ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук, доцента Устинова Алексея Владимировича на диссертационную работу Зайцевой Татьяны Ивановны «Самоподобные замощения и многомерная аппроксимация», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Основной объект исследований — многомерные системы Хаара, построенные на основе специальных самоподобных компактов (тайлов). Важность подобных систем обусловливается безусловной сходимостью всплеск-разложений, их хорошей частотно-временной локализацией, наличием быстрых алгоритмов вычисления коэффициентов этих разложений и обилием приложений в обработке сигналов. Тема интересна тем, что находится на стыке нескольких областей математики — теории аппроксимации, геометрии, теории динамических систем, теории чисел.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы.

Во введении кратко рассказано о содержании диссертации и главных результатах.

В первой главе диссертации даются необходимые определения тайлов, рядов Хаара. Затем приводятся примеры тайлов в размерности 2 и определяются многомерные системы Хаара, строящиеся на основе тайлов.

Во второй главе подробно изучается «двухциферная» система Хаара, которая наиболее близка по свойствам к классическому базису Хаара. Изучаются топологические и геометрические свойства 2-тайлов. Они строятся как аттракторы целочисленной растягивающей матрицы M, т. е. матрицы, все собственные значения которой по модулю больше 1. При этом изотропным матрицам M (т. е, матрицам, имеющим равные по модулю собственные значения и не имеющим нетривиальных жордановых клеток) соответствуют изотропные аттракторы, которые удаётся полностью классифицировать. Классификация произвольных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$ сводится к подсчёту полиномов степени d с дополнительными ограничениями на корни и коэффициенты. Подобные задачи возникают в теории алгебраических чисел. Результатом являются верхние и нижние оценки на число аффинно неподобных 2-аттракторов в произвольной размерности d.

Даётся краткий обзор литературы по 2-аттракторам. Изложение сопровождается красивыми иллюстрациями.

В третьей главе диссертации строятся тайловые B-сплайны — аналоги классических сплайнов, являющихся кратной свёрткой характеристических функций отрезка. Тайловые B-сплайны определяются аналогично — они являются свёртками характеристических функций тайлов. Основным инструментом здесь является масштабирующее уравнение, которому удовлетворяют тайловые B-сплайны. Даны примеры применения одного из них, Медведя-4. Показано, что тайловые B-сплайны по сравнению с классическими B-сплайнами обладают такими преимуществами как высокая гладкость предельной поверхности и небольшое число коэффициентов на каждой итерации. Для некоторых двумерных тайловых B-сплайнов параметры гладкости удаётся посчитать явно.

Четвёртая глава посвящена проблеме классификации многомерных тайлов. Основное внимание уделено классификации многогранных тайлов в $\mathbb{R}^d$. Главный результат заключается в том, что любой многогранный тайл является прямым произведением одномерных тайлов, для которых, в свою очередь, строится классификация в терминах сумм по Минковскому нескольких арифметических прогрессий с некоторыми соотношениями на разности.

В тексте присутствует небольшое количество опечаток и неточностей. Например, на с. 4 множество G приравнено к его точкам. На с. 103 не пояснено обозначение $A(q, q)$. Это не влияет на достоверность полученных результатов.

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы специалистами в теории аппроксимации, обработке сигналов, геометрии и в области применений теории чисел в приближённом анализе. В целом, можно сказать, что диссертация Т. И. Зайцевой является важным шагом в развитии теории всплесков. Работа написана очень аккуратно и красиво оформлена.

Достоверность полученных результатов подтверждена необходимыми доказательствами. Результаты являются новыми, что подтверждается авторскими публикациями в рецензируемых научных журналах. На тему диссертационной работы автором опубликовано 5 научных статей в рецензируемых журналах.

Диссертационная работа «Самоподобные замощения и многомерная аппроксимация» удовлетворяет требованиям п. 9–11, 13, 14 «Положения о порядке присуждения учёных степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико–математических наук.

Автор диссертации, Зайцева Татьяна Ивановна, несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра, логика и теория чисел, профессор департамента больших данных и информационного поиска факультета компьютерных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»,
г. Москва, Покровский б-р, д. 11,
—7-924-303-30-81,
ustinov.alexey@gmail.com

Устинов А. В.

10 августа 2023 года.