right\}_{K_1^{\mathrm{Td}}} + \left\{\cdot, \overline{h}^{\mathrm{Td}}(z)\right\}_{K_1^{\mathrm{Td}}}(\mu + zR).$$

Мы подставляем $\overline{h}^{\mathrm{Td}}(z)[u] = \overline{g}(z)S(q,z)$, где $\overline{g}(z) := \left(\sum_{d\geq -1} \overline{g}_{\alpha,d} z^{d+1}\right)_{\alpha=1,2}$:

$$\begin{aligned} z\left\{\cdot, \overline{g}(z)S(q,z)\right\}_{K^{\mathrm{DR}}} &= \left(\frac{1}{2} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{\cdot, \overline{g}(z)S(q,z)\right\}_{\eta^{-1}\partial_x} + \left\{\cdot, \overline{g}(z)S(q,z)\right\}_{\eta^{-1}\partial_x}(\mu + zR) \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z\left\{\cdot, \overline{g}(z)\right\}_{K^{\mathrm{DR}}} &= \left(\frac{1}{2} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{\cdot, \overline{g}(z)\right\}_{\eta^{-1}\partial_x} \\ &\quad + \left\{\cdot, \overline{g}(z)\right\}_{\eta^{-1}\partial_x}\left(z\frac{\partial S(q,z)}{\partial z} + S(q,z)\mu + zS(q,z)R\right)S(q,z)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Прямой проверкой с помощью определения матриц S_i (равенство (2.25)) легко убедиться, что

$$z\frac{\partial S(q,z)}{\partial z} = [\mu, S(q,z)] + z\left(AS(q,z) - S(q,z)R\right).$$

Подставив полученное выражение для $z\frac{\partial S(q,z)}{\partial z}$ в равенство (2.61), мы получим соотношение

$$z\left\{\cdot, \overline{g}(z)\right\}_{K^{\mathrm{DR}}} = \left(\frac{1}{2} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left\{\cdot, \overline{g}(z)\right\}_{\eta^{-1}\partial_x} + \left\{\cdot, \overline{g}(z)\right\}_{\eta^{-1}\partial_x}(\mu + zA),$$

которое эквивалентно системе соотношений (2.58). Таким образом, вторая часть гипотезы также доказана для рассматриваемой КогТП. □

Классы Виттена при $r = 3, 4, 5$

Теорема 2.45. *Гипотеза 2.36 верна для КогТП* $\{c_{g,n}^{r\text{-}spin}\}$ *при* $r = 3, 4, 5$.

Мы докажем теорему чуть позже: сначала мы сформулируем гипотезу о связи оператора K^{DR} со второй пуассоновой структурой иерархии Гельфанда–Дикого, а потом докажем эту гипотезу для $r = 3, 4, 5$, выведя теорему в качестве следствия.

Опишем бигамильтонову структуру иерархии Гельфанда–Дикого. Рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$\widetilde{X} := (\varepsilon\partial_x)^{-r} \circ X_{r-1} + (\varepsilon\partial_x)^{-(r-1)} \circ X_{r-2} + \ldots + (\varepsilon\partial_x)^{-1} \circ X_0,$$

где X_i – произвольные дифференциальные многочлены. Легко понять, что имеется следующее разложение:

$$\varepsilon^{-1}\left(\left(\widetilde{L}\circ\widetilde{X}\right)_+\circ\widetilde{L}-\widetilde{L}\circ\left(\widetilde{X}\circ\widetilde{L}\right)_+\right)=\sum_{0\le\alpha,\beta\le r-1}\left(\sum_{i\ge0}\widetilde{K}_i^{\alpha\beta}\partial_x^iX_\beta\right)(\varepsilon\partial_x)^\alpha$$

для некоторых дифференциальных многочленов $\widetilde{K}_i^{\alpha\beta}\in\widehat{\mathcal{A}}_{f;1-i}$. Выполняется

$$\sum_{\beta=0}^{r-1}\widetilde{K}^{r-1,\beta}X_\beta=\operatorname{res}[\widetilde{X},\widetilde{L}]=\partial_x\left(\sum_{\substack{0\le j\le r-1\\1\le\alpha\le r-j}}\binom{-j-1}{\alpha}(\varepsilon\partial_x)^{\alpha-1}(f_{j+\alpha}X_j)\right)=$$

$$=\partial_x\left(-rX_{r-1}+\sum_{\substack{0\le j\le r-2\\1\le\alpha\le r-j}}\binom{-j-1}{\alpha}(\varepsilon\partial_x)^{\alpha-1}(f_{j+\alpha}X_j)\right),$$

где мы полагаем $f_r:=1$ и $f_{r-1}:=0$. Определим оператор

$$\widetilde{H}^\beta:=\frac{1}{r}\sum_{1\le\alpha\le r-\beta}\binom{-\beta-1}{\alpha}(\varepsilon\partial_x)^{\alpha-1}\circ f_{\beta+\alpha},\quad 0\le\beta\le r-2.$$

Наконец, определим матричный оператор $K^{\mathrm{GD}}_{(2)}=\left(K^{\mathrm{GD};\alpha\beta}_{(2)}\right)_{0\le\alpha,\beta\le r-2}$ равенством

$$K^{\mathrm{GD};\alpha\beta}_{(2)}:=\widetilde{K}^{\alpha\beta}+\widetilde{K}^{\alpha,r-1}\circ\widetilde{H}^\beta,\quad 0\le\alpha,\beta\le r-2.$$

Обозначим $K^{\mathrm{GD}}_{(1)}:=K^{\mathrm{GD}}$. Пара $\left(K^{\mathrm{GD}}_{(1)},K^{\mathrm{GD}}_{(2)}\right)$ является парой согласованных пуассоновых операторов.

Для того, чтобы описать соотношение бигамильтоновой рекурсии для иерархии Гельфанда–Дикого, перенумеруем времена и гамильтонианы иерархии следующим образом:

$$t^\alpha_a:=T_{\alpha+ar},\quad \overline{h}^{\mathrm{GD}}_{\alpha,a}:=\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{\alpha+ar},\quad \alpha\in[r-1],\quad a\in\mathbb{Z}_{\ge0}.$$

Оператор $K^{\mathrm{GD}}_{(1)}$ является невырожденным. Локальные функционалы

$$\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{\alpha,-1}:=-\frac{r}{\alpha}\varepsilon^{\alpha+1}\int\operatorname{res}(L^{\alpha/r})dx,\quad \alpha\in[r-1],$$

являются линейно независимыми элементами Казимира для скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{K^{\mathrm{GD}}_{(1)}}$. Выполняется следующее соотношение бигамильтоновой рекурсии:

$$\left\{\cdot,\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{\alpha,a}\right\}_{K^{\mathrm{GD}}_{(2)}}=-\left\{\cdot,\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{\alpha,a+1}\right\}_{K^{\mathrm{GD}}_{(1)}},\quad 1\le\alpha\le r-1,\quad a\ge-1.\tag{2.62}$$

Следующая гипотеза обобщает гипотезу 2.16.

Гипотеза 2.46. *Преобразования Миуры* (2.39), (2.40) *отождествляют DR-иерархию для КогТП* $\{c^{r\text{-}spin}_{g,n}\}$ *с иерархией Гельфанда–Дикого с точностью до следующего перемасштабирования:*

$$\overline{g}^{r\text{-}spin}_{\alpha,d} = \frac{1}{(-r)^{\frac{\alpha-1+r(d+1)}{2}-d}(\alpha+rd)!_r}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{\alpha,d}[u], \quad \alpha\in[r-1], \quad d\in\mathbb{Z}_{\geq -1}, \tag{2.63}$$

$$\eta^{-1}\partial_x = (-r)^{\frac{r}{2}}K^{\mathrm{GD}}_{(1);u}, \tag{2.64}$$

$$K^{\mathrm{DR}} = K^{\mathrm{GD}}_{(2);u}, \tag{2.65}$$

где мы полагаем $(-k)!_r := 1$ *при* $k\in[r-1]$. *Более того, при преобразовании Миуры соотношение бигамильтоновой рекурсии для иерархии Гельфанда–Дикого* (2.62) *переходит в соотношение* (2.58).

Теорема 2.47. *Гипотеза 2.46 верна при* $r = 2, 3, 4, 5$.

Доказательство. По теореме 2.17, в случае $r\leq 5$, равенство (2.63) выполняется при $d\geq 0$. Так как (см. равенства (2.44) и (2.45))

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{(-r)^{\frac{\alpha-1+r}{2}}\alpha}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{\alpha,0}[u]\right) = \frac{1}{(-r)^{\frac{\alpha-1}{2}+1}}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_{\alpha,-1}[u],$$

равенство (2.63) выполняется и при $d=-1$. По теореме 2.17, равенство (2.64) выполнятеся при $r\leq 5$.

Мы проверяем равенство (2.65) прямым вычислением в каждом из случаев $r = 2, 3, 4, 5$. Для КогТП $\{c^{r\text{-spin}}_{g,n}\}$ мы имеем

$$q_\alpha = \frac{\alpha-1}{r}, \quad r^\alpha = 0, \quad \delta = \frac{r-2}{r}, \quad \eta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha+\beta,r}, \quad \mu_\alpha = \frac{2\alpha-r}{2r}, \quad A = (A^\alpha_\beta) = 0,$$

и также мы знаем явные формулы для локальных функционалов $\overline{g}^{r\text{-spin}}$ при $r\leq 5$, см. теорему 2.14 и доказательство теоремы 2.43. Мы имеем следующие формулы для пуассоновых операторов:

$\underline{r=2}$ (мы обозначаем $f := f_0$ и $u := u^1$):

$$K^{\mathrm{GD}}_{(2)} = f_x + 2f\partial_x + \frac{\varepsilon^2}{2}\partial_x^3, \qquad K^{\mathrm{DR}} = \frac{1}{2}u_x + u\partial_x + \frac{\varepsilon^2}{8}\partial_x^3;$$

$\underline{r=3}$:

$$K^{\mathrm{GD}} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}f_1^2\partial_x - \frac{2}{3}f_1f_{1,x} + \varepsilon(2f_{0,x}\partial_x + f_{0,xx}) - \varepsilon^2(\frac{2}{3}f_{1,xxx} + 2f_{1,xx}\partial_x + \\ 2f_{1,x}\partial_x^2 + \frac{4}{3}f_1\partial_x^3) - \frac{2\varepsilon^4}{3}\partial_x^5 & 3f_0\partial_x + f_{0,x} + \varepsilon f_1\partial_x^2 + \varepsilon^3\partial_x^4 \\ 3f_0\partial_x + 2f_{0,x} - \varepsilon(f_{1,xx} + 2f_{1,x}\partial_x + f_1\partial_x^2) - \varepsilon^3\partial_x^4 & 2f_1\partial_x + f_{1,x} + 2\varepsilon^2\partial_x^3 \end{pmatrix},$$

$$K^{\mathrm{DR}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}(u^2)^2\partial_x + \frac{2}{9}u^2u_x^2 + \varepsilon^2\left(\frac{5}{54}u^2\partial_x^3 + \frac{5}{36}u_x^2\partial_x^2 + \frac{1}{12}u_{xx}^2\partial_x + \frac{1}{54}u_{xxx}^2\right) + \frac{\varepsilon^4}{162}\partial_x^5 & u^1\partial_x + \frac{1}{3}u^1_x \\ u^1\partial_x + \frac{2}{3}u^1_x & \frac{2}{3}u^2\partial_x + \frac{1}{3}u^2_x + \frac{2}{9}\varepsilon^2\partial_x^3 \end{pmatrix}.$$

В случаях $r = 4$ и $r = 5$ выражения для пуассоновых операторов получаются очень большими, и мы их здесь не приводим, вычисления проводились с помощью программного пакета Wolfram Mathematica. Во всех случаях мы убеждаемся, что преобразования Миуры (2.39), (2.40) связывают операторы $K^{\mathrm{GD}}_{(2)}$ и K^{DR}.

После того, как равенства (2.63)–(2.65) доказаны при $r \leq 5$, соотношение (2.58) немедленно следует из (2.62). □

Теорема 2.45 с очевидностью следует из только что доказанной теоремы.

Глава 3

Иерархии Дубровина–Жанга и гипотеза об эквивалентности

3.1 Подкрученные потенциалы КогТП

Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ с фиксированным базисом $e_1, \dots, e_N \in V$, а также соответствующий потенциал $\mathcal{F}(t^*_*, \varepsilon)$ (см. равенство (1.21)).

Определим следующую группу:

$$G_{\eta,e,-} := \left\{ S(z) = \mathrm{Id} + \sum_{i\geq 1} S_i z^{-i} \in \mathrm{End}(V)[[z^{-1}]] \,\middle|\, \begin{array}{l} S(z)S^*(-z) = \mathrm{Id} \\ S_1(e) = 0 \end{array} \right\},$$

где мы напомним, что звёздочкой мы обозначаем сопряжение по отношению к билинейной форме η. Соответствующая алгебра Ли имеет вид

$$\mathfrak{g}_{\eta,e,-} = \left\{ s(z) = \sum_{i\geq 1} s_i z^{-i} \in z^{-1}\,\mathrm{End}(V)[[z^{-1}]] \,\middle|\, \begin{array}{l} s_i^* = (-1)^{i+1} s_i \\ s_1(e) = 0 \end{array} \right\}.$$

Введём следующие дифференциальные операторы:

$$\widehat{s(z)} := -\sum_{i\geq 1,\, j\geq 0} (s_i)^\alpha_\beta q^\beta_{i+j} \frac{\partial}{\partial q^\alpha_j} + \frac{\varepsilon^{-2}}{2} \sum_{i,j\geq 0} (-1)^{j+1} (s_{i+j+1})^\mu_\alpha \eta_{\mu\beta} q^\alpha_i q^\beta_j, \quad s(z) \in \mathfrak{g}_{\eta,e,-},$$

где мы используем сдвинутые переменные

$$q^\alpha_a := t^\alpha_a - A^\alpha \delta_{a,1}.$$

Заметим, что для любых $s(z), \widetilde{s}(z) \in \mathfrak{g}_{\eta,e,-}$ выполняется

$$\left[\widehat{s(z)}, \widehat{\widetilde{s}(z)}\right] = [\widehat{s(z), \widetilde{s}(z)}].$$

Полезно иметь ввиду следующую формулу

$$\exp\left(\widehat{s(z)}\right) = \exp\left(\frac{\varepsilon^{-2}}{2}\sum_{a,b\geq 0} q_a^\alpha q_b^\beta \mathrm{Coef}_{z_1^{-a}z_2^{-b}}\left(\frac{S(z_1)_\alpha^\mu \eta_{\mu\nu} S(z_2)_\beta^\nu - \eta_{\alpha\beta}}{z_1^{-1}+z_2^{-1}}\right)\right)\exp\left(-\sum_{i\geq 1,\, j\geq 0}(s_i)_\beta^\alpha q_{i+j}^\beta \frac{\partial}{\partial q_j^\alpha}\right), \tag{3.1}$$

где $S(z) = \exp(-s(z))$.

Подкрученный потенциал

$$\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}(t_*^*, \varepsilon) = \sum_{g\geq 0}\varepsilon^{2g}\mathcal{F}_g^{\mathrm{desc}}(t_*^*) \in \mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]$$

заданной КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ определяется как

$$\exp(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}) := \exp(C)\exp(\widehat{s(z)})\exp(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}), \quad s(z)\in\mathfrak{g}_{\eta,e,-}, \quad C\in\mathbb{C}.$$

В силу формулы (3.1), мы имеем

$$\mathcal{F}^{\mathrm{desc}} = \mathcal{F}\big|_{t_p^\alpha \mapsto t_p^\alpha + \sum_{j\geq 1}(S_j)_\beta^\alpha t_{p+j}^\beta} + \frac{1}{2}\sum_{a,b\geq 0} q_a^\alpha q_b^\beta \mathrm{Coef}_{z_1^{-a}z_2^{-b}}\left(\frac{S(z_1)_\alpha^\mu \eta_{\mu\nu} S(z_2)_\beta^\nu - \eta_{\alpha\beta}}{z_1^{-1}+z_2^{-1}}\right) + C\varepsilon^2. \tag{3.2}$$

Замечание 3.1. Обратим внимание на важность условия $S_1(e) = 0$ в определении группы $G_{\eta,e,-}$. Действительно, в формуле (3.1) мы имеем

$$-\sum_{i\geq 1,\, j\geq 0}(s_i)_\beta^\alpha q_{i+j}^\beta \frac{\partial}{\partial q_j^\alpha} = -\sum_{i\geq 1,\, j\geq 0}(s_i)_\beta^\alpha t_{i+j}^\beta \frac{\partial}{\partial t_j^\alpha} + (s_1)_\beta^\alpha A^\beta \frac{\partial}{\partial t_0^\alpha} = -\sum_{i\geq 1,\, j\geq 0}(s_i)_\beta^\alpha t_{i+j}^\beta \frac{\partial}{\partial t_j^\alpha},$$

поэтому при определении подкрученного потенциала не возникает сдвига переменных t_0^α, и в результате подкрученный потенциал является корректно определённым формальным рядом от переменных t_a^α и ε.

Замечание 3.2. Рассмотрим гладкое проективное многообразие X, удовлетворяющее свойству $H^*(X) = H^{\mathrm{e}}(X)$, и соответствующие пространства модулей стабильных отображений $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$. Так же, как и над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, над пространством $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ имеются кокасательные линейные расслоения $\mathcal{L}_i$. Рассмотрим классы когомологий $\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta),\mathbb{Q})$. *Инвариантами Громова–Виттена* многообразия X называются следующие величины:

$$\langle\tau_{d_1}(v_1)\cdots\tau_{d_n}(v_n)\rangle_{g,n,\beta}^X := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}}\prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}\mathrm{ev}_i^*(v_i) \in \mathbb{C}, \quad v_1,\ldots,v_n\in H^*(X).$$

Положим

$$\langle\tau_{d_1}(v_1)\cdots\tau_{d_n}(v_n)\rangle_{g,n}^X := \sum_{\beta\in E} q^\beta \langle\tau_{d_1}(v_1)\cdots\tau_{d_n}(v_n)\rangle_{g,n,\beta}^X \in \mathcal{N}_X.$$

Зафиксируем базис $e_1, \dots, e_N \in H^*(X)$. *Потенциалом Громова–Виттена* многообразия X называется формальный ряд

$$\mathcal{F}^X := \sum_{g,n\geq 0} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{d_1,\dots,d_n\geq 0} \langle \tau_{d_1}(e_{\alpha_1}) \cdots \tau_{d_n}(e_{\alpha_n}) \rangle_{g,n}^X \prod_{i=1}^n t_{d_i}^{\alpha_i} \in \mathcal{N}_X[[t_*^*, \varepsilon]].$$

Введём $N \times N$ матрицы S_i, s_i, $i \geq 1$, равенствами

$$(S_i)_\alpha^\beta := \langle \tau_{i-1}(e_\alpha)\tau_0(e_\nu)\rangle_{0,2}^X \eta^{\nu\beta}, \qquad S(z) := \mathrm{Id} + \sum_{n\geq 1} S_n z^{-n}, \qquad s(z) = \sum_{n\geq 1} s_n z^{-n} := \log S(z). \quad (3.3)$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ потенциал КогТП $\{c_{g,n}^X\}$. Тогда ряды $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^X$ связаны следующим равенством:

$$\exp\left(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}^X\right) = \exp\left(\langle\rangle_{1,0}^X\right) \exp\left(\widehat{-s(z)}\right) \exp\left(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}\right).$$

Таким образом, потенциал Громова–Виттена $\mathcal{F}^X$ является подкрученным потенциалом для КогТП $\{c_{g,n}^X\}$.

Предложение 3.3. *Подкрученный потенциал удовлетворяет следующим равенствам:*

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^{\mathbb{1}}} = \sum_{p\geq 0} t_{p+1}^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_p^\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} t_0^\alpha t_0^\beta + \varepsilon^2 \langle \tau_0(e)\rangle_{1,1}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_1^{\mathbb{1}}} = \sum_{p\geq 0} t_p^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_p^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial \varepsilon} - 2\mathcal{F}^{\mathrm{desc}} + \varepsilon^2 \frac{N}{24}, \quad (3.5)$$

которые называются струнным *и* дилатонным *равенством, соответственно.*

Доказательство. Тот факт, что потенциал $\mathcal{F}$ удовлетворяет этим равенствам, уже нам известен (см. равенства (1.22), (1.23)). Струнное равенство для $\mathcal{F}$ можно эквивалентным образом записать как

$$\left(\sum_{p\geq 0} q_{p+1}^\alpha \frac{\partial}{\partial q_p^\alpha} + \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\eta_{\alpha\beta} q_0^\alpha q_0^\beta + \langle \tau_0(e)\rangle_{1,1}\right) \exp(\varepsilon^{-2}\mathcal{F}) = 0.$$

Заметим, что $\sum_{p\geq 0} q_{p+1}^\alpha \frac{\partial}{\partial q_p^\alpha} + \frac{\varepsilon^{-2}}{2}\eta_{\alpha\beta} q_0^\alpha q_0^\beta = -\widehat{\mathrm{Id}\cdot z^{-1}}$. Так как оператор $-\widehat{\mathrm{Id}\cdot z^{-1}} + \langle \tau_0(e)\rangle_{1,1}$ коммутирует с оператором $\widehat{s(z)}$, мы получаем $\left(-\widehat{\mathrm{Id}\cdot z^{-1}} + \langle \tau_0(e)\rangle_{1,1}\right) \exp(\mathcal{F}^{\mathrm{desc}})$, что и даёт нам струнное равенство для подкрученного потенциала $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$. Что касается равенства (3.5), оно напрямую выводится из равенства (1.23), пользуясь формулой (3.2). □

Из формулы (3.2) следует, что

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta} = \sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b (S_i)_\alpha^\mu (S_j)_\beta^\nu \left.\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_{a-i}^\mu \partial t_{b-j}^\nu}\right|_{t_c^\gamma \mapsto t_c^\gamma + \sum_{k\geq 1}(S_k)_\xi^\gamma t_{c+k}^\xi} + \mathrm{Coef}_{z_1^{-a} z_2^{-b}} \left(\frac{S(z_1)_\alpha^\mu \eta_{\mu\nu} S(z_2)_\beta^\nu - \eta_{\alpha\beta}}{z_1^{-1} + z_2^{-1}}\right). \quad (3.6)$$

В частности, мы имеем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_a^\alpha \partial t_0^\beta} = \sum_{i=0}^{a} (S_i)_\alpha^\mu \left.\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_{a-i}^\mu \partial t_0^\beta}\right|_{t_c^\gamma \mapsto t_c^\gamma + \sum_{k\geq 1}(S_k)_\xi^\gamma t_{c+k}^\xi} + (S_{a+1})_\alpha^\mu \eta_{\mu\beta}.$$

Предложение 3.4. *Формальный ряд $\mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}$ удовлетворяет равенствам (1.34) и (1.35).*

Доказательство. Предложение следует из того, что равенства (1.34) и (1.35) выполняются для $\mathcal{F}_0$, а также из равенства (3.6). □

По подкрученному потенциалу $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ мы может построить базовую иерархию ровно таким же образом, как это было сделано в разделе 1.3.4. А именно, определим

$$\Omega^{[0]}_{\alpha,a;\beta,b} = \left.\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta}\right|_{t_c^\gamma \mapsto \delta_{c,0} v^\gamma}.$$

Тогда система гидродинамического типа

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t_b^\beta} = \eta^{\alpha\gamma}\partial_x \Omega^{[0]}_{\gamma,0;\beta,b}, \quad \alpha,\beta \in [N], \quad b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{3.7}$$

интегрируема и гамильтонова: скобка Пуассона задаётся оператором $\eta^{-1}\partial_x$, а гамильтонианы $\overline{h}^{[0]}_{\alpha,a}$ – равенством $\overline{h}^{[0]}_{\alpha,a} := \int \Omega^{[0]}_{\mathbb{1},0;\alpha,a+1} dx$. Набор формальных рядов $v^{\mathrm{top};\alpha} := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^{\mathbb{1}} \partial t_0^\mu}$ является решением базовой иерархии. Также выполняется свойство

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta} = \left.\Omega^{[0]}_{\alpha,a;\beta,b}\right|_{v^\gamma \mapsto v^{\mathrm{top};\gamma}}.$$

Доказательство всех этих фактов ровно такое же, как и в разделе 1.3.4.

3.2 Основная гипотеза

Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\colon V^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ и её подкрученный потенциал $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$. Введём формальные ряды

$$w^{\mathrm{top};\alpha} := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^\mu \partial t_0^{\mathbb{1}}}, \quad w_n^{\mathrm{top};\alpha} := \frac{\partial^n w^{\mathrm{top};\alpha}}{(\partial t_0^{\mathbb{1}})^n}, \quad \alpha \in [N], \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Рассмотрим алгебру $\widehat{\mathcal{A}}_w$ дифференциальных многочленов от переменных $w^1, \dots, w^N$. Заметим, что из струнного равенства (3.4) следует, что формальные ряды $w_n^{\mathrm{top};\alpha}$ удовлетворяют условию (1.50). Поэтому для любого дифференциального многочлена $P \in \widehat{\mathcal{A}}_w$ подстановка $P|_{w_n^\gamma \mapsto w_n^{\mathrm{top};\gamma}} \in \mathbb{C}[[t_*^*]]$ корректно определена.

Следующую гипотезу мы называем *обобщённой гипотезой Дубровина–Жанга.*

Гипотеза 3.5. *Рассмотрим произвольную КогТП и её подкрученный потенциал* $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$.

1. *Для любых* $\alpha,\beta\in[N]$ *и* $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ *существует дифференциальный многочлен* $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}\in\widehat{\mathcal{A}}_w$ *такой, что* $\frac{\partial^2\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_a^\alpha\partial t_b^\beta}=\Omega_{\alpha,a;\beta,b}\big|_{w_n^\gamma=w_n^{\mathrm{top};\gamma}}$.

2. *В предположении, что первая часть гипотезы верна, существует пуассонов оператор* $K^{\mathrm{DZ}}=\left(K^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}\right)$ *такой, что* $\eta^{\alpha\mu}\partial_x\Omega_{\mu,0;\beta,b}=K^{\mathrm{DZ};\alpha\nu}\frac{\delta\overline{h}_{\beta,b}}{\delta w^\nu}$, *где* $\overline{h}_{\beta,b}:=\int\Omega_{\mathbb{1},0;\beta,b+1}dx$, $\alpha,\beta\in[N]$, $b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Теорема 3.6. *Предположим, что первая часть гипотезы 3.5 верна.*

1. *Набор дифференциальных многочленов* $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}$ *определяется по подкрученному потенциалу* $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ *однозначно, и более того выполняется* $\deg\Omega_{\alpha,a;\beta,b}=0$.

2. *Система Ур ЧП*

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t_d^\beta}=\eta^{\alpha\mu}\partial_x\Omega_{\mu,0;\beta,b},\quad \alpha,\beta\in[N],\quad d\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\tag{3.8}$$

   является интегрируемой, и набор формальных рядов $(w^{\mathrm{top};1}\big|_{t_0^\gamma\mapsto t_0^\gamma+A^\gamma x},\dots,w^{\mathrm{top};N}\big|_{t_0^\gamma\mapsto t_0^\gamma+A^\gamma x})$ *является её решением.*

3. *Если вторая часть гипотезы также верна, то пуассонов оператор* K^{DZ} *определяется по подкрученному потенциалу* $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ *однозначно, и более того оператор* K^{DZ} *имеет степень* 1.

При условии, что гипотеза 3.5 верна для заданной КогТП, интегрируемая система (3.8) называется иерархией Дубровина–Жанга, *соответствующей данному подкрученному потенциалу.*

Перед тем, как доказывать эту теорему, дадим ряд вспомогательных определений, которые будут нам также важны при доказательстве гипотезы 3.5 для подкрученного потенциала произвольной полупростой КогТП.

Рассмотрим формальные переменные $v^1,\dots,v^N$. Обозначим через $\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk}}$ алгебру формальных степенных рядов от сдвинутых переменных $(v_n^\alpha-A^\alpha\delta_{n,1})$, $\alpha\in[N]$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, с комплексными коэффициентами. Обозначим через $\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}}\subset\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk}}$ подалгебру, состоящую из элементов $f\in\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk}}$, удовлетворяющих условию $\frac{\partial f}{\partial v_n^\alpha}=0$ для всех $\alpha\in[N]$ и достаточно больших n. Обозначим $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}:=\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk}}[[\varepsilon]]$ и $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk,t}}:=\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}}[[\varepsilon]]$. Мы имеем цепочку вложений

$$\widehat{\mathcal{A}}_v\subset\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk,t}}\subset\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}.$$

Заметим, что оператор $\partial_x\colon\widehat{\mathcal{A}}_v\to\widehat{\mathcal{A}}_v$ переносится на алгебру $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}$:

$$\partial_x:=\sum_{i\geq 0}v_{i+1}^\alpha\frac{\partial}{\partial v_i^\alpha}\colon\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}\to\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}.$$

Для элемента $f \in \widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}$ мы будем писать $\deg f = d$, если

$$\underbrace{\left(\sum_{p\geq 0} p v_p^\alpha \frac{\partial}{\partial v_p^\alpha} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)}_{\mathcal{D}_v :=} f = d \cdot f.$$

Из струнного равенства (3.4) следует, что формальные ряды

$$v_n^{\mathrm{top};\alpha} := \frac{\partial^n v^{\mathrm{top};\alpha}}{(\partial t_0^{\mathbb{1}})^n}, \quad \alpha \in [N], \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

(напомним, что $v^{\mathrm{top};\alpha} = \eta^{\alpha\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^\mu \partial t_0^{\mathbb{1}}}$) удовлетворяют условию (1.50). Поэтому для любого элемента $P \in \mathcal{A}_v^{\mathrm{wk}}$ подстановка $P|_{v_n^\gamma \mapsto v_n^{\mathrm{top};\gamma}} \in \mathbb{C}[[t_*^*]]$ корректно определена и задаёт изоморфизм алгебр $\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk}} \to \mathbb{C}[[t_*^*]]$. Прообраз элемента $f \in \mathbb{C}[[t_*^*]]$ при этом изоморфизме мы будем обозначать через $f(v_*^*)$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial t_1^{\mathbb{1}}} - \sum_{p\geq 0} t_p^\alpha \frac{\partial}{\partial t_p^\alpha} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}$. Из дилатонного равенства (3.5) следует, что $\mathcal{D}(v_n^{\mathrm{top};\alpha}) = n v^{\mathrm{top};\alpha}$, также очевидно, что $\mathcal{D}(\varepsilon) = -\varepsilon$. Отсюда следует, что изоморфизм $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}} \cong \mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]$ переводит оператор $\mathcal{D}$ на пространстве $\mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]$ в оператор $\mathcal{D}_v$ на пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}$.

Вспомним, что набор рядов $(v^{\mathrm{top};1}, \dots, v^{\mathrm{top};N})$ является решением базовой иерархии (3.7). Отсюда сразу следует, что если для некоторого ряда $f \in \mathbb{C}[[t_*^*]]$ выполняется $f(v_*^*) \in \mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}}$, то тогда также выполняется $\frac{\partial f}{\partial t_n^\alpha}(v_*^*) \in \mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}}$.

По аналогии с подстановкой $v_a^\alpha \mapsto v_a^{\mathrm{top};\alpha}$, мы будем использовать подстановку $w_a^\alpha \mapsto w_a^{\mathrm{top};\alpha}$, которая задаёт изоморфизм алгебр $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk}} \to \mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]$. Этот изоморфизм переводит оператор $\mathcal{D}$ на пространстве $\mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]$ в оператор $\mathcal{D}_w$ на пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk}}$.

Ряд определений, данных нами для алгебры дифференциальных многочленов в разделе 1.3.1, немедленно переносится на алгебру $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk,t}}$.

- Определения эволюционного оператора, системы эволюционных УрЧП, интегрируемой системы переносятся без изменений.

- Определение вариационной производной $\frac{\delta}{\delta v^\alpha} \colon \widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk,t}} \to \widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk,t}}$ даётся формулой (1.40). Имеется вложение $\mathrm{Im}(\partial_x) \subset \mathrm{Ker}(\frac{\delta}{\delta v^\alpha})$.

- Определены пространства $\Lambda_v^{\mathrm{wk,t}} := \mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}} / (\mathrm{Im}(\partial_x) \oplus \mathbb{C})$ и $\widehat{\Lambda}_v^{\mathrm{wk,t}} := \Lambda_v^{\mathrm{wk,t}}[[\varepsilon]]$. Корректно определены вариационные производные $\frac{\delta}{\delta v^\alpha} \colon \widehat{\Lambda}_v^{\mathrm{wk,t}} \to \widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk,t}}$, $\alpha \in [N]$. Определение матричного дифференциального оператора переносится без изменений, с помощью этих операторов определяются скобки на пространстве $\widehat{\Lambda}_v^{\mathrm{wk,t}}$.

- Мы будем рассматривать *обобщённые преобразования Миуры* вида

$$v^\alpha \mapsto w^\alpha(v_*^*, \varepsilon) = f_0^\alpha + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k f_k^\alpha, \quad \begin{array}{l} f_0^\alpha \in \mathbb{C}[[v^1, \dots, v^N]], \quad f_k^\alpha \in \mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}} \text{ при } k \geq 1, \\ f_0^\alpha|_{v^*=0} = 0, \quad \det\left(\frac{\partial f_0^\alpha}{\partial v^\beta}\right)\Big|_{v^*=0} \neq 0. \end{array}$$

Они преобразуют эволюционные операторы, системы эволюционных УрЧП, локальные функционалы, скобки на пространстве $\widehat{\Lambda}_v^{\mathrm{wk,t}}$ в точности также, как описано в разделе про преобразования Миуры в разделе 1.3.1. В частности, формула (1.44) остаётся верной.

Мы знаем, что для любых $\alpha, \beta \in [N]$ и $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ выполняется

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta}(v_*^*) = \Omega^{[0]}_{\alpha,a;\beta,b}. \tag{3.9}$$

Аналогом этого результата в старших родах является следующее утверждение.

Предложение 3.7 (см. теорему 1.1 в [50]). *Для любого $g \geq 1$ мы имеем $\mathcal{F}_g^{\mathrm{desc}}(v_*^*) \in \mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}}$. Более того, выполняется $\frac{\partial \mathcal{F}_g^{\mathrm{desc}}(v_*^*)}{\partial v_n^\alpha} = 0$ при всех $n > 3g-2$.*

Доказательство теоремы 3.6. Тот факт, что дифференциальные многочлены $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}$ определяются по подкрученному потенциалу однозначно, был фактически уже доказан: это следствие леммы 1.30. Из дилатонного равенства следует, что $\mathcal{D}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta}\right) = 0$, откуда мы получаем, что $\mathcal{D}_w\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta}(w_*^*, \varepsilon)\right) = 0$.

Докажем вторую часть теоремы. Тот факт, что набор рядов $w^{\mathrm{top};\alpha}$, $\alpha \in [N]$, является решением системы (3.8), очевиден. Далее, мы имеем равенства

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_c^\gamma}\frac{\partial w^{\mathrm{top};\alpha}}{\partial t_b^\beta} &= \eta^{\alpha\theta}\sum_{n\geq 0}\frac{\partial\left(\partial_x \Omega_{\theta,0;\beta,b}\right)}{\partial w_n^\mu}\eta^{\mu\nu}\partial_x^{n+1}\Omega_{\nu,0;\gamma,c}\Big|_{w_d^\delta = w_d^{\mathrm{top};\delta}} \\
&\| \\
\frac{\partial}{\partial t_b^\beta}\frac{\partial w^{\mathrm{top};\alpha}}{\partial t_c^\gamma} &= \eta^{\alpha\theta}\sum_{n\geq 0}\frac{\partial\left(\partial_x \Omega_{\theta,0;\gamma,c}\right)}{\partial w_n^\mu}\eta^{\mu\nu}\partial_x^{n+1}\Omega_{\nu,0;\beta,b}\Big|_{w_d^\delta = w_d^{\mathrm{top};\delta}},
\end{aligned}$$

откуда, по лемме 1.30, вытекает попарная коммутация потоков системы (3.8).

Докажем третью часть теоремы. Для того, чтобы доказать единственность оператора K^{DZ}, нам достаточно доказать следующее утверждение.

Предложение 3.8. *Предположим, что для подкрученного потенциала $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ некоторой КогТП выполняется первая часть гипотезы 3.5. Предположим также, что для некоторого матричного дифференциального оператора $B = (B^{\alpha\beta})$ (с коэффициентами в алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk,t}}$) выполняется $B^{\alpha\mu}\frac{\delta \overline{h}_{\beta,b}}{\delta w^\mu} = 0$ для всех $\alpha, \beta \in [N]$ и $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда $B = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим обобщённое преобразование Миуры

$$v^\alpha \mapsto w^\alpha(v_*^*, \varepsilon) = v^\alpha + \sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_g^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^\mu \partial t_0^1}(v_*^*) = v^\alpha + \partial_x\left(\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\eta^{\alpha\mu}\frac{\partial \mathcal{F}_g^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^\mu}(v_*^*)\right). \tag{3.10}$$

Из дилатонного равенства следует, что $\deg\left(w^\alpha(v_*^*,\varepsilon)\right)=0$. Мы имеем

$$\overline{h}_{\beta,b}[v]=\overline{h}^{[0]}_{\beta,b}+\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\int\frac{\partial^2\mathcal{F}_g^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^{\mathbb{1}}\partial t_{b+1}^{\beta}}(v_*^*)dx=\overline{h}^{[0]}_{\beta,b}+\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\int\partial_x\left(\frac{\partial^2\mathcal{F}_g^{\mathrm{desc}}}{\partial t_{b+1}^{\beta}}(v_*^*)\right)dx=\overline{h}^{[0]}_{\beta,b},$$

и значит

$$B_v^{\alpha\mu}\frac{\delta\overline{h}^{[0]}_{\beta,b}}{\delta v^\mu}=B_v^{\alpha\mu}\Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,b}=0.$$

Предположим, что $B_v\neq 0$. Разложим оператор B_v по степеням ε:

$$B_v=\sum_{i,j\geq 0}B^{[i]}_{v;j}\varepsilon^i\partial_x^j,\quad B^{[i]}_{v;j}\in\mathrm{Mat}_{N,N}(\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}}).$$

Рассмотрим такое минимальное k, что $\sum_{j\geq 0}B^{[k]}_{v;j}\partial_x^j\neq 0$. По определению матричного дифференциального оператора, в этой сумме только конечное число ненулевых слагаемых, то есть $\sum_{j\geq 0}B^{[k]}_{v;j}\partial_x^j=\sum_{j=0}^M B^{[k]}_{v;j}\partial_x^j$ для некоторого M. Наконец, рассмотрим такое α, что $B^{\alpha\mu;[k]}_{v;j}\neq 0$ для некоторых μ и j. Мы получаем систему равенств

$$\sum_{j=0}^M B^{\alpha\mu;[k]}_{v;j}\partial_x^j\Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,b}=0,\quad \beta\in[N],\quad 0\leq b\leq M. \tag{3.11}$$

Лемма 3.9. *Определитель* $(M+1)N\times(M+1)N$ *матрицы* $\left(\partial_x^j\Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,b}\right)_{\substack{\mu\in[N],\,0\leq j\leq M\\ \beta\in[N],\,0\leq b\leq M}}$ *не равен* 0.

Доказательство. Сделав подстановку $v_c^\gamma\mapsto v_c^{\mathrm{top};\gamma}$, мы видим, что нам достаточно доказать, что у матрицы

$$\left(\frac{\partial^{j+2}\mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^\mu\partial t_b^\beta(\partial t_0^{\mathbb{1}})^j}\right)_{\substack{\mu\in[N],\,0\leq j\leq M\\ \beta\in[N],\,0\leq b\leq M}}$$

ненулевой определитель. Далее, достаточно доказать, что определитель ненулевой после подстановки $t_c^\gamma\mapsto\delta_{c,0}A^\gamma x$. Для этого с помощью струнного равенства мы вычисляем

$$\left.\frac{\partial^{j+2}\mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^\mu\partial t_b^\beta(\partial t_0^{\mathbb{1}})^j}\right|_{t_c^\gamma\mapsto\delta_{n,0}A^\gamma x}=\begin{cases}\sum_{i=0}^{b+1-j}\eta_{\mu\nu}(S_{b+1-j-i})^\nu_\beta\frac{x^i}{i!}, & \text{если } j\leq b+1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Таким образом, после подстановки $t_c^\gamma\mapsto\delta_{c,0}A^\gamma x$ мы получаем матрицу $T=(T_{\mu,j;\beta,b})$, где

$$T_{\mu,j;\beta,b}=\begin{cases}\sum_{i=0}^{b+1-j}\eta_{\mu\nu}(S_{b+1-j-i})^\nu_\beta\frac{x^i}{i!}, & \text{если } j\leq b+1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Заметим, что производная по x столбца этой матрицы с номером (β,b), $b\geq 1$, равна столбцу с номером $(\beta,b-1)$. Отсюда несложно вывести, что $\frac{\partial^{(M+1)N}}{(\partial x)^{(M+1)N}}\det(T)=\frac{\partial^{(M+1)N}}{(\partial x)^{(M+1)N}}\det(\widetilde{T})$, где матрица $\widetilde{T}=(\widetilde{T}_{\mu,j;\beta,b})$ имеет вид

$$\widetilde{T}_{\mu,j;\beta,b}=\begin{cases}\eta_{\mu\beta}\frac{x^{b+1-j}}{(b+1-j)!}, & \text{если } j\leq b+1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Матрица $\widetilde{T}$ является тензорным произведением $N \times N$ матрицы η и $(M+1)\times(M+1)$ матрицы $Q = (Q_{j,b})$, где

$$Q_{j,b} = \begin{cases} \frac{x^{b+1-j}}{(b+1-j)!}, & \text{если } j \le b+1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко вычислить, что $\det(Q) = \frac{x^{M+1}}{(M+1)!}$, откуда следует, что $\det(\widetilde{T}) = \det(\eta)^{M+1}\left(\frac{x^{M+1}}{(M+1)!}\right)^N$. Значит, определитель $\det(T)$ равен многочлену от x степени $(M+1)N$ с коэффициентом при $x^{(M+1)N}$, равным $\det(\eta)^{M+1}\left(\frac{1}{(M+1)!}\right)^N$. Значит $\det(T) \neq 0$. □

Система равенств (3.11) говорит, что нетривиальная линейная комбинация (с коэффициентами в алгебре $\mathcal{A}_v^{\mathrm{wk,t}}$) строк матрицы $\left(\partial_x^j \Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,b}\right)$ равна 0, что противоречит только что доказанной лемме. □

Таким образом, оператор K^{DZ} однозначно определяется по подкрученному потенциалу $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$.

Докажем теперь, что степень оператора K^{DZ} равна 1. Рассмотрим базовую иерархию

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial t_d^\beta} = \eta^{\alpha\mu}\partial_x \Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,d}.$$

После применения обобщённого преобразования Миуры (3.10) мы получим систему

$$\frac{\partial w^\alpha}{\partial t_d^\beta} = P^\alpha_{\beta,d}, \quad P^\alpha_{\beta,d} \in \widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk,t}},$$

у которой набор рядов $(w^{\mathrm{top};1}|_{t_0^\gamma \mapsto t_0^\gamma + A^\gamma x}, \dots, w^{\mathrm{top};N}|_{t_0^\gamma \mapsto t_0^\gamma + A^\gamma x})$ является решением. Значит,

$$\eta^{\alpha\mu}\partial_x \Omega_{\mu,0;\beta,d} = P^\alpha_{\beta,d}.$$

Иначе говоря, если не рассматривать гамильтонову структуру, то базовая иерархия переходит под действием обобщённого преобразования Миуры (3.10) в иерархию Дубровина–Жанга. Мы доказали, что $\overline{h}_{\beta,d}[v] = \overline{h}^{[0]}_{\beta,d}$. Тогда из предложения 3.8 немедленно следует, что $K^{\mathrm{DZ}} = ((\eta^{-1})\partial_x)_w$. Тот факт, что степень оператора K^{DZ} равна 1, следует теперь из свойства $\deg\left(w^\alpha(v_*^*, \varepsilon)\right) = 0$. □

В процессе доказательства теоремы мы также получили следующий результат. Для подкрученного потенциала $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ произвольной КогТП рассмотрим обобщённое преобразование Миуры (3.10) и определим

$$\Omega_{\alpha,a;\beta,b} := \frac{\partial^2 \mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta}(w_*^*, \varepsilon) \in \widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk,t}}, \qquad K^{\mathrm{DZ}} := (\eta^{-1}\partial_x)_w, \tag{3.12}$$

где K^{DZ} рассматривается как матричный оператор с коэффициентами в алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk,t}}$.

Предложение 3.10. *Гипотеза 3.5 эквивалентна следующему утверждению: для любых $\alpha, \beta \in [N]$ и $a, b \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ выполняется $\Omega_{\alpha,a;\beta,b} \in \widehat{\mathcal{A}}_w$, а также коэффициенты оператора K^{DZ} принадлежат алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_w$.*

Лемма 3.11. *Для подкрученного потенциала $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ произвольной КогТП выполняется $K_0^{\mathrm{DZ}} = 0$.*

Доказательство. Пользуясь тем, что $K^{\mathrm{DZ}} = (\eta^{-1}\partial_x)_w$, мы вычисляем

$$K_0^{\mathrm{DZ};\alpha\beta} = \sum_{p,q\geq 0} \frac{\partial w^\alpha(v_*^*,\varepsilon)}{\partial v_p^\mu}\partial_x^p\left(\eta^{\mu\nu}\partial_x\left((-\partial_x)^q\left(\frac{\partial w^\beta(v_*^*,\varepsilon)}{\partial v_q^\nu}\right)\right)\right) =$$
$$= \sum_{p\geq 0}\frac{\partial w^\alpha(v_*^*,\varepsilon)}{\partial v_p^\mu}\partial_x^p\left(\eta^{\mu\nu}\partial_x\left(\underbrace{\frac{\delta w^\beta(v_*^*,\varepsilon)}{\delta v^\nu}}_{=\delta_\nu^\alpha}\right)\right) = 0.$$

□

Предложение 3.12. *Предположим, что гипотеза 3.5 верна для потенциала $\mathcal{F}$ некоторой КогТП. Тогда гипотеза верна и для произвольного подкрученного потенциала $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$ заданной КогТП.*

Доказательство. Обозначим через $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}$ и K^{DZ} дифференциальные многочлены и пуассонов оператор, соответствующие потенциалу $\mathcal{F}$. Обозначим

$$w_n^{\mathrm{top};\alpha} := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^{n+2}\mathcal{F}}{\partial t_0^\mu(\partial t_0^{\mathbb{1}})^{n+1}}, \qquad \widetilde{w}_n^{\mathrm{top};\alpha} := \eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^{n+2}\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_0^\mu(\partial t_0^{\mathbb{1}})^{n+1}}.$$

Заметим, что $\widetilde{w}_n^{\mathrm{top};\alpha} = w_n^{\mathrm{top};\alpha}|_{t_c^\gamma\mapsto t_c^\gamma+\sum_{k\geq 1}(S_k)_\xi^\gamma t_{c+k}^\xi}$, и значит

$$\frac{\partial^2\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}}{\partial t_a^\alpha\partial t_b^\beta} = \sum_{i=0}^a\sum_{j=0}^b (S_i)_\alpha^\mu(S_j)_\beta^\nu\,\Omega_{\mu,a-i;\nu,b-j}|_{t_c^\gamma\mapsto t_c^\gamma+\sum_{k\geq 1}(S_k)_\xi^\gamma t_{c+k}^\xi} + \mathrm{Coef}_{z_1^{-a}z_2^{-b}}\left(\frac{S(z_1)_\alpha^\mu\eta_{\mu\nu}S(z_2)_\beta^\nu - \eta_{\alpha\beta}}{z_1^{-1}+z_2^{-1}}\right).$$

Таким образом, первая часть гипотезы верна для подкрученного потенциала $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$. Обозначим соответствующие дифференциальные многочлены через $\widetilde{\Omega}_{\alpha,a;\beta,b}$, для которых мы получили формулу

$$\widetilde{\Omega}_{\alpha,a;\beta,b} = \sum_{i=0}^a\sum_{j=0}^b (S_i)_\alpha^\mu(S_j)_\beta^\nu\Omega_{\mu,a-i;\nu,b-j} + \mathrm{Coef}_{z_1^{-a}z_2^{-b}}\left(\frac{S(z_1)_\alpha^\mu\eta_{\mu\nu}S(z_2)_\beta^\nu - \eta_{\alpha\beta}}{z_1^{-1}+z_2^{-1}}\right).$$

Для доказательства второй части гипотезы обозначим $\overline{\overline{h}}_{\alpha,d} := \int\widetilde{\Omega}_{\mathbb{1},0;\alpha,d+1}dx$. Так как $\widetilde{\Omega}_{\mu,0;\beta,d} = \sum_{i=0}^d\Omega_{\mu,0;\nu,i}(S_{d-i})_\beta^\nu + \eta_{\mu\nu}(S_{d+1})_\beta^\nu$, мы получаем

$$\eta^{\alpha\mu}\partial_x\widetilde{\Omega}_{\mu,0;\beta,d} - K^{\mathrm{DZ};\alpha\mu}\frac{\delta\overline{\overline{h}}_{\beta,d}}{\delta w^\mu} =$$
$$= \sum_{i=0}^d(S_{d-i})_\beta^\nu\left(\eta^{\alpha\mu}\partial_x\Omega_{\mu,0;\nu,i} - K^{\mathrm{DZ};\alpha\mu}\frac{\delta\overline{h}_{\nu,i}}{\delta w^\mu}\right) - (S_{d+1})_\beta^\nu K^{\mathrm{DZ};\alpha\mu}\frac{\delta\left(\int\eta_{\nu\gamma}w^\gamma dx\right)}{\delta w^\mu} = 0,$$

где последний член зануляется в силу равенства $K_0^{\mathrm{DZ}} = 0$. Мы заключаем, что вторая часть гипотезы также верна для подкрученного потенциала $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$, причём соответствующий пуассонов оператор совпадает с оператором K^{DZ}. □

Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\}$. Мы будем говорить, что гипотеза 3.5 верна в приближении до рода g, если элементы $\Omega_{\alpha,a;\beta,b}$ и коэффициенты оператора K^{DZ} принадлежат пространству $\widehat{\mathcal{A}}_w + \varepsilon^{2g+2}\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk,t}} \subset \widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk,t}}$.

Доказательство следующей теоремы содержится в работе [35], однако мы приведём детали доказательства, так как они будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 3.13 ([35]). *Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\}$ и её подкрученный потенциал $\mathcal{F}^{\mathrm{desc}}$.*

1. *Гипотеза 3.5 верна в приближении до рода 0, причём $\overline{h}_{\alpha,d}\big|_{\varepsilon=0} = \overline{h}^{[0]}_{\alpha,d}\Big|_{v^\gamma\mapsto w^\gamma}$ и $K^{\mathrm{DZ}}|_{\varepsilon=0} = \eta^{-1}\partial_x$, где $\overline{h}^{[0]}_{\alpha,d}$ – гамильтонианы базовой иерархии, соответствующей ряду $\mathcal{F}_0^{\mathrm{desc}}$.*

2. *Гипотеза 3.5 верна в приближении до рода 1.*

Доказательство. Первая часть теоремы немедленно следует из формул (3.9) и (3.12).

Докажем вторую часть. Из предложения 3.12 следует, что достаточно это сделать для потенциала $\mathcal{F}$ нашей КогТП. Из соотношения (1.4) следует, что ряд $\mathcal{F}_1$ удовлетворяет системе соотношений

$$\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial t^\alpha_{a+1}} = \frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial t^\alpha_a \partial t^\mu_0}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\mathcal{F}_1}{\partial t^\nu_0} + \frac{1}{24}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^3\mathcal{F}_0}{\partial t^\mu_0\partial t^\nu_0\partial t^\alpha_a}, \quad \alpha\in[N], \quad a\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Из этой системы вытекает, что

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{24}\log\det\left(\eta^{\alpha\mu}\frac{\partial^3\mathcal{F}_0}{\partial t^{\mathbb{1}}_0\partial t^\mu_0\partial t^\beta_0}\right) + G(v^{\mathrm{top};1},\dots,v^{\mathrm{top};N}),$$

где $G(t^1,\dots,t^N) := \mathcal{F}_1|_{t^*_{\geq 1}=0}$ [33] (см. также [35, равенство (1.16)]). Иначе говоря, мы имеем

$$\mathcal{F}_1(v^*_*) = \frac{1}{24}\log\det\left(\eta^{\alpha\mu}\partial_x\Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,0}\right) + G(v^1,\dots,v^N).$$

Определим

$$\widetilde{v}^\gamma(v^*_*,\varepsilon) := v^\gamma + \varepsilon^2\eta^{\gamma\nu}\frac{1}{24}\partial_x\left\{\log\det\left(\eta^{\alpha\mu}\partial_x\Omega^{[0]}_{\mu,0;\beta,0}\right), \overline{h}^{[0]}_{\nu,0}\right\}_{\eta^{-1}\partial_x} \in \widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{wk,t}}_{\widetilde{v}}.$$

В работе [35] доказано, что элементы $\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^\alpha_a\partial t^\beta_b}(\widetilde{v}^*_*,\varepsilon)$, а также коэффициенты оператора $K^{\mathrm{DZ}}_{\widetilde{v}}$ принадлежат пространству $\widehat{\mathcal{A}}_{\widetilde{v}} + \varepsilon^4\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{wk,t}}_{\widetilde{v}}$. В частности, были доказаны формулы

$$K^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}_{\widetilde{v}} = \eta^{\alpha\beta}\partial_x + \frac{\varepsilon^2}{24}\left(\widetilde{c}^{\mu\alpha\beta}_\mu\partial_x^3 + \partial_x^3\circ\widetilde{c}^{\mu\alpha\beta}_\mu - \partial_x^2\widetilde{c}^{\mu\alpha\beta}_\mu\partial_x - \partial_x\circ\partial_x^2\widetilde{c}^{\mu\alpha\beta}_\mu\right) + O(\varepsilon^4), \tag{3.13}$$

$$\overline{h}^{[0]}_{\beta,p}[\widetilde{v}] = \int\left(\widetilde{h}^{[0]}_{\beta,p} + \frac{\varepsilon^2}{24}\left(\frac{\partial\widetilde{h}^{[0]}_{\beta,p-1}}{\partial\widetilde{v}^\zeta}\left(\widetilde{c}^\zeta_{\nu\gamma}\widetilde{c}^{\mu\nu}_{\alpha\mu} - \widetilde{c}^\zeta_{\mu\nu\alpha}\widetilde{c}^{\mu\nu}_\gamma\right) - \frac{\partial\widetilde{h}^{[0]}_{\beta,p-2}}{\partial\widetilde{v}^\zeta}\widetilde{c}^\zeta_{\delta\sigma}\widetilde{c}^{\sigma\mu}_\gamma\widetilde{c}^\delta_{\alpha\mu}\right)\widetilde{v}^\alpha_x\widetilde{v}^\gamma_x\right)dx + O(\varepsilon^4), \tag{3.14}$$

где

$$\widetilde{h}_{\beta,p} := \begin{cases} \Omega^{[0]}_{\mathbb{1},0;\beta,p+1}\Big|_{v^\gamma\mapsto\widetilde{v}^\gamma}, & \text{если } p \geq -1, \\ 0, & \text{если } p = -2. \end{cases}$$

$$\widetilde{c}_{\alpha\beta\gamma} := \frac{\partial^3 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma}\bigg|_{t^\theta\mapsto\widetilde{v}^\theta}, \qquad \widetilde{c}_{\alpha\beta\gamma\delta} := \frac{\partial^4 F}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\gamma \partial t^\delta}\bigg|_{t^\theta\mapsto\widetilde{v}^\theta},$$

а индексы поднимаются с помощью метрики η. □

3.3 Известные примеры

3.3.1 Тривиальная когомологическая теория поля и иерархия КдФ

Следующий результат был доказан в работе [36], однако мы приведём краткое доказательство.

Теорема 3.14 ([36]). *Гипотеза 3.5 верна для тривиальной КогТП, и соответствующая иерархия Дубровина–Жанга совпадает с иерархией КдФ.*

Доказательство. Напомним, что *иерархия Кадомцева–Петвиашвили* (КП) является следующей системой УрЧП (см., напр., [32]):

$$\frac{\partial L^{\mathrm{KP}}}{\partial T_i} = \left[\left((L^{\mathrm{KP}})^i\right)_+, L^{\mathrm{KP}}\right], \quad L^{\mathrm{KP}} = \partial_x + \sum_{i\geq 1} f_i \partial_x^{-i}, \quad f_i \in \mathbb{C}[[x, T_1, T_2, \ldots]].$$

Потенциал тривиальной КогТП,

$$\mathcal{F}(t_0, t_1, \ldots, \varepsilon) := \sum_{g,n\geq 0} \frac{\varepsilon^{2g}}{n!} \sum_{d_1,\ldots,d_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}\right) \prod_{i=1}^n t_{d_i} \in \mathbb{Q}[[t_0, t_1, \ldots, \varepsilon]],$$

является логарифмом тау-функции иерархии КП после подстановки $t_i \mapsto (2i+1)!!T_{2i+1}$ и $\varepsilon = 1$ [56]. Тот факт, что вторые частные производные логарифма тау-функции являются дифференциальными многочленами от выражений $\operatorname{res}\left((L^{\mathrm{KP}})^j\right)$, $j \geq 1$, хорошо известен. Отсюда следует первая часть гипотезы 3.5, и мы получаем, что $\overline{h}_d = \overline{h}_d^{\mathrm{KdV}}\Big|_{u_i\mapsto w_i}$. Вторая часть гипотезы следует из тождества

$$\operatorname{res}\left(L^{\frac{2d+1}{2}}\right) = \frac{\varepsilon^2}{2d+3}\frac{\delta}{\delta u}\int \operatorname{res}\left(L^{\frac{2d+3}{2}}\right) dx, \quad L = \partial_x^2 + 2\varepsilon^{-2}u,$$

откуда мы получаем, что $K^{\mathrm{DZ}} = \partial_x$. □

3.3.2 Теория Громова–Виттена для $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ и расширенная иерархия Тоды

Рассмотрим КогТП $\{c^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{g,n}\colon H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)^{\otimes n} \to H^{\mathrm{e}}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})\}$ (см. пример 1.9) как семейство КогТП, зависящих от комплексного параметра q. В качестве базиса e_1, e_2 в пространстве $V = H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^1)$ выберем единицу и класс, двойственный точке. Рассмотрим теперь потенциал Громова–Виттена $\mathcal{F}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}$, который, как мы знаем, является подкрученным потенциалом для КогТП $\{c^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{g,n}\}$.

Теорема 3.15 (следствие 1.3 в работе [37]). *Гипотеза 3.5 верна для потенциала Громова–Виттена $\mathcal{F}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}$. Соответствующая иерархия Дубровина–Жанга связана с расширенной иерархией Тоды преобразованием Миуры*

$$w^1(v^*_*,\varepsilon) = \frac{\varepsilon\partial_x}{e^{\varepsilon\partial_x}-1}v^1, \qquad w^2(v^*_*,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2\partial_x^2}{e^{\varepsilon\partial_x}+e^{-\varepsilon\partial_x}-2}v^2.$$

3.3.3 Класс Виттена и иерархии Гельфанда–Дикого

Теорема 3.16 ([81, 44]). *Гипотеза 3.5 верна для КогТП $\{c^{r\text{-}spin}_{g,n}\}$. Соответствующая иерархия Дубровина–Жанга связана с иерархией Гельфанда–Дикого преобразованием Миуры (2.40), а также следующим перемасштабированием:*

$$\overline{h}_{\alpha,d} = \frac{1}{(-r)^{\frac{r+k-1}{2}-d}k!_r}\overline{h}^{\mathrm{GD}}_k[w], \quad \alpha\in[r-1], \quad d\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad k=\alpha+rd,$$
$$K^{\mathrm{DZ}} = (-r)^{\frac{r}{2}}K^{\mathrm{GD}}_w,$$

где мы напоминаем, что $(\alpha+rd)!_r = \prod_{i=0}^{d}(\alpha+ri)$.

3.4 Доказательство основной гипотезы для полупростой КогТП

Теорема 3.17. *Гипотеза 3.5 верна для произвольной полупростой КогТП.*

Доказательство. Из предложения 3.12 следует, что нам достаточно доказать теорему для потенциала $\mathcal{F}$ произвольной полупростой КогТП.

Предположим, что гипотеза верна для некоторой КогТП. Сделаем замену базиса в пространстве V, $\widetilde{e}_\alpha = M^\beta_\alpha e_\beta$. Будем обозначать новый потенциал через $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{t}^*_*,\varepsilon)$. Мы имеем $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}|_{t^\alpha_d\mapsto M^\alpha_\beta\widetilde{t}^\beta_d}$. Отсюда уже легко элементарным вычислением убедиться, что гипотеза верна для потенциала $\widetilde{\mathcal{F}}$, причём

$$\widetilde{\Omega}_{\alpha,a;\beta,b} = M^\mu_\alpha M^\nu_\beta\,\Omega_{\mu,a;\nu,b}\big|_{w^\gamma_d\mapsto M^\gamma_\theta\widetilde{w}^\theta_d}, \qquad \widetilde{K}^{\mathrm{DZ};\alpha\beta} = (M^{-1})^\alpha_\mu(M^{-1})^\beta_\nu\,K^{\mathrm{DZ};\mu\nu}\big|_{w^\gamma_d\mapsto M^\gamma_\theta\widetilde{w}^\theta_d}.$$

Мы знаем, что гипотеза верна для тривиальной КогТП, причём $K^{\mathrm{DZ}} = \partial_x$, обозначим через $\Omega_{a,b}$ соответствующие дифференциальные многочлены. Для произвольного $\rho \in \mathbb{C}^*$ определим КогТП $\{c_{g,n}^{\mathrm{triv};\rho}\}$, с $V = \mathbb{C}$, $e = e_1 = 1$ и $\eta_{1,1} = \rho$, равенством

$$c_{g,n}^{\mathrm{triv};\rho}(e_1^{\otimes n}) := \rho^{1-g} \in H^0(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

Элементарным вычислением легко убедиться, что гипотеза верна для потенциала этой КогТП, причём соответствующие дифференциальные многочлены равны $\rho\Omega_{a,b}\big|_{\varepsilon\mapsto\rho^{-\frac{1}{2}}\varepsilon}$, а пуассонов оператор равен $\rho^{-1}\partial_x$. Значит, гипотеза верна для любой КогТП ранга N вида

$$c_{g,n}^{\mathrm{triv};\overline{\rho}}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) := \begin{cases} \rho_{\alpha_1}^{1-g}, & \text{если } \alpha_1 = \ldots = \alpha_n, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \qquad \overline{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_N) \in (\mathbb{C}^*)^N, \tag{3.15}$$

где $e = \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha$ и $\eta_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \delta_{\alpha,\beta}$.

Рассмотрим теперь произвольную полупростую КогТП в степени 0. Так как соответствующая фробениусова алгебра на пространстве V не имеет нильпотентов, существует базис $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_N$ в пространстве V такой, что $\widetilde{e}_\alpha \circ \widetilde{e}_\beta = \delta_{\alpha,\beta}\widetilde{e}_\alpha$. Тогда мы имеем $\eta(\widetilde{e}_\alpha, \widetilde{e}_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}\rho_\alpha$ для некоторых $\rho_\alpha \in \mathbb{C}^*$. Значит, если перейти к базису $\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_N$ в пространстве V, то наша КогТП совпадёт с КогТП (3.15). Отсюда мы заключаем, что гипотеза верна для произвольной полупростой КогТП в степени 0.

В разделе 1.2.5 мы ввели действие Гивенталя группы $G_{\eta,+}$ на множестве КогТП с фиксированной частью в степени 0, которая однозначно определяется фробениусовой алгеброй. По теореме 1.24, если фробениусова алгебра полупроста, то действие группы $G_{\eta,+}$ на этом множестве является транзитивным. Мы знаем, что гипотеза верна для произвольной полупростой КогТП в степени 0. Наша цель состоит в том, чтобы доказать гипотезу для произвольной полупростой КогТП, пользуясь транзитивностью действия группы $G_{\eta,+}$.

Мы будем обозначать через $R(z).$ действие элементом $R(z) \in G_{\eta,+}$ на различных объектах, связанных с потенциалом $\mathcal{F}$. Например,

$$R(z).\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta} := \frac{\partial^2 \left(R(z).\mathcal{F}\right)}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta},$$

а через $R(z).\Omega_{\alpha,a;\beta,b}$ мы обозначаем единственный элемент в алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk,t}}$ такой, что

$$(R(z).\Omega_{\alpha,a;\beta,b})\big|_{w_c^\gamma \mapsto R(z).w_c^{\mathrm{top};\gamma}} = R(z).\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta}.$$

Мы будем обозначать через $r(z).$ инфинитезимальное действие элементом $r(z)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\eta,+}$. Например,

$$r(z).\mathcal{F} := \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\exp(\tau r(z)).\mathcal{F}\right)\big|_{\tau=0}.$$

Из формулы (1.37) мы получаем

$$r(z).\mathcal{F} = -\sum_{i\geq 1,\, j\geq 0}(r_i)^{\mu}_{\nu}q^{\nu}_j\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q^{\mu}_{i+j}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j\geq 0}(-1)^j(r_{i+j+1})^{\alpha\beta}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q^{\alpha}_i}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q^{\beta}_j} + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i,j\geq 0}(-1)^j(r_{i+j+1})^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial q^{\alpha}_i\partial q^{\beta}_j},$$

где мы используем обозначение $(r_l)^{\alpha\beta} := (r_l)^{\alpha}_{\mu}\eta^{\mu\beta}$.

Предложение 3.18. *Для любых $l \geq 1$ и $r_lz^l \in \mathfrak{g}_{\eta,+}$ мы имеем*

$$\begin{aligned} r_lz^l.\Omega_{\alpha,a;\beta,b} =& -(r_l)^{\mu}_{\alpha}\Omega_{\mu,a+l,\beta,b} - \Omega_{\alpha,a;\mu,b+l}(r_l)^{\mu}_{\beta} + \sum_{i+j=l-1}(-1)^j(r_l)^{\mu\nu}\Omega_{\alpha,a;\mu,i}\Omega_{\nu,j;\beta,b} \\ &- \sum_{n\geq 0}\frac{\partial\Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w^{\gamma}_n}\eta^{\gamma\theta}\Bigg(-(r_l)^{\mu}_{\theta}\partial^n_x\Omega_{\mu,l,\mathbb{1},0} - (n+1)\partial^n_x\Omega_{\theta,0;\mu,l}(r_l)^{\mu}_{\mathbb{1}} \\ &\qquad + \sum_{i+j=l-1}(-1)^j(r_l)^{\mu\nu}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\partial^{n-k-1}_x\Omega_{\mu,i;\mathbb{1},0}\partial^{k+1}_x\Omega_{\nu,j;\theta,0} \\ &\qquad + \sum_{i+j=l-1}(-1)^j(r_l)^{\mu\nu}\partial^n_x\left(\Omega_{\theta,0;\mu,i}\Omega_{\nu,j;\mathbb{1},0}\right)\Bigg) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i+j=l-1}(-1)^j(r_l)^{\mu\nu}\sum_{n_1,n_2\geq 0}\frac{\partial^2\Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w^{\gamma_1}_{n_1}\partial w^{\gamma_2}_{n_2}}\eta^{\gamma_1\theta_1}\eta^{\gamma_2\theta_2}\partial^{n_1+1}_x\Omega_{\theta_1,0;\mu,i}\partial^{n_2+1}_x\Omega_{\theta_2,0;\nu,j}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Доказательство. Мы имеем

$$r_lz^l.\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^{\alpha}_a\partial t^{\beta}_b} = \left(r_lz^l.\Omega_{\alpha,a;\beta,b}\right)\Big|_{w^{\theta}_c\mapsto w^{\mathrm{top};\theta}_c} + \sum_{n\geq 0}\left.\frac{\partial\Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w^{\gamma}_n}\right|_{w^{\theta}_c\mapsto w^{\mathrm{top};\theta}_c} r_lz^l.w^{\mathrm{top};\gamma}_n.$$

В процессе дальнейших рассуждений, чтобы не загромождать формулы, мы будем опускать упоминание подстановки $\big|_{w^{\gamma}_c\mapsto w^{\mathrm{top};\gamma}_c}$. Мы имеем

$$\begin{aligned} &r_lz^l.\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^{\alpha}_a\partial t^{\beta}_b} = \\ =&\frac{\partial^2}{\partial t^{\alpha}_a\partial t^{\beta}_b}\left(-\sum_{j\geq 0}(r_l)^{\mu}_{\nu}q^{\nu}_j\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q^{\mu}_{l+j}} + \frac{1}{2}\sum_{i+j=l-1}(-1)^j(r_l)^{\mu\nu}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q^{\mu}_i}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q^{\nu}_j} + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i+j=l-1}(-1)^j(r_l)^{\mu\nu}\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial q^{\mu}_i\partial q^{\nu}_j}\right) = \\ =&-(r_l)^{\mu}_{\alpha}\Omega_{\mu,a+l,\beta,b} - \Omega_{\alpha,a;\mu,b+l}(r_l)^{\mu}_{\beta} - \sum_{j\geq 0}(r_l)^{\mu}_{\nu}q^{\nu}_j\frac{\partial}{\partial q^{\mu}_{l+j}}\Omega_{\alpha,a;\beta,b} \\ &+\sum_{i+j=l-1}(-1)^j(r_l)^{\mu\nu}\left(\Omega_{\alpha,a;\mu,i}\Omega_{\nu,j;\beta,b} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q^{\mu}_i}\frac{\partial}{\partial q^{\nu}_j}\Omega_{\alpha,a;\beta,b} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^{\mu}_i\partial q^{\nu}_j}\Omega_{\alpha,a;\beta,b}\right). \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} r_l z^l.w_n^{\mathrm{top};\gamma} =& -\eta^{\gamma\theta}(r_l)^\mu_\theta \partial_x^n \Omega_{\mu,l,\mathbb{1},0} - \eta^{\gamma\theta}(n+1)\partial_x^n \Omega_{\theta,0;\mu,l}(r_l)^\mu_{\mathbb{1}} - \sum_{j\geq 0}(r_l)^\mu_\nu q_j^\nu \frac{\partial w_n^{\mathrm{top};\gamma}}{\partial q_{l+j}^\mu} \\ &+ \sum_{i+j=l-1}(-1)^j (r_l)^{\mu\nu}\left(\eta^{\gamma\theta}\partial_x^n\left(\Omega_{\theta,0;\mu,i}\Omega_{\nu,j;\mathbb{1},0}\right) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i^\mu}\frac{\partial w_n^{\mathrm{top};\gamma}}{\partial q_j^\nu}\right) \\ &+ \sum_{i+j=l-1}(-1)^j (r_l)^{\mu\nu}\left(\eta^{\gamma\theta}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\partial_x^{n-k-1}\Omega_{\mu,i;\mathbb{1},0}\partial_x^{k+1}\Omega_{\nu,j;\theta,0} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 w_n^{\mathrm{top};\gamma}}{\partial q_i^\mu \partial q_j^\nu}\right). \end{aligned}$$

Далее при вычислении разности $r_l z^l.\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta} - \sum_{n\geq 0}\frac{\partial \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_n^\gamma} r_l z^l.w_n^{\mathrm{top};\gamma}$ мы имеем следующие зануления:

$$\begin{aligned} -\sum_{j\geq 0}(r_l)^\mu_\nu q_j^\nu \left(\frac{\partial}{\partial q_{l+j}^\mu}\Omega_{\alpha,a;\beta,b} - \sum_{n\geq 0}\frac{\partial \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_n^\gamma}\frac{\partial w_n^{\mathrm{top};\gamma}}{\partial q_{l+j}^\mu}\right) = 0, \\ \sum_{i+j=l-1}(-1)^j (r_l)^{\mu\nu}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i^\mu}\left(\frac{\partial}{\partial q_j^\nu}\Omega_{\alpha,a;\beta,b} - \sum_{n\geq 0}\frac{\partial \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_n^\gamma}\frac{\partial w_n^{\mathrm{top};\gamma}}{\partial q_j^\nu}\right) = 0. \end{aligned}$$

Также элементарное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i+j=l-1}(-1)^j (r_l)^{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_i^\mu \partial q_j^\nu}\Omega_{\alpha,a;\beta,b} - \sum_{n\geq 0}\frac{\partial \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_n^\gamma}\frac{\partial^2 w_n^{\mathrm{top};\gamma}}{\partial q_i^\mu \partial q_j^\nu}\right) = \\ =&\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i+j=l-1}(-1)^j (r_l)^{\mu\nu}\sum_{n_1,n_2\geq 0}\frac{\partial^2 \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_{n_1}^{\gamma_1}\partial w_{n_2}^{\gamma_2}}\eta^{\gamma_1\theta_1}\eta^{\gamma_2\theta_2}\partial_x^{n_1+1}\Omega_{\theta_1,0;\mu,i}\partial_x^{n_2+1}\Omega_{\theta_2,0;\nu,j}. \end{aligned}$$

Вместе с оставшимися членами в разности $r_l z^l.\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_a^\alpha \partial t_b^\beta} - \sum_{n\geq 0}\frac{\partial \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_n^\gamma} r_l z^l.w_n^{\mathrm{top};\gamma}$ это даёт искомую формулу для $r_l z^l.\Omega_{\alpha,a;\beta,b}$. □

Докажем теперь первую часть гипотезы 3.5 для потенциала $\mathcal{F}$ произвольной полупростой КогТП. Нам нужно доказать, что $\Omega_{\alpha,a;\beta,b} \in \widehat{\mathcal{A}}_w$. Рассмотрим орбиту потенциала $\mathcal{F}$ под действием группы $G_{\eta,+}$. Мы знаем, что свойство $\Omega_{\alpha,a;\beta,b} \in \widehat{\mathcal{A}}_w$ выполнено для потенциала из этой орбиты, который соответствует КогТП в степени 0. Обратимся к формуле (3.16). Ясно, что правая часть этой формулы принадлежит алгебре $\widehat{\mathcal{A}}_w$, если все $\Omega_{\gamma,p;\delta,q}$ лежат в этой алгебре. Для того, чтобы применить элемент группы $G_{\eta,+}$, нужно проинтегрировать действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\eta,+}$, то есть решить ОДУ с правой частью, заданной правой частью формулы (3.16). Отсюда уже ясно, что если свойство $\Omega_{\alpha,a;\beta,b} \in \widehat{\mathcal{A}}_w$ выполняется в одной точке орбиты, то оно выполняется и во всех точках орбиты. Таким образом, первая часть гипотезы 3.5 доказана для подкрученного потенциала произвольной полупростой КогТП.

Развивая предложение 3.18, выведем теперь деформационную формулу для оператора K^{DZ} под действием алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\eta,+}$. Чтобы упростить формулы, мы введём следующее соглашение:

$$\Omega_{\alpha,p;\beta,q} := (-1)^{\max(p,q)}\eta_{\alpha\beta}\delta_{p+q,-1}, \quad \text{если одно из чисел } p,q \text{ отрицательно.}$$

Пользуясь этим соглашением, формула (3.16) заметно упрощается:

$$r_l z^l.\Omega_{\alpha,a;\beta,b} = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i+j=l-1}} (-1)^j (r_l)^{\mu\nu} \Bigg[\Omega_{\alpha,a;\mu,i}\Omega_{\nu,j;\beta,b} - \sum_{n\geq 0} \frac{\partial \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_n^\gamma} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \partial_x^k \Omega_{\mu,i}^{\gamma,0} \partial_x^{n-k} \Omega_{\nu,j;\mathbb{1},0} \tag{3.17}$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{n_1,n_2\geq 0} \frac{\partial^2 \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_{n_1}^{\gamma_1} \partial w_{n_2}^{\gamma_2}} \partial_x^{n_1+1} \Omega_{\mu,i}^{\gamma_1,0} \partial_x^{n_2+1} \Omega_{\nu,j}^{\gamma_2,0} \Bigg].$$

Введём следующие обозначения:

$$\Omega_{\beta,b}^{\alpha,a} := \eta^{\alpha\mu}\Omega_{\mu,a;\beta,b}, \qquad \Omega_{\alpha,a;\beta,b;\gamma,c} := \sum_{n\geq 0} \frac{\partial \Omega_{\alpha,a;\beta,b}}{\partial w_n^\mu} \partial_x^{n+1} \Omega_{\gamma,c}^{\mu,0}, \quad \Omega_{\beta,b;\gamma,c}^{\alpha,a} := \eta^{\alpha\mu}\Omega_{\mu,a;\beta,b;\gamma,c},$$

$$\overline{\Omega}_{\alpha,a;\beta,b} := \left(\Omega_{\alpha,a;\beta,b}^{1,0}, \dots, \Omega_{\alpha,a;\beta,b}^{N,0}\right).$$

Мы будем также использовать обозначение (1.48).

Предложение 3.19. *Для любых $l \geq 1$ и $r_l z^l \in \mathfrak{g}_{\eta,+}$ мы имеем*

$$r_l z^l.K^{\mathrm{DZ};\beta\xi} = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i+j=l-1}} (-1)^j (r_l)^{\mu\nu} \times \tag{3.18}$$

$$\Bigg[-\frac{\varepsilon^2}{2} \left(H_{\partial_x \overline{\Omega}_{\mu,i;\nu,j}}.K^{\mathrm{DZ}}\right)^{\beta\xi} + L_\gamma\left(\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\Omega_{\mu,i}^{\beta,0}\right) \circ K^{\mathrm{DZ};\gamma,\xi} - \sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n} \binom{n+1}{a} \partial_x^b \Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j} \partial_x^a \Omega_{\mu,i}^{\gamma,0} \frac{\partial K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}}{\partial w_n^\gamma} \tag{I}$$

$$+ \sum_{s\geq 1} K_s^{\mathrm{DZ};\beta\gamma} \sum_{f+e=s-1} \partial_x^f \circ \Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j} \partial_x^e \circ \sum_{n\geq 0} \mathcal{T}_{\gamma,n} \Omega_{\mu,i}^{\xi,0} (-\partial_x)^{n+1} \tag{II}$$

$$+ K^{\mathrm{DZ};\beta\gamma} \circ \sum_{0\leq u\leq v} \left(\binom{v}{u} \mathcal{T}_{\gamma,v+1} \Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j} (-\partial_x)^{v-u} \Omega_{\mu,i}^{\xi,0} - \binom{v+1}{u} (-\partial_x)^{v-u} \Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j} \mathcal{T}_{\gamma,v+1} \Omega_{\mu,i}^{\xi,0} \right) (-\partial_x)^{u+1} \tag{III}$$

$$+ \sum_{s\geq 1} K_s^{\mathrm{DZ};\beta\gamma} \sum_{e+f=s-1} \binom{s}{e} \partial_x^e \frac{\delta \Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}}{\delta w^\gamma} \partial_x^f \circ \Omega_{\mu,i}^{\xi,0} \partial_x \tag{IV}$$

$$- \partial_x \Omega_{\nu,j-1}^{\beta,0} \left(\sum_{1\leq u\leq m} (-\partial_x)^{m-u} \frac{\partial \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_m^\gamma} \partial_x^{u-1} \circ K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi} + \sum_{2\leq f\leq s} (-\partial_x)^{s-f} \left(K_s^{\mathrm{DZ};\gamma\xi} \frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma} \right) \partial_x^{f-1} \right) \Bigg], \tag{V}$$

Доказательство. В процессе доказательства предложения мы будем использовать следующие обозначения.

- Мы будем работать с тремя алгебрами: $\mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]$, $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk}}$, которые связаны изоморфизмами, задаваемыми подстановками $v_c^\gamma \mapsto v_c^{\mathrm{top};\gamma}$ и $w_c^\gamma \mapsto w_c^{\mathrm{top};\gamma}$. Если задан элемент в одной алгебре, мы будем использовать то же обозначение для соответствующего элемента в другой алгебре, когда ясно из контекста, что имеется ввиду.

- Мы будем исследовать действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\eta,+}$ на элементах этих алгебр. Так как изоморфизмы между этими алгебрами деформируются при действии группы $G_{\eta,+}$, при изучении действия алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\eta,+}$ важно различать в какой из трёх алгебр применяется действие алгебры Ли. Для $r = r(z) \in \mathfrak{g}_{\eta,+}$ мы будем использовать обозначение $r[t].$, $r[v].$ и $r[w].$ для обозначения действия в алгебрах $\mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]$, $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk}}$, соответственно.

Мы имеем

$$K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} = \partial_x\Omega^{\beta,0}_{\alpha,p},$$

откуда следует, что

$$(r[w].K^{\mathrm{DZ};\beta\xi})\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} = \partial_x(r[w].\Omega^{\beta,0}_{\alpha,p}) - K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\frac{\delta(r[w].\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0})}{\delta w^\xi}. \tag{3.19}$$

Подставим в это равенство выражения для $r[w].\Omega_{\mu,0;\alpha,p}$ и $r[w].\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}$ из формулы (3.17). Из предложения 3.8 следует, что достаточно доказать, что выражение в правой части формулы (3.18) удовлетворяет получившемуся равенству.

Подставим сначала в правую часть равенства (3.19) члены с ε^2 из формулы (3.17). Заметим сначала, что

$$\sum_{n,m\geq 0}\frac{\partial^2\Omega_{\alpha,p;\beta,q}}{\partial w^\gamma_n\partial w^\zeta_m}\partial_x^{n+1}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\partial_x^{m+1}\Omega^{\zeta,0}_{\nu,j} = \left[\frac{\partial}{\partial t^\mu_i}\circ\frac{\partial}{\partial t^\nu_j} - \sum_{m\geq 0}\partial_x^{m+1}\Omega^{\zeta,0}_{\mu,i;\nu,j}\frac{\partial}{\partial w^\zeta_m}\right]\Omega_{\alpha,p;\beta,q}.$$

Мы имеем

$$\frac{\delta}{\delta w^\xi}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t^\mu_i}\circ\frac{\partial}{\partial t^\nu_j}\right)\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}\right] = \frac{\delta}{\delta w^\xi}\partial_x\Omega_{\alpha,p+1;\mu,i;\nu,j} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^\mu_i}\circ\frac{\partial}{\partial t^\nu_j}\right)\Omega^{\beta,0}_{\alpha,p} = \frac{\partial}{\partial t^\alpha_p}\Omega^{\beta,0}_{\mu,i;\nu,j} = \left[\sum_{n\geq 0}\frac{\partial\Omega^{\beta,0}_{\mu,i;\nu,j}}{\partial w^\gamma_n}\partial_x^n\circ K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi}\right]\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}.$$

В итоге, мы получаем

$$\partial_x\sum_{n,m\geq 0}\frac{\partial^2\Omega^{\beta,0}_{\alpha,p}}{\partial w^\gamma_n\partial w^\zeta_m}\partial_x^{n+1}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\partial_x^{m+1}\Omega^{\zeta,0}_{\nu,j} - K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\frac{\delta}{\delta w^\xi}\sum_{n,m\geq 0}\frac{\partial^2\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w^\gamma_n\partial w^\zeta_m}\partial_x^{n+1}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\partial_x^{m+1}\Omega^{\zeta,0}_{\nu,j} =$$

$$= L_\gamma(\partial_x\Omega^{\beta,0}_{\mu,i;\nu,j})\circ K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} + \left[K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\circ\frac{\delta}{\delta w^\xi}, \sum_{m\geq 0}\partial_x^{m+1}\Omega^{\zeta,0}_{\mu,i;\nu,j}\frac{\partial}{\partial w^\zeta_m}\right]\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0},$$

и по лемме 1.43 последнее выражение равно в точности $-\left(H_{\partial_x\overline{\Omega}_{\mu,i;\nu,j}}.K^{\mathrm{DZ}}\right)^{\beta\xi}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}$, что даёт первый член в строке (I) в итоговой формуле (3.18).

Подставим теперь в правую часть равенства (3.19) члены с ε^0 из формулы (3.17). Заметим, что

$$-\partial_x\sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n}\binom{n+1}{a}\partial_x^b\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^a\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial\Omega^{\beta,0}_{\alpha,p}}{\partial w^\gamma_n} = -\sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n}\binom{n+1}{a}\partial_x^b\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^a\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial(\partial_x\Omega^{\beta,0}_{\alpha,p})}{\partial w^\gamma_n}$$

$$+\sum_{n\geq 0}\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^{n+1}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial\Omega^{\beta,0}_{\alpha,p}}{\partial w^\gamma_n}.$$

Второе слагаемое в правой части этой формулы равно

$$\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\Omega^{\beta,0}_{\mu,i;\alpha,p} = \underbrace{\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}L_\gamma(\Omega^{\beta,0}_{\mu,i})\left(K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}\right)}_{*},$$

и вместе с ещё одним выражением ниже даст второй член в строке (I) в итоговой формуле (3.18). Первое слагаемое переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n}\binom{n+1}{a}\partial_x^b\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^a\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial}{\partial w^\gamma_n}\left(K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}\right) \qquad (3.20)\\
&=-\sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n}\binom{n+1}{a}\partial_x^b\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^a\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\left(\frac{\partial}{\partial w^\gamma_n}K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\right)\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}\\
&\underline{\underline{-K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n}\binom{n+1}{a}\partial_x^b\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^a\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial}{\partial w^\gamma_n}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}}}\\
&-\sum_{s\geq 1}K_s^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\sum_{f+e=s-1}\partial_x^f\Bigg(\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^e\underbrace{\sum_{n\geq 0}\partial_x^{n+1}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial}{\partial w^\gamma_n}}_{=H_{\partial_x\overline{\Omega}_{\mu,i}}}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}\Bigg).
\end{aligned}$$

Первое слагаемое даёт третий член в строке (I) в итоговой формуле. Второе слагаемое появится ниже с противоположным знаком (будет также выделено двойным подчёркиванием) и в итоге сократится. Мы преобразуем третье слагаемое с помощью следующего вычисления:

$$H_{\partial_x\overline{\Omega}_{\mu,i}}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} = \left[H_{\partial_x\overline{\Omega}_{\mu,i}},\frac{\delta}{\delta w^\xi}\right]\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0} = -\sum_{n\geq 0}\mathcal{T}_{\xi,n}\left(\partial_x\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\right)(-\partial_x)^n\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma}.$$

Здесь мы использовали лемму 1.44 в последнем равенстве, а первое равенство вытекает из наблюдения $\frac{\delta}{\delta w^\xi}\left(H_{\overline{\Omega}_{\mu,i}}\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}\right) = \frac{\delta}{\delta w^\xi}\Omega_{\mu,i;\alpha,p+1;\mathbb{1},0} = \frac{\delta}{\delta w^\xi}\left(\partial_x\Omega_{\mu,i;\alpha,p+1}\right) = 0$. Таким образом, третье слагаемое в правой части равенства (3.20) равно

$$\sum_{s\geq 1}K_s^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\sum_{f+e=s-1}\partial_x^f\left(\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^e\sum_{n\geq 0}\mathcal{T}_{\xi,n}\left(\partial_x\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\right)(-\partial_x)^n\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma}\right),$$

что даёт первый член в строке (II) в итоговой формуле.

Мы имеем

$$\partial_x\left(\Omega^{\beta,0}_{\nu,j}\Omega_{\mu,i;\alpha,p}\right) = \underline{\partial_x\Omega^{\beta,0}_{\nu,j}\Omega_{\mu,i;\alpha,p}} + \underbrace{\Omega^{\beta,0}_{\nu,j}L_\gamma(\Omega_{\mu,i;\mathbb{1},0})\left(K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}\right)}_{*}.$$

Второе слагаемое вместе другим слагаемым, помеченным звёздочкой выше, даёт второй член в строке (I) в итоговой формуле. Первое слагаемое будет рассмотрено чуть позже.

С помощью свойств (1.70) и (1.71) мы вычисляем

$$\frac{\delta}{\delta w^\xi}\left(\partial_x^b\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^a\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}\right)=\sum_{k,m\geq 0}(-1)^{k+m}\binom{k+m}{k}\mathcal{T}_{\xi,k+m}\partial_x^b\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^{a+k}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\partial_x^m\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}$$
$$+\sum_{k,m\geq 0}(-1)^{k+m}\binom{k+m}{k}\partial_x^{b+k}\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\mathcal{T}_{\xi,k+m}\partial_x^a\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\partial_x^m\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}$$
$$+\sum_{k,m\geq 0}(-1)^{k+m}\binom{k+m}{k}\partial_x^{b+k}\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^{a+m}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\mathcal{T}_{\xi,k+m}\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}.$$

В то же время, используя формулу (1.70), мы имеем

$$\frac{\delta}{\delta w^\xi}\left(\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\Omega_{\mu,i;\alpha,p+1}\right)=\frac{\delta\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}}{\delta w^\xi}\Omega_{\mu,i;\alpha,p+1}+\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\mathcal{T}_{\xi,n+1}\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^n\sum_{k\geq 0}\partial_x^{k+1}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_k^\gamma}$$
$$+\sum_{n\geq 0}(-1)^n\partial_x^n\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\mathcal{T}_{\xi,n+1}\sum_{k\geq 0}\partial_x^{k+1}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_k^\gamma}.$$

Таким образом, прямым подсчётом мы получаем

$$\frac{\delta}{\delta w^\xi}\left[\sum_{n\geq 0}\sum_{a+b=n}\binom{n+1}{a}\partial_x^b\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\partial_x^a\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}-\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\Omega_{\mu,i;\alpha,p+1}\right]=$$
$$=\sum_{0\leq u\leq v}\binom{v}{u}\mathcal{T}_{\xi,v+1}\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}(-\partial_x)^{v-u}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}(-\partial_x)^{u+1}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma}$$
$$-\sum_{0\leq u\leq v}\binom{v+1}{u}(-\partial_x)^{v-u}\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}\mathcal{T}_{\xi,v+1}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}(-\partial_x)^{u+1}\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma}$$
$$+\sum_{u,v,n\geq 0}(-1)^n\binom{u+v+1}{v}(-\partial_x)^u\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}(-\partial_x)^v\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\mathcal{T}_{\xi,u+v-n}\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}$$
$$+\frac{\delta\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}}{\delta w^\xi}\left(\sum_{0\leq u\leq n}\partial_x^{n-u}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}(-\partial_x)^u\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}-\Omega_{\mu,i;\alpha,p+1}\right).$$

Применим оператор $K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}$ к получившемуся выражению. Первое и второе слагаемые дадут вклад в итоговую формулу в строке (III). Используя соотношение (1.69), легко видеть, что третье слагаемое сокращается со вторым слагаемым (с двойным подчёркиванием) в правой части равенства (3.20). Мы теперь преобразуем четвёртое слагаемое:

$$K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\left(\frac{\delta\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}}{\delta w^\xi}\left(\sum_{0\leq u\leq n}\partial_x^{n-u}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}(-\partial_x)^u\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}-\Omega_{\mu,i;\alpha,p+1}\right)\right)=$$
$$=K^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\frac{\delta\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}}{\delta w^\xi}\left(\sum_{0\leq u\leq n}\partial_x^{n-u}\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}(-\partial_x)^u\frac{\partial\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w_n^\gamma}-\Omega_{\mu,i;\alpha,p+1}\right)$$
$$+\sum_{s\geq 1}K_s^{\mathrm{DZ};\beta\xi}\sum_{e+f=s-1}\binom{s}{e}\partial_x^e\frac{\delta\Omega_{\mathbb{1},0;\nu,j}}{\delta w^\xi}\partial_x^f\left(\Omega^{\gamma,0}_{\mu,i}\partial_x\frac{\delta\Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma}\right).$$

Второе слагаемое даёт вклад в итоговую формулу в строке (IV). Первое же слагаемое будет сейчас рассмотрено вместе с другим подчёркнутым выражением, которое осталось у нас выше.

Мы преобразуем сумму подчёркнутых выражений следующим образом:

$$\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i+j=l-1}} (-1)^j \partial_x \Omega^{\beta,0}_{\nu,j-1} \left(\sum_{0\le u\le n} \partial_x^{n-u} \Omega^{\gamma,0}_{\mu,i} (-\partial_x)^u \frac{\partial \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w^\gamma_n} - \Omega_{\mu,i;\alpha,p+1} \right) + \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i+j=l-1}} (-1)^j \partial_x \Omega^{\beta,0}_{\nu,j} \Omega_{\mu,i;\alpha,p} =$$

$$= \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i+j=l-1}} (-1)^j \partial_x \Omega^{\beta,0}_{\nu,j-1} \underbrace{\left(-\Omega_{\mu,i+1;\alpha,p} - \Omega_{\mu,i;\alpha,p+1} + \sum_{0\le u\le n} \partial_x^{n-u} \Omega^{\gamma,0}_{\mu,i} (-\partial_x)^u \frac{\partial \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w^\gamma_n} \right)}_{X_{\mu,i}:=}.$$

Очевидным образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\Omega_{\mu,i+1;\alpha,p} + \Omega_{\mu,i;\alpha,p+1} \right) = &\sum_{m\ge 0} \frac{\partial \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\partial w^\xi_m} \partial_x^m \left(K^{\mathrm{DZ};\xi\gamma} \frac{\delta \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma} \right) \\ &+ \sum_{n\ge 0} \partial_x^n \left(K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi} \frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} \right) \frac{\partial \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w^\gamma_n}. \end{aligned}$$

Пользуясь соотношением $\partial_x A\cdot B = A\cdot(-\partial_x)B + \partial_x(A\cdot B)$, мы получаем

$$\begin{aligned} \partial_x \left(\Omega_{\mu,i+1;\alpha,p} + \Omega_{\mu,i;\alpha,p+1} \right) = &\partial_x \sum_{m\ge 0} \sum_{u=0}^{m-1} (-\partial_x)^u \frac{\partial \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\partial w^\xi_m} \partial_x^{m-1-u} \left(K^{\mathrm{DZ};\xi\gamma} \frac{\delta \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma} \right) \\ &+ \frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} K^{\mathrm{DZ};\xi\gamma} \frac{\delta \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma} \\ &+ \partial_x \sum_{n\ge 0} \sum_{v=0}^{n-1} \partial_x^{n-1-v} \left(K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi} \frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} \right) (-\partial_x)^v \frac{\partial \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\partial w^\gamma_n} \\ &+ \frac{\delta \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma} K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi} \frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi}. \end{aligned}$$

Пользуясь свойством $(K^{\mathrm{DZ}})^\dagger = -K^{\mathrm{DZ}}$, мы получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} K^{\mathrm{DZ};\xi\gamma} \frac{\delta \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma} + \frac{\delta \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma} K^{\mathrm{DZ};\gamma\xi} \frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} = \\ =&\partial_x \sum_{1\le e\le s} (-\partial_x)^{e-1} \left(K^{\mathrm{DZ};\xi\gamma}_s \frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} \right) \partial_x^{s-e} \frac{\delta \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma}. \end{aligned}$$

Далее, элементарное вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} X_{\mu,i} = \Bigg(&- \sum_{m\ge 1} \sum_{u=0}^{m-1} (-\partial_x)^u \frac{\partial \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\partial w^\xi_m} \partial_x^{m-1-u} \circ K^{\mathrm{DZ};\xi\gamma} \\ &- \sum_{2\le f\le s} (-\partial_x)^{s-f} \left(K^{\mathrm{DZ};\xi\gamma}_s \frac{\delta \Omega_{\mu,i+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\xi} \right) \partial_x^{f-1} \Bigg) \frac{\delta \Omega_{\alpha,p+1;\mathbb{1},0}}{\delta w^\gamma}, \end{aligned}$$

и в итоге выражение $\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{Z}\\ i+j=l-1}} (-1)^j \partial_x \Omega^{\beta,0}_{\nu,j-1} X_{\mu,i}$ даёт заключительный вклад в итоговую формулу в строке (V). $\square$

Доказательство второй части гипотезы 3.5 для потенциала $\mathcal{F}$ произвольной полупростой КогТП проводится с помощью формулы (3.18) таким же образом, как и доказательство первой части гипотезы. Нам нужно доказать, что коэффициенты оператора K^{DZ} являются дифференциальными многочленами. Рассмотрим орбиту потенциала $\mathcal{F}$ под действием группы $G_{\eta,+}$. Мы знаем, что свойство полиномиальности для оператора K^{DZ} выполнено для потенциала из этой орбиты, который соответствует КогТП в степени 0. Обратимся к формуле (3.18). Правая часть этой формулы является дифференциальным многочленом, если все $K_s^{\mathrm{DZ};\alpha\beta}$ являются дифференциальными многочленами. Для того, чтобы применить элемент группы $G_{\eta,+}$, нужно проинтегрировать действие алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\eta,+}$, то есть решить ОДУ с правой частью, заданной правой частью формулы (3.18). Отсюда уже ясно, что если свойство $K_s^{\mathrm{DZ};\alpha\beta} \in \widehat{\mathcal{A}}_w$ выполняется в одной точке орбиты, то оно выполняется и во всех точках орбиты. Таким образом, вторая часть гипотезы 3.5 также доказана для подкрученного потенциала произвольной полупростой КогТП. □

3.5 Классы Ходжа и иерархия уравнения двухслойной жидкости

Рассмотрим КогТП $\{c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}\}$ ранга 1, задаваемую равенством

$$c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}(e_1^{\otimes n}) = 1 + \mu\lambda_1 + \ldots + \mu^g\lambda_g, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

которую мы уже рассматривали в разделе 2.2.2. Эта КогТП является полупростой, поэтому из теоремы 3.17 следует, что гипотеза 3.5 для неё верна. Рассмотрим соответствующую иерархию Дубровина–Жанга. Так как пространство V одномерно, мы будем опускать индексы, нумерующие элементы базиса в V: например, мы будем обозначать $\Omega_{a,b} := \Omega_{1,a;1,b}$.

Теорема 3.20. *Иерархия Дубровина–Жанга, соответствующая КогТП* $\{c_{g,n}^{\mathrm{Hodge}}\}$, *связана с иерархией уравнения двухслойной жидкости преобразованием Миуры*

$$w \mapsto u(w_*, \varepsilon) = w + \sum_{g\geq 1} \frac{(-1)^g}{2^{2g}(2g+1)!}\varepsilon^{2g}\mu^g w_{2g}. \tag{3.21}$$

Доказательство. Заметим сразу, что преобразование Миуры, обратное к (3.21), имеет вид

$$w(u_*, \varepsilon) = u + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^g \frac{2^{2g-1}-1}{2^{2g-1}}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}u_{2g}. \tag{3.22}$$

Мы знаем, что $\overline{h}_d\big|_{\varepsilon=0} = \int \frac{w^{d+2}}{(d+2)!}dx$, а значит $\overline{h}_d[u]\big|_{\varepsilon=0} = \int \frac{u^{d+2}}{(d+2)!}dx$. Из следствия 1.29 следует,

что нам достаточно доказать, что

$$K_u^{\mathrm{DZ}} = \partial_x, \tag{3.23}$$

$$\overline{h}_1[u] = \int \left(\frac{u^3}{6} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g} \mu^{g-1} \frac{|B_{2g}|}{2(2g)!} u u_{2g} \right) dx. \tag{3.24}$$

Мы будем рассматривать μ как формальную переменную. Таким образом, потенциал $\mathcal{F}$ является элементом алгебры $\mathbb{C}[\mu][[t_*^*, \varepsilon]]$. Рассмотрим алгебру дифференциальных многочленов с коэффициентами в алгебре $\mathbb{C}[\mu]$: $\widehat{\mathcal{A}}_w^\mu := \mathbb{C}[\mu][[w]][w_x, w_{xx}, \ldots][[\varepsilon]]$. Таким же образом расширяются пространства $\widehat{\Lambda}_w, \widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk}}, \ldots$, в соответствующих расширениях мы будем приписывать верхний индекс μ. Ингредиенты иерархии Дубровина–Жанга становятся элементами расширенных пространств: $\Omega_{p,q} \in \widehat{\mathcal{A}}_{w;0}^\mu$, $\overline{h}_{\alpha,d} \in \widehat{\Lambda}_{w;0}^\mu$.

Подстановки $w_n \mapsto w_n^{\mathrm{top}}$ и $v_n \mapsto v_n^{\mathrm{top}}$ задают изоморфизмы между алгебрами $\mathbb{C}[\mu][[t_*^*, \varepsilon]]$, $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk},\mu}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk},\mu}$. Преобразование Миуры (3.21) позволяет связать эти алгебры изоморфизмами с алгеброй $\widehat{\mathcal{A}}_u^{\mathrm{wk},\mu}$.

Важно отметить, что потенциал $\mathcal{F}$ нашей КогТП принадлежит подалгебре $\mathbb{C}[\mu\varepsilon^2][[t_*^*, \varepsilon^2]] \subset \mathbb{C}[\mu][[t_*^*, \varepsilon]]$, которую можно рассматривать как образ всей алгебры $\mathbb{C}[\mu][[t_*^*, \varepsilon]]$ после подстановок $\mu \mapsto \mu\varepsilon^2$ и $\varepsilon \mapsto \varepsilon^2$. Образы алгебр $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk},\mu}$, $\widehat{\mathcal{A}}_u^{\mathrm{wk},\mu}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk},\mu}$ после этих подстановок мы будем обозначать через $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk},\mu,\circ}$, $\widehat{\mathcal{A}}_u^{\mathrm{wk},\mu,\circ}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk},\mu,\circ}$, соответственно. Отметим, что $\mathcal{F}_g(v_*, \varepsilon, \mu) \in \widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk},\mu,\circ}$ при $g \geq 1$.

Мы имеем (см. [42, теорема 1])

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \lambda_g \psi_1^{d_1} \psi_2^{d_2} \ldots \psi_n^{d_n} = \frac{2^{2g-1}-1}{2^{2g-1}} \frac{|B_{2g}|}{(2g)!} \frac{(2g-3+n)!}{d_1! d_2! \ldots d_n!}, \quad g \geq 1, \quad \sum_{i=1}^n d_i = 2g-3+n. \tag{3.25}$$

Так как

$$\mathcal{F}_0 = \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_n \geq 0 \\ d_1+\ldots+d_n = n-3}} \frac{(n-3)!}{d_1! \ldots d_n!} t_{d_1} \ldots t_{d_n},$$

мы заключаем, что при $g \geq 1$ выполняется $\mathrm{Coef}_{\varepsilon^{2g}\mu^g} \mathcal{F}_g(v_*, \varepsilon, \mu) = \frac{2^{2g-1}-1}{2^{2g-1}} \frac{|B_{2g}|}{(2g)!} v_{2g-2}$ или, эквивалентно,

$$\mathcal{F}_g(v_*, \varepsilon, \mu)|_{\substack{\mu \mapsto \mu\tau^{-2} \\ \varepsilon \mapsto \varepsilon\tau}} \Big|_{\tau=0} = \varepsilon^{2g} \mu^g \frac{2^{2g-1}-1}{2^{2g-1}} \frac{|B_{2g}|}{(2g)!} v_{2g-2}, \quad g \geq 1. \tag{3.26}$$

Так как $\dim \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = 3g-3+n$, коэффициет при $\varepsilon^{2g}\mu^j \prod_{i=1}^n t_{d_i}$ в потенциале $\mathcal{F}$ является ненулевым только если $\sum_{i=1}^n (d_i - 1) + j - 3g = -3$. Это свойство можно эквивалентным образом записать в виде равенства $O^t \mathcal{F} = -3\mathcal{F}$, где

$$O^t := \sum_{i\geq 0} (i-1) t_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{3}{2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Отсюда мы выводим равенства

$$O^t w_n^{\mathrm{top}} = (n-1)w_n^{\mathrm{top}}, \qquad O^t \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_p \partial t_q} = -(p+q+1)\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_p \partial t_q}.$$

Значит, при изоморфизме $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk},\mu} \cong \mathbb{C}[\mu][[t_*^*, \varepsilon]]$ оператор O^t переходит в оператор

$$O^w := \sum_{i\geq 0}(i-1)w_i\frac{\partial}{\partial w_i} + \mu\frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{3}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}$$

на пространстве $\widehat{\mathcal{A}}_w^{\mathrm{wk},\mu}$. Аналогичным образом мы соотносим оператор O^t с операторами O^v и O^u на пространствах $\widehat{\mathcal{A}}_v^{\mathrm{wk},\mu}$ и $\widehat{\mathcal{A}}_u^{\mathrm{wk},\mu}$, соответственно, задаваемыми равенствами

$$O^v := \sum_{i\geq 0}(i-1)v_i\frac{\partial}{\partial v_i} + \mu\frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{3}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \qquad O^u := \sum_{i\geq 0}(i-1)u_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \mu\frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{3}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Рассмотрим оператор K^{DZ}. Мы знаем, что

$$K^{\mathrm{DZ}} = \sum_{m,n\geq 0}\frac{\partial w(v_*,\varepsilon,\mu)}{\partial v_m}\partial_x^m \circ \partial_x \circ (-\partial_x)^n \circ \frac{\partial w(v_*,\varepsilon,\mu)}{\partial v_n}.$$

Из свойства $O^t\mathcal{F} = -3\mathcal{F}$ следует, что $O^v w(v_*,\varepsilon,\mu) = -w(v_*,\varepsilon,\mu)$, откуда мы получаем равенство $O^v\frac{\partial w(v_*,\varepsilon,\mu)}{\partial v_n} = -n\frac{\partial w(v_*,\varepsilon,\mu)}{\partial v_n}$. Отсюда уже легко понять, что оператор $K^{\mathrm{DZ}} = \sum_{i\geq 1} K_i^{\mathrm{DZ}}\partial_x^i$ удовлетворяет соотношению $O^w K_i^{\mathrm{DZ}} = -(i-1)K_i^{\mathrm{DZ}}$. Учитывая, что $\deg K_i^{\mathrm{DZ}} = i-1$, мы получаем

$$\left(\sum_{i\geq 0} w_i\frac{\partial}{\partial w_i} - \mu\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)K_i^{\mathrm{DZ}} = 0.$$

Так как $K_i^{\mathrm{DZ}} \in \widehat{\mathcal{A}}_w^{\mu,\circ}$, мы сразу заключаем, что K_i^{DZ} не зависит от переменных w_j, или, иначе говоря,

$$K^{\mathrm{DZ}} = \partial_x + \sum_{g\geq 1} b_g \varepsilon^{2g}\mu^g\partial_x^{2g+1}, \quad \text{для некоторых } b_g \in \mathbb{C}. \tag{3.27}$$

Из формулы (3.27) с очевидностью следует, что $K^{\mathrm{DZ}}|_{\substack{\mu\mapsto\mu\tau^{-2}\\ \varepsilon\mapsto\varepsilon\tau}}\Big|_{\tau=0} = K^{\mathrm{DZ}}$. С другой стороны, пользуясь соотношением (3.26), мы получаем

$$\left(\sum_{m\geq 0}\frac{\partial w(v_*,\varepsilon,\mu)}{\partial v_m}\partial_x^m\right)\Bigg|_{\substack{\mu\mapsto\mu\tau^{-2}\\ \varepsilon\mapsto\varepsilon\tau}}\Bigg|_{\tau=0} = 1 + \sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\mu^g\frac{2^{2g-1}-1}{2^{2g-1}}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}\partial_x^{2g},$$

что, принимая во внимание формулу (3.22), доказывает равенство (3.23).

Докажем теперь равенство (3.24). Мы имеем $O^w\Omega_{p,q} = -(p+q+1)\Omega_{p,q}$. Так как $\overline{h}_p = \int \Omega_{0,p+1}dx$, получаем $O^w\overline{h}_p = -(p+2)\overline{h}_p$ и $O^u\overline{h}_p[u] = -(p+2)\overline{h}_p[u]$. Пользуясь тем, что $\deg \overline{h}_p[u] = 0$, мы получаем соотношение

$$\left(\sum_{i\geq 0} u_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - \mu\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\overline{h}_p[u] = (p+2)\overline{h}_p[u].$$

Так как $\overline{h}_p[u] \in \widehat{\Lambda}^{\mu,\circ}_{u,0}$, мы заключаем, что локальный функционал $\overline{h}_1[u]$ имеет вид

$$\overline{h}_1[u] = \int \left(\frac{u^3}{6} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g-1} q_g(u_*) + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g} r_g(u_*) \right) dx,$$

где

$$\left(\sum_{i\geq 0} u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right) q_g = 2q_g, \qquad \left(\sum_{i\geq 0} u_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right) r_g = 3r_g.$$

Мы видим, что

$$\overline{h}_1[u]\big|_{\substack{\mu\mapsto\mu\tau^{-2}\\ \varepsilon\mapsto\varepsilon\tau}}\Big|_{\tau=0} = \int \left(\frac{u^3}{6} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g} r_g(u_*) \right) dx.$$

С другой стороны, мы знаем, что $\overline{h}_p = \overline{h}^{[0]}_p[w] = \left(\int \frac{v^{p+2}}{(p+2)!}dx\right)[w]$ и значит $\overline{h}_p[u] = \left(\int \frac{v^{p+2}}{(p+2)!}dx\right)[u]$. Из формул (3.22) и (3.26) следует, что

$$u(v_*,\varepsilon,\mu)\big|_{\substack{\mu\mapsto\mu\tau^{-2}\\ \varepsilon\mapsto\varepsilon\tau}}\Big|_{\tau=0} = v,$$

откуда мы заключаем, что

$$\overline{h}_1[u]\big|_{\substack{\mu\mapsto\mu\tau^{-2}\\ \varepsilon\mapsto\varepsilon\tau}}\Big|_{\tau=0} = \int \frac{u^3}{6}dx.$$

Значит, $\int \left(\sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g} r_g(u_*)\right) dx = 0$, и мы получаем, что

$$\overline{h}_1[u] = \int \left(\frac{u^3}{6} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g-1} q_g(u_*) \right) dx.$$

В силу того, что $\int u_i u_j dx = (-1)^i \int u u_{i+j} dx$, мы приходим в выводу, что локальный функционал $\overline{h}_1[u]$ имеет вид

$$\overline{h}_1[u] = \int \left(\frac{u^3}{6} + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g-1} C_g u u_{2g} \right) dx, \quad \text{для некоторых } C_g \in \mathbb{C}.$$

Докажем теперь, что $C_g = \frac{|B_{2g}|}{2(2g)!}$. Введём обозначения

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F} + \sum_{g\geq 1} \frac{(-1)^g}{2^{2g}(2g+1)!} \varepsilon^{2g}\mu^g \frac{\partial^{2g}\mathcal{F}}{\partial t_0^{2g}}, \qquad u^{\mathrm{top}} := \frac{\partial^2 \widetilde{\mathcal{F}}}{\partial t_0^2}.$$

Тогда формальный ряд u^{top} удовлетворяет УрЧП

$$\frac{\partial u^{\mathrm{top}}}{\partial t_1} = u^{\mathrm{top}} u^{\mathrm{top}}_1 + \sum_{g\geq 1} \varepsilon^{2g}\mu^{g-1} 2C_g u^{\mathrm{top}}_{2g+1}, \qquad u^{\mathrm{top}}_n := \frac{\partial^n u^{\mathrm{top}}}{\partial t_0^n}. \tag{3.28}$$

Мы вычислим константы C_g связав их с интегралами $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,1}} \lambda_j \psi_1^{3g-2-j}$.

С одной стороны, независимо в работах [40, теорема 2] и [39, теорема 1.2] был вычислен производящий ряд этих интегралов:

$$1+\sum_{g\geq 1}\sum_{i=0}^{g} t^{2g}k^i\left\langle \lambda_{g-i}\tau_{2g-2+i}\right\rangle_g = \left(\frac{t/2}{\sin(t/2)}\right)^{k+1}, \quad k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}. \tag{3.29}$$

Над потребуется небольшая переформулировка этого результата. Введём производящий ряд

$$S(\varepsilon,k) := \sum_{0\leq j\leq g} \varepsilon^{2g}k^{-j}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,3}} \lambda_j\psi_1^{3g-j}, \quad k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

С помощью струнного равенства

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t_0} = \sum_{n\geq 0} t_{n+1}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t_n} + \frac{t_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2\mu}{24} \tag{3.30}$$

легко понять, что формула (3.29) эквивалентна формуле,

$$S(\varepsilon,k) = \left(\frac{\varepsilon/(2\sqrt{k})}{\sin(\varepsilon/(2\sqrt{k}))}\right)^{k+1}, \quad k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Обозначим

$$\left\langle \lambda_j\tau_{d_1}\tau_{d_2}\dots\tau_{d_n}\right\rangle_g^{\sim} := \mathrm{Coef}_{\varepsilon^{2g}\mu^j}\left.\frac{\partial^n\widetilde{\mathcal{F}}}{\partial t_{d_1}\partial t_{d_2}\cdots\partial t_{d_n}}\right|_{t_*=0},$$

$$\widetilde{S}(\varepsilon,k) := \sum_{0\leq j\leq g}\left\langle \lambda_j\tau_0^2\tau_{3g-j}\right\rangle_g^{\sim}\varepsilon^{2g}k^{-j}, \quad k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Заметим, что числа $\left\langle \lambda_j\tau_{d_1}\tau_{d_2}\dots\tau_{d_n}\right\rangle_g^{\sim}$ удовлетворяют тем же размерностным ограничениям, что и интегралы $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}\lambda_j\prod_{i=1}^n\psi_i^{d_i}$: а именно, число $\left\langle \lambda_j\tau_{d_1}\tau_{d_2}\dots\tau_{d_n}\right\rangle_g^{\sim}$ равно нулю, если $j+\sum d_i\neq 3g-3+n$. Пользуясь струнным равенством (3.30), мы вычисляем

$$\widetilde{S}(\varepsilon,k) = \left(1+\sum_{g\geq 1}\frac{(-1)^g}{2^{2g}(2g+1)!}\varepsilon^{2g}k^{-g}\right)S(\varepsilon,k) = \frac{\sin(\varepsilon/(2\sqrt{k}))}{\varepsilon/(2\sqrt{k})}S(\varepsilon,k) =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon/(2\sqrt{k})}{\sin(\varepsilon/(2\sqrt{k}))}\right)^k = \exp\left(k\log\left(\frac{\varepsilon/(2\sqrt{k})}{\sin(\varepsilon/(2\sqrt{k}))}\right)\right).$$

В силу тождества $\log\left(\frac{z/2}{\sin(z/2)}\right) = \sum_{g\geq 1}\frac{|B_{2g}|}{2g(2g)!}z^{2g}$, мы в итоге получаем

$$\widetilde{S}(\varepsilon,k) = \exp\left(\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}k^{1-g}\frac{|B_{2g}|}{2g(2g)!}\right). \tag{3.31}$$

Вычислим теперь производящий ряд $\widetilde{S}(\varepsilon,k)$ с помощью равенства (3.28). Из струнного равенства (3.30) вытекает аналогичное равенство для формального ряда $\widetilde{\mathcal{F}}$:

$$\frac{\partial\widetilde{\mathcal{F}}}{\partial t_0} = \sum_{n\geq 0} t_{n+1}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{F}}}{\partial t_n} + \frac{t_0^2}{2},$$

откуда следует, что $u_d^{\mathrm{top}}\big|_{t_*=0} = \delta_{d,1}$. Применяя эти соображения, мы вычисляем линейные члены по переменным t_i в правой части равенства (3.28):

$$u^{\mathrm{top}}u_1^{\mathrm{top}} + \sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\mu^{g-1}2C_g u_{2g+1}^{\mathrm{top}} = \tag{3.32}$$
$$= \sum_{0\leq j\leq g}\varepsilon^{2g}\mu^j\left\langle\lambda_j\tau_0^2\tau_{3g-j}\right\rangle_g^{\sim}t_{3g-j} + \sum_{g\geq 1}2C_g\sum_{0\leq j\leq h}\varepsilon^{2(g+h)}\mu^{g+j-1}\left\langle\lambda_j\tau_0^2\tau_{3h-j}\right\rangle_h^{\sim}t_{3(g+h)-(g+j-1)} + O(t^2).$$

Рассмотрим теперь левую часть равенства (3.28). Из дилатонного равенства

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t_1} = \left(\sum_{n\geq 0}t_n\frac{\partial}{\partial t_n} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon} - 2\right)\mathcal{F} + \frac{\varepsilon^2}{24}$$

вытекает аналогичное равенство для формального ряда $\widetilde{\mathcal{F}}$:

$$\frac{\partial\widetilde{\mathcal{F}}}{\partial t_1} = \left(\sum_{n\geq 0}t_n\frac{\partial}{\partial t_n} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon} - 2\right)\widetilde{\mathcal{F}} + \frac{\varepsilon^2}{24}.$$

Это позволяет получить следующую формулу для линейный членов по переменным t_i в левой части равенства (3.28):

$$\frac{\partial u^{\mathrm{top}}}{\partial t_1} = \sum_{0\leq j\leq g}\varepsilon^{2g}\mu^j(2g+1)\left\langle\lambda_j\tau_0^2\tau_{3g-j}\right\rangle_g^{\sim}t_{3g-j} + O(t^2). \tag{3.33}$$

Приравнивая правые части равенств (3.32) и (3.33), мы получаем

$$\sum_{0\leq j\leq g}\varepsilon^{2g}\mu^j(2g)\left\langle\lambda_j\tau_0^2\tau_{3g-j}\right\rangle_g^{\sim}t_{3g-j} = \sum_{g\geq 1}2C_g\sum_{0\leq j\leq h}\varepsilon^{2(g+h)}\mu^{g+j-1}\left\langle\lambda_j\tau_0^2\tau_{3h-j}\right\rangle_h^{\sim}t_{3(g+h)-(g+j-1)}$$

или, эквивалентно,

$$\sum_{0\leq j\leq g}\varepsilon^{2g}\mu^j(2g)\left\langle\lambda_j\tau_0^2\tau_{3g-j}\right\rangle_g^{\sim} = \left(\sum_{g\geq 1}2C_g\varepsilon^{2g}\mu^{g-1}\right)\left(\sum_{0\leq j\leq h}\varepsilon^{2h}\mu^j\left\langle\lambda_j\tau_0^2\tau_{3h-j}\right\rangle_h^{\sim}\right).$$

Последнее равенство переписывается в виде дифференциального уравнения на производящий ряд $\widetilde{S}(\varepsilon,k)$:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\widetilde{S}(\varepsilon,k) = \left(\sum_{g\geq 1}2C_g\varepsilon^{2g-1}k^{1-g}\right)\widetilde{S}(\varepsilon,k),$$

откуда мы получаем, что

$$\widetilde{S}(\varepsilon,k) = \exp\left(\sum_{g\geq 1}\frac{C_g}{g}\varepsilon^{2g}k^{1-g}\right).$$

Вспоминая формулу (3.31), мы немедленно заключаем, что $C_g = \frac{|B_{2g}|}{2(2g)!}$, завершая доказательство теоремы. □

3.6 Гипотеза об эквивалентности двух иерархий

Предложение 3.21. *Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\}$ и соответствующий потенциал $\mathcal{F}$. Тогда существует единственный дифференциальный многочлен $\mathcal{P} \in \widehat{\mathcal{A}}_{w;-2}$ такой, что степенной ряд $\mathcal{F}^{\mathrm{red}} \in \mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]]$, определённый равенством $\mathcal{F}^{\mathrm{red}} := \mathcal{F} - \mathcal{P}|_{w_n^\gamma = w_n^{\mathrm{top};\gamma}}$, удовлетворяет следующему свойству зануления:*

$$\mathrm{Coef}_{\varepsilon^m} \frac{\partial^n \mathcal{F}^{\mathrm{red}}}{\partial t_{d_1}^{\alpha_1} \dots \partial t_{d_n}^{\alpha_n}}\bigg|_{t_*^*=0} = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^n d_i \le m-2. \tag{3.34}$$

Степенной ряд $\mathcal{F}^{\mathrm{red}}$ называется приведённым потенциалом нашей КогТП.

Доказательство. Докажем существование. Назовём моном $\varepsilon^{2g} \prod t_{d_i}^{\alpha_i}$ *малым*, если $g \ge 1$ и $\sum d_i \le 2g-2$. Сопоставим каждому малому моному уровень $l := (g-1)^2 + \sum d_i$. Мы видим, что $(g-1)^2 \le l < g^2$, откуда следует, что g однозначно определяется по уровню l. Обозначим такое g через $g(l)$. Зададим последовательность пар

$$\left(\mathcal{F}^{(l)}, \mathcal{P}^{(l)}\right) \in \mathbb{C}[[t_*^*, \varepsilon]] \times \widehat{\mathcal{A}}_w, \quad l \ge -1,$$

формулами

$$\mathcal{F}^{(-1)} := \mathcal{F}, \quad \mathcal{P}^{(-1)} := 0,$$

$$\mathcal{F}^{(l)} := \mathcal{F}^{(l-1)} - \varepsilon^{2g(l)} \sum_{n \ge 0} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_n \ge 0 \\ \sum d_i = l-(g(l)-1)^2}} \left(\mathrm{Coef}_{\varepsilon^{2g(l)}} \frac{\partial^n \mathcal{F}^{(l-1)}}{\partial t_{d_1}^{\alpha_1} \cdots \partial t_{d_n}^{\alpha_n}}\bigg|_{t_*^*=0} \right) \frac{\prod (w_{d_i}^{\mathrm{top};\alpha_i} - \delta_{d_i,1} A^{\alpha_i})}{n!}, \quad l \ge 0,$$

$$\mathcal{P}^{(l)} := \mathcal{P}^{(l-1)} + \varepsilon^{2g(l)} \sum_{n \ge 0} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_n \ge 0 \\ \sum d_i = l-(g(l)-1)^2}} \left(\mathrm{Coef}_{\varepsilon^{2g(l)}} \frac{\partial^n \mathcal{F}^{(l-1)}}{\partial t_{d_1}^{\alpha_1} \cdots \partial t_{d_n}^{\alpha_n}}\bigg|_{t_*^*=0} \right) \frac{\prod (w_{d_i}^{\alpha_i} - \delta_{d_i,1} A^{\alpha_i})}{n!}, \qquad l \ge 0.$$

Из того факта, что ряды $w^{\mathrm{top};\alpha}$ удовлетворяют свойству (1.50), сразу следует, что

а) коэффициенты при малых мономах уровня меньше, чем l, в рядах $\mathcal{F}^{(l)}$ и $\mathcal{F}^{(l-1)}$ совпадают;

б) коэффициенты при малых мономах уровня l в ряде $\mathcal{F}^{(l)}$ равны 0.

Отсюда мы выводим по индукции, что коэффициенты при малых мономах уровня не выше, чем l, в ряде $\mathcal{F}^{(l)}$ равны 0. Заметив также, что $\mathcal{F}^{(l)} - \mathcal{F}^{(l-1)} = O(\varepsilon^{2g(l)})$, мы заключаем, что предел $\mathcal{F}^{\mathrm{red}} := \lim_{l\to\infty} \mathcal{F}^{(l)}$ существует, и что он удовлетворяет свойству (3.34). Ясно также, что предел $\mathcal{P} := \lim_{l\to\infty} \mathcal{P}^{(l)} \in \widehat{\mathcal{A}}_w$ существует, и что выполняется свойство $\mathcal{F}^{\mathrm{red}} = \mathcal{F} - \mathcal{P}|_{w_n^\gamma = w_n^{\mathrm{top};\gamma}}$.

Докажем теперь, что $\mathcal{P} \in \widehat{\mathcal{A}}_{w;-2}$. Разложим $\mathcal{P} = \sum_{g\ge 1} \varepsilon^{2g} \mathcal{P}_g$, $\mathcal{P}_g \in \mathcal{A}_w$. Разложим далее $\mathcal{P}_g = \sum_k \mathcal{P}_g^{[k]}$, $\mathcal{P}_g^{[k]} \in \mathcal{A}_{w;k}$. Из формулы, выражающей $\mathcal{P}^{(l)}$ через $\mathcal{P}^{(l-1)}$, видно, что нам достаточно доказать, что $\mathcal{P}_g^{[k]} = 0$ для всех $g \ge 2$ и $k < 2g-2$. Предположим, что это не так.

Обозначим через g_0 минимальное g такое, что $\mathcal{P}_g^{[k]} \neq 0$ для некоторого $k < 2g-2$. Рассмотрим уже появлявшийся у нас оператор

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t_1^{\mathbb{1}}} - \sum_{n\geq 0} t_n^\alpha \frac{\partial}{\partial t_n^\alpha} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Из дилатонного равенства (1.23) следует, что $\mathcal{D} w_n^{\mathrm{top};\alpha} = n w_n^{\mathrm{top};\alpha}$. Значит, мы имеем цепочку равенств

$$\varepsilon^2 \frac{N}{24} = (\mathcal{D}+2)\mathcal{F} = (\mathcal{D}+2)\mathcal{F}^{\mathrm{red}} + \sum_{g\geq 2} \varepsilon^{2g} \sum_{k<2g-2} (k+2-2g)\, \mathcal{P}_g^{[k]}\big|_{w_n^\gamma = w_c^{\mathrm{top};\gamma}}.$$

Мы видим, что коэффициент при ε^{2g_0} в ряде $(\mathcal{D}+2)\mathcal{F}$ равен 0. С другой стороны, из свойства зануления (3.34) следует, что коэффициент при ε^{2g_0} в ряде $(\mathcal{D}+2)\mathcal{F}^{\mathrm{red}}$ принадлежит пространству $\mathbb{C}[[t_*^*]]^{(2g_0-2)}$, в то время, как коэффициент при ε^{2g_0} в подчёркнутом выражении не принадлежит пространству $\mathbb{C}[[t_*^*]]^{(2g_0-2)}$: это следует из того, что ряды $w^{\mathrm{top};\alpha}$ удовлетворяют свойству (1.50). Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{P}_g \in \mathcal{A}_{w;2g-2}$.

Докажем единственность. По линейности, нам достаточно доказать, что если дифференциальный многочлен $\mathcal{Q} \in \widehat{\mathcal{A}}_{w;-2}$ удовлетворяет свойству

$$\mathrm{Coef}_{\varepsilon^m} \left.\frac{\partial^n \left(\mathcal{Q}|_{w_c^\gamma \mapsto w_c^{\mathrm{top};\gamma}}\right)}{\partial t_{d_1}^{\alpha_1} \dots \partial t_{d_n}^{\alpha_n}}\right|_{t_*^*=0} = 0, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^n d_i \leq m-2, \tag{3.35}$$

то $\mathcal{Q} = 0$. Предположим, что $\mathcal{Q} \neq 0$. Разложим $\mathcal{Q} = \sum_{m\geq 2} \varepsilon^m \mathcal{Q}_m$, $\mathcal{Q}_m \in \mathcal{A}_{w;m-2}$, и пусть $m_0 := \min\{m \geq 2 | \mathcal{Q}_m \neq 0\}$. Обозначим $\widetilde{w}_n^\alpha := w_n^\alpha - \delta_{n,1} A^\alpha$. Мы имеем разложение $\mathcal{Q}_{m_0} = \sum_{k=k_0}^{m_0-2} T_k$, $T_k \in \mathcal{A}_{\widetilde{w};k}$, $T_{k_0} \neq 0$, для некоторого $k_0 \leq m_0 - 2$. Из свойства (1.50) следует, что

$$\mathcal{Q}|_{w_c^\gamma \mapsto w_c^{\mathrm{top};\gamma}} - \varepsilon^{m_0} T_{k_0}|_{\widetilde{w}_c^\gamma \mapsto t_c^\gamma} \in \varepsilon^{m_0} \mathbb{C}[[t_*^*]]^{(k_0+1)} + \varepsilon^{m_0+1}\mathbb{C}[[t_*^*]],$$

и значит свойство (3.35) не выполняется. Это противоречие завершает доказательство предложения. □

Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\}$ и соответствующую DR-иерархию. Предположим, что для нашей КогТП верна гипотеза 3.5. Рассмотрим соответствующую иерархию Дубровина–Жанга. Помимо переменных $u^1, \dots, u^N$ и $w^1, \dots, w^N$, введём формальные переменные $\widetilde{u}^1, \dots, \widetilde{u}^N$ и дифференциальные многочлены

$$\widetilde{u}^\alpha(u_*^*, \varepsilon) := \eta^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{g}_{\mu,0}}{\delta u^{\mathbb{1}}},$$
$$\widetilde{u}^\alpha(w_*^*, \varepsilon) := w^\alpha - \eta^{\alpha\mu} \partial_x \left\{\mathcal{P}, \overline{h}_{\mu,0}\right\}_{K^{\mathrm{DZ}}}.$$

Лемма 3.22. *Дифференциальные многочлены $\widetilde{u}^\alpha(u_*^*, \varepsilon)$ и $\widetilde{u}^\alpha(w_*^*, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям в определении преобразования Миуры, см. определение 1.25.*

Доказательство. Нам нужно проверить, что эти дифференциальные многочлены имеют степень 0, а также, что выполняется условие невырожденности, см. последнее равенство в строке (1.43). Тот факт, что $\deg \widetilde{u}^\alpha(u^*_*,\varepsilon)=0$, очевиден. Условие же невырожденности проверяется простым вычислением $\left.\frac{\partial \widetilde{u}^\alpha(u^*_*,\varepsilon)}{\partial u^\beta}\right|_{u^*_*=\varepsilon=0} = \eta^{\alpha\mu}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3}} c_{0,3}(e\otimes e_\mu\otimes e_\beta) = \delta^\alpha_\beta$. Значит, набор дифференциальных многочленов $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*,\varepsilon)$ задаёт преобразование Миуры. Тот факт, что набор дифференциальных многочленов $\widetilde{u}^\alpha(w^*_*,\varepsilon)$ задаёт преобразование Миуры, немедленно следует из того, что $\mathcal{P}\in\varepsilon^2\widehat{\mathcal{A}}_{w;0}$. □

Преобразования Миуры, задаваемые дифференциальными многочленами $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*,\varepsilon)$ и $\widetilde{u}^\alpha(w^*_*,\varepsilon)$, определяют сквозное преобразование Миуры $u^\alpha\mapsto w^\alpha(u^*_*,\varepsilon)$.

Гипотеза 3.23. *Рассмотрим произвольную КогТП $\{c_{g,n}\}$ и предположим, что для неё верна гипотеза 3.5. Тогда соответствующие DR-иерархия и иерархия Дубровина–Жанга связаны сквозным преобразованием Миуры $u^\alpha\mapsto w^\alpha(u^*_*,\varepsilon)$, задаваемым дифференциальными многочленами $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*,\varepsilon)$ и $\widetilde{u}^\alpha(w^*_*,\varepsilon)$.*

Теорема 3.24. *Гипотеза 3.23 верна для*

1. *следующих КогТП:*
   - *(а)* $\{c^{\mathrm{Hodge}}_{g,n}\}$ *при* $\gamma_i=(2i-2)!\mu^{2i-1}$ *(см. раздел 2.2.2),*
   - *(б)* $\{c^{r\text{-}spin}_{g,n}\}$ *при* $r\le 5$,
   - *(в)* $\{c^{\mathbb{CP}^1}_{g,n}\}$;
2. *произвольной КогТП в приближении до рода* 1.

Доказательство. 1(а). Найдём дифференциальный многочлен $\mathcal{P}$. Наша КогТП имеет вид

$$c^{\mathrm{Hodge}}_{g,n}(e_1^{\otimes n}) = 1+\mu\lambda_1+\ldots+\mu^g\lambda_g.$$

Заметим, что интеграл

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \lambda_j\psi_1^{d_1}\cdots\psi_n^{d_n}$$

не зануляется, только если $\sum d_i = 2g-2+(n+g-1-j)$. Ясно, что неравенство $\sum d_i\le 2g-2$ может при этом выполняться, только если $n=1$ и $j=g$. Мы знаем, что (см. равенство (3.25))

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,1}} \lambda_g\psi_1^{2g-2} = \frac{2^{2g-1}-1}{2^{2g-1}}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}.$$

Пользуясь тождеством

$$\left(1+\sum_{g\ge1}\frac{2^{2g-1}-1}{2^{2g-1}}\frac{|B_{2g}|}{(2g)!}z^g\right)\left(1+\sum_{g\ge1}\frac{(-1)^g}{2^{2g}(2g+1)!}z^g\right)=1,$$

отсюда уже несложно понять, что

$$\mathcal{P} = \sum_{g\geq 1} \frac{(-1)^{g-1}}{2^{2g}(2g+1)!}\varepsilon^{2g}\mu^g w_{2g-2}, \qquad \widetilde{u}(w_*,\varepsilon) = w + \sum_{g\geq 1} \frac{(-1)^{g}}{2^{2g}(2g+1)!}\varepsilon^{2g}\mu^g w_{2g}.$$

С другой стороны, так как $\overline{g}_0 = \int \frac{u^2}{2}dx$, мы имеем $\widetilde{u}(u_*,\varepsilon) = u$. Получается, что гипотеза 3.23 утверждает в данном случае, что DR-иерархия и иерархия Дубровина–Жанга связаны преобразованием Миуры

$$w \mapsto u(w_*,\varepsilon) = w + \sum_{g\geq 1} \frac{(-1)^{g}}{2^{2g}(2g+1)!}\varepsilon^{2g}\mu^g w_{2g},$$

но это следует из теорем 2.9 и 3.20.

1(б). Рассмотрим КогТП $\{c^{r\text{-spin}}_{g,n}\}$. Заметим, что

$$\deg c^{r\text{-spin}}_{g,n}(\otimes_{i=1}^n e_{\alpha_i}) = 2\frac{(g-1)(r-2)+\sum_{i=1}^n(\alpha_i-1)}{r} < 2(g-1+n), \quad g\geq 1.$$

Отсюда сразу следует, что $\mathcal{F}^{\mathrm{red}} = \mathcal{F}$, и значит $\widetilde{u}^\alpha(w^*_*,\varepsilon) = w^\alpha$. Из теорем 2.17 и 3.16 вытекает, что гипотеза 3.23 верна для КогТП $\{c^{r\text{-spin}}_{g,n}\}$ при $r\leq 5$.

1(в). Рассмотрим КогТП $\{c^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{g,n}\}$. Рассмотрим иерархию Дубровина–Жанга, соответствующую потенциалу этой КогТП: обозначим гамильтонианы через $\overline{h}_{\alpha,d}$, а пуассонов оператор – через K^{DZ}. Рассмотрим также иерархию Дубровина–Жанга, соответствующую потенциалу Громова–Виттена $\mathcal{F}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}$: обозначим гамильтонианы через $\overline{h}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{\alpha,d}$, при этом из доказательства предложения 3.12 мы знаем, что пуассонов оператор совпадает с K^{DZ}. Из доказательства предложения 3.12 мы знаем, что $\overline{h}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{\alpha,d} = \sum_{i=0}^{d+1}(S_i)^\mu_\alpha \overline{h}_{\mu,d-i}$ или, эквивалентно,

$$\overline{h}_{\alpha,d} = \sum_{i=0}^{d+1}(-1)^i(S_i^\dagger)^\mu_\alpha \overline{h}^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{\mu,d-i},$$

где матрицы $S_0 := 1, S_1, \dots$ определяются первым равенством в строке (3.3). Заметим, что эти матрицы совпадают с матрицами из строки (2.25).

Вычислим дифференциальный многочлен $\mathcal{P}$ для нашей КогТП. Интеграл

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,a+b}} c^{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}_{g,a+b,d}(e_1^{\otimes a}\otimes e_2^{\otimes b})\prod_{i=1}^n \psi_i^{d_i}$$

не зануляется, только если $\sum d_i = 2g-2+2d+a$. Ясно, что неравенство $\sum d_i \leq 2g-2$ может при этом выполняться, только если $d=a=0$. Учитывая формулу (2.14), мы заключаем, что тогда также выполнено $b=1$. Пользуясь формулой (3.25), мы приходим в выводу, что

$$\mathcal{P} = -\sum_{g\geq 1}\varepsilon^{2g}\frac{1}{2^{2g}(2g+1)!}w^2_{2g-2}.$$

Пользуясь теоремой 3.15, мы вычисляем

$$\overline{h}_{2,0} = \int \left(\frac{1}{2} w^1 S(\varepsilon\partial_x)^2 w^1 + q e^{S(\varepsilon\partial_x)^2 w^2} - q w^2 \right) dx, \qquad K^{\mathrm{DZ}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial_x}{S(\varepsilon\partial_x)^2} \\ \frac{\partial_x}{S(\varepsilon\partial_x)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда мы сразу получаем, что

$$\widetilde{u}^\alpha(w^*_*, \varepsilon) = S(\varepsilon\partial_x) w^\alpha.$$

Из формулы (2.10) следует, что $\widetilde{u}^\alpha(u^*_*, \varepsilon) = u^\alpha$. Получается, что гипотеза 3.23 утверждает в данном случае, что DR-иерархия и иерархия Дубровина–Жанга связаны преобразованием Миуры

$$w^\alpha \mapsto u^\alpha(w^*_*, \varepsilon) = S(\varepsilon\partial_x) w^\alpha,$$

но это следует из теорем 2.12 и 3.15.

2. Заметим, что $\mathcal{P} = \varepsilon^2 G|_{t^\gamma \mapsto w^\gamma} + O(\varepsilon^4)$, где ряд G был определён в доказательстве теоремы 3.13. Сопоставляя с формулами из доказательства теоремы 3.13, мы видим, что

$$\widetilde{u}^\alpha(v^*_*, \varepsilon) = \widetilde{v}^\alpha(v^*_*, \varepsilon) + O(\varepsilon^4).$$

Значим, нам нужно убедиться, что

$$\overline{g}_{\alpha,d}[\widetilde{u}] = \overline{h}_{\alpha,d}[\widetilde{v}]\big|_{\widetilde{v}^\gamma_c \mapsto \widetilde{u}^\gamma_c} + O(\varepsilon^4), \tag{3.36}$$

$$(\eta^{-1}\partial_x)_{\widetilde{u}} = (K^{\mathrm{DZ}})_{\widetilde{v}}\big|_{\widetilde{v}^\gamma_c \mapsto \widetilde{u}^\gamma_c} + O(\varepsilon^4). \tag{3.37}$$

Из теоремы 2.22 мы выводим, что

$$\widetilde{u}^\alpha(u^*_*, \varepsilon) = \eta^{\alpha\mu} \frac{\delta \overline{g}_{\mu,0}}{\delta u^{\mathbb{1}}} = u^\alpha + \frac{\varepsilon^2}{24} \partial_x^2 C^{\alpha\mu}_\mu + O(\varepsilon^4).$$

Пользуясь равенствами (3.13) и (3.14), равенства (3.36) и (3.37) доказываются теперь прямым вычислением. □

Заключение

Подведём итоги выполненного исследования. Было получено соотношение в группе когомологий $H^{2g+2}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n+2},\mathbb{Q})$, названное соотношением коммутативности, обобщающее соотношение ассоциативности в группе когомологий $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{0,n+2},\mathbb{Q})$. В диссертации полученное соотношение нашло важное приложение в теории интегрируемых систем эволюционных УрЧП с одной пространственной переменной. А именно, стартуя с произвольной когомологической теории поля, автор предложил новую конструкцию интегрируемой гамильтоновой системы УрЧП, названной DR-иерархией. Заметим, что конструкция очень явная: коэффициенты в плотностях гамильтонианов DR-иерархии – это явно заданные интегралы от неких классов когомологий по пространству модулей кривых. Скобка Пуассона DR-иерархии задаётся простейшим оператором гидродинамического типа. Интегрируемость иерархии, то есть коммутация гамильтонианов, является немедленным следствием аксиом когомологической теории поля и соотношения коммутативности. DR-иерархия является дисперсионной деформацией базовой иерархии, соответствующей потенциалу Дубровина–Фробениуса рассматриваемой когомологической теории поля. Таким образом, установлена наиболее ясно связь между топологией пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ и интегрируемыми системами математической физики, а значит дан в полной мере удовлетворительный ответ на вопрос 0.2, поставленный во введении.

В диссертации было доказано, что такие важные иерархии математической физики, как иерархия Кортевега–де Фриза, иерархия уравнения двухслойной жидкости, расширенная иерархия Тоды, иерархии Гельфанда–Дикого, являются DR-иерархиями, построенными по некоторым конкретным известным когомологическим теориям поля.

Тот факт, что DR-иерархия столь явно строится по геометрической информации, даёт возможность использовать геометрические свойства пространств модулей кривых для доказательства интересных свойств DR-иерархии.

- Оказывается, что явная формула для произведения пси-класса на DR-цикл позволяет доказать, что все гамильтонианы DR-иерархии можно восстановить, зная лишь один выделенный гамильтониан, причём с помощью необычайно простого рекурсивного соотношения. Удивительным образом, это рекурсивное соотношение никогда ранее в литературе не встречалось.

- Для доказательства коммутативности гамильтонианов DR-иерархии используется в каком-то смысле лишь часть соотношения коммутативности на DR-циклы. Если использовать соотношение коммутативности в полной мере, то получается квантование DR-иерархии. Уже в простейшем случае тривиальной когомологической теории поля мы получаем таким образом квантование иерархии Кортевега–де Фриза, которое ранее в литературе не встречалось.

Для произвольной однородной когомологической теории поля в роде 0 Дубровин нашёл вторую пуассонову структуру базовой иерархии, которая задаётся явной формулой через потенциал Дубровина–Фробениуса. В диссертации, стартуя с произвольной однородной когомологической теории поля, приведена явная формула для оператора, который гипотетически задаёт вторую пуассонову структуру DR-иерархии. Эту формулу можно рассматривать как деформацию формулы Дубровина во всех родах. При этом роль потенциала Дубровина–Фробениуса играет некий локальный функционал, явно строящийся по когомологической теории поля. Были проведены многочисленные частичные проверки гипотезы.

Другая часть диссертации посвящена исследованию альтернативной конструкции интегрируемых систем, связанных с когомологическими теориями поля, предложенной Дубровиным и Жангом, а также связи DR-иерархий с иерархиями Дубровина–Жанга. Было построено обобщение теории Дубровина–Жанга для произвольной когомологической теории поля. Заметим, что, исходя из конструкции, в уравнениях иерархии Дубровина–Жанга могут быть особенности. Выдвинута гипотеза, что эти особенности на самом деле отсутствуют. Иначе говоря, выдвинута гипотеза о существовании иерархии Дубровина–Жанга, соответствующей произвольной когомологической теории поля. Гипотеза была доказана для произвольной полупростой когомологической теории поля. Таким образом, дан утвердительный ответ на поставленный во введении вопрос 0.1 в классе случаев, значительно превышающем уже известные случаи.

В диссертации была явно вычислена иерархия Дубровина–Жанга для когомологической теории поля, задаваемой полным классом Черна расслоения Ходжа, включающим параметр μ. Было доказано, что иерархия связана простым преобразованием с иерархией уравнения двухслойной жидкости. При $\mu = 0$ рассматриваемая когомологическая теория поля совпадает с тривиальной когомологической теорией поля. С другой стороны, иерархия уравнения двухслойной жидкости при $\mu = 0$ совпадает с иерархией КдФ. Значит, при $\mu = 0$ доказанное утверждение эквивалентно гипотезе Виттена. Таким образом, доказано однопараметрическое обобщение гипотезы Виттена. Важность полученного результата также состоит в том, что это является первым явным вычислением иерархии Дубровина–Жанга для неоднородной когомологической теории поля.

В роде 0 DR-иерархия и иерархия Дубровина–Жанга совпадают. Что касается всех родов, стартуя с произвольной когомологической теории поля, в работе была приведена явная

конструкция преобразования Миуры и была выдвинута гипотеза, что это преобразование Миуры связывает DR-иерархию и иерархию Дубровина–Жанга (в предположении, что иерархия Дубровина–Жанга существует для рассматриваемой когомологической теории поля). Гипотеза была доказана в приближении до рода 1 включительно, а также в ряде конкретных примеров.

Диссертация открывает ряд направлений для дальнейших исследований. Помимо выдвинутых гипотез, можно выделить следующие направления:

- Конструкция DR-иерархии чрезвычайно универсальна и может быть применена для различных обобщений когомологических теорий поля:
  - Можно отказываться от наличия ряда свойств из определения 1.6, например, свойств 2 и 3, связанных с наличием единицы, а также можно не требовать выполнения равенства (1.20) из свойства 4.
  - Имеется обобщение понятия когомологической теории поля, где отсутствует метрика.
  - Имеется естественное обобщение понятия когомологической теории поля, где появляются когомологические классы нечётной степени. В общем случае, теория Громова–Виттена даёт примеры как раз таких обобщённых когомологических теорий поля.
  - Можно рассматривать обобщённые когомологические теории поля, где фазовое пространство имеет бесконечную размерность.

  Исследование соответствующих обобщённых DR-иерархий, а также связи с обобщениями иерархий Дубровина–Жанга представляется очень интересным.

- Важной открытой проблемой является задача описания класса интегрируемых систем, которые являются (возможно с точностью до преобразования Миуры) DR-иерархиями когомологических теорий поля. В случае систем с одной зависимой переменной имеется гипотетическое описание таких систем, однако случай большего числа зависимых переменных является в полной мере открытым.

- Представляется интересным связать геометрию пространств модулей кривых с интегрируемыми системами эволюционных УрЧП с более чем одной пространственной переменной. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [23], где возник пример системы с двумя пространственными переменными.

Литература

[1] А. Ю. Буряк. Новые подходы к иерархиям топологического типа. // Успехи математических наук. — 2017. — Т. 72, № 5. — С. 63–112.

[2] А. Ю. Буряк. DR-иерархии: от пространств модулей кривых к интегрируемым системам. // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2024. — Т. 325. — С. 26–66.

[3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема. // Доклады Академии наук. — 1983. — Т. 270, № 4. — С. 781–785.

[4] Ю. И. Манин. *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей.* — Факториал, 2002.

[5] L. Abrams. Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras. // Journal of Knot Theory and its Ramifications. — 1996. — Vol. 5, N. 5. — P. 569–587.

[6] S. J. Aldersley. Higher Euler operators and some of their applications. // Journal of Mathematical Physics. — 1979. — Vol. 20, N. 3. — P. 522–531.

[7] A. Alexandrov, F. Hernández Iglesias, S. Shadrin. Buryak–Okounkov formula for the n-point function and a new proof of the Witten conjecture. // International Mathematics Research Notices. — 2021. — Vol. 2021, N. 18. — P. 14296–14315.

[8] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov. Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz. // Communications in Mathematical Physics. — 1996. — Vol. 177. — P. 381–398.

[9] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov. Integrable structure of conformal field theory II. Q-operator and DDV equation. // Communications in Mathematical Physics. — 1997. — Vol. 190. — P. 247–278.

[10] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov. Integrable structure of conformal field theory III. The Yang–Baxter relation. // Communications in Mathematical Physics. — 1999. — Vol. 200. — P. 297–324.

[11] K. Behrend. Gromov–Witten invariants in algebraic geometry. // Inventiones Mathematicae. — 1997. — Vol. 127, N. 3. — P. 601–617.

[12] K. Behrend, Yu. Manin. Stacks of stable maps and Gromov–Witten invariants. // Duke Mathematical Journal. — 1996. — Vol. 85, N. 1. — P. 1–60.

[13] A. Buryak. Double ramification cycles and integrable hierarchies. // Communications in Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 336, N. 3. — P. 1085–1107.

[14] A. Buryak. Dubrovin–Zhang hierarchy for the Hodge integrals. // Communications in Number Theory and Physics. — 2015. — Vol. 9, N. 2. — P. 239–271.

[15] A. Buryak. ILW equation for the Hodge integrals revisited. // Mathematical Research Letters. — 2016. — Vol. 23, N. 3. — P. 675–683.

[16] A. Buryak, B. Dubrovin, J. Guéré, P. Rossi. Tau-structure for the double ramification hierarchies. // Communications in Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 363, N. 1. — P. 191–260.

[17] A. Buryak, J. Guéré. Towards a description of the double ramification hierarchy for Witten's r-spin class. // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 2016. — Vol. 106, N. 5. — P. 837–865.

[18] A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin. A polynomial bracket for the Dubrovin–Zhang hierarchies. // Journal of Differential Geometry. — 2012. — Vol. 92, N. 1. — P. 153–185.

[19] A. Buryak, P. Rossi. Recursion relations for double ramification hierarchies. // Communications in Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 342. — P. 533–568.

[20] A. Buryak, P. Rossi. Double ramification cycles and quantum integrable systems. // Letters in Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 106, N. 3. — P. 289–317.

[21] A. Buryak, P. Rossi, S. Shadrin. Towards a bihamiltonian structure for the double ramification hierarchy. // Letters in Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 111. — Article number 13.

[22] A. Buryak, P. Rossi. A generalisation of Witten's conjecture for the Pixton class and the noncommutative KDV hierarchy. // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. — 2023. — Vol. 22, N. 6. — P. 2987–3009.

[23] A. Buryak, P. Rossi. Intersection numbers with Pixton's class and the noncommutative KdV hierarchy. // Принято к публикации в журнале Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. — DOI: 10.2422/2036-2145.202312_003.

[24] A. Buryak, S. Shadrin, L. Spitz, D. Zvonkine. Integrals of psi-classes over double ramification cycles. // American Journal of Mathematics. — 2015. — Vol. 137, N. 3. — P. 699–737.

[25] G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang. The extended Toda hierarchy. // Moscow Mathematical Journal. — 2004. — Vol. 4, N. 2. — P. 313–332.

[26] R. Cavalieri, S. Marcus, J. Wise. Polynomial families of tautological classes on $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathrm{rt}}$. // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2012. — Vol. 216, N. 4. — P. 950–981.

[27] H.-L. Chang, J. Li, W.-P. Li. Witten's top Chern class via cosection localization. // Inventiones Mathematicae. — 2015. — Vol. 200, N. 3. — P. 1015–1063.

[28] E. Clader, F. Janda. Pixton's double ramification cycle relations. // Geometry & Topology. — 2018. — Vol. 22, N. 2. — P. 1069–1108.

[29] A. Chiodo. The Witten top Chern class via K-theory. // Journal of Algebraic Geometry. — 2006. — Vol. 15, N. 4. — P. 681–707.

[30] L. Degiovanni, F. Magri, V. Sciacca. On deformation of Poisson manifolds of hydrodynamic type. // Communications in Mathematical Physics. — 2005. — Vol. 253, N. 1. — P. 1–24.

[31] P. Deligne, D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. // Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques. — 1969. — Vol. 36. — P. 75–109.

[32] L. A. Dickey. Soliton equations and Hamiltonian systems. — Second edition. — World Scientific, 2003.

[33] R. Dijkgraaf, E. Witten. Mean field theory, topological field theory, and multi-matrix models. // Nuclear Physics B. — 1990. — Vol. 342, N. 3. — P. 486–522.

[34] B. Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories. // In: Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, Italy, 1993). / Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1620. — Springer, 1996. — P. 120–348.

[35] B. Dubrovin, Y. Zhang. Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation. // Communications in Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 198, N. 2. — P. 311–361.

[36] B. Dubrovin, Y. Zhang. Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants. // arXiv:math/0108160.

[37] B. Dubrovin, Y. Zhang. Virasoro symmetries of the extended Toda hierarchy. // Communications in Mathematical Physics. — 2004. — Vol. 250, N. 1. — P. 161–193.

[38] A. Dymarsky, K. Pavlenko, D. Solovyev. Zero modes of local operators in 2d CFT on a cylinder. // Journal of High Energy Physics. — 2020. — Vol. 2020. — Article number 172.

[39] T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein. On Hurwitz numbers and Hodge integrals. // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique. — 1999. — Vol. 328, N. 12. — P. 1175–1180.

[40] C. Faber, R. Pandharipande. Hodge integrals and Gromov–Witten theory. // Inventiones Mathematicae. — 2000. — Vol. 139, N. 1. — P. 173–199.

[41] C. Faber, R. Pandharipande. Logarithmic series and Hodge integrals in the tautological ring. With an appendix by Don Zagier. // Michigan Mathematical Journal. — 2000. — Vol. 48. — P. 215–252.

[42] C. Faber, R. Pandharipande. Hodge integrals, partition matrices, and the λ_g conjecture. // Annals of Mathematics. — 2003. — Vol. 157, N. 1. — P. 97–124.

[43] C. Faber, R. Pandharipande. Relative maps and tautological classes. // Journal of the European Mathematical Society. — 2005. — Vol. 7, N. 1. — P. 13–49.

[44] C. Faber, S. Shadrin, D. Zvonkine. Tautological relations and the r-spin Witten conjecture. // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Quatriéme Série. — 2010. — Vol. 43, N. 4. — P. 621–658.

[45] H. Fan, T. Jarvis, Y. Ruan. The Witten equation, mirror symmetry, and quantum singularity theory. // Annals of Mathematics. — 2013. — Vol. 178, N. 1. — P. 1–106.

[46] B. Fantechi, R. Pandharipande. Stable maps and branch divisors. // Compositio Mathematica. — 2002. — Vol. 130, N. 3. — P. 345–364.

[47] E. Getzler. The Virasoro conjecture for Gromov–Witten invariants. // In: Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, Poland, 1998)./ Contemporary Mathematics, Vol. 241. — American Mathematical Society, 1999. — P. 147–176.

[48] E. Getzler. A Darboux theorem for Hamiltonian operators in the formal calculus of variations. // Duke Mathematical Journal. — 2002. — Vol. 111, N. 3. — P. 535–560.

[49] E. Getzler. The equivariant Toda lattice. // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. — 2004. — Vol. 40, N. 2. — P. 507–536.

[50] E. Getzler. The jet-space of a Frobenius manifold and higher-genus Gromov–Witten invariants. // In: Frobenius manifolds: quantum cohomology and singularities. / Aspects of Mathematics, Vol. 36. — Vieweg+Teubner Verlag, 2004. — P. 45–89.

[51] T. Graber, R. Vakil. Relative virtual localization and vanishing of tautological classes on moduli spaces of curves. // Duke Mathematical Journal. — 2005. — Vol. 130, N. 1. — P. 1–37.

[52] S. Grushevsky, D. Zakharov. The double ramification cycle and the theta divisor. // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2014. — Vol. 142, N. 12. — P. 4053–4064.

[53] R. Hain. Normal functions and the geometry of moduli spaces of curves. // In: Handbook of moduli, Vol. I. / Advanced Lectures in Mathematics series, Vol. 24. — International Press of Boston, 2013. — P. 527–578.

[54] F. Janda, R. Pandharipande, A. Pixton, D. Zvonkine. Double ramification cycles on the moduli spaces of curves. // Publications Mathématiques de l'IHÉS. — 2017. — Vol. 125. — P. 221–266.

[55] M. E. Kazarian, S. K. Lando. An algebro-geometric proof of Witten's conjecture. // Journal of the American Mathematical Society. — 2007. — Vol. 20, N. 4. — P. 1079–1089.

[56] M. Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. // Communications in Mathematical Physics. — 1992. — Vol. 147, N. 1. — P. 1–23.

[57] M. Kontsevich, Yu. Manin. Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. // Communications in Mathematical Physics. — 1994. — Vol. 164, N. 3. — P. 525–562.

[58] J. Li, G. Tian. Virtual moduli cycles and Gromov–Witten invariants of algebraic varieties. // Journal of the Americal Mathematical Society. — 1998. — Vol. 11, N. 1. — P. 119–174.

[59] S.-Q. Liu, Y. Zhang. Jacobi structures of evolutionary partial differential equations. // Advances in Mathematics. — 2011. — Vol. 227, N. 1. — P. 73–130.

[60] S.-Q. Liu, Y. Zhang. Bihamiltonian cohomologies and integrable hierarchies I: a special case. // Communications in Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 324, N. 3. — P. 897–935.

[61] E. Looijenga. Cellular decompositions of compactified moduli spaces of pointed curves. // In: The moduli space of curves (Texel Island, Netherlands, 1994). / Progress in Mathematics, Vol. 129. — Birkhäuser Boston, 1995. — P. 369–400.

[62] A. Losev, Y. Manin. New moduli spaces of pointed curves and pencils of flat connections. // Michigan Mathematical Journal. — 2000. — Vol. 48. — P. 443–472.

[63] F. Magri. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. // Journal of Mathematical Physics. — 1978. — Vol. 19, N. 5. — P. 1156–1162.

[64] Yu. I. Manin, P. Zograf. Invertible cohomological field theories and Weil–Petersson volumes. // Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier. — 2000. — Vol. 50, N. 2. — P. 519–535.

[65] D. Maulik, R. Pandharipande. New calculations in Gromov–Witten theory. // Pure and Applied Mathematics Quarterly. — 2008. — Vol. 4, N. 2. — P. 469–500.

[66] M. Mirzakhani. Weil–Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves. // Journal of the American Mathematical Society. — 2007. — Vol. 20, N. 1. — P. 1–23.

[67] T. Mochizuki. The virtual class of the moduli stack of stable r-spin curves. // Communications in Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 264, N. 1. — P. 1–40.

[68] A. Okounkov, R. Pandharipande. The equivariant Gromov-Witten theory of $\mathbb{P}^1$. // Annals of Mathematics. — 2006. — Vol. 163, N. 2. — P. 561–605.

[69] A. Okounkov, R. Pandharipande. Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models. // In: Algebraic geometry, Part I: Seattle 2005. / Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 80, Part I. — American Mathematical Society, 2009. — P. 325–414.

[70] R. Pandharipande. A calculus for the moduli space of curves. // In: Algebraic geometry: Salt Lake City 2015. / Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 97.1. — American Mathematical Society, 2018. — P. 459–488.

[71] R. Pandharipande, A. Pixton, D. Zvonkine. Relations on $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ via 3-spin structures. // Journal of the American Mathematical Society. — 2015. — Vol. 28, N. 1. — P. 279–309.

[72] R. Pandharipande, A. Pixton, D. Zvonkine. Tautological relations via r-spin structures. // Journal of Algebraic Geometry. — 2019. — Vol. 28. — P. 439–496.

[73] A. Polishchuk, A. Vaintrob. Algebraic construction of Witten's top Chern class. // In: Advances in algebraic geometry motivated by physics (Lowell, USA, 2000). / Contemporary Mathematics, Vol. 276. — American Mathematical Society, 2001. — P. 229–249.

[74] J. W. Robbin, D. A. Salamon. A construction of the Deligne–Mumford orbifold. // Journal of the European Mathematical Society. — 2006. — Vol. 8, N. 4. — P. 611–699.

[75] J. Satsuma, M. J. Ablowitz, Y. Kodama. On an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth. // Physics Letters A. — 1979. — Vol. 73, N. 4. — P. 283–286.

[76] S. Shadrin. BCOV theory via Givental group action on cohomological fields theories. // Moscow Mathematical Journal. — 2009. — Vol. 9, N. 2. — P. 411–429.

[77] P. Spelier. Polynomiality of the double ramification cycle. // arXiv:2401.17421.

[78] C. Teleman. The structure of 2D semi-simple field theories. // Inventiones Mathematicae. — 2012. — Vol. 188, N. 3. — P. 525–588.

[79] A. Vistoli. Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces. // Inventiones Mathematicae. — 1989. — Vol. 97, N. 3. — P. 613–670.

[80] E. Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. // In: Surveys in differential geometry (Cambridge, USA, 1990). — Lehigh University, 1991. — P. 243–310.

[81] E. Witten. Algebraic geometry associated with matrix models of two-dimensional gravity. // In: Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, USA, 1991). — Publish or Perish, 1993. — P. 235–269.

[82] D. Zvonkine. Strebel differentials on stable curves and Kontsevich's proof of Witten's conjecture. // arXiv:math/0209071v2.

[83] D. Zvonkine. An introduction to moduli spaces of curves and their intersection theory. // In: Handbook of Teichmüller theory, Volume III. / IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, Vol. 17. — European Mathematical Society, 2012. — P. 667–716.