ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации Т.И.Зайцевой
"Самоподобные замощения и многомерная аппроксимация"
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Т.И.Зайцевой довольно многопланова: она сочетает классический функциональный анализ, многомерные аппроксимации и комбинаторную геометрию. Главным объектом исследования являются многомерные тайлы – самоподобные компакты, образующие параллельные замощения пространства $\mathbb{R}^d$. Исследованиям самоподобных тайлов посвящена обширная литература, начиная с 1970-х гг. по настоящее время. Их изучали такие известные авторы как К.Грёхениг, Дж.Лагариас, Я.Вонг, А.Джонсон, И.Кират, К.С.Лау, Г.Гейлбрих и т.д. Новый импульс к исследованию самоподобных тайлов был дан в конце 1990-х гг. в связи с их применениями для построения многомерных всплесков и алгоритмов аппроксимации поверхностей. В этом направлении следует отметить работы И.Добеши, А.Коэна, П.Войташека, К.Хейля, К.Меррилла, М.Скопиной, и др. Не смотря на столь большой интерес к данной проблематике в литературе, автору диссертации удалось получить новые яркие результаты, усилить и обобщить некоторые известные теоремы, а также впервые исследовать ряд важных вопросов. Так, были найдены точные показатели гладкости известных тайлов, получена полная классификация полиэдральных и двухциферных тайлов, а также построена теория тайловых B-сплайнов. Данные результаты применены к построению базисов Хаара в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и новых систем многомерных ортогональных всплесков. На основе тайловых B-сплайнов разработан и исследован новый класс алгоритмов детализации поверхностей (subdivsion schemes), которые применяются в многомерной аппроксимации и компьютерной графике.

В главе 1 определяются базисы Хаара в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденные целочисленными растяжениями и целочисленными параллельными сдвигами, излагается метод их построения. Приводится классификация всех систем Хаара, порожденных данной растягивающей матрицей M и данной системой цифр (полным множеством представителей различных классов вычетов $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$).

В главе 2 исследуются двухциферные самоподобные тайлы в $\mathbb{R}^d$, порожденные растягивающими целыми матрицами с определителем ± 2 и системой из двух цифр. Именно двухциферные тайлы и соответствующие базисы Хаара наиболее близки по своим свойствам к базисам Хаара на прямой. Они также наиболее эффективны в приложениях, поскольку порождены одной всплеск-функцией, имеют быстрый алгоритм вычисления коэффициентов разложения, и т.д. В начале приводится полная классификация тайлов, порожденных изотропными растягивающими матрицами, т.е., диагонализируемыми матрицами с равными по модулю собственными значениями. Случай изотропных

матриц растяжения – наиболее изученный в литературе: многие результаты о тайлах и системах Хаара в $\mathbb{R}^d$ доказаны только для этого случая. В диссертационной работе Т.И.Зайцевой получен довольно неожиданный результат о том, что семейство двухциферных изотропных тайлов имеет простую классификацию: в нечетных размерностях все такие тайлы являются параллелепипедами, в четной размерности добавляется еще два типа тайлов, имеющих фрактальную структуру. Доказано, что эти тайлы гомеоморфны шару, но не диффеоморфны между собой. В случае произвольной (неизотропной) матрицы растяжения полная кассификиция получена для малых размерностей. Так, в $\mathbb{R}^2$ существует три, с точностью до аффинного подобия, двухциферных тайла, в $\mathbb{R}^3$ их ровно семь, и т.д. Для бóльших размерностей доказаны двусторонние оценки на их количество. В оценке сверху применен результат Конягина-Дубицкаса о мере Малера целочисленных полиномов степени d, для оценки снизу построены новые серии унитарных растягивающих целых полиномов со свободным коэффициентом ± 2. Заметим, что в литературе были известны только две подобные серии, каждая содержала линейное по степени d число полиномов. Соискателю удалось найти еще четыре, причем одна из них содержит квадратическое по d число полиномов, что позволило усилить оценку снизу на количество двухциферных тайлов.

В главе 3 строится теория тайловых B-сплайнов в $\mathbb{R}^d$ (сверток характеристических функций тайлов), исследуются их свойства и возможные приложения. В частности, впервые вычислены точные значения показателя Гёльдера таких функций, при этом гладкость некоторых из них оказалась выше гладкости классических B-сплайнов. На основе тайловых B-сплайнов построены системы всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$, являющиеся многомерными обобщениями классических одномерных всплесков Баттла-Лемарье, вычислена их гладкость и оценено убывание на бесконечности. Последний результат получен с помощью построения диаграмм Рейнхарда для многомерных аналитических функций. На основе тайловых B-сплайнов построен новый тип алгоритмов детализации поверхностей (так называемых, SubD схем), его эффективность для приближения гладких поверхностей обоснована теоретически и подтверждена численными расчетами.

Наконец, в главе 4 доказаны несколько фундаментальных результатов о полиэдральных тайлах, т.е., самоподобных тайлах, являющихся объединениями конечного числа многогранников. Доказано, что в $\mathbb{R}^d$ существует бесконечное семейство полиэдральных тайлов, получена их полная классификация. Тем самым охрактеризованы все многомерные базисы Хаара с полиэдральными носителями.

Некоторые из полученных теоретических результатов по своему уровню выходят за рамки кандидатской диссертации. Стоит отметить разнообразие теоретических методов, применяемых автором: тонкие результаты комбинаторики, многомерный комплексный анализ, алгебра целочисленных полиномов. Кроме того, Т.И.Зайцева продемонстрировала хорошее владение аналитической техникой и численными методами теории приближений и линейной алгебры высоких размерностей. За многими результатами диссертации скрывается объемная работа по проведению численных экспериментов и имплементации построенных алгоритмов. Особенно это касается вычисления гладкости всплесков и функций Хаара, построения тайловых B-сплайнов и алгорит-

мов детализации поверхности, а также компьютерной части работы по классификации целочисленных растягивающих полиномов.

Тема диссертации актуальна и востребована. Полученные результаты и разработанные методы могут быть полезны исследователям МГУ им. Ломоносова, МИРАН им. Стеклова, ИППИ им. Харкевича, ПОМИ, Санкт-Петербургского, Воронежского, Тульского и Новосибирского Университетов. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. По теме диссертации автором опубликовано 5 работ в центральных журналах, из них 3 – без соавторов. Результаты диссертационной работы докладывались на многочисленных семинарах и международных конференциях, а также удостаивались призовых мест на конкурсах научных докладов.

Считаю, что диссертация “Самоподобные замощения и многомерная аппроксимация” удовлетворяет всем требованиям ВАК, а её автор Т.И.Зайцева заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., член-корр. РАН
"05" мая 2023 г.



В.Ю.Протасов

Подпись В.Ю.Протасова заверяю как отдело- парод. [illegible] (Соколова Т.А.)

