Отзыв официального оппонента

на диссертацию Татьяны Ивановны Зайцевой

“Самоподобные замощения и многомерная аппроксимация”

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (специальность 1.1.1 - вещественный, комплексный и функциональный анализ)

В диссертационной работе изучаются свойства специальных аффинных фракталов, названных аттракторами и тайлами, также на их основе строятся аналоги всплесков Хаара и сплайн-всплесков Баттла-Лемарье. Результаты работы относятся в таким областям как теория приближений, фрактальная геометрия, теория всплесков (вейвлетов). Тематика диссертации крайне актуальна и востребована. Системы всплесков – это относительно недавно появившийся, но уже хорошо зарекомендовавший себя инструмент гармонического анализа, применяемый как источник систем представления в функциональном анализе, так и на практике при обработке сигналов. В настоящее время всплески используются во всех системах компьютерной математики, они нашли многочисленные применения в задачах сжатия и передачи информации, численных методах решения уравнений с частными производными, теории машинного обучения и во многих других областях. Недаром в 2017 году французский математик Ив Мейер получил премию Абеля за «за решающую роль в разработке математической теории всплесков».

В первой главе диссертации приводится определение аттрактора и его важного частного случая, тайла, а также обсуждается построение системы всплесков типа Хаара, масштабирующая функция которой является характеристической функцией тайла.

Во второй главе исследуются геометрические свойства 2-аттракторов. В работе доказано, что, с одной стороны, 2-аттрактор (с точностью до аффинного подобия) однозначно определяется спектром порождающей матрицы. С другой стороны, матрицы, порождающие один и тот же (с точностью до аффинного подобия) 2-аттрактор, либо равны, либо противоположны. Эти основополагающие факты позволили создать полную классификацию изотропных 2-аттракторов и привести оценку их количества в неизотропном случае. Связь со спектром матрицы позволяет свести эти вопросы к изучению характеристических полиномов матриц и использовать некоторые результаты из теории чисел.

В третьей главе изучаются функции, порожденные свертками характеристических функций тайлов, названные по аналогии с одномерным случаем тайловыми B-сплайнами. С помощью этих функций построены ортонормированные базисы всплес-

ков, аналогичные системам Баттла-Лемарье. Доказано экспоненциальное убывание всплеск-функций, изучена гладкость (найден показатель гладкости по Гельдеру для малых порядков). При этом отмечен интересный факт: двумерные тайловые B-сплайны второго и третьего порядков Медведь-3 и Медведь-4 являются более гладкими, чем их классические аналоги. Отметим также, что тайловые B-сплайны применены в работе для построения алгоритма детализации поверхности с малой сложностью вычисления одной итерации по сравнению с классическим алгоритмом. Два последних результата показывают нетривиальность обобщения на тайлы конструкции сплайн-всплесков и возможность применения построенного семейства функций в инженерных задачах.

В четвертой главе изучаются тайлы, являющиеся объединением нескольких выпуклых многогранников. В работе получена полная классификация данных тайлов и доказано, что аттракторами среди этих множеств являются только параллелепипеды.

К работе имеются следующие замечания.

1. Стр. 22 -9. Во фразе «его целочисленные сдвиги замощают всю прямую» правильнее сказать «замащивают».

2. Стр. 34, +3 Вместо e должно быть a.

3. Стр. 49. В предложении 2.21 В последней фразе должно быть не «лежит в G», а «лежит в выпуклой оболочке G».

4. Стр. 58. В доказательстве теоремы 2.37 первый базисный вектор $(1, 0, \ldots, 0)^T$ имеет два обозначения $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e_1}$.

5. Стр. 63, +8 Читаем «Для $N(d)$ учитываются только полиномы со старшим коэффициентом 1» Это странная фраза, так как в теореме А тоже говорится только о целых полиномах со старшим коэффициентом 1.

6. Стр. 73. На рисунке 11 точка, подписанная как $z^2 + z + 1$, на самом деле $z^2 + 1$.

7. Стр. 74, +12,13 Во второй строке потерялся минус, вместо α нужно γ, вместо s нужно α.

8. Стр. 82, +6 Вместо M_1^T должно быть $(M^T)^{-1}$.

9. Стр. 95 В условии теоремы 3.16 не пояснено, какие множества индексов обозначаются K и W.

10. Стр. 96 В лемме 3.13 два обозначения M^{-T} и M_1^T применяются для одной и той же матрицы $(M^T)^{-1}$.

11. Стр. 104 В формулировке теоремы 3.18 стоит отметить, что $q < 1$.

12. Стр. 106 Сказано, что общая оценка будет в 2 раза больше. На самом деле она будет в 2 раза больше для l_2 и в 4 раза больше для l_1. Однако это замечание касается только фразы в тексте. Сами финальные оценки верны.

13. Стр. 115, +6 Не пояснено обозначение γ_j.

Указанные недочеты не носят принципиального характера и ничуть не умаляют научных достоинств диссертации. Особо отметим прекрасное оформление. Диссертацию легко читать, там, где это уместно, строго доказанные результаты предваряются кратким анонсом, поясняющим их роль и контекст в общей теории. Работа написана строгим, но не сухим языком, определения необходимых терминов напоминаются по ходу изложения, если они были введены давно. Работа представляет собой полноценное завершенное математическое исследование, а также содержит гипотезы и указания на нерешенные проблемы, представляя перспективу дальнейших исследований.

Полученные результаты являются новыми, важными и практически значимыми. Они также показывают глубокое знание предмета и хорошее владение аналитической техникой. Полученные результаты могут быть применены в теории приближений, теории всплесков, теории обработки информации, графическом дизайне. Они будут интересны специалистам из МГУ им.М.В.Ломоносова, Математического института им.В.А.Стеклова РАН, СПбГУ, Воронежского, Самарского, Саратовского государственных университетов, ИММ УрО РАН. Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих научных изданиях. Математические результаты и разработанные методы достаточны для защиты кандидатской диссертации. Диссертационная работа Т.И.Зайцевой соответствует всем критериям раздела II Положения о присуждении ученых степеней, установленным для кандидатской диссертации, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
(специальность 1.1.1 вещественный, комплексный и
функциональный анализ),
профессор кафедры математического анализа СПбГУ
(199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9)
+7 911 709 393 07, elena.a.lebedeva@spbu.ru
Лебедева Елена Александровна

Личную подпись Лебедевой Е.А.
заверяю
Заместитель начальника
Управления кадров О.С. Суворова
11.04.2023