Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.518.36, 514.174.5, 517.965

Зайцева Татьяна Ивановна

Самоподобные замощения и многомерная аппроксимация

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН В.Ю. Протасов

Москва — 2023

Оглавление

Введение **4**

Глава 1. Многомерные системы Хаара **19**
1.1 Одномерные системы Хаара 19
1.2 Тайлы 20
1.3 Многомерные системы Хаара на основе тайлов 23
1.4 Сравнение двух подходов к построению системам Хаара 25

Глава 2. 2-аттракторы и 2-тайлы **27**
2.1 Основные результаты про 2-аттракторы 27
2.2 Краткий обзор литературы по 2-аттракторам 30
2.3 2-аттракторы в $\mathbb{R}^2$ 31
2.4 Спектр матрицы определяет 2-аттрактор 31
2.5 Аттракторы, порождённые арифметическими прогрессиями 37
2.6 Классификация изотропных 2-аттракторов 38
2.7 Топология 2-аттракторов 44
2.8 Выпуклые оболочки 2-аттракторов 47
2.9 Тайлы, базисы Хаара и КМА 52
2.10 Может ли один аттрактор соответствовать разным матрицам? 55
2.11 Количество 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$ 60
2.12 2-аттракторы в $\mathbb{R}^3$ 63
2.13 Серии целых растягивающих многочленов и 2-аттракторов 66

Глава 3. Многомерные тайловые B-сплайны **78**
3.1 Классические B-сплайны 78
3.2 Построение тайловых B-сплайнов 81
Случай двух цифр ($m = 2$) 85
3.3 Ортогонализация B-сплайнов 87
3.4 Формулы для коэффициентов $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ 92
3.5 Построение всплеск-функции 93

3.6 Приближение всплеск-функций конечными суммами . 98
Скорость убывания коэффициентов голоморфной функции двух переменных 100
Оценка убывания коэффициентов всплеск-функций . . 104
3.7 Гладкость тайловых B-сплайнов 114
3.8 Алгоритмы детализации поверхностей 119

Глава 4. Многогранные тайлы 128
4.1 Введение 128
4.2 Приводимые тайлы 129
4.3 Классификация бокс-тайлов 131
4.4 Примеры 138
4.5 Классификация многогранных тайлов на прямой 139
Приведение к комбинаторной задаче 140
Вспомогательный результат 143
Основная теорема об одномерных многогранных тайлах 147
4.6 Классификация многогранных тайлов в $\mathbb{R}^d$ 152
4.7 Основные результаты 153
4.8 Наброски доказательств 154
4.9 Обозначения и вспомогательные сведения 159
Конусы 159
Многогранные множества 160
4.10 Доказательство теоремы 4.27: вспомогательные результаты 162
4.11 Финальная часть доказательства теоремы 4.27 168
4.12 Доказательство теоремы 4.29 175

Список литературы 176

Введение

Диссертационная работа содержит результаты на стыке теории аппроксимации и геометрии. Рассматривается метод построения многомерных систем Хаара на основе специальных самоподобных компактов (тайлов). Данный подход активно развивался в литературе, начиная с 1990х, см., например, [61, 87] и библиографию в этих работах. В первой главе подробно описано построение базисов Хаара на основе тайлов и указаны преимущества таких базисов по сравнению с классическими многомерными системами Хаара. Поскольку свойства базисных функций зависят от характеристик порождающих тайлов, последние также подробно исследованы в диссертации. Некоторые из результатов в этом направлении представляют также и независимый интерес.

Рассмотрим множество в $\mathbb{R}^d$, состоящее из точек вида $G = \sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\Delta_k$, где M – целочисленная растягивающая матрица, (т.е. все собственные значения по модулю больше 1), все вектора Δ_k взяты из конечного множества «цифр» $D \subset \mathbb{Z}^d$. Множество цифр содержит $|\det M|$ элементов – по одному элементу из каждого класса смежности $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$. Множество G называется *аттрактором*, порождённым матрицей M и системой цифр D. Известно, что каждый аттрактор является компактом, имеющим положительную целочисленную меру Лебега. Если эта мера равна 1, то множество G называется *(целым) тайлом*. Целые сдвиги тайла покрывают пространство $\mathbb{R}^d$ в один слой (т.е., с попарными пересечениями меры нуль). Можно сказать, что понятие тайла обобщает отрезок $[0, 1]$ при переходе от двоичной системы счисления на прямой к «системе счисления» в $\mathbb{R}^d$ с матричным основанием M.

Глава 2 посвящена случаю, когда $|\det M| = 2$, то есть в построении тайла используется две цифры. Получающаяся таким образом «двухциферная» система Хаара будет наиболее близка по свойствам к классическому базису Хаара в $L_2(\mathbb{R})$. Мы рассматриваем задачу классификации двухциферных тайлов в $\mathbb{R}^d$ с точностью до аффинного подобия. В некоторых случаях удаётся получить полную клас-

сификацию, в остальных мы оцениваем их количество. Последняя задача сводится к исследованию целых алгебраических приведённых многочленов степени d со свободным коэффициентом ± 2, у которых все корни лежат вне единичного круга. При этом используются несколько результатов теории чисел. Также затронуты топологические и геометрические свойства 2-тайлов.

Третья глава вводит в рассмотрение тайловые B-сплайны, определённые по аналогии с классическими кардинальными B-сплайнами как свёртка нескольких характеристических функций тайлов. Полученные функции не являются кусочно-полиномиальными, однако, как и тайлы, являются решениями так называемых масштабирующих уравнений (разностных уравнений со сжатием аргумента), что объясняет их приложения в теории всплесков и в геометрическом моделировании поверхностей. В диссертации строятся тайловые системы всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а также так называемые алгоритмы SubD. Довольно неожиданно, некоторые из тайловых B-сплайнов обладают большей гладкостью, чем классические сплайны того же порядка.

Глава 4 содержит исследование полиэдрального случая, когда тайлы являются не фрактальными множествами, а объединением нескольких выпуклых многогранников. Данная геометрическая задача имеет нетривиальное решение, а классификация полиэдральных тайлов использует арифметические прогрессии специального вида. Тем самым, охарактеризованы базисы Хаара в $\mathbb{R}^d$ с полиэдральными носителями.

Актуальность темы. Многие из результатов диссертации посвящены теории всплесков (вейвлетов). Первым ортогональным базисом всплесков считается базис А. Хаара (1910). Системы всплесков изучались в связи с обработкой сигналов задолго до появления единой теории, которая развивалась в конце 1980х гг. в работах С. Малла, И. Мейера, И. Добеши, П. Лемарье, А. Коэна, Ч. Чуи, Р. Девора, П. Войтащика, К. Грёхенига и многих других. Системы всплесков имеют ряд преимуществ по сравнению с классическими базисами в L_2, поскольку имеют двоичную структуру и хорошую частотно-временную локализацию. Важным свойством является безусловность сходимости всплеск-разложений, а также существование

быстрых алгоритмов получения этих разложений (так называемых каскадных алгоритмов). Так, каскадный алгоритм для вычисления коэффициентов разложения по системе Хаара в $L_2(\mathbb{R})$ имеет линейную сложность (по количеству N взятых базисных функций), что лучше, чем алгоритм быстрого преобразования Фурье, сложность которого, как известно, $N \log N$. Системы всплесков активно используются инженерами в различных задачах обработки сигналов, задачах аппроксимации и интерполяции функций, нейронных сетях и т.д. Широко известны также применения всплесков в решении уравнений математической физики, как для численного нахождения решений (метод вейвлет-Галёркина), так и для нахождения различных свойств точных решений.

В диссертации исследуется построение систем всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$ на основе матричных растяжений и самоподобных тайлов. Такой подход развивался Дж. Лагарисом, Я. Вонгом, К. Грёхенигом, В. Мадичем, А. Хаасом, Б. Ханом, К. Хейлом, Д. Кабрелли, П. Войтащиком, и вместе со смежными задачами геометрии и комбинаторики исследовался в обширной литературе. Среди работ в этом направлении можно выделить [27, 60, 61, 75, 80, 86, 104, 126, 128, 132]. Отметим, что существуют и другие подходы к построению многомерных систем всплесков – например, [14, 33, 43, 98].

Самоподобные тайлы, на основе которых строятся многомерные всплески, представляют собой частный случай аффинных фракталов. Литература по аффинным фракталам весьма обширна, их простейшие примеры, такие как кривая Коха, канторова лестница, кривые де Рама и т.д. общеизвестны. Чаще других используется следующее определение фрактала, данное Дж. Хатчинсоном в 1980 г. [69]:

Пусть X — полное метрическое пространство, $A_j : X \to X, j = 1, \ldots, m$ — отображения. Компактное множество $K \subset X$ называется *фракталом* или *инвариантным множеством* отображений $A_1, \ldots, A_m$, если

$$G = \bigcup_{j=1}^{m} A_j G.$$

В работе [69] доказано, что если все отображения $A_1, \ldots, A_m$ — сжимающие, то существует единственный соответствующий им фрактал. Определение Хатчинсона очень широкое, под него попадает множество объектов.

Если X — аффинное пространство, а A_i — аффинные сжимающие операторы, то соответствующий фрактал также называется аффинным. Тайлы, рассматриваемые в диссертации, представляют частный случай аффинных фракталов, который отличают два характеристических свойства:
1) все операторы A_i имеют одинаковую линейную часть (следовательно, все образы A_iG являются параллельными сдвигами друг друга)
2) любые два различных образа A_iG, A_jG имеют пересечения меры нуль.

Далеко не все классы аффинных фракталов обладают данными свойствами. Так, самоподобные фракталы Рози могут состоять из частей, полученных различными аффинными преобразованиями. Фракталы Рози также связаны с числами Пизо, β-разложениями, shift radix systems, и т.д. [76, 118]. Известный класс рептайлов содержит множества, составленные из одинаковых частей, однако с возможным использованием поворотов. Различные геометрические свойства самоподобных множеств, изучались, например, в [11, 46, 91].

Каждый тайл однозначно определяется матрицей M аффинного оператора (общей линейной частью операторов A_i) и системой параллельных сдвигов. Даже тайлы, порождённые одной матрицей могут быть чрезвычайно разнообразны и по геометрическому строению, и по топологическим свойствам. Некоторую классификацию удаётся произвести лишь при дополнительных ограничениях. Так, важным случаем являются 2-тайлы — случай двух сдвигов (цифр) у тайла. Двухциферные тайлы в силу своей важной роли в приложениях исследовались в обширной литературе [2, 10, 56, 64, 68, 72, 75, 85, 103, 128] и т.д. Глава 2 диссертации посвящена задаче классификации двухциферных тайлов.

Интересен вопрос о количестве различных 2-тайлов в $\mathbb{R}^d$ с точностью до аффинного подобия. В работе [58] показано, что их конечное

число. Известно, что на плоскости существует три типа 2-тайлов (в диссертации они названы Квадрат, Дракон и Медведь), в $\mathbb{R}^3$ их семь типов [10, 85]. В главе 2 получена полная классификация 2-тайлов в изотропном случае — когда матрица M подобна ортогональной матрице. Отметим, что изотропный случай является наиболее изученным в литературе и имеет наибольшее число приложений в теории всплесков. В общем (неизотропном) случае получены верхняя и нижняя оценка на количество 2-тайлов. Вопрос сводится к подсчёту числа приведённых целых многочленов со свободным коэффициентом ± 2 и корнями вне единичного круга. Для доказательства верхней оценки применены результаты С.В. Конягина и А. Дубицкаса о мере Малера целых многочленов [52]. Для доказательства нижней оценки числа двухциферных тайлов в диссертации построены несколько серий соответствующих полиномов. Одна из этих серий содержит квадратичное по d количество полиномов, что в результате гарантирует квадратичную нижнюю оценку на число 2-тайлов. Заметим, что ранее в литературе были известны только линейные по размерности d серии полиномов, см., например, [67].

Глава 3 посвящена приложениям двухциферных тайлов. На их основе построены тайловые B-сплайны, системы всплесков и алгоритмы SubD моделирования поверхностей. Напомним, что системой двоичных всплесков называется ортонормированный базис $\psi_{ij}, i, j \in \mathbb{Z}$, имеющий вид

$$\psi_{ij}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - i), \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

где ψ — так называемая всплеск-функция. Среди монографий, посвящённых всплескам, выделим [27, 80, 126, 132]. Во многих работах строились базисы всплесков и аналогичные системы в различных функциональных пространствах, см., например, [7, 74, 81, 89, 93, 108, 117].

Применение сплайнов в геометрическом моделировании восходит к статьям П. Безье [15] (1966), П. де Кастельжо [28] (1959), работавшими в автомобильном инжиниринге и использовавшими многочлены Бернштейна и аналогичные идеи, а также работам Ж. де

Рама в 1956 о предельных кривых алгоритма срезания углов [113], Г. Чайкина (1974) об алгоритмах последовательного приближения кривых [31]. Термин «сплайн» был предложен Шёнбергом в 1946 [116], однако его работы по приближению сплайнами стали популярными в 1960х. B-сплайны подробно изучались в кандидатской диссертации Райзенфелда [114] (1972), в работах К. де Бора, М. Кокса [18, 40, 131]. Примерно в это же время начали развиваться алгоритмы SubD (subdivision schemes): Катмулл и Кларк, Ду и Сабин [29, 50], 1978 г. Эти алгоритмы до сих пор очень популярны в компьютерной анимации. Так, в 2005 году алгоритмы SubD получили кинематографическую премию Оскар за технический вклад в мультипликацию. Существует множество различных схем — $\sqrt{3}$, 4-8, бабочки, Луупа, четырёхточечная и т.д. [82, 124]. В главе 3 построен новый класс алгоритмов SubD на основе предложенных там тайловых B-сплайнов и приведены примеры применения одного из них, Медведя-4. Преимуществом схемы Медведь-4 и аналогичных схем на основе тайловых B-сплайнов является высокая гладкость предельной поверхности и небольшое число коэффициентов на каждой итерации.

Классические кардинальные B-сплайны определены как автосвёртка характеристической функции единичного отрезка. По аналогии, тайловые B-сплайны строятся как автосвёртка индикатора тайлов. Они уже не будут кусочно-полиномиальными функциями, но, как и в одномерном случае, являются решениями масштабирующих уравнений — разностных уравнений со сжатием аргумента. Масштабирующие уравнения с конечным числом слагаемых активно изучались с 1980х в работах С. Дюбука, Ж. Деларье, Н. Дин, Д. Левина, Ч. Мичелли, Х. Праутша [48, 53, 54, 99], см. также монографию [30]. В теории всплесков они были исследованы И. Добеши, Дж. Лагарисом [44, 45]. Сплайны на основе всплесков строились в работе Дж. Стрёмберга [120], Г. Баттла [13], П.-Г. Лемарье [90]. В диссертации применена похожая конструкция для построения ортонормированных всплесков $\psi_{ij}(x)$ на основе двухциферных тайловых B-сплайнов. Локализация $\psi_{ij}(x)$ (т.е., скорость убывания при $x \to \infty$) оценена методами многомерного комплексного анализа. Заметим, что похожие на тайловые B-сплайны конструкции в двумерном случае были

исследованы в работе [130] под названием α-сплайны. Матрица M в масштабирующем уравнении при этом заменяется на комплексное число $\alpha \in \mathbb{Q}[i]$, $m = |\alpha|^2$. Тайловые B-сплайны, порождённые двумя цифрами, укладываются в эту конструкцию. На основе α-сплайнов в этой работе были построены алгоритмы SubD. Там же была сформулирована открытая проблема о гладкости таких сплайнов. В главе 3 данной диссертации данная проблема решена для двухциферных тайловых B-сплайнов невысоких порядков. Тайловые B-сплайны рассматривались также в работе [129] под названием эллиптические масштабирующие функции. Определение дано через преобразование Фурье, в случае изотропной матрицы M есть пересечения с данной работой.

Для вычисления показателя гладкости по Гёльдеру масштабирующих функций используется матричный метод. Для его применения необходимо вычисление так называемого совместного спектрального радиуса. Данное понятие было введено в работе Ж.К. Рота и Г. Стрэнга (1960) в связи с нормированным алгебрами, но в течение долгого времени не получило дальнейшего развития. Неожиданно, спустя много лет, совместный спектральный радиус стал крайне востребованным для исследования устойчивости динамических систем, сходимости алгоритмов SubD и для поиска гладкости в теории всплесков. Задача алгоритмической сложности вычисления совместного спектрального радиуса подробно исследовалась в работах В. Блонделя, Дж. Цициклиса, С. Гобера в конце 1990х гг. [23, 24]. Так, доказано, что вычисление совместного спектрального радиуса $d \times d$ матриц с неотрицательными рациональными коэффициентами является NP-сложной задачей. Более того, не существует полиномиального относительно $(d, \frac{1}{\varepsilon})$ алгоритма для оценки совместного спектрального радиуса с погрешностью ε. Тем не менее (и достаточно неожиданно), в недавних работах [62, 63, 94, 101] были представлены алгоритмы, которые позволяют вычислять точное значение совместного спектрального радиуса для широких классов матриц.

Существует множество работ, исследующих матричный подход к вычислению гладкости масштабирующих функций в случае изотропных матриц растяжения, т.е. матриц, подобных диагональным

[30, 32, 35, 37, 48, 55, 66, 70, 115]. Частичные результаты по обобщению матричного метода на анизотропный случай были получены, например, в [27, 41, 65], однако полностью преодолеть соответствующие сложности удалось только в недавней работе [34]. В диссертации метод из данной статьи применяется для вычисления гладкости тайлов и тайловых B-сплайнов.

Неожиданным результатом оказывается то, что B-сплайны, порождённые 2-тайлом Медведь, оказываются более гладкими, чем классические B-сплайны того же порядка. Для популярного в литературе тайла Дракон (twindragon) это неверно. Высокая гладкость данного семейства тайловых B-сплайнов имеет значение при построении соответствующих систем всплесков и алгоритмов SubD моделирования поверхностей. Так, поверхности, порождённые SubD алгоритмом Медведь-3 (свёртка трёх тайлов Медведь), принадлежит классу C^2, а поверхность, порождённая SubD алгоритмом, соответствующим классическому B-сплайну того же порядка, не является дважды дифференцируемой. Это означает более высокую скорость сходимости схемы Медведь-3 и большую гладкость приближаемой поверхности.

В главе 4 рассмотрен вопрос о том, когда тайлы могут быть простыми множествами — параллелепипедами, многогранниками или конечным объединением многогранников, такие множества названы многогранными. Поскольку тайлы являются носителями функций систем Хаара в $\mathbb{R}^d$, желательно иметь данное множество как можно более простой структуры. Одним из классов «простых» множеств являются конечные объединения выпуклых многогранников. Кроме того, многогранные тайлы могут быть применены в кристаллографии, при построении всплесков, алгоритмов SubD и т.д. [27, 60, 80, 86, 104, 126]. В главе 4 исследуются многогранные тайлы общего вида: снимается требование целочисленности матрицы M и целочисленности сдвигов.

Несколько классов многогранных тайлов рассматривались в литературе. Бокс-тайлы (параллелепипеды) изучались в работах Лагариса, Вонга, Грёхенига в [61, 86]. Многогранники более общего вида исследовались в [104, 127]. Несложно доказывается, что выпук-

лым тайлом-многогранником может быть только параллелепипед. В невыпуклом случае всё сложнее. В [135] было доказано, что невыпуклый многоугольник не может быть тайлом в $\mathbb{R}^2$. В недавней работе [127] было установлено, что из наличия у произвольного тайла выпуклого угла, подобного $\mathbb{R}^d_+$, следует, что тайл аффинно эквивалентен объединению целых сдвигов единичного куба. Для полного ответа на вопрос о многогранных тайлах, однако, этого недостаточно: во-первых, существуют многогранники, не имеющие выпуклых углов, во-вторых, не любое объединение единичных кубов является тайлом. Обе эти проблемы решены в главе 4. Сначала доказывается, что у многогранного тайла обязательно должен быть выпуклый угол, подобный $\mathbb{R}^d_+$, затем после применения результата [127] устанавливается лемма, в соответствие с которой существует подмножество замощения, дающее замощение прямоугольного параллелепипеда. После этого можно применить основную теорему работы [102] о параллельных дискретных замощениях множества $\mathbb{Z}^d_+$. Таким образом доказывается, что любой многогранный тайл является прямым произведением одномерных тайлов. Классификация последних может быть получена в терминах сумм по Минковскому нескольких арифметических прогрессий с определёнными соотношениями на их разности. Основной результат главы 4 даёт исчерпывающую классификацию всех многогранных самоподобных тайлов в $\mathbb{R}^d$. Показано, в частности, что для любого d в пространстве $\mathbb{R}^d$ существует бесконечное семейство топологически неэквивалентных друг другу многогранных тайлов.

Цель работы. Исследование самоподобных множеств (тайлов), их классификация в различных случаях, построение на их основе систем всплесков и тайловых B-сплайнов и изучение их свойств.

Положения, выносимые на защиту. Научная новизна.

В диссертации автором самостоятельно получены следующие новые результаты.

1) Представлена теория многомерных тайловых B-сплайнов, включающая в себя метод их построения, доказательство ряда свойств, вычисление показателей гладкости. В частности, получены тайловые B-сплайны, имеющие большую гладкость, чем класси-

ческие B-сплайны того же порядка (теорема 3.29). В качестве приложений тайловых B-сплайнов, на их основе построены алгоритмы детализации поверхностей (алгоритмы SubD) геометрического моделирования. Исследована сходимость данных алгоритмов и геометрические свойства предельных поверхностей (теорема 3.41).

2) На основе тайловых B-сплайнов, построены многомерные базисы всплесков типа Баттла-Лемарье, получены оценки на порядок их убывания на бесконечности и вычислена гладкость (теорема 3.16).

3) Полностью классифицированы двухциферные тайлы, порождённые изотропной растягивающей матрицей. Доказано, что с точностью до аффинного подобия в нечётной размерности существует один вид данных тайлов (теорема 2.11), а в пространстве чётной размерности — три (теорема 2.12). Этот результат, в частности, даёт исчерпывающее описание двухциферных базисов Хаара в $\mathbb{R}^d$ с изотропной матрицей растяжения. В общем, неизотропном, случае, получены верхняя и нижняя оценка на количество различных типов двухциферных тайлов (теорема 2.41). Этот результат основан на оценке количества приведённых целочисленных полиномов со свободным коэффициентом ± 2 и корнями вне единичного круга. Предложены явные новые конструкции таких полиномов.

4) Классифицированы все самоподобные тайлы, являющиеся объединением конечного числа многогранников. Тем самым найдены все многомерные базисы Хаара в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с полиэдральными носителями (теоремы 4.27, 4.29).

Методы исследования. В работе используются различные методы функционального анализа, выпуклой геометрии, линейной алгебры, численных методов, комплексного анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории приближений, теории всплесков, комбинаторной и выпуклой геометрии, теории чисел.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на многих конференциях: Curves and Surfaces (Франция, 2022), SIGGRAPH (Канада, 2022), CG Week (Германия, 2022), International Meshing Roundtable (SIAM, online, 2022),

Eurographics Doctoral Consortium (Франция, 2022), ОТНА (Ростов-на-Дону, 2019), ATMA2021 (Италия, 2021), "Многомерная аппроксимация и приложения" (Сочи, 2022), конференция математических центров (Москва, 2022), "Оптимизация без границ" (Сочи, 2021), конференция Ломоносов (2017–2021), Традиционная молодёжная школа Б.Т. Поляка (2017, 2018), а также на различных семинарах, включая семинар по теории функций действительного переменного под руководством Б.С.Кашина, С.В. Конягина, Б.И. Голубова и М.И. Дьяченко, семинар СПбГУ под руководством М.А. Скопиной, семинар в МИАН им. В. Стеклова «Современные проблемы теории чисел» под руководством С.В. Конягина и И.Д. Шкредова, семинар «Геометрическая теория приближений» под руководством П.А. Бородина, семинар лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения», семинар кафедры ОПУ механико-математического факультета МГУ, семинар «Операторные модели в математической физике» под руководством А.А. Шкаликова, семинар в МИАН им. В. Стеклова «Оптимальное управление и динамические системы» под руководством С.М. Миронова, семинар лаборатории Теории функций в ИМ СО РАН им. Соболева.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора [135, 136, 137, 138, 139], из которых три без соавторов, в журналах из баз данных Web of Science и Scopus, а также представлены в тезисах нескольких международных конференций. Список этих работ приведен в конце диссертации.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы из 144 наименований. Общий объем диссертации — 189 страницы. В каждой главе принята сквозная нумерация теорем, лемм, примеров. Нумерация рисунков — сквозная по всему тексту диссертации.

Краткое содержание диссертации. Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

В первой главе диссертации даны основные определения и краткое введение в построение многомерных систем Хаара.

Во второй главе диссертации устанавливаются результаты про

двухциферные тайлы и аттракторы. Первая из теорем сводит их классификацию к анализу спектров матриц.

Теорема 2.5. *Двухциферный аттрактор однозначно определяется, с точностью до аффинного подобия, спектром матрицы M.*

Заметим, что утверждение теоремы 2.5 выполнено только для двухциферных аттракторов. Уже в случае трёх цифр одна и та же матрица M порождает бесконечно много аффинно неэквивалентных аттракторов. Теорема 2.5 позволяет доказать, что на плоскости существует ровно три типа двухциферных тайлов с точностью до аффинного подобия, в диссертации для них используются названия Квадрат, Дракон и Медведь.

Далее мы получаем такую классификацию для произвольной размерности, сначала для изотропного случая.

Теорема 2.11. *Если d нечётно, то все изотропные 2-аттракторы в $\mathbb{R}^d$ – параллелепипеды.*

Теорема 2.12. *Если $d = 2k$ – чётно, то в $\mathbb{R}^d$ существуют, с точностью до аффинного подобия, ровно три изотропных 2-аттрактора: параллелепипед, прямое произведение k Драконов и прямое произведение k Медведей.*

Двухциферный аттрактор определяется спектром матрицы, то есть каким-то приведённым растягивающим целым полиномом со свободным коэффициентом ± 2. Оказывается, что различные полиномы также порождают разные типы тайлов, если только их корни не обратны по знаку. Поэтому достаточно охарактеризовать все полиномы данного класса.

Теорема 2.37. *Если матрицы M_1 и M_2 (с некоторыми множествами цифр D_1, D_2) порождают один и тот же, с точностью до аффинного подобия, 2-аттрактор, то либо $M_1 = M_2$, либо $M_1 = -M_2$.*

Далее описывается ряд топологических свойств аттракторов и приведено исследование вопроса о том, какие из полиномов могут

порождать именно тайл, а не аттрактор. В последнем случае они порождают и систему Хаара. В диссертации сформулирована гипотеза, что для любого полинома существует такой тайл, порождённый сопровождающей матрицей. Приведено её доказательство для изотропных полиномов. Затем получена оценка на количество различных классов не аффинно подобных 2-аттракторов, следующая из аналогичной оценки на число полиномов.

Теорема 2.41. *Количество $N(d)$ не аффинно подобных 2-аттракторов размерности d удовлетворяет неравенствам* $\frac{d^2}{16} - \frac{43d}{36} - \frac{5}{6} \leq N(d) \leq 2^{d\left(1+\frac{16\ln\ln d}{\ln d}\right)}$.

В главе 3 построена теория многомерных тайловых B-сплайнов. Исследованы их свойства, в особенности случай двухциферных тайлов. На основе данных сплайнов построены системы всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$, аналогичные системам Баттла-Лемарье на прямой. Тайловые базисы всплесков описываются следующей теоремой.

Теорема 3.16. *Пусть G — двухциферный тайл (2-тайл), то есть $m = |\det M| = 2$, а $\varphi = B_n^G$ — соответствующий ему тайловый B-сплайн. Через φ_1 обозначим его ортогонализацию, через $c_{\boldsymbol{k}}$ — коэффициенты масштабирующего уравнения на φ_1. Тогда*

1) соответствующая всплеск-функция $\psi(\boldsymbol{x})$ является линейной комбинацией M-сжатий функции φ_1 с коэффициентами $\pm c_{\boldsymbol{k}}$.

2) Для трёх типов аффинно неэквивалентных двухциферных тайлов, матрицы которых определены в теореме 2.8, справедливы такие формулы для всплеск-функции:
а) Если G — тайл Медведь, то есть $M = M_B$, то

$$\psi_B(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}}(-1)^{(k_2-k_1)}\varphi_1\left(M_B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right); \qquad (1)$$

б) Если G — тайл Квадрат, то есть $M = M_S$, то

$$\psi_S(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}}(-1)^{k_1}\varphi_1\left(M_S\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right);$$

в) Если G — тайл Дракон, то есть $M = M_D$, то

$$\psi_D(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}}(-1)^{(k_2-k_1)}\varphi_1\left(M_D\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Поскольку носители построенных всплесков не компактны, важным вопросом является скорость их убывания на бесконечности. В работе приведены оценки на скорость убывания тайловых всплеск-функций. В частности, они вычислены для сплайнов Медведь-2 и Медведь-4. В следующем параграфе найден показатель гладкости по Гёльдеру B-сплайнов. Результаты получаются достаточно неожиданными, как показывает следующая теорема.

Теорема 3.29. *Тайловые B-сплайны Медведь-3 и Медведь-4 принадлежат $C^2(\mathbb{R}^2)$ и $C^3(\mathbb{R}^2)$ соответственно.*

Классические двумерные B-сплайны соответствующих порядков не принадлежат C^2 (соответственно C^3). Таким образом, тайловые B-сплайны, несмотря на то, что они основаны на фрактальных множествах, могут получаться более гладкими.

Далее на основе тайловых B-сплайнов построены алгоритмы SubD. Интересно отметить следующий факт.

Теорема 3.35. *Алгоритм SubD в $\mathbb{R}^d$, порождённый тайловым B-сплайном B_n^G, где G — тайл-параллелепипед, имеет сложность вычисления одной итерации $n + 2$. Классический d-мерный алгоритм SubD порядка n, порождённый произведением d одномерных B-сплайнов B_n, имеет сложность вычисления одной итерации $(n+2)^d$. Эти алгоритмы порождают одни и те же предельные поверхности.*

В главе 4 классифицированы тайлы, являющиеся многогранными множествами, то есть объединением нескольких выпуклых многогранников. Следующие две теоремы дают полную классификацию многогранных тайлов.

Теорема 4.27. *Многогранное множество в $\mathbb{R}^d$ является тайлом тогда и только тогда, когда оно аффинно эквивалентно прямому произведению d одномерных множеств вида (24). Каждое из этих d множеств порождено своей тройкой $(r, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})$, где $r \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}$ — допустимая пара из $\mathbb{Z}^r$.*

Теорема 4.29. *Если аттрактор является многогранным множеством, то это — параллелепипед.*

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю В.Ю. Протасову за постановку задач, их обсуждение и постоянное внимание к работе. Также автор признателен семье, друзьям и коллегам за поддержку во время работы над диссертацией. В диссертацию вошли результаты, полученные при работе в лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения» МГУ имени М. В. Ломоносова (проект № 14.W03.31.0031), при работе в Московском центре мирового уровня МГУ имени М.В. Ломоносова, при работе над проектами Российского научного фонда №21-11-00131 и №23-71-30001, выполняемыми при МГУ имени М. В. Ломоносова. Также автор диссертации является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Глава 1. Многомерные системы Хаара

1.1 Одномерные системы Хаара

Напомним сначала построение классической одномерной системы Хаара на отрезке $[0,1]$, она строится по уровням. Сначала определяется функция $h_0 = \chi_{[0,1)}$. Затем функции j уровня строятся по общей формуле:

$$h_{2^j+k}(t) = \begin{cases} (\sqrt{2})^j & t \in [\frac{k}{2^j}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}) \\ -(\sqrt{2})^j & t \in [\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad k = 0, \dots 2^j - 1$$

Объединение $h_0(t)$ и функций всех уровней образует базис в $L_2[0,1]$. Несколько первых базисных функций изображены на Рисунках 1, 2, 3, 4.

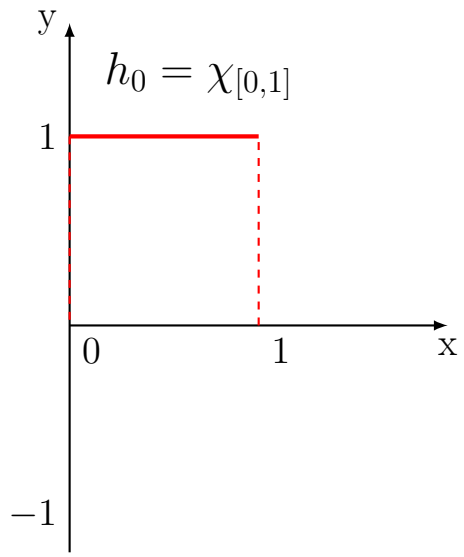


Рис. 1: Вне уровня

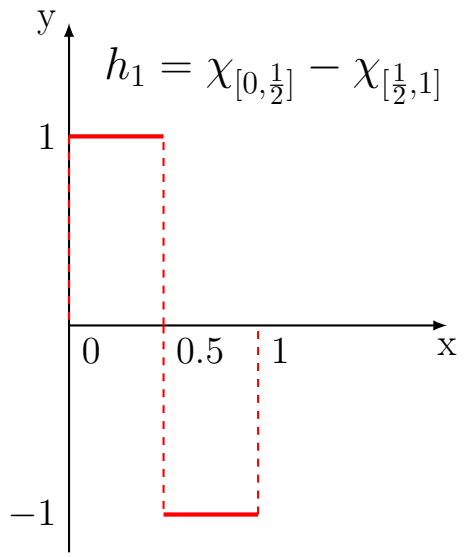


Рис. 2: Уровень 0

Базис в $L_2(\mathbb{R})$ немного отличается от базиса в $L_2[0,1]$: в него не входит функция $h_0(t)$, сдвиги на каждом уровне разрешаются по

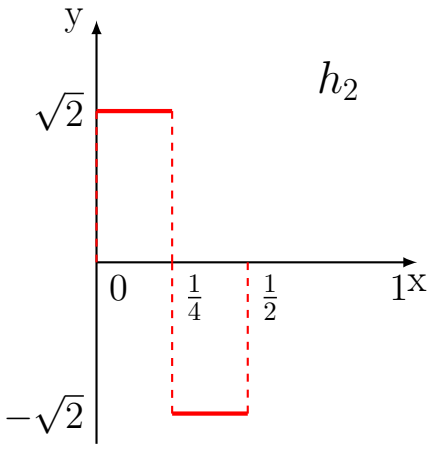


Рис. 3: Уровень 1, функция h_2

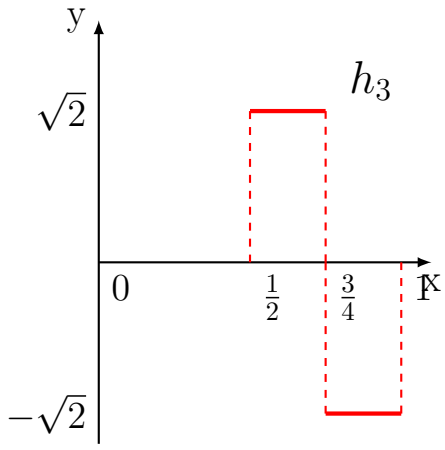


Рис. 4: Уровень 1, функция h_3

всей прямой, а также добавляются растяжения функций. Другими словами, берётся функция

$$\psi = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{[\frac{1}{2},1]},$$

по ней строится базис $L_2(\mathbb{R})$ из функций

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k),\ j,k \in \mathbb{Z}.$$

Для построения систем Хаара в многомерном случае нам понадобится определить специальные самоподобные компакты (тайлы).

1.2 Тайлы

Любая целочисленная матрица $M \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ определяет разбиение решётки $\mathbb{Z}^d$ на $m = |\det M|$ классов эквивалентности $y \sim x \Leftrightarrow y - x \in M\mathbb{Z}^d$. Выберем по представителю $d_i \in \mathbb{Z}^d$ из каждого класса эквивалентности, полученное множество будем называть *набором цифр*: $D(M) = \{d_i : i = 0, \ldots, m-1\}$. Будем всегда считать, что $0 \in D(M)$. В одномерном случае, если M – число, $D(M)$ будет множеством цифр в системе счисления с основанием m. Таким образом, целочисленная матрица и множество цифр определяют «систему счисления» в $\mathbb{Z}^d$. Заметим, что одной матрице соответствует бесконечно много наборов цифр.

Далее будем всюду предполагать, что матрица M растягивающая, то есть все её собственные значения по модулю больше единицы. В этом случае аналогом единичного отрезка в данной системе счисления является множество

$$G = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\Delta_k \mid \Delta_k \in D(M) \right\}.$$

В работах [60, 61] показано, что для каждой растягивающей целой матрицы M и произвольного набора цифр $D(M)$, множество G компактно, имеет непустую внутренность и удовлетворяет свойствам:

1. мера Лебега $\mu(G)$ является целым положительным числом;
2. (самоподобие) $G = \bigcup_{\Delta\in D(M)} M^{-1}(G+\Delta)$, причём множества $M^{-1}(G+\Delta)$ имеют меру попарного пересечения нуль;
3. характеристическая функция $\varphi = \chi_G(x)$ множества G почти всюду на $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет масштабирующему уравнению
$$\varphi(x) = \sum_{\Delta\in D(M)} \varphi(Mx-\Delta), \quad x \in \mathbb{R}^d; \tag{2}$$
4. $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(x+k) \equiv \mu(G)$ почти всюду, то есть целые сдвиги φ покрывают $\mathbb{R}^d$ в $\mu(G)$ слоёв;
5. $\mu(G) = 1$ тогда и только тогда, когда система функций $\{\varphi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ ортонормированная.

Это позволяет ввести следующее определение:

Определение 1.1. *Аттрактором*, порождённым растягивающей матрицей $M \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ и набором цифр $D(M) = \{d_i : i = 0, \ldots, m-1\}$, называется множество $G = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} M^{-k}\Delta_k : \Delta_k \in D(M) \right\}$.

Определение 1.2. Аттрактор лебеговой меры 1 называется *(целым) тайлом.*

Другими словами, целочисленные сдвиги тайла покрывают $\mathbb{R}^d$ в один слой. Как мы покажем в следующем параграфе, именно тайлы наиболее важны в приложениях.

Замечание 1.3. В Главах 1, 2, 3 мы будем опускать для краткости слово целый и использовать термин «тайл». В главе 4 у нас будут более слабые требования к множеству G, а именно, матрица и цифры будут необязательно целыми (см. определение 4.1), поскольку для геометрических результатов это требование не нужно.

В определённом смысле тайл – многомерное обобщение отрезка $[0,1]$ для «системы счисления» с основанием – матрицей M.

Пример 1.4. В случае $d = 1$ (на числовой прямой), если $M = 2$, можно выбрать $D(M) = \{0,1\}$. Тогда

$$G = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \Delta_k \mid \Delta_k \in \{0,1\} \right\} = [0,1].$$

Отрезок $[0,1]$ удовлетворяет всем перечисленным свойствам. В частности, для его характеристической функции $\varphi = \chi_{[0,1]}$ выполнено масштабирующее уравнение $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$. Отрезок $[0,1]$ является тайлом, его целочисленные сдвиги замощают всю прямую $\mathbb{R}$.

Пример 1.5. Рассмотрим матрицу $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $m = |\det M| = 3$. В качестве её цифр можно выбрать $D(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Множество G, соответствующее такому выбору, показано на Рисунке 5а. Самоподобие множества G проиллюстрировано на Рисунке 5б: показано разбиение G на $m = 3$ аффинно-подобные копии. В данном случае множество G является тайлом, замощение плоскости с помощью его целочисленных сдвигов показано на Рисунке 5в. Для

характеристической функции $\varphi = \chi_G$ выполнено масштабирующее уравнение

$$\varphi(x) = \varphi(Mx) + \varphi\left(Mx - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \varphi\left(Mx - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$



(а) Множество G. (б) Самоподобие G. (в) Замощение плоскости.

Рис. 5: Тайл G из примера 1.5 и его свойства.

1.3 Многомерные системы Хаара на основе тайлов

С использованием любого тайла в $\mathbb{R}^d$ можно построить ортонормированный базис Хаара в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$. Такие базисы широко применяются в теории приближений, численных методах, обработке сигналов и т.д. (см., например, [106, 132]). Рассмотрим подробнее это построение, описанное, например, в [61].

Пусть зафиксирован тайл G, порождённый целой растягивающей матрицей M и системой цифр $D(M) = \{d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}\}$. Двоичное сжатие из одномерной системы заменяется умножением на степени матрицы M. Функция h_0 заменяется на индикатор тайла G.

Выбираем $m-1$ ортонормированных векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{m-1}$ в пространстве $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=0}^{m} x_i = 0 \right\}$. k-ю координату вектора $\boldsymbol{e}_i$

будем обозначать через $(\boldsymbol{e}_i)_k$. Сначала строится вспомогательный набор всплеск-функций Хаара:

$$\psi_s = \sqrt{m} \sum_{k=0}^{m-1} (\boldsymbol{e}_s)_{k+1} \cdot \chi_{M^{-1}(G+d_k)}, \quad \forall s = 1, \ldots, m-1.$$

Тогда $\left\{m^{j/2}\psi_s(M^j x - k)\right\}_{j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}^d,\, s=1\ldots m-1}$ — базис в $L_2(\mathbb{R}^d)$, который называется *базисом Хаара*.

Построение систем всплесков можно также описывать с помощью понятия кратномасштабного анализа (КМА) [132]:

Определение 1.6. Кратномасштабным анализом (КМА) называется система замкнутых подпространств $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, которая

1) расширяющаяся, т.е., каждое следующее пространство содержит предыдущее и не совпадает с ним;

2) пересечение всех пространств V_j содержит только нулевую функцию, т.е. тождественный ноль (свойство пустоты пересечения);

3) пространство V_j стремится ко всему гильбертову пространству функций при $j \to \infty$. Это значит, что любая функция сколь угодно точно может быть приближена функциями пространств V_j (свойство полноты).

4) каждое следующее есть сжатие предыдущего с помощью матрицы M, т.е., для любой функции $f(\cdot) \in V_j$, имеем $f(M\cdot) \in V_{j+1}$;

5) существует функция $\varphi \in V_0$ такая, что $\varphi(\cdot - k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ — ортонормированный базис V_0.

Пример 1.7. В случае классического одномерного КМА Хаара, V_j состоит из кусочно-постоянных функций, постоянных на двоичных интервалах j-того ранга $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)], k \in \mathbb{Z}$. Ортонормированным базисом в пространстве V_0 являются целые сдвиги функции $\varphi = h_0 = \chi_{[0,1)}$, порождавшей систему Хаара.

Пример 1.8. В $\mathbb{R}^d$, функции из V_j постоянны на множествах $M^{-j}(G + k), k \in \mathbb{Z}^d$. Ортонормированным базисом в V_0 являются целочисленные сдвиги функции $\varphi = \chi_G$.

Таким образом, каждый тайл порождает систему Хаара и КМА. Кроме этого, тайл порождает алгоритм SubD (subdivision scheme) в геометрическом моделировании, сходящийся в L_p (эти алгоритмы будут рассмотрены в параграфе 3.8).

Если аттрактор не является тайлом, то целые сдвиги функции φ линейно зависимы, поэтому функция φ не образует КМА, а соответствующий алгоритм SubD может расходиться [30, 80]. Существуют различные условия для алгоритмической проверки, является ли аттрактор, порождённый матрицей M и цифрами D тайлом [60, 87]. При этом, всё зависит не только от матрицы, но и от цифр. Например, если матрица M и множество цифр $D = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{a}\}$ порождает 2-тайл $G(M, D)$, то для множества цифр $D' = \{\mathbf{0}, 3\boldsymbol{a}\}$, 2-аттрактор $G(M, D')$ уже не является тайлом, поскольку его мера Лебега равна $3^d|G(M, D)| \geq 3^d$. В размерностях $d = 2, 3$, для каждой растягивающей матрицы M существует множество цифр D, для которого $G(M, D)$ – тайл. Но уже в $\mathbb{R}^4$ А.Потиопа в 1997 г. построил пример матрицы M, для которой такого множества цифр не существует, т.е. эта матрица не порождает тайла [86, 88].

Отметим, что есть другой подход к построению систем всплесков, в котором они порождаются тайлами в частотной области [14, 22, 43, 98, 97].

1.4 Сравнение двух подходов к построению системам Хаара

Многомерную систему Хаара можно построить и через прямое произведение одномерных систем. Этот подход является частным случаем построения, рассмотренного нами в предыдущем параграфе и соответствует диагональным матрицам M.

Хотя конструкция через одномерные системы проще, она имеет некоторые недостатки. Одним из них является локализация базисных функций, носители которых, прямоугольники, могут быть длинными по одной оси и короткими по другой. Поэтому их невозможно поместить в круг малого радиуса. Локализация функций важна при

зашумлённых данных, поскольку при наличии точечного шума, если носитель базисной функции пересекает источник шума, то изменится соответствующий коэффициент разложения. При матричных сжатиях носитель сжимается одновременно по всем направлениям, т.е. уменьшается диаметр носителя.

Другим преимуществом подхода с использованием тайлов является возможность получения малого количества всплеск-функций в системе Хаара. Используя классические произведения одномерных систем Хаара, в размерности два мы получим не менее четырёх цифр, то есть не менее трёх всплеск-функций. В размерности d их количество уже станет как минимум $2^d - 1$. Однако, с использованием тайлов с двумя цифрами, в любой размерности можно построить систему Хаара всего с одной порождающей всплеск-функцией и носителем-параллелепипедом (Следствие 2.33).

Преимущества систем функций, построенных на тайлах, будут использованы в главе 3 в конструкции тайловых B-сплайнов. Мы покажем, что тайловые B-сплайны могут иметь большую гладкость, чем классические B-сплайны того же порядка (теорема 3.29), что может использоваться в прикладных задачах (при построении систем всплесков, алгоритмов SubD и т.д.)

Глава 2. 2-аттракторы и 2-тайлы

Важный класс аттракторов составляют двухциферные (2-аттракторы), для которых $\det M = \pm 2$. В этом случае $m = |D| = 2$, и M-ичная система в $\mathbb{R}^d$ аналогична двоичной системе на прямой. В частности, каждый аттрактор G распадается на две подобные ему копии $M^{-1}(G+\boldsymbol{d}_0)$ и $M^{-1}(G+\boldsymbol{d}_1)$, а масштабирующее уравнение (2) содержит всего два слагаемых. Система Хаара имеет единственную порождающую функцию $\psi(\boldsymbol{x}) = \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_0) - \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{d}_1)$ (напомним, что в общем случае система Хаара имеет $m-1$ порождающих функций). Аналогично с системами всплесков: в двухциферном случае они порождены единственной всплеск-функцией, а соответствующий КМА (определение 1.6) имеет двоичную структуру подобно всплескам в $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому системы всплесков, порожденные 2-аттракторами, наиболее естественны и просты в использовании.

Определение 2.1. Аттрактор называется *изотропным*, если он порождён *изотропной матрицей* M, т.е., матрицей, имеющей равные по модулю собственные значения и не имеющей нетривиальных жордановых клеток.

Изотропная матрица аффинно подобна ортогональной матрице, умноженной на число. Изотропные аттракторы наиболее популярны в многочисленных приложениях.

2-аттракторам посвящена обширная литература (мы дадим краткий обзор в параграфе 2.2). Известно, что при каждом d в $\mathbb{R}^d$ существует конечное число различных, с точностью до аффинного подобия, 2-аттракторов. Так, в $\mathbb{R}^2$ есть ровно три 2-аттрактора – Квадрат, Дракон и Медведь, все они изотропные. В $\mathbb{R}^3$ существует семь 2-аттракторов, среди них только один изотропный – куб.

2.1 Основные результаты про 2-аттракторы

Мы исследуем 2-аттракторы – их классификацию, геометрические и топологические свойства. Когда это возможно, мы распространяем

некоторые результаты на аттракторы с произвольным числом цифр. В изотропном случае вопрос классификации удаётся решить полностью (параграф 2.6).

Эта классификация оказывается простой, что довольно неожиданно. В нечётной размерности $d = 2k + 1$ все изотропные 2-аттракторы суть параллелепипеды (теорема 2.11). В чётной размерности $d = 2k$ существует ровно три, с точностью до аффинного подобия, изотропных 2-аттрактора. Это параллелепипед, а также прямое произведение k (двумерных) Драконов и прямое произведение k (двумерных) Медведей (теорема 2.12). Доказательство теорем конструктивно: матрицы M соответствующих 2-аттракторов находятся в явном виде.

Полученная классификация позволяет установить множество свойств изотропных 2-аттракторов. Так, мы показываем, что все изотропные 2-аттракторы в $\mathbb{R}^d$ гомеоморфны d-мерному шару, но не C^1-диффеоморфны друг другу. Более того, все три типа изотропных аттракторов в чётной размерности не являются метрически эквивалентными, т.е., не переводятся один в другой липшицевым в обе стороны отображением (теорема 2.18 параграфа 2.7). Свойства выпуклых оболочек аттракторов исследуются в параграфе 2.8. Оказывается, что среди всех 2-аттракторов, выпуклая оболочка является многогранником только у параллелепипеда (2^d вершин) и у произведения Драконов ($2^{3d/2}$ вершин). У остальных 2-аттракторов выпуклая оболочка – зоноид с бесконечным множеством крайних точек.

В параграфе 2.9 мы обращаемся к приложениям и показываем, что каждый изотропный 2-аттрактор является тайлом, а значит, порождает КМА и базис Хаара, при условии, что матрица M и цифры D выбраны подходящим образом (теорема 2.30 явно указывает – каким). При этом функция Хаара, порождённая произведением двумерных Драконов, не совпадает с произведением двумерных функций Хаара! Аналогичные утверждения для общих (неизотропных) 2-аттракторов формулируются в виде гипотезы, которая проверяется для малых размерностей (предложение 2.29).

Основной вспомогательный факт о 2-аттракторах состоит в том, что они определяются однозначно с точностью до аффинного подо-

бия спектром матрицы M и не зависят от выбора цифр D. Это было установлено в [58]. В параграфе 2.3 приведено другое доказательство, которое позволяет распространить данное свойство на произвольные аттракторы с цифрами, составляющими арифметическую прогрессию (теорема 2.9). Итак, тип 2-аттрактора зависит только от характеристического полинома матрицы M. Более того, противоположные полиномы (т.е. характеристические полиномы матриц M и $-M$) порождают один и тот же тип. В теореме 2.37 (параграф 2.10) мы устанавливаем обратное: аттракторы, соответствующие различным и не противоположным полиномам, не аффинно подобны друг другу. Этот факт, доказательство которого довольно сложно, позволяет находить число различных (с точностью до аффинного подобия) 2-аттракторов в любой размерности d. Оно равно количеству различных и не противоположных друг другу целочисленных растягивающих полиномов степени d со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом ± 2. *Растягивающий* означает, что все корни полинома по модулю больше 1. Так мы получаем количество $N(d)$ различных 2-аттракторов в пространстве $\mathbb{R}^d$: $N(2) = 3$, $N(3) = 7$, $N(4) = 21$, и т.д. В параграфе 2.11 (теорема 2.41) мы показываем, что $C_1 d^2 \leq N(d) \leq C_2 2^d$ (значения констант приведены в формулировке теоремы). Оценка сверху получена с помощью результата Дубицкаса-Конягина о числе целых полиномов с заданной мерой Малера [52]. Для оценки снизу мы строим серию целых растягивающих полиномов вида $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_1 z \pm 2$, содержащую квадратичное по d число полиномов. До этого в литературе были известны только две серии, в обеих число полиномов линейно по d [67]. В параграфе 2.13 мы добавляем ещё пять новых серий, среди которых одна – квадратическая. Как мы видим, нижняя и верхняя оценки на $N(d)$ далеки друг от друга. Численные результаты показывают, что по крайней мере для $d \leq 8$ верхняя оценка практически точна: $N(d)$ растёт как 2^d. Однако, доказательство этого факта или получение более точных оценок остаётся открытой проблемой.

Наконец, в параграфе 2.12 мы исследуем гладкость 2-аттракторов в трёхмерном пространстве, вычисляя показатель Гёльдера в $L_2(\mathbb{R}^3)$.

2.2 Краткий обзор литературы по 2-аттракторам

В работах [9, 59] были построены первые примеры и исследованы свойства 2-аттракторов. Работы [60, 61, 85, 87], заложившие основы теории аттракторов и тайлов, также уделили много внимания двухциферному случаю. Топологические свойства 2-аттракторов и комбинаторика замощений плоскости их целыми сдвигами исследовались [2, 10, 72, 75] (другие ссылки по этой теме – в параграфе 2.7. В [58] было показано, что в $\mathbb{R}^d$ существует конечное число 2-аттракторов, с точностью до аффинного подобия, а в [67] были построены серии 2-аттракторов, число которых растёт линейно по d. В [10] были найдены все типы в двухмерном и трёхмерном случае (3 и 7 типов соответственно). Различным аспектам плоских 2-аттракторов посвящена монография [56] и статьи [64, 68, 103, 128]. В [85] найдены 6 типов плоских 2-аттракторов с точностью до целочисленного аффинного подобия, а в [73] эта классификация продолжена на случаи $3, 4$ и 5 цифр. В [135] вычислены показатели гладкости плоских 2-аттракторов. Обобщения на нецелые матрицы и связанные с ними замощения Пюизо, shift radix systems, и т.д. исследовались в [76, 118].

Приложения к всплескам и смежные вопросы исследовались в большом количестве работ, упомянем здесь лишь монографии [27, 126, 132]. Также отметим другой подход к построению всплесков, не использующий кратномасштабный анализ – например, статьи [14, 22, 33, 43, 97, 98].

Больше ссылок указаны нами в конкретных параграфах.

Обозначения. Мы всегда будем предполагать, что базис в $\mathbb{R}^d$ фиксирован и будем отождествлять линейный оператор с соответствующей матрицей. Через I обозначена единичная матрица, $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ – характеристический полином матрицы A. Мы пользуемся жирными буквами для обозначения векторов и простыми буквами для обозначения их компонент, т.е., $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$. Через $|X|$ обозначена мера Лебега множества $X \subset \mathbb{R}^d$.

2.3 2-аттракторы в $\mathbb{R}^2$

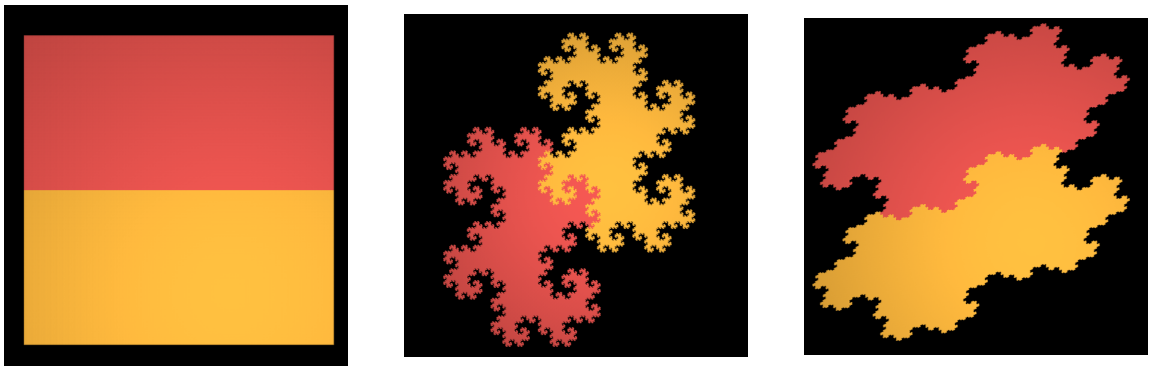
Мы начнём со случая $d = 2$. На двумерной плоскости существует ровно три, с точностью до аффинного подобия, 2-аттрактора [10, 85, 135], что также будет доказано в теореме 2.8. Мы будем называть их *Квадрат*, *Дракон* (в литературе употребляется также термин twindragon) и *Медведь* (tame twindragon). Все они являются тайлами и все трое гомеоморфны кругу [12], но не метрически эквивалентны [111]. Их разбиение на две подобные им части показано на Рисунке 6, а замощение плоскости их целочисленными сдвигами на Рисунке 7.

Первое систематическое исследование плоских 2-аттракторов осуществлялось в [9, 59]. В [85] матрицы плоских 2-аттракторов классифицируются с точностью до целочисленного подобия. В этом случае матрицы A и B считаются эквивалентными, если существует унимодулярная матрица $P \in GL_2(\mathbb{Z})$ такая, что $P^{-1}AP = B$. Получается 6 таких классов, которые склеиваются в три класса аффинной изоморфности. В [56] также рассмотрен случай нецелых цифр и показано, при каких цифрах в каждом из шести случаев мы будем получать замощение плоскости в один слой (как у тайла). Построение функций Хаара и систем всплесков по плоским 2-аттракторам осуществлялось в [61, 85, 126], исследование гладкости полученных функций Хаара – в [135].

В случае трёх и более цифр задача классификации гораздо более сложная, поскольку аттрактор уже не определяется характеристическим многочленом матрицы. Однако, при малых определителях $m = 3, 4, 5$ в работе [73] для каждого из возможных характеристических полиномов описаны все классы целочисленного подобия матриц (но не произвольного аффинного подобия!)

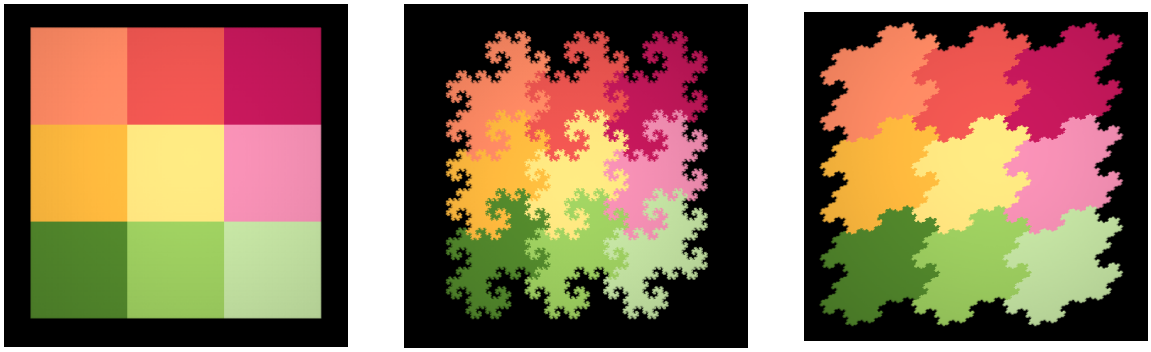
2.4 Спектр матрицы определяет 2-аттрактор

Одно из замечательных свойств двухциферных аттракторов состоит в том, что его геометрия не зависит от множества цифр D. Впервые это было замечено в работе [58]. Как мы покажем в теореме 2.5,



Квадрат Дракон Медведь

Рис. 6: Разбиение плоских 2-аттракторов на две подобные части



Квадрат Дракон Медведь

Рис. 7: Замощение плоскими 2-аттракторами $\mathbb{R}^2$

двухциферный аттрактор однозначно, с точностью до аффинного подобия, определяется спектром матрицы растяжения. Подобная единственность не распространяется на большее число цифр, скажем, на 3-аттракторы. Однако, для некоторых специальных множеств цифр, скажем, на прогрессии, обобщение возможно (параграф 2.6).

Начнём с того, что одну из цифр D можно всегда считать нулевой. В самом деле $\sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\boldsymbol{d}_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\right)\boldsymbol{d}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}(\boldsymbol{d}_k - \boldsymbol{d}_0)$. Поэтому, если заменить множество цифр $\{\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1\}$ на $\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_0\}$, то аттрактор G сдвинется на вектор $\left(\sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\right)\boldsymbol{d}_0$. Везде далее считаем, что $\boldsymbol{d}_0 = 0$, и теперь всё зависит только от выбора $\boldsymbol{d}_1$.

Нам понадобится несложный вспомогательный факт:

Лемма 2.2. *Для произвольной $d \times d$ матрицы M и для произвольных точек $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ таких, что $\boldsymbol{a}$ не принадлежит собственному подпространству M, существует матрица C, которая коммутирует с M и переводит $\boldsymbol{a}$ в $\boldsymbol{b}$.*

Доказательство. Перейдём к жорданову базису матрицы M и рассмотрим одну жорданову клетку Λ размера s, соответствующую собственному значению λ. Обозначим через $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ s-мерные компоненты векторов $\boldsymbol{a}$ в $\boldsymbol{b}$, соответствующие данной клетке. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество Ханкелевых верхнетреугольных матриц размера s, т.е. матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{s-1} & \alpha_s \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{s-1} \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathcal{H}$ – линейное пространство, являющееся мультипликативной полугруппой. Все элементы $\mathcal{H}$ коммутируют с Λ. Множество $U = \{X\boldsymbol{a}' \mid X \in \mathcal{H}\}$ является линейным подпространством $\mathbb{R}^s$, инвариантным относительно каждой матрицы из $\mathcal{H}$. Докажем, что $U = \mathbb{R}^s$. Если это не так, то U является собственным подпространством каждой матрицы из $\mathcal{H}$, в частности – матрицы Λ. Поэтому U совпадает с одним из пространств $U_j = \left\{(x_1, \ldots, x_j, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^s\right\}$ (ими исчерпываются все собственные подпространства Λ). Значит, $\boldsymbol{a}' \in U_j$ при некотором $j \leq s-1$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{a}$ лежит в собственном подпространстве матрицы M, порождённом всеми векторами её жорданова базиса, кроме $s-j$ последних векторов, соответствующих клетке Λ. Это противоречит условию на $\boldsymbol{a}$. Итак, $U = \mathbb{R}^s$. Значит, существует матрица $X \in \mathcal{H}$, для которой $X\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b}'$. Напомним, что X коммутирует с Λ. Найдя такую матрицу X для каждой жордановой клетки матрицы M, составим из них блочную матрицу C, для которой $CM = MC$ и $C\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

□

Предложение 2.3. *Все 2-аттракторы, порождённые заданной матрицей M, аффинно подобны.*

Доказательство. Пусть 2-аттрактор G порождён матрицей M и цифрами $\{\mathbf{0}, \boldsymbol{a}\}$, а 2-аттрактор F – той же матрицей и цифрами $\{\mathbf{0}, \boldsymbol{b}\}$. По определению аттрактора, $\boldsymbol{e}$ не лежит в собственном подпространстве M. Поэтому лемма 2.2 даёт матрицу C, для которой $CM = MC$ и $C\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Каждая точка F имеет вид

$$\boldsymbol{y} \;=\; \sum_j M^{-k_j}\boldsymbol{b} \;=\; \sum_j M^{-k_j}C\boldsymbol{a} \;=\; \sum_j CM^{-k_j}\boldsymbol{a} \;=\; C\sum_j M^{-k_j}\boldsymbol{a}$$

Таким образом, $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x} \in G$. Следовательно, $F = CG$. □

Замечание 2.4. *Согласно предложению 2.3, с точностью до аффинного подобия, 2-аттрактор зависит только от растягивающей матрицы M и не зависит от цифр D. Одна из двух цифр в D, как мы договорились, равна $\mathbf{0}$, а в качестве второй может выступать любая целая точка, не лежащая в собственном подпространстве M. Более того, эта точка может быть не целой (хотя это противоречит определению аттрактора), всё равно получившееся множество G будет аффинно подобно 2-аттрактору с целыми цифрами. Чтобы в этом убедиться, достаточно в доказательстве предложения 2.3 взять произвольную точку $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$, ничего не изменится. Поэтому в дальнейшем в доказательствах мы будем позволять цифре $\boldsymbol{d}_1$ быть нецелой.*

По умолчанию будем всегда брать в качестве $\boldsymbol{d}_1$ первый базисный вектор $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$.

Известно [72, предложение 2.5], что целая растягивающая матрица с простым определителем не может иметь кратных собственных значений. Поэтому каждая такая матрица подобна диагональной матрице, а значит, две матрицы с одинаковым спектром подобны. Применив предложение 2.3, получаем

Теорема 2.5. *Двухциферный аттрактор однозначно определяется, с точностью до аффинного подобия, спектром матрицы M.*

Доказательство. Пусть $M = Q^{-1}\Delta Q$, где Δ – диагональная матри-

ца. Тогда для $\boldsymbol{x} \in G$ имеем

$$\boldsymbol{x} \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} M^{-k}\boldsymbol{a}_k \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} Q\Delta^{-k}Q^{-1}\boldsymbol{a}_k \;=\; Q\sum_{k\in\mathbb{N}} \Delta^{-k}\left(Q^{-1}\boldsymbol{a}_k\right),$$

где $\boldsymbol{a}_k \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}\}$ для каждого k. Получается, что аттрактор с матрицей M и цифрами $\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}\}$ аффинно подобен аттрактору с матрицей Δ и цифрами $\{\boldsymbol{0}, Q^{-1}\boldsymbol{e}\}$, а значит, в силу предложения 2.3 – аттрактору с матрицей Δ и цифрами $\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}\}$. □

Итак, 2-аттрактор зависит только от характеристического полинома матрицы M. Верно и обратное:

Следствие 2.6. *Каждому целому растягивающему полиному со старшим коэффициентом* 1 *и свободным коэффициентом* ± 2 *соответствует единственный с точностью до аффинного подобия 2-аттрактор.*

Доказательство. Если $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \ldots + a_0$, где $a_0 = \pm 2$, является целым растягивающим полиномом, то его *сопровождающая матрица*

$$M \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

имеет полином p в качестве характеристического. Следовательно, аттрактор, порождённый матрицей M с цифрами $\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{e}\}$, соответствует полиному p. Применив теорему 2.5, получаем единственность.

□

Выведем из уже доказанных фактов теорему о классификации плоских 2-аттракторов.

Лемма 2.7. *Для* $d = 2$*, существует 6 возможных различных целых растягивающих многочленов со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом* ± 2*. Это* $x^2 \pm 2$*,* $x^2 \pm x + 2$*,* $x^2 \pm 2x + 2$*.*

Доказательство. Пусть $t = \operatorname{tr} M$. Тогда мы ищем многочлен вида $x^2 - tx \pm 2$. Пусть x_1, x_2 его корни, тогда $|x_1| > 1, |x_2| > 1, |x_1 \cdot x_2| = 2$, значит, $|x_1| < 2, |x_2| < 2$. Число t – целое, на него есть ограничения $|t| \leq |x_1| + |x_2| < 4$.

Случай 1, $\det M = 2$. У многочленов $x^2 \pm 3x + 2$ есть корень ∓ 1, поэтому $t \neq \pm 3$. Тогда остаются только варианты $t = 0, \pm 1, \pm 2$, все такие многочлены подходят.

Случай 2, $\det M = -2$. Так как $x_1 \cdot x_2 = -2$, пусть $x_1 < 0, x_2 > 0$, тогда $-2 < x_1 < -1, 2 > x_2 > 1$, значит, $-1 < t = x_1 + x_2 < 1$. Поскольку t – целое, возможен только случай $t = 0$, он подходит.

Получаем указанные пять многочленов в первом случае и один во втором, всего шесть. □

Теорема 2.8. *Для $d = 2$, существует три типа 2-аттракторов с точностью до аффинного подобия, эти типы:*

1) (Квадрат) $M = M_S = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

2) (Медведь) $M = M_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3) (Дракон) $M = M_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Доказательство. Из утверждений 2.5, 2.6 следует, что классификация сводится к анализу возможных целых растягивающих многочленов второй степени со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом ± 2. Как мы знаем из леммы 2.7, таких многочленов шесть. При этом многочленам $x^2 \pm 2$ соответствует один и тот же тип (Квадрат), как и $x^2 \pm x + 2$ (Дракон), $x^2 \pm 2x + 2$ (Медведь) (подробнее о совпадении типов см. параграф 2.10). Далее будет посчитана гладкость всех трёх 2-тайлов, она окажется различной, откуда будет следовать, что эти три типа не аффинно подобны. □

2.5 Аттракторы, порождённые арифметическими прогрессиями

В какой степени результаты предыдущих параграфов обобщаются на любое число цифр m? Если множество цифр D произвольно, то прямых обобщений быть не может уже в $\mathbb{R}^1$. Например, при $M = 3$ (в этом случае $m = 3$), аттрактор, заданный цифрами $\{0, 1, 2\}$ – отрезок, а цифрами $\{0, 1, 5\}$ – несвязное фрактальное множество [126, Example 5.2]. Поэтому аттракторы, определённые одной матрицей, но разными множествами цифр, могут не быть аффинно подобны. Причина в том, что все множества из двух цифр аффинно подобны друг другу, а из трёх цифр – нет. Однако, для специальных множеств цифр обобщения возможны. Например, если цифры составляют арифметическую прогрессию: $D = \{\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_0 + \boldsymbol{q}, \ldots, \boldsymbol{d}_0 + (m-1)\boldsymbol{q}\}$, где $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}$. Поскольку для прогрессии $D = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{q}, \ldots, (m-1)\boldsymbol{q}\}$ будет тот же аттрактор, сдвинутый на вектор $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} M^{-k}\boldsymbol{d}_0$, мы всегда будем считать, что $\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{0}$.

Следующая теорема была доказана В.Ю. Протасовым в совместной работе [138], её доказательство приведено для полноты изложения.

Теорема 2.9. *Все аттракторы, порождённые заданной матрицей M, аффинно подобны, при условии, что цифры составляют арифметическую прогрессию.*

Доказательство. Считаем, что $\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{0}$. Если матрица C, коммутирующая с M (лемма 2.2), переводит вектор $\boldsymbol{q}_1$ в $\boldsymbol{q}_2$, то она переводит прогрессию $D_1 = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{q}_1, \ldots (m-1)\boldsymbol{q}_1\}$ в прогрессию $D_2 = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{q}_2, \ldots (m-1)\boldsymbol{q}_2\}$. Далее действуем так же как при доказательстве предложения 2.3. □

Теорема 2.5 о том, что 2-аттракторы определяются спектром матрицы, не обобщается на произвольное число цифр, даже на прогрессии. Виной тому возможное наличие кратных собственных значений. В этом случае матрица M может иметь нетривиальные жордановы

клетки и, соответственно, неоднозначно определяться своим спектром. Утверждать отсутствие кратных корней у целого растягивающего полинома можно лишь в случае, когда его свободный коэффициент – простое число, см. [72]. Поэтому верна следующая ослабленная версия Теоремы 2.5 для произвольного *простого* числа m:

Следствие 2.10. *Если задан целый растягивающий полином p с простым свободным коэффициентом, то все аттракторы, порождённые матрицей с характеристическим полиномом p и цифрами, составляющими арифметическую прогрессию, аффинно подобны.*

Доказательство. Так же как при доказательстве теоремы 2.5, доказываем аффинное подобие аттракторов, порождённых матрицами M и Δ при этом пользуемся тем, что оператор Q^{-1} переводит прогрессию в прогрессию. Далее пользуемся теоремой 2.5. □

2.6 Классификация изотропных 2-аттракторов

Мы подошли к одному из главных результатов данной работы – полному списку изотропных 2-аттракторов. Список этот окажется на удивление простым. Напомним, что матрица изотропна, если она подобна ортогональной матрице, умноженной на число. Аттрактор, порождённый изотропной матрицей, также называется изотропным.

Изотропные аттракторы и тайлы занимают особое место в теории всплесков и многомерной теории приближений. С одной стороны, для большинства задач изотропное растяжение является наиболее естественным. В этом случае пространство «растягивается одинаково во все стороны». С другой стороны, изотропные матрицы наиболее просты для анализа. Именно для изотропных всплесков существуют прямые обобщения одномерных конструкций и методов на многомерные. Например, методы вычисления гладкости масштабирующей функции, методы оценивания скорости приближения всплесками и т.д. Поэтому большая часть литературы по многомерным всплескам и уточняющим алгоритмам имеет дело именно с изотропными матрицами растяжения, см. [27, 80, 126] и подробные обзоры в этих работах.

В этом параграфе мы найдём все изотропные 2-аттракторы. Оказывается, что их набор небогат: в нечётной размерности это только параллелепипеды, а в чётной добавляются ещё прямые произведения Драконов и прямые произведения Медведей. Выводы из этой классификации мы сделаем позже.

Мы будем называть *изотропным полиномом* алгебраический полином, все корни которого равны по модулю. У целого полинома со старшим коэффициентом 1 и простым свободным коэффициентом нет кратных корней [72]. Поэтому растягивающая целая матрица с простым определителем является изотропной тогда и только тогда, когда её полином изотропный.

Теорема 2.11. *Если d нечётно, то все изотропные 2-аттракторы в $\mathbb{R}^d$ – параллелепипеды.*

Доказательство. Если d нечётно, то матрица M имеет хотя бы одно действительное собственное значение, которое, в силу изотропности, равно $2^{1/d}$ или $-2^{1/d}$. Подставляя этот корень в характеристический полином $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, получаем $-(z^d + a_0) = a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_1 z$. Заметим, что $z^d + a_0$ – целое число, поэтому число $z = \pm 2^{1/d}$ является корнем целого полинома степени $\leq d-1$. Последнее возможно, только если этот полином тождественно равен нулю. Следовательно, $p(z) = z^d + a_0$. Рассмотрим случай $a_0 = -2$, случай $a_0 = 2$ полностью аналогичен. Поскольку характеристический полином обнуляет матрицу M, имеем $p(M) = M^d - 2I = 0$. Если $\{\mathbf{0}, \boldsymbol{e}\}$ – цифры, порождающие аттрактор G, то $M^d\boldsymbol{e} = 2\boldsymbol{e}$. Положим $\boldsymbol{a}_k = M^{k-1}\boldsymbol{e}\,,\ k = 1, \ldots, d$, и назовём P параллелепипед с вершиной $\mathbf{0}$, натянутый на ребра $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d$. Тогда $P = M^{-1}P \sqcup M^{-1}(P + \boldsymbol{e})$. Следовательно, характеристическая функция P удовлетворяет тому же масштабирующему уравнению: $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(M\boldsymbol{x}) + \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e})$, что и характеристическая функция G. В силу единственности с точностью до умножения на константу решения масштабирующего уравнения, получаем $\chi_P = \mu\chi_G$, где $\mu \in \mathbb{R}$ – константа. Поскольку обе функции принимают значения 0 или 1, получаем $\mu = 1$ и $\chi_P = \chi_G$. $\square$

Таким образом, в нечётных размерностях не существует изотропных 2-аттракторов, кроме параллелепипедов. В чётных ситуация иная: уже в $\mathbb{R}^2$ появляются два новых аттрактора – Дракон и Медведь. Оказывается, в любой чётной размерности будут только те же три типа.

Теорема 2.12. *Если $d = 2k$ – чётно, то в $\mathbb{R}^d$ существуют, с точностью до аффинного подобия, ровно три изотропных 2-аттрактора: параллелепипед, прямое произведение k Драконов и прямое произведение k Медведей.*

Это означает, что в подходящих координатах в $\mathbb{R}^d$ изотропный 2-аттрактор имеет вид $G = (K, \dots, K)$, где K – либо Квадрат, либо Дракон, либо Медведь; при этом i-тый компонент K занимает координаты x_{2i}, x_{2i+1}. Ключевую роль в доказательстве играет следующая

Лемма 2.13. *Каждый целый изотропный полином степени $d = 2k$ со старшим коэффициентом 1 и с простым свободным коэффициентом имеет вид $q(z^k)$, где $q(t) = t^2 + at + b$ – квадратичный целый изотропный полином.*

Доказательство. Пусть полином имеет вид $z^{2k} + a_{2k-1}z^{2k-1} + \dots + a_1 z \pm p = 0$, где p – простое, $a_1, \dots, a_{2k-1} \in \mathbb{Z}$. Поскольку он изотропный, все его корни равны по модулю $p^{1/d}$. Если у него есть вещественный корень, он равен $\pm p^{1/d}$, и, повторяя доказательство теоремы 2.11, получаем, что многочлен равен $z^{2k} \pm p$. Соответствующим квадратичным целым изотропным полиномом будет $q(t) = t^2 \pm p$, то есть в этом случае теорема доказана. Далее считаем, что все корни не вещественные и разделяются на сопряжённые пары $z_1 = \overline{z_2}, z_3 = \overline{z_4}, \dots, z_{2k-1} = \overline{z_{2k}}$. Произведения корней внутри пар $z_{2m-1}z_{2m} = |z_{2m-1}|^2 = p^{1/k}$, $m = 1, \dots, k$. Мы докажем, что $a_{2k-m} = a_m = 0$ при $m = 1, \dots, (k-1)$, отсюда будет следовать, что многочлен имеет вид $z^{2k} + a_k z^k \pm p$. После замены переменных $t = z^k$ многочлен примет вид $q(t) = t^2 + a_k t \pm p$. Он останется изотропным, так как все корни k-й степени имеют одинаковый модуль. Таким образом, теорема будет доказана.

Для доказательства равенства $a_{2k-m} = a_m = 0$ при $m = 1, \ldots, (k-1)$, убедимся в том, что $a_m = p^{(k-m)/k} a_{2k-m}$ при $m = 1, \ldots, (k-1)$. Тогда оба числа a_{2k-m}, a_m будут равны нулю, поскольку они целые, а число $p^{(k-m)/k}$ при $m = 1, \ldots, (k-1)$ иррационально.

По теореме Виета,

$$\begin{aligned} (-1)^m a_m &= \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{2k-m}} z_{i_1} \ldots z_{i_{2k-m}} \\ (-1)^m a_{2k-m} &= \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_m} z_{j_1} \ldots z_{j_m} \end{aligned} \tag{4}$$

Сопоставим биективно каждому слагаемому $s = z_{j_1} \ldots z_{j_m}$ из второй суммы слагаемое s_1 из первой суммы. Вначале возьмём в качестве s_1 слагаемое-дополнение, состоящее из тех z_i, которых нет в s. Потом для тех z_j, у которых в s нет их сопряжённой пары, заменим в s_1 их сопряжённые пары обратно на z_j. Например, если $k = 4, m = 3$, слагаемому $z_1 z_2 z_5$ будет соответствовать $z_3 z_4 z_5 z_7 z_8$. Докажем, что при таком соответствии $s_1 = s p^{(k-m)/k}$, тогда в силу формул 4 $a_m = p^{(k-m)/k} a_{2k-m}$ и всё доказано. Разница слагаемых s_1 и s только в тех парах сопряжённых корней, которые полностью входят или не входят в s (пусть таких пар будет a и b соответственно). Все произведения сопряжённых корней равны $p^{1/k}$, поэтому $\frac{s_1}{s} = (p^{1/k})^{(b-a)}$. Всего в s входит m множителей, это $2a$ полных пар и $k-a-b$ неполных. Отсюда $m = k+a-b$, $b-a = k-m$ и необходимая формула $s_1 = s p^{(k-m)/k}$ доказана. □

Доказательство теоремы 2.12. Пусть p — целый изотропный полином степени $d = 2k$. По лемме 2.13, $p(z) = q(z^k)$, где $q(t) = t^2 + at + b$ – квадратичный целый изотропный полином. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

— сопровождающая матрица полинома q. Поскольку $|\det A| = |b| = 2$, и полином q изотропный, модули его корней равны $\sqrt{2}$, т.е. матрица A растягивающая. Согласно [10], каждый двухциферный аттрактор в $\mathbb{R}^2$ является либо Квадратом, либо Драконом, либо Медведем.

Соответственно, матрица A порождает один из этих аттракторов. Рассмотрим следующую матрицу:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ A & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

заданную 2×2 блоками: каждый ноль обозначает нулевую 2×2 матрицу, I — единичная 2×2 матрица. Таким образом, M — это $d \times d$ матрица, а формула (5) задана k^2 блоками 2×2. Представим произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ составленным из k векторов размерности 2, т.е., $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k),\ x_i \in \mathbb{R}^2$. Тогда уравнение на собственный вектор $M\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ принимает вид системы: $Ax_1 = \lambda x_k$, $x_{i+1} = \lambda x_i$, $i = 1, \ldots, k-1$. Следовательно, $Ax_k = \lambda^k x_k$, откуда λ^k — собственное значение A. Значит $q(\lambda^k) = 0$, откуда $p(\lambda) = 0$. Итак, множество корней полинома p (их ровно d штук и среди них нет кратных!) совпадает с множеством собственных значений матрицы M. Следовательно, M имеет характеристический полином p. Теперь, в силу теоремы 2.5, достаточно доказать, что аттрактор, порождаемый матрицей M, есть произведение k двумерных аттракторов одного типа (Квадрат, Дракон, или Медведь). Далее останется сделать замечание, что произведение нескольких прямоугольников — параллелепипед.

Обозначим через L_i двумерное пространство, соответствующее i-тому блоку матрицы (5), $i = 1, \ldots, k$. Каждый вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ раскладывается в сумму $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^k x_i$, $x_i \in L_i$, которую будем обозначать $(x_1, \ldots, x_k)$. Через $(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i=1}^k X_i$ будем обозначать прямую сумму множеств $X_i \subset L_i$, $i = 1, \ldots, k$, которая состоит из векторов $(x_1, \ldots, x_k)$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Пусть матрица A и цифры $\{0, a\}$ порождают на плоскости аттрактор K. Докажем, что матрица M и цифры $\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}\}$, где $\boldsymbol{a} = (0, \ldots, 0, a)$ (k двумерных блоков), порождает аттрактор $G = (K, \ldots, K)$. Поскольку K — либо Квадрат, либо Дракон, либо Мед-

ведь, всё будет доказано. Имеем:

$$M^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & A^{-1} \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Следовательно, $M^{-1}G = (A^{-1}K, K, \ldots, K)$ и

$$M^{-1}(G + \boldsymbol{a}) = M^{-1}G + M^{-1}\boldsymbol{a} = (A^{-1}(K + a), K, \ldots, K).$$

Так как $A^{-1}K \sqcup A^{-1}(K+a) = K$, получаем $M^{-1}G \sqcup M^{-1}(G+\boldsymbol{a}) = G$. Мы приходим к выводу, что G — аттрактор, порождённый матрицей M и цифрами $\{\mathbf{0}, \boldsymbol{a}\}$. С любой другой цифрой вместо $\boldsymbol{a}$ получится аффинно подобный аттрактор, что завершает доказательство. □

Замечание 2.14. *Итак, в нечётной размерности есть ровно три типа изотропных 2-аттракторов. Формально мы не доказали то, что эти типы не аффинно подобны. Это будет следовать из результатов параграфа 2.7, где мы установим, что они не только не подобны, но и не C^1-диффеоморфны.*

Доказательства теорем 2.11 и 2.12 конструктивны: они не только классифицируют все изотропные 2-аттракторы, но и дают метод их построения. Если ввести произвольные базисы в двумерных пространствах $L_1, \ldots, L_k$, то получаем множество $(G_1, \ldots, G_k)$, где все G_i — произвольные Драконы, не зависящие друг от друга. Для любых Драконов $G_1, \ldots G_k$, их прямое произведение — d-мерный изотропный аттрактор. То же верно для произведения k произвольных Медведей. Заметим, что перемножаются либо k Драконов, либо k Медведей. Никакого смешанного произведения не бывает.

В силу произвольности выбора Драконов (или Медведей), множество d-мерных изотропных 2-аттракторов обладает некоторым разнообразием. Однако, оно достигается за счет выбора произвольного базиса. С точностью до аффинного подобия, есть всего три изотропных 2-аттрактора в каждой размерности. Это обстоятельство

приводит к выводу о необходимости изучения неизотропных аттракторов. До сих пор литература по их приложениям к всплескам и аппроксимационным алгоритмам достаточно скудна (можно упомянуть [19, 38, 27, 33, 34, 41]).

2.7 Топология 2-аттракторов

Даже простые топологические свойства самоподобных аттракторов весьма трудны для исследования. Множество работ [2, 10, 47, 60, 67, 72, 75] было посвящено связности аттракторов. Так, в [2, 72, 75] было доказано, что все аттракторы в размерностях $d = 2, 3, 4$, у которых цифры составляют арифметическую прогрессию, связны. Границы аттракторов и структура их соседей изучались в [3, 4, 6, 8, 42, 122].

В работе [67] было показано, что плоские 2-аттракторы — Медведь и Дракон — связны. Более того, как установлено в [12], они оба гомеоморфны кругу. Поскольку для Квадрата это очевидно, получаем, что *каждый плоский 2-аттрактор гомеоморфен кругу.* Воспользовавшись нашей классификацией изотропных 2-аттракторов (Теоремы 2.11 и 2.12) и тем простым фактом, что прямое произведение k компактов, гомеоморфных кругу, гомеоморфно $2k$-мерному шару, получаем:

Следствие 2.15. *При любом $d \geq 2$ все d-мерные изотропные 2-аттракторы гомеоморфны шару.*

Из работы [8] следует, что это утверждение может не выполняться для неизотропных 2-аттракторов даже в трёхмерном случае. Общий довольно сложный алгоритм проверки гомеоморфности аттракторов шару приведён в статье [42]. Аттракторы с произвольным числом цифр не обязательно гомеоморфны шару — пример в трёхмерном случае можно найти там же в [42] (Предложение 8.7, также Предложение 8.11 — граница является тором). Однако, для изотропного случая возникает вопрос о более сильной топологической эквивалентности. В частности, будут ли изотропные 2-аттракторы диффеоморфны или хотя бы *метрически эквивалентны*, т.е., гомеоморфны путём билипшицевого отображения? В этом

параграфе будет получен отрицательный ответ: мы покажем, что все три плоских 2-аттрактора — Квадрат, Дракон и Медведь не являются билипшицево эквивалентными, а следовательно они и не C^1-диффеоморфны. Далее из теоремы 2.12, будет следовать, что все изотропные 2-аттракторы в $\mathbb{R}^{2k}$ не билипшицево эквивалентны друг другу (в $\mathbb{R}^{2k+1}$ есть только параллелепипеды, которые, естественно, все диффеоморфны).

Определение 2.16. Два компакта $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^d$ называются метрически эквивалентными, или билипшицево эквивалентными, если они гомеоморфны с помощью билипшицевого отображения $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Билипшицевость означает, что существует константа $C > 0$, для которой $C^{-1}|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \le |f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| \le C\,|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ при любых $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^d$.

Заметим, что билипшицевость отображения влечёт его взаимную однозначность. Если множества C^1-диффеоморфны, то они билипшицево эквивалентны, но не наоборот, поскольку билипшицево отображение может быт не дифференцируемым. Хотя, согласно теореме Радемахера [112] оно дифференцируемо почти всюду. Мы установим неэквивалентность аттракторов с помощью характеристики, не меняющейся при билипшицевых отображениях. Таким инвариантом является *поверхностная размерность* $\sigma(G)$: супремум чисел $r \ge 0$, для которых $|G_\varepsilon| - |G| \le C_r\,\varepsilon^r$ при всех $\varepsilon > 0$, где C_r не зависит от ε. Заметим, что поверхностная размерность не совпадает ни с размерностью Хаусдорфа ни с бокс-размерностью. В самом деле, в отличие от последних, поверхностная размерность различает множества положительной лебеговой меры. В некотором смысле, поверхностная размерность характеризует регулярность границы множества. Она, однако, не совпадает также ни с хаусдорфовой размерностью границы ни с её бокс-размерностью. См. [111] о свойствах и вычислении поверхностной размерности для аттракторов. Последующая лемма 2.17 и теорема 2.18 доказаны В.Ю. Протасовым в совместной работе [138], они приведены для удобства читателя.

Лемма 2.17. *Показатель $\sigma(G)$ сохраняется при билипшицевых отображениях $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Ясно, что $|G_\varepsilon| - |G| = |G_\varepsilon \setminus G|$. Кроме того, $f(G)_\varepsilon \setminus f(G) \subset f(G_{C\varepsilon} \setminus G)$. Отображение f увеличивает меру Лебега множества не более, чем в C^d раз. В самом деле, мера Лебега равна мере Хаусдорфа [100], а для меры Хаусдорфа данное свойство очевидно. Поэтому $|f(G_{C\varepsilon} \setminus G)| \leq C^d |G_{C\varepsilon} \setminus G|$. Если $\sigma(G) > r$, то $|G_{C\varepsilon} \setminus G| \geq C_r |C\varepsilon|^r$. Таким образом, $|f(G)_\varepsilon \setminus f(G)| \leq C_r |C\varepsilon|^r \leq C_r C^{r+d} \varepsilon^r$. Так как это верно для всех $\varepsilon > 0$, мы получаем $\sigma(f(G)) > r$. Итак, неравенство $\sigma(G) > r$ влечет $\sigma(f(G)) > r$. Следовательно, $\sigma(f(G)) \geq \sigma(G)$. Таким образом, билипшицево отображение не уменьшает поверхностной размерности. Применив это утверждение к обратному отображению, получаем, что $\sigma(f(G)) = f(G)$. □

Лемма 2.17 позволяет доказывать неэквивалентность множеств простым сравнением их поверхностных размерностей. В работе [111] было доказано, что поверхностная размерность изотропных аттракторов равна половине показателя Гёльдера их характеристических функций в пространстве L_2:

$$\alpha(G) = \alpha(\varphi) = \sup_{\alpha \geq 0} \left\{ \left\| \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{x}) \right\|_1 \leq C |\boldsymbol{h}|^\alpha, \ \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d \right\}, \tag{7}$$

где $\varphi = \chi_G$. Показатель Гёльдера параллелепипеда, как и любого многогранника, равен $\frac{1}{2}$. Показатели Гёльдера Дракона и Медведя были вычислены в [135], используя метод из [34]. Этот метод будет далее рассмотрен нами в более общем случае, при рассмотрении B-сплайнов (3.7). Отсюда мы приходим к следующему результату:

Теорема 2.18. *При чётных d все три типа изотропных 2-аттракторов гомеоморфны, но не билипшицево эквивалентны.*

Поскольку при нечётных d все изотропные 2-аттракторы являются параллелепипедами, они, естественно, диффеоморфны. Поэтому теорема 2.18 применяется только для чётных размерностей. Для её доказательства нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, установленное в [111]. Для произвольного подпространства

$V \subset \mathbb{R}^d$, назовём *L_2-показателем Гёльдера функции φ вдоль V* величину

$$\alpha_V(\varphi) \;=\; \sup_{\alpha \geq 0} \left\{ \left\| \varphi(\cdot + \boldsymbol{h}) \;-\; \varphi(\cdot) \right\|_1 \;\leq\; C\,|\boldsymbol{h}|^{\,\alpha}\,,\; \boldsymbol{h} \in V \right\}$$

(сдвиги осуществляются только вдоль подпространства V).

Лемма А [34]. *Если $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ — произвольная функция, а пространство $\mathbb{R}^d$ представлено в виде прямой суммы подпространств $V_1, \ldots, V_k$, то $\alpha(\varphi) = \min\limits_{j=1,\ldots,k} \alpha_{V_j}(\varphi)$.*

Доказательство теоремы 2.18. При $d = 2$ показатели Гёльдера двумерных 2-аттракторов вычислены в [135]. Для Дракона этот показатель равен 0.2382... для Медведя равен 0.3446... (для Квадрата, естественно, 0.5). Поскольку эти показатели равны поверхностным размерностям, лемма 2.17 означает, что эти множества не билипшицево эквивалентны. При $d = 2k$ каждый 2-аттрактор аффинно подобен либо прямому произведению k Драконов, либо k Медведей, либо является параллелепипедом. В последнем случае $\alpha(G) = 0.5$. В случае Драконов, обозначим через $V_1, \ldots, V_k$ двумерные плоскости, содержащие данных Драконов. Тогда $\alpha_{V_j}(G)$ равно гладкости Дракона для любого j. В силу леммы А, $\alpha_{V_j}(G)$ равно гладкости Дракона 0.2382.... Аналогично, гладкость прямого произведения k Медведей равна гладкости одного Медведя, т.е., 0.3446.... Теперь вновь ссылаемся на лемму 2.17 и заключаем неэквивалентность данных множеств. □

Что касается неизотропных 2-аттракторов, то мы лишь можем сформулировать следующее предположение:

Гипотеза 2.19. *Если 2-аттракторы не аффинно подобны, они не билипшицево эквивалентны.*

2.8 Выпуклые оболочки 2-аттракторов

Аттракторы-многогранники изучались в литературе [42, 61, 127, 136]. Кроме теоретического интереса, они привлекательны для при-

ложений, поскольку порождают всплески и уточняющие алгоритмы с простой структурой. При некоторых существенных ограничениях, многогранные тайлы произвольной размерности были охарактеризованы в [127]. В [136] было показано, что каждый аттрактор-многоугольник в $\mathbb{R}^2$ (не обязательно выпуклый) является параллелограммом, и была выдвинута гипотеза о том, что этот факт верен в любой размерности: все аттракторы-многогранники являются параллелепипедами. Сейчас мы покажем, что, по крайней мере для 2-аттракторов, эта гипотеза верна. Фактически, мы установим более сильный факт и найдём все 2-аттракторы, выпуклая оболочка которых является многогранником. Мы докажем, что выпуклая оболочка любого 2-аттрактора является бесконечным зонотопом, который, в свою очередь, является многогранником только в двух случаях: для параллелепипеда и для произведения Драконов.

Напомним, что *зонотопом* в $\mathbb{R}^d$ называется сумма по Минковскому конечного числа отрезков. Каждый зонотоп выпуклый и является проекцией N-мерного куба на пространство $\mathbb{R}^d$, где N — число отрезков. В частности, зонотоп имеет центр симметрии. *Зоноид* — предел последовательности зонотопов в метрике Хаусдорфа. Нам понадобится обобщение понятия зонотопа на бесконечное множество отрезков.

Определение 2.20. *Бесконечным зонотопом* в $\mathbb{R}^d$ называется сумма по Минковскому счётной последовательности отрезков с конечной суммой длин. Бесконечный зонотоп невырожден, если он не лежит в подпространстве меньшей размерности.

Каждый бесконечный зонотоп является зоноидом, но не наоборот. Невырожденный бесконечный зонотоп является центрально-симметричным выпуклым телом.

Предложение 2.21. *Выпуклая оболочка 2-аттрактора, порождённого матрицей M и цифрами $\{\mathbf{0}, \boldsymbol{a}\}$ является невырожденным бесконечным зонотопом $\bar{G} = \sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\bar{\boldsymbol{a}}$, где $\bar{\boldsymbol{a}}$ — отрезок $[\mathbf{0}, \boldsymbol{a}]$.*

Доказательство. Поскольку $\rho(M^{-1}) < 1$, сумма длин отрезков $M^{-k}\bar{\boldsymbol{a}}$ конечна, следовательно, $\bar{G}$ — невырожденный бесконечный

зонотоп. Ясно, что $G \subset \bar{G}$, так как $\{\mathbf{0}, \boldsymbol{a}\} \subset \bar{\boldsymbol{a}}$. Установим обратное включение. Каждая точка $\boldsymbol{x} \in \bar{G}$ разлагается в сумму $\sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\boldsymbol{x}_k$, где каждая точка $\boldsymbol{x}_k$ принадлежит отрезку $M^{-k}\bar{\boldsymbol{a}}$. Если хотя бы для одного j точка $\boldsymbol{x}_j$ не совпадает с концом отрезка $M^{-j}\bar{\boldsymbol{a}}$, то она является полусуммой некоторых точек $\boldsymbol{x}'_j, \boldsymbol{x}''_j \in M^{-j}\bar{\boldsymbol{a}}$. Следовательно, $\boldsymbol{x}$ является полусуммой точек $\boldsymbol{x}'_j + \sum_{k\neq j}^{\infty} M^{-k}\boldsymbol{x}_k$ и $\boldsymbol{x}''_j + \sum_{k\neq j}^{\infty} M^{-k}\boldsymbol{x}_k$. Поэтому все крайние точки множества $\bar{G}$ находятся среди точек суммы $\sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\{\mathbf{0}, \boldsymbol{a}\}$, т.е., среди точек множества G. По теореме Крейна-Мильмана, каждое выпуклое компактное множество есть замыкание выпуклой оболочки своих крайних точек. Тогда $\bar{G}$, как замыкание выпуклой оболочки крайних точек компакта G, лежит в G. □

В качестве первого следствия, получим следующий любопытный факт о Драконах. Он наверняка известен, но мы не смогли найти ссылки, поэтому включаем его доказательство.

Предложение 2.22. *Выпуклая оболочка Дракона является восьмиугольником.*

Доказательство. Матрица Дракона M является поворотом на $\frac{\pi}{4}$ с умножением на $\sqrt{2}$, поэтому все отрезки $M^{-k}\bar{\boldsymbol{e}}$ расположены на четырёх прямых — координатных осях и биссектрисах координатных углов. Все отрезки на одной прямой складываются в один отрезок. Отсюда следует, что сумма $\sum_{k=1}^{\infty} M^{-k}\bar{\boldsymbol{e}}$ есть сумма четырёх отрезков, т.е., восьмиугольник. □

Оказывается, что среди всех 2-аттракторов, не обязательно изотропных, только параллелепипед и Дракон, либо прямые произведения Драконов, имеют простые выпуклые оболочки. Прямое произведение k Драконов (один из трёх возможных изотропных 2-аттракторов в $\mathbb{R}^{2k}$ – теорема 2.12) является многогранником с 8^k вершинами. Все остальные 2-аттракторы имеют выпуклые оболочки, не являющиеся многогранниками. Доказательство этой теоремы получено В.Ю. Протасовым в совместной работе [138], для полноты изложения оно приведено ниже.

Теорема 2.23. *Среди всех 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$ есть только два типа с выпуклой оболочкой, являющейся многогранником. Это параллелепипед (2^d вершин) и прямое произведение $\frac{d}{2}$ Драконов ($2^{\frac{3d}{2}}$ вершин).*

У любого 2-аттрактора, не являющегося параллелепипедом или произведением Драконов, выпуклая оболочка является бесконечным зонотопом и имеет бесконечно много крайних точек.

В доказательстве мы используем следующую техническую лемму.

Лемма 2.24. *Если среди отрезков, порождающих бесконечный зонотоп в $\mathbb{R}^d$, есть бесконечно много непараллельных, то зонотоп не является многогранником.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение в $\mathbb{R}^2$. Сложив заранее все параллельные отрезки, будем предполагать, что все отрезки в последовательности $\{\bar{\boldsymbol{a}}_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеют разные направления. Фиксируем произвольный индекс j и рассмотрим последовательность зонотопов $\bar{G}_s = \sum_{k=1}^{s} \bar{\boldsymbol{a}}_k$ при $s = j, j+1, \ldots$. Каждый из них является $2s$-угольником, у которого одна из сторон параллельна и равна отрезку $\bar{\boldsymbol{a}}_j$. Поскольку $\bar{G}_s$ сходится в метрике Хаусдорфа к бесконечному зонотопу $\bar{G}$, предельный зонотоп имеет на границе отрезок параллельный отрезку $\bar{\boldsymbol{a}}_j$ и не меньший $|\bar{\boldsymbol{a}}_j|$ по длине. Следовательно, $\bar{G}$ имеет на границе отрезки, параллельные всем отрезкам $\bar{\boldsymbol{a}}_j$, $j \in \mathbb{N}$. Значит, $\bar{G}$ не является многоугольником, что завершает доказательство в $\mathbb{R}^2$. Для доказательства в $\mathbb{R}^d$ достаточно спроецировать все векторы на подходящую двумерную плоскость так, чтобы в проекции было по-прежнему бесконечно много непараллельных векторов. По доказанному выше, проекция бесконечного зонотопа $\bar{G}$ на эту плоскость не будет многоугольником, поэтому $\bar{G}$ не будет многогранником.

□

Доказательство теоремы 2.23. Сначала покажем, что выпуклая оболочка Медведя — не многоугольник. В самом деле, матрица Медведя в подходящих координатах определяет поворот на угол

$\operatorname{arctg}(\sqrt{7})$ с растяжением в $\sqrt{2}$ раз. Поскольку угол поворота иррациональный, среди отрезков $M^{-k}\bar{\boldsymbol{e}}$, $k \in \mathbb{N}$, нет параллельных. Остаётся сослаться на лемму 2.24. Таким образом, в $\mathbb{R}^2$ теорема доказана. Рассмотрим произвольное $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Если аттрактор G изотропный, то это — либо параллелепипед, либо произведение Драконов, либо произведение Медведей. Первые два случая оговорены в условии теоремы, в последнем случае аттрактор не является многогранником, поскольку выпуклая оболочка Медведя — не многоугольник. Остаётся рассмотреть случай, когда аттрактор G неизотропный. Обозначим через V линейное подпространство в $\mathbb{R}^d$, содержащее собственные векторы всех наибольших по модулю собственных значений матрицы M^{-1} (напомним, что среди собственных значений нет кратных). Если какое-то собственное значение не является действительным, берем действительную и мнимую части соответствующего собственного вектора. Вектор $\boldsymbol{e}$ не принадлежит V, поскольку он не принадлежит никакому инвариантному подпространству матрицы M. Поэтому последовательность $\{M^{-k}\boldsymbol{e}\}_{k=1}^{\infty}$ приближается к подпространству V при $k \to \infty$, не достигая его, поскольку M^{-1} невырождена. Поэтому, последовательность отрезков $\{M^{-k}\bar{\boldsymbol{e}}\}_{k=1}^{\infty}$ содержит бесконечно много непараллельных. Применив лемму 2.24, завершаем доказательство. □

Итак, согласно теореме 2.23, только параллелепипеды и произведения Драконов имеют простую выпуклую оболочку.

Замечание 2.25. *Интересно, что Медведь является более регулярным аттрактором, чем Дракон: гладкость в L_2 Медведя равна* 0.3446... *против* 0.2382... *у Дракона. Тем не менее выпуклая оболочка Медведя — бесконечный зонотоп, в то время как у Дракона — восьмиугольник.*

В главе 4 мы даём классификацию аттракторов, которые являются многогранными множествами, то есть объединением конечного числа выпуклых многогранников. Сейчас мы в состоянии сделать это для 2-аттракторов.

Следствие 2.26. *Если 2-аттрактор является многогранным множеством, то это — параллелепипед.*

Доказательство. Согласно теореме 2.23, многогранным множеством среди 2-аттракторов может быть либо параллелепипед, либо произведение Драконов. Дракон, однако, не является многогранным множеством, поскольку его показатель Гёльдера в L_2 меньше 0.5. □

При доказательстве теоремы 2.23 мы установили, что выпуклая оболочка неизотропного 2-аттрактора не может быть многогранником. Отсюда сразу же получаем

Следствие 2.27. *Если 2-аттрактор является параллелепипедом, то он изотропный.*

2.9 Тайлы, базисы Хаара и КМА

Напомним (параграф 1.2), что мера Лебега аттрактора всегда является натуральным числом. Если она равна 1, то аттрактор называется тайлом. Целые сдвиги тайла покрывают $\mathbb{R}^d$ в один слой с пересечениями нулевой меры, а его характеристическая функция φ имеет ортонормированные целые сдвиги.

В параграфе 1.3 мы обсуждали, что для приложений (построения систем Хаара, КМА, алгоритмов SubD) важно уметь строить именно тайлы, что не всегда возможно для данной матрицы в силу результата А.Потиопы. Зададимся тем же вопросом про 2-аттракторы. В случае двух цифр, тип 2-аттрактора не зависит ни от цифр, а зависит только от характеристического полинома M. Поэтому, естественно сформулировать проблему следующим образом:

Проблема. *Всегда ли существует тайл, аффинно подобный данному 2-аттрактору ?*

Поскольку 2-аттрактор с точностью до аффинного подобия определяется растягивающим полиномом, проблема может быть сформулирована так: *Каждый ли растягивающий целый полином, у которого* $a_d = 1$, $|a_0| = 2$ *порождает тайл ?*

Мы предполагаем, что ответ утвердительный и, более того, достигается для сопровождающей матрицы (3) данного полинома и цифр $D = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{e}\}$, где $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1$ — первый базисный вектор.

Гипотеза 2.28. *Для произвольного растягивающего целого полинома со старшим коэффициентом* 1 *и свободным коэффициентом* ± 2*, его сопровождающая матрица* M *и цифры* $D = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{e}\}$ *порождают тайл.*

Отметим сразу два случая, в которых эта гипотеза верна. Первый — случай малых размерностей.

Предложение 2.29. *Гипотеза 2.28 верна в размерностях* $d = 2, 3$.

Доказательство. В размерности $d = 2$ существуют, с точностью до эквивалентности, три полинома, порождающие 2-аттрактор (параграф 2.3), в размерности $d = 3$ таких полиномов семь (параграф 2.12). Применив к каждому программу `checktile` [95], реализующую критерий из [60], завершаем доказательство. □

Второй случай более важен. Гипотеза 2.28 верна для изотропных 2-аттракторов в любой размерности. Эта теорема была доказана В.Ю. Протасовым в [138].

Теорема 2.30. *Гипотеза 2.28 верна для изотропных полиномов.*

Доказательство. В нечётной размерности каждый 2-аттрактор является параллелепипедом, соответствующим полиному $p(z) = z^d \pm 2$ (теорема 2.11). Тогда непосредственно проверяется, что характеристическая функция куба $[0, 1]^d$ удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(M\boldsymbol{x}) + \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e})$, где M — сопровождающая матрица полинома $z^d - 2$. Следовательно, для данного полинома 2-аттрактор является тайлом $[0, 1]^d$. Для полинома $z^d - 2$ то же масштабирующее уравнение имеет решение — характеристическую функцию куба $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, 1\right]^{d-1}$. Данный куб, естественно, также является тайлом.

В чётной размерности $d = 2k$, согласно лемме 2.13, имеем $p(z) = q(z^k)$, где $q(t) = t^2 + at \pm 2$ — квадратичный изотропный

полином. После перестановки координат $x_i \to x_{\sigma(i)}$ по формуле $\sigma(i) = 2(k-i+1);\ \sigma(i+k) = 2(k-i)+1,\ i = 1, \ldots, k$, сопровождающая матрица полинома p переходит в матрицу M, определённую формулой (5). Поэтому, если M порождает тайл, то и сопровождающая матрица также порождает тайл. Согласно теореме 2.12, матрица M порождает 2-аттрактор, являющийся прямым произведением равных двумерных 2-аттракторов — Драконов, Медведей и Квадратов. Так как каждый из этих двумерных аттракторов является тайлом, прямое произведение также является тайлом. □

Замечание 2.31. *Теорема 2.30 гарантирует существование 2-тайла, аффинно подобного произвольному изотропному 2-аттрактору. В примере Потиопа [88] матрица M также изотропная, и она не порождает тайла, т.е., для неё не существует цифр D таких, что $G(M, D)$ — тайл. Однако, согласно теореме 2.30, для сопровождающей матрицы того же самого характеристического полинома $p(z) = z^4 + z^2 + 2$, такое множество цифр существует — это $D = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{e}\}$. Мы получим 2-тайл $G(M, D)$. Согласно теореме 2.12 этот тайл — произведение двух Драконов. Таким образом, в примере Потиопа достаточно просто перейти к другому целочисленному базису в $\mathbb{R}^d$, чтобы получить 2-тайл.*

Замечание 2.32. *Несмотря на то, что изотропный 2-тайл является прямым произведением одинаковых двумерных тайлов, порождённая им система Хаара не является прямым произведением двумерных функций Хаара. Так, если φ — прямое произведение, скажем, k Драконов: $\varphi = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k$, где каждая функция φ_i — характеристическая функция Дракона в $\mathbb{R}^2$, то функция Хаара в $\mathbb{R}^d$ — это $\varphi(M\boldsymbol{x}) - \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e})$, она не совпадает с прямым произведением k двумерных функций Хаара.*

Заметим также, что классификация изотропных 2-аттракторов, полученная в параграфе 2.6, позволяет находить гладкость порождённых ими функций Хаара. При нечётных d есть только параллелепипеды, их показатель Гёльдера в $L_2(\mathbb{R}^d)$ равен 0.5. При чётных d добавляются произведения Драконов и произведения Медведей. Их гладкость равна показателям Гёльдера

Драконов и Медведей в $L_2(\mathbb{R}^2)$ *— соответственно* 0.2382... *и* 0.3446... *[135].*

Следствие 2.33. *В любой размерности d существует система Хаара с носителем-параллелепипедом, порождённая единственной порождающей всплеск-функцией.*

Доказательство. Как было показано в доказательстве теоремы 2.30, многочленам $z^d \pm 2$ соответствует именно тайл, поэтому он может порождать систему Хаара (построение было описано в параграфе 1.3). □

2.10 Может ли один аттрактор соответствовать разным матрицам?

Сколько существует различных, с точностью до аффинного подобия, 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$? В изотропном случае существует либо один, либо три типа, в зависимости от чётности d. Для неизотропных таких типов гораздо больше, и их число растёт с ростом размерности. В следующем параграфе мы получим оценки на это число. Для этого, однако, необходимо ответить на один важный вопрос: *находятся ли типы 2-аттракторов во взаимно-однозначном соответствии со спектрами растягивающих матриц с определителем* ± 2 *?* В параграфе 2.4 мы установили это соответствие в одну сторону: в силу теоремы 2.5, каждый аттрактор однозначно определяется спектром своей матрицы M, т.е., целым растягивающим полиномом со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом ± 2. Значит, мы можем оценить число таких полиномов степени d. Каждый такой полином порождает единственный, с точностью до аффинного подобия, аттрактор. Но верно ли обратное, что каждому аттрактору соответствует только один полином, т.е., только одна (с точностью до аффинного подобия) матрица M? Не получится ли так, что мы найдём много подходящих полиномов, но они все будут определять один и тот же тип аттрактора, скажем, параллелепипед? Решение этого вопроса оказывается нетривиальным. Мы покажем (это легко), что матрицы M и $-M$ порождают один и тот же 2-аттрактор.

И что (это сложнее) разные и не противоположные друг другу матрицы порождают разные (т.е. не аффинно подобные) аттракторы.

Нам понадобится следующий известный [72, Предложение 2.2] факт.

Предложение 2.34. *Каждый 2-аттрактор центрально-симметричен.*

Доказательство. Пусть $D = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{e}\}$. Обозначим $\boldsymbol{c} = \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{\infty} M^{-j}\boldsymbol{e}$. Тогда $G = \boldsymbol{c} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \pm\frac{1}{2}M^{-j}\boldsymbol{e}$. Множество $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \pm\frac{1}{2}M^{-j}\boldsymbol{e}$ симметрично относительно нуля, поэтому G симметрично относительно точки $\boldsymbol{c}$. □

Определение 2.35. Алгебраические полиномы $p = \sum\limits_{k=0}^{d} p_k t^k$ и $q = \sum\limits_{k=0}^{d} q_k t^k$ называются *противоположными*, если $q_k = (-1)^{d-k} p_k\,,\ k = 0, \ldots, d$.

Старшие коэффициенты противоположных полиномов равны. Из теоремы Виета следует, что корни полинома q — это корни полинома p, взятые с обратным знаком. Таким образом, корни p и q противоположны, что оправдывает терминологию. Матрицы M и $-M$ имеют противоположные характеристические полиномы.

Предложение 2.36. *Противоположные полиномы порождают один и тот же 2-аттрактор.*

Доказательство. Характеристическая функция φ аттрактора G удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(M\boldsymbol{x}) + \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e})$. Так как $G = 2\boldsymbol{c} - G$, то $\varphi(2\boldsymbol{c} - \boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x})$. Тогда $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(2M\boldsymbol{c} - M\boldsymbol{x}) + \varphi(2M\boldsymbol{c} - \boldsymbol{e} - M\boldsymbol{x})$. Следовательно, множество G является также аттрактором с матрицей $-M$ и цифрами $-2M\boldsymbol{c}\,,\ \boldsymbol{e} - 2M\boldsymbol{c}$. □

Оказывается, что верно и обратное: если полиномы порождают один и тот же 2-аттрактор, то они либо равны, либо противоположны. Таким образом, 2-аттрактор определяет матрицу M с точностью до знака и до подобия.

Теорема 2.37. *Если матрицы M_1 и M_2 (с некоторыми множествами цифр D_1, D_2) порождают один и тот же, с точностью до аффинного подобия, 2-аттрактор, то либо $M_1 = M_2$, либо $M_1 = -M_2$.*

Доказательство основано на следующей лемме. Для данной матрицы M и заданного отрезка $\bar{\boldsymbol{a}} = [-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] \subset \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{a} \neq 0$, рассмотрим следующее множество отрезков $\mathcal{T}(M, \bar{\boldsymbol{a}}) = \left\{M^{-k}\bar{\boldsymbol{a}},\, k \in \mathbb{N}\right\}$, где совпадающие отрезки считаются с кратностью.

Лемма 2.38. *(о восстановлении линейной системы). Даны растягивающие $d\times d$ матрицы M_1, M_2, у которых нет кратных собственных значений. Тогда, если для некоторых отрезков $\bar{\boldsymbol{a}}_1$ и $\bar{\boldsymbol{a}}_2$ ($\bar{\boldsymbol{a}}_i$ не лежит в собственном подпространстве M_i, $i = 1, 2$) выполнено $\mathcal{T}(M_1, \bar{\boldsymbol{a}}_1) = \mathcal{T}(M_2, \bar{\boldsymbol{a}}_2)$, то либо $M_1 = M_2$, либо $M_1 = -M_2$.*

Доказательство леммы получено В.Ю. Протасовым в совместной работе с автором диссертации [138]. Лемма 2.38 фактически устанавливает возможность идентификации линейной динамической системы по её траектории, *даже если история неизвестна*, т.е., не известны номера точек. Если номера известны, то матрица однозначно определяется любыми $d + 1$ идущими подряд точками траектории. Задача идентификации с неизвестной историей значительно более сложная.

Теперь мы можем доказать теорему 2.37. Для этого мы воспользуемся известным результатом теории масштабирующих функций и представим преобразование Фурье $\widehat{\varphi}$ характеристической функции аттрактора G в виде бесконечного произведения тригонометрических полиномов. С помощью этого представления мы найдём множество нулей функции $\widehat{\varphi}$. Оно является объединением счётного числа гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$. Чтобы не иметь дело с гиперплоскостями,

перейдём к их полярам. Поляра берётся относительно единичной евклидовой сферы с центром в 0, поляра гиперплоскости — одна точка. Со ссылкой на лемму 2.38, мы покажем, что получившееся множество точек однозначно определяет матрицу M. Из этого следует, что аттрактор G однозначно (с точностью до $\pm$) определяет M.

Доказательство теоремы 2.37. Пусть 2-аттрактор G порождается матрицей M и цифрами $\{\mathbf{0}, \boldsymbol{e}\}$. Тогда его характеристическая функция удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(M\boldsymbol{x}) + \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e})$ (см. уравнение (2)). Решение масштабирующего уравнения выражается формулой

$$\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \quad = \quad \widehat{\varphi}(0) \prod_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{m}\big([M^*]^{-k}\boldsymbol{\xi}\big)\,, \tag{8}$$

где тригонометрический полином $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\Big(1 + e^{-2\pi i(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\xi})}\Big)$ называется *маской* уравнения (см. например, [132]). Если мы покажем, что множество нулей функции $\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$ однозначно, с точностью до знака, определяет матрицу M, всё будет доказано. В самом деле, функция $\widehat{\varphi}$ однозначно определяется множеством G, следовательно, и множество нулей этой функции также определяется множеством G. Значит и матрица M, с точностью до знака, будет определяться множеством G. Так как $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}_1$ (первая компонента вектора $\boldsymbol{\xi}$), множество решений уравнения $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ — это объединение счётного числа параллельных гиперплоскостей $\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{1}{2} + n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поляры этих гиперплоскостей — счётное множество точек $\mathcal{R} = \left\{\frac{2}{1+2n}\,\boldsymbol{e}_1\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ — первый базисный вектор. Множество нулей функции $\boldsymbol{m}\big([M^*]^{-k}\boldsymbol{\xi}\big)$ — это образ множества нулей функции $\boldsymbol{m}\big(\boldsymbol{\xi}\big)$ под действием оператора $[M^*]^k$. Значит, поляра множества нулей функции $\boldsymbol{m}\big([M^*]^{-k}\boldsymbol{\xi}\big)$ — это $M^{-k}\mathcal{R}$. Множество нулей произведения (8) является объединением множеств нулей функций $\boldsymbol{m}\big([M^*]^{-k}\boldsymbol{\xi}\big)$ по всем $k \in \mathbb{N}$ (все нули считаются с кратностями). Следовательно, множество нулей функции $\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})$ однозначно определяется множеством $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M^{-k}\mathcal{R}$ (все точки считаются

с учётом кратностей). Каждое множество $M^{-k}\mathcal{R}$ лежит на отрезке $\left[-M^{-k}\boldsymbol{a}\,,\ M^{-k}\boldsymbol{a}\right]$, где $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1$ — точка множества $\mathcal{R}$, наиболее отстоящая от нуля, а значит $M^{-k}\boldsymbol{a}$ — точка множества $M^{-k}\mathcal{R}$, наиболее отстоящая от нуля. Положим $\bar{\boldsymbol{a}} = \left[-\boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{a}\right]$. Мы видим, что каждое множество $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M^{-k}\mathcal{R}$ однозначно определяется множеством отрезков $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M^{-k}\bar{\boldsymbol{a}} = \mathcal{T}(M,\bar{\boldsymbol{a}})$. Итак, множество нулей функции $\widehat{\varphi}$ однозначно определяет множество отрезков $\mathcal{T}(M,\bar{\boldsymbol{a}})$. Если мы установим, что это множество отрезков однозначно, с точностью до знака, определяет матрицу M, всё будет доказано. Если предположить обратное, что существуют целые матрицы M_1, M_2 с определителем ± 2, и отрезки $\bar{\boldsymbol{a}}_1$ и $\bar{\boldsymbol{a}}_2$, для которых $\mathcal{T}(M_1,\bar{\boldsymbol{a}}_1) = \mathcal{T}(M_2,\bar{\boldsymbol{a}}_2)$, то согласно лемме 2.38, либо $M_1 = \pm M_2$, что и требовалось, либо одна из матриц имеет кратное собственное значение. Последнее невозможно в силу [72, предложение 2.5]. □

Следствие 2.39. *Два полинома порождают аффинно подобные 2-аттракторы тогда и только тогда, когда они либо равны, либо противоположны.*

В нечётных размерностях полином со свободным коэффициентом ± 2 не может быть противоположен себе, а каждый полином со свободным коэффициентом 2 противоположен ровно одному полиному со свободным коэффициентом -2 и наоборот. Таким образом, в нечётных размерностях количество различных (не аффинно подобных) 2-аттракторов равно количеству растягивающих полиномов со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом 2.

В чётных размерностях противоположные полиномы имеют одинаковый свободный коэффициент. Противоположны себе будут в точности те полиномы, у которых нулевые коэффициенты перед нечётными степенями. Они зависят от x^2 и при замене $x_1 = x^2$ свойство растягиваемости не поменяется. Поэтому полиномов, противоположных себе, столько же, сколько растягивающих полиномов вдвое меньшей степени со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом ± 2. Итак, количество различных (не аффинно по-

добных) 2-аттракторов в $\mathbb{R}^{2d}$ равно полусумме количества растягивающих полиномов степени $2d$ со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом ± 2 и такого же количества для степени d.

2.11 Количество 2-аттракторов в $\mathbb{R}^d$

В каждой размерности d существует конечное число различных (не аффинно подобных) 2-аттракторов [58]. В $\mathbb{R}^2$ есть ровно три 2-аттрактора (все — изотропные), в $\mathbb{R}^3$ их ровно 7 (изотропный только один — параллелепипед), см. также параграф 2.12 про трёхмерный случай. Численные результаты, представленные в Таблице 1, дают нам оценку снизу на число аттракторов в размерностях $d \leq 8$ (по-видимому, эти оценки точны, хотя мы не можем этого доказать). На Рисунке 8 — график двоичного логарифма этой оценки на число аттракторов размерности d, видно, что он близок к линейному. Следовательно, нижняя оценка при этих d близка к 2^d. Для больших размерностей d мы знаем ответ лишь приблизительно, получив достаточно далекие друг от друга оценки сверху и снизу.

d	Число полиномов	Число 2-аттракторов
2	6	3
3	14	7
4	36	21
5	58	29
6	128	71
7	190	95
8	362	199

Таблица 1: Оценка снизу на число 2-аттракторов

В силу следствия 2.39 (параграф 2.10), вопрос о числе 2-аттракторов сводится к следующей задаче о целых полиномах:

Проблема. *Сколько существует растягивающих целых полиномов степени d со старшим коэффициентом* 1 *и свободным коэффициентом* ± 2 *?*

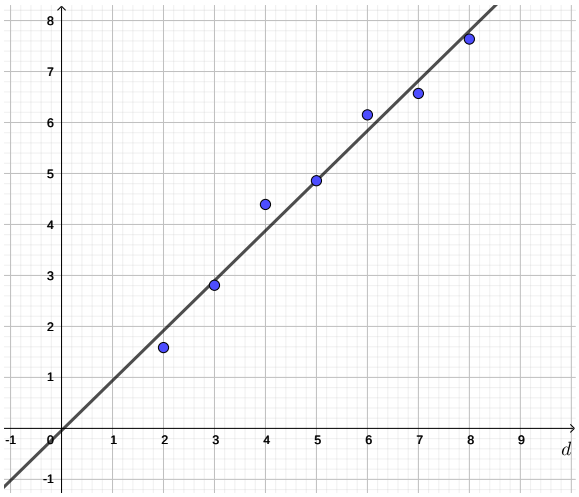


Рис. 8: График двоичного логарифма числа 2-аттракторов в размерности d

В [67] было показано, что число таких полиномов растёт по крайней мере линейно по d. С другой стороны для каждого d это число конечно. Мы получим нижнюю оценку $\frac{1}{16}\,d^2 + O(d)$, и верхнюю $2^{\,d+\varepsilon}$. Перед доказательством отметим, что в литературе изучалось асимптотическое распределение количества целых растягивающих многочленов (при большом свободном коэффициенте) [1, 5, 77]. Многочлены с похожими условиями возникали также в работе [57]. В [123] получено упрощение критерия «растягиваемости» Шура-Кона для целочисленных многочленов.

Мы начнём с доказательства нижней оценки $\frac{1}{16}\,d^2 + O(d)$. Назовём *плохим* вектор (n_1, n_2, n_3) из натуральных чисел, если он пропорционален вектору $(3x + s, 3y + s, 3z + s)$, где $s \in \{1, 2\}$, и $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Соответствующее разбиение числа $d = n_1 + n_2 + n_3$ на сумму натуральных слагаемых будем также называть *плохим*, а все другие разбиения называем *хорошими*. Мы отождествляем разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых. Через $b_+(d)$ обозначим количество хороших разбиений числа d.

Теорема 2.40. *Любой многочлен вида* $P(z) = (1 + z^m)(1 + z^q)(1 + z^k) + 1$ *является растягивающим целым полиномом со старшим коэффициентом* 1 *и свободным коэффициентом* 2, *если* (m, q, k) *яв-*

ляется хорошим разбиением $d = m + q + k$. Если d не делится на 3, то их количество $b_+(d)$ равно $\frac{d(d-1)}{12} + \omega_d$, где $\omega_d \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Если d делится на 3, то оно удовлетворяет неравенству

$$\frac{d^2}{16} - \frac{43d}{36} - \frac{5}{6} \quad \leq \quad b_+(d) \quad \leq \quad \frac{7d^2}{108} + \frac{5d}{12} + \frac{2}{3}.$$

Заметим, что главные члены верхней и нижней оценок на $b_+(d)$ близки: $\frac{1}{16} = 0.0625, \frac{7}{108} \approx 0.0648$. Доказательство теоремы 2.40 отложим до параграфа 2.13.

Для вывода оценки сверху $2^{d+\varepsilon}$ мы воспользуемся результатом А.Дубицкаса и С.Конягина о числе полиномов, мера Малера которых не превосходит числа T.

Мерой Малера алгебраического полинома $p(t) = a_d t^d + \cdots + a_1 t + a_0$ называется число $\mu(p) = |a_d| \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\lambda_i|\}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ — корни полинома p с учётом кратности. Следующую теорему из [52] мы приводим в несколько упрощенной формулировке. Обозначим $\theta = 1.32471...$ — корень полинома $x^3 - x - 1$.

Теорема А. [52]. Если $T \geq \theta$, то количество целых полиномов со старшим коэффициентом 1, мера Малера которых не больше T, не превосходит $T^{d\left(1+\frac{16\ln\ln d}{\ln d}\right)}$.

Теперь мы готовы сформулировать главную теорему этого параграфа.

Теорема 2.41. *Количество $N(d)$ не аффинно подобных 2-аттракторов размерности d удовлетворяет неравенствам* $\frac{d^2}{16} - \frac{43d}{36} - \frac{5}{6} \leq N(d) \leq 2^{d\left(1+\frac{16\ln\ln d}{\ln d}\right)}$

Доказательство. Оценка снизу следует из теоремы 2.40, где оценивается количество не противоположных друг другу полиномов серии $P(z) = (1 + z^m)(1 + z^q)(1 + z^k) + 1$. Согласно теореме 2.37, все они дают не аффинно подобные 2-аттракторы.

Для оценки сверху заметим, что у растягивающего полинома с коэффициентами $a_d = 1, a_0 = \pm 2$ мера Малера равна $\prod_{i=1}^{d} |\lambda_i| =$

$|a_0| = 2$. Поэтому $N(d)$ не превосходит числа целых полиномов, у которых $\mu(p) \leq 2$. Применяя Теорему А для $T = 2$, завершаем доказательство. □

Из-за большой разницы между верхней и нижней оценками в теореме 2.41 встаёт вопрос об асимптотическом поведении величины $N(d)$ при $d \to \infty$. На первый взгляд, $N(d)$ должно быть значительно меньше количества полиномов с мерой Малера $\mu(p) \leq 2$. Во-первых, потому что для $N(d)$ учитываются только полиномы со старшим коэффициентом 1, во-вторых, потому что запрещены корни меньше 1. Однако, численные результаты, приведённые в Таблице 1, говорят скорее об обратном: для $d \leq 8$ отношение $N(d)/2^d$ приближается к 1 с ростом d. Отметим также, что нижние оценки на количество полиномов с заданной мерой Малера часто получаются сильно меньше верхних, поскольку примеры подобных полиномов «плохо размножаются», см. [51].

2.12 2-аттракторы в $\mathbb{R}^3$

В трёхмерном пространстве существует 7 типов аффинно-неизоморфных 2-аттракторов. Они были впервые построены в работе [10]. У этих 2-аттракторов характеристические многочлены различны и не противоположны друг другу, поэтому, по следствию 2.39, они не аффинно подобны. В [8] изучались их топологические свойства — гомеоморфность шару, структура соседей и так далее. В частности, была установлена комбинаторная структура покрытий пространства $\mathbb{R}^3$ целочисленными сдвигами данных аттракторов. В этом параграфе мы вычислим показатели гладкости по Гёльдеру трёхмерных 2-аттракторов и увидим, что они различны. Это объясняет не только их аффинную неэквивалентность, но и различные аппроксимационные свойства соответствующих систем всплесков Хаара. Как мы увидим, даже построение картинок существенно зависит от гладкости аттракторов.

Напомним, что по полиному $p(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ можно

построить сопровождающую матрицу

$$M \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

с характеристическим полиномом p.

Для каждого из возможных семи многочленов, указанных в Таблице 2, мы строим аттрактор по сопровождающей матрице и цифрам $(0,0,0)^T$ и $(1,0,0)^T$. Показателем гладкости по Гёльдеру $\alpha(G)$ множества G называется показатель гладкости по Гёльдеру в L_2 его характеристической функции χ_G (см. определение (7)).

Показатель Гёльдера можно найти, используя метод из [34]. Сначала мы строим вспомогательные матрицы T_0, T_1, их размерности зависят от аттрактора (от 4 до 23 в наших семи случаях). Далее мы вычисляем L_2-спектральный радиус [134] этих матриц на специальном подпространстве и по нему находим показатель гладкости по Гёльдеру.

Многочлен	L_2-спектральный радиус	Показатель Гёльдера в L_2
z^3+2z^2+2z+2	0.97082	0.06822
z^3+z^2+z+2	0.93238	0.23148
z^3+2	0.8909	0.5
z^3-z^2-z+2	0.94278	0.23282
z^3-z+2	0.95197	0.1173
z^3-2z+2	0.98548	0.02563
z^3+z^2+2	0.97542	0.04713

Таблица 2: Гладкость трёхмерных 2-аттракторов

Двумерные иллюстрации с 2-аттракторами (с Драконом, Квадратом и Медведем) получены с помощью программы [78]. Для построения трёхмерных картинок мы использовали две программы, Chaoscope [49] и IFStile [96]. Алгоритмы построения у них различны. Chaoscope использует вероятностный подход и время работы ма-

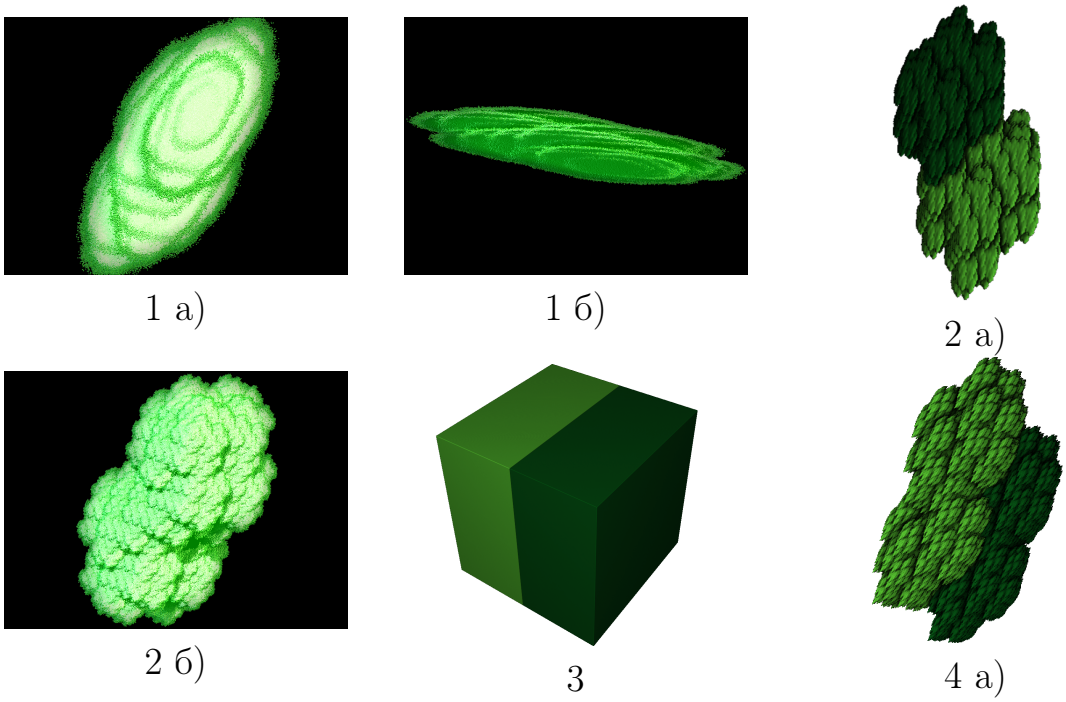
ло зависит от типа аттрактора. Другая программа, IFStile, в которой получаются более детальные рисунки, по-видимому, использует итерационный алгоритм, скорость сходимости которого существенно зависит как раз от значений гладкости по Гёльдеру (замечание 2.42 ниже). Так, построение типа 3 (параллелепипеда) с максимальной гладкостью $\alpha = 0.5$ занимает меньше минуты, типы 2 ($\alpha \approx 0.2315$) и 4 ($\alpha \approx 0.2328$) при тех же параметрах строятся несколько часов, а типу 5 ($\alpha \approx 0.1173$) требуется уже несколько дней даже для худшего качества изображения. На этих картинках также показано разбиение аттрактора на две аффинно подобные ему части (тёмно-зелёную и светло-зелёную). Получившиеся изображения — на Рисунках 9, 10, некоторые типы показаны в нескольких ракурсах.

Замечание 2.42. *Качество рисунков данных 7 типов 2-аттракторов находится в прямой зависимости от их гладкости. Попробуем объяснить этот феномен на примере итерационного алгоритма, который, видимо, в той или иной форме, лежит в основе большинства программ построения аттракторов. Для линейного оператора T, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d)$ по формуле*

$$[Tf](\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{\boldsymbol{k}\in D} f(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})\,,$$

характеристическая функция $\varphi = \chi_G$ является неподвижной точкой. Если аттрактор G является тайлом, то для начальной функции $f_0 = \chi_{[0,1]^d}$ (характеристической функции единичного куба), итерационный алгоритм $f_{k+1} = Tf_k, k \geq 0$, сходится к φ в L_2. При этом $\|f_k - \varphi\|_{L_2} = O(2^{-k\alpha})$, где α — показатель Гёльдера φ (этот факт известен для любой масштабирующей функции [30, 27, 80]). Следовательно $k \approx \frac{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}}{\alpha}$. Скажем, для приближения φ с точностью 0.03 нужно порядка $k = \frac{5}{\alpha}$ итераций. Для аттрактора типа 3 нужно 10 итераций (меньше минуты компьютерного времени). Для типов 2 и 4 нужно уже 22 итерации, что требует уже несколько часов, поскольку сложность каждой итерации увеличивается. На тип 5 нужно уже 45 итераций, что исключает возможность его построения за разумное время без существенной

потери качества. На типы 6 и 7 нужно 195 (!) и 106 итераций соответственно.



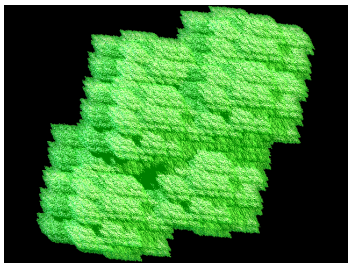
1 а) 1 б) 2 а)

2 б) 3 4 а)

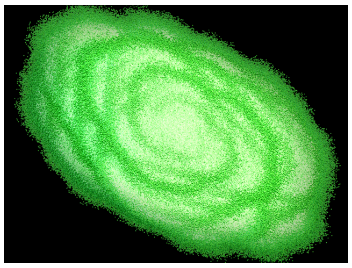
Рис. 9: 7 типов трёхмерных 2-аттракторов, часть 1

2.13 Серии целых растягивающих многочленов и 2-аттракторов

Как мы знаем (следствие 2.39), 2-аттрактор полностью определяется соответствующим целым растягивающим полиномом $p(z)$ со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом ± 2. Для построения аттрактора нужно взять целую матрицу M с характеристическим полиномом p (например, его сопровождающую матрицу (3) или любую другую) и произвольную допустимую пару цифр D. Полученный 2-аттрактор будет, с точностью до аффинного подобия,



4 б)



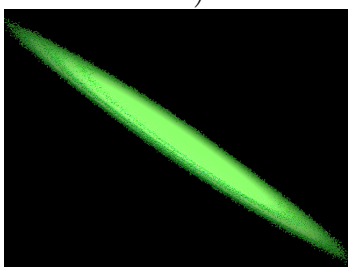
5 а)



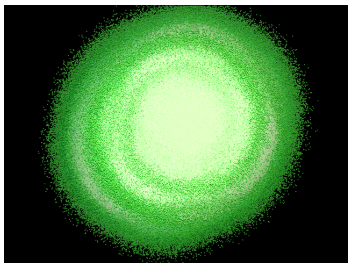
5 б)



6 а)



6 б)



7

Рис. 10: 7 типов трёхмерных 2-аттракторов, часть 2

однозначно определён, не зависимо от M и D. Поэтому задача построения 2-аттракторов равносильна задаче нахождения растягивающих полиномов. В этом параграфе мы построим несколько серий таких полиномов. Количество полиномов степени d в каждой серии растёт линейно по d, и только серия 2.46 содержит квадратическое по d число полиномов (именно она обеспечивает оценку снизу на число 2-аттракторов в теореме 2.41. Сначала мы выпишем все серии, а затем приведём соответствующие доказательства. Серии 2.43 и 2.44 встречались в литературе, серии 2.45 – 2.49, насколько нам известно, новые.

Серии целых растягивающих многочленов со старшим коэффициентом 1 и свободным коэффициентом ± 2

Серия 2.43. а) Многочлены вида $\frac{z^m+z^q-2}{z^{(m,q)}-1}$, при условии $m > q \geq 1$, где (m, q) обозначает наибольший общий делитель чисел m и q.

б) $\frac{z^m+z^q+2}{z^{(m,q)}+1}$ при условиях $m_1 = \frac{m}{(m,q)}$, $m_2 = \frac{q}{(m,q)}$ — нечётны, $m > q \geq 1$.

Серия 2.44. В этих сериях всего три слагаемых.

а) $z^m - z^q + 2$, при $m > q \geq 1$ и нечётном $q_1 = \frac{q}{(m,q)}$.

б) Противоположная ей серия $z^q - z^m - 2$, при $q > m \geq 1$ и нечётном $q_1 = \frac{q}{(m,q)}$.

в) $z^m + z^q + 2$, при $m > q \geq 1$, при условии, что числа $m_1 = \frac{m}{(m,q)}$, $q_1 = \frac{q}{(m,q)}$ разной чётности.

Серия 2.45. а) $(1 + z^m)(1 + z^q) + 1$ при любых натуральных m, q.

б) $(z^m - 1)(z^q - 1) + 1$ при любых натуральных m, q.

Напомним, что вектор из натуральных чисел (n_1, n_2, n_3) называется плохим, если он пропорционален некоторому вектору $(3x + s, 3y + s, 3z + s)$, где $s \in \{1, 2\}$, и $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Остальные векторы называются хорошими.

Серия 2.46. а) $(1 + z^m)(1 + z^q)(1 + z^k) + 1$ при любом хорошем векторе (m, q, k).

б) $(1 - z^m)(1 - z^q)(1 + z^k) + 1$, если неверно, что остатки при делении на 3 у чисел m и q равны, а $k \equiv -m \pmod 3$.

Серия 2.47. $(1 + z^m + z^{2m})(1 + z^q + z^{2q}) + 1$, если $m \not\equiv q \pmod 4$.

Серия 2.48. $(1 + z^m)(1 \pm z^r + z^{2r}) + 1$, где m, r — произвольные натуральные числа.

Серия 2.49. $(1 + z^a)(1 + z^b)(1 + z^{(a+b)})(1 + z^{2(a+b)})(1 + z^{4(a+b)})(1 + z^{8(a+b))}) \dots (1 + z^{2^k(a+b)}) + 1$, где a, b, k — натуральные.

Замечание 2.50. *Несложно убедиться в том, что все многочлены серий 2.43 – 2.49 различны (кроме случая $k = q$ в 2.46 б), который сводится к 2.45 б) и отдельных частных случаев некоторых серий, которые также содержатся в серии 2.43). У всех многочленов серий 2.44 а) б) в), 2.45 а) б), 2.46 а), 2.47, 2.48, 2.49 разные значения в точке $z = 1$: 2, -2, 4, 5, 1, 9, 10, 3 или 7, $2^{k+3} + 1$ (где $k \leq 1$) соответственно.*

Теперь приведём доказательства того, что данные многочлены являются растягивающими, т.е., все их корни находятся за пределами замкнутого единичного круга комплексной плоскости.

Доказательство серии 2.43. а) Пусть $m = (m,q)m_1$, $q = (m,q)q_1$. Многочлен можно переписать в виде суммы двух прогрессий

$$\frac{z^m-1}{z^{(m,q)}-1}+\frac{z^q-1}{z^{(m,q)}-1} = 1+z^{(m,q)}+\left(z^{(m,q)}\right)^2+\ldots+\left(z^{(m,q)}\right)^{m_1-1}+ \\ +1+z^{(m,q)}+\ldots+\left(z^{(m,q)}\right)^{q_1-1}.$$

Отсюда следует, что у этого многочлена свободный член 2, а старший коэффициент 1. Если знаменатель $z^{(m,q)}-1=0$, то значение многочлена равно m_1+q_1, и такие z не являются корнями многочлена. Далее считаем, что $z^{(m,q)} \neq 1$. Тогда корни многочлена удовлетворяют условию $z^m+z^q-2=0$, поэтому они не могут быть по модулю меньше 1. Если корень равен по модулю 1, то по неравенству треугольника $z^m = z^q = 1$. Обозначим через γ аргумент z, выбранный в диапазоне $[0, 2\pi)$. Поскольку $z^m = 1$, то $\gamma = \frac{2\pi m_2}{m}$, $m_2 = 0, \ldots, m-1$. Кроме того, $\gamma = \frac{2\pi q_2}{q}$, $q_2 = 0, \ldots, q-1$. Значит, $\frac{2\pi m_2}{m} = \frac{2\pi q_2}{q}$, откуда $m_2 q = q_2 m$, тогда $m_2 q_1 = q_2 m_1$. Так как $(m_1, q_1) = 1$, то m_2 делится на m_1. Но тогда у $z^{(m,q)}$ полярный угол будет $\frac{2\pi m_2 (m,q)}{m_1 (m,q)}$ и это число кратно 2π, значит, знаменатель $z^{(m,q)}-1$ равен нулю, что противоречит предположению. Таким образом, этот многочлен не может иметь корней $|z| \leq 1$.

б) Аналогичная серия может быть получена изменением знаков. В этом случае многочлен имеет вид

$$\frac{z^m+1}{z^{(m,q)}+1}+\frac{z^q+1}{z^{(m,q)}+1} = 1-z^{(m,q)}+\left(z^{(m,q)}\right)^2+\ldots+\left(z^{(m,q)}\right)^{m_1-1}+ \\ +1-z^{(m,q)}+\ldots+\left(z^{(m,q)}\right)^{q_1-1}.$$

Опять можно считать $z^{(m,q)}+1 \neq 0$, иначе z не будет являться корнем многочлена. Точки внутри единичного круга снова не подходят,

а на границе должны выполняться условия $z^m = -1$, $z^q = -1$. Тогда аргумент числа z, равный $\gamma \in [0, 2\pi)$ удовлетворяет равенствам $\gamma = \frac{\pi}{m} + \frac{2\pi m_2}{m} = \frac{\pi}{q} + \frac{2\pi q_2}{q}$. После домножения на $\frac{mq}{\pi(m,q)}$ получаем $q_1 + 2m_2q_1 = m_1 + 2q_2m_1$. Поскольку $(q_1, m_1) = 1$, $(1 + 2m_2)$ делится на m_1. Найдём полярный угол у $z^{(m,q)}$. Это $\frac{\pi(m,q)}{m} + \frac{2\pi m_2(m,q)}{m} = \pi\frac{1+2m_2}{m_1}$. Эта точка соответствует числу -1, поскольку $\frac{1+2m_2}{m_1}$ — нечётное целое число. Снова получаем, что знаменатель занулился, что противоречит предположению. □

Доказательство серии 2.44. Во всех трёх случаях корни не могут лежать внутри единичного круга, поскольку тогда $|z^m \pm z^q| < 2$.

Если $|z| = 1$, то в случаях а) и б) должно выполняться $z^m = -1$, $z^q = 1$, в случае в) выполняется $z^m = -1$, $z^q = -1$.

В случаях а) и б) получаем $\frac{\pi}{m} + \frac{2\pi m_2}{m} = \frac{2\pi q_2}{q}$, где $m_2 = 0, \ldots, m-1$, $q_2 = 0, \ldots, q-1$. После домножения на $\frac{mq}{\pi(m,q)}$ будет $q_1(1 + 2m_2) = 2q_2m_1$. Поскольку и q_1, и $1 + 2m_2$ нечётны, это невозможно.

В случае в) $\frac{\pi}{m} + \frac{2\pi m_2}{m} = \frac{\pi}{q} + \frac{2\pi q_2}{q}$, тогда $q_1 + 2m_2q_1 = m_1 + 2m_1q_2$. Значит, $q_1 - m_1 = 2(m_1q_2 - m_2q_1)$, что невозможно, если q_1, m_1 разной чётности. □

Доказательство серии 2.45. а) Докажем от противного. Предположим, что у нашего многочлена $P(z)$ есть корень $|z| \leq 1$.

Пусть $\overline{B}(1, 1)$ — замкнутый круг на комплексной плоскости с центром 1 и радиусом 1. Ясно, что $|z^m| \leq 1$ и $|z^q| \leq 1$, поэтому обе точки $z^m + 1$ и $z^q + 1$ лежат в круге $\overline{B}(1, 1)$. Заметим, что $z^m + 1 \neq 0$, $z^q + 1 \neq 0$, иначе $P(z) = 1 \neq 0$. У каждого ненулевого комплексного числа, лежащего в круге $\overline{B}(1, 1)$, аргумент по модулю строго меньше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому у произведения двух любых ненулевых чисел из этого круга аргумент меньше по модулю π. Значит, произведение чисел $z^m + 1$ и $z^q + 1$ не может иметь аргумент π и быть равным -1, противоречие.

б) Доказательство пункта б) аналогично. □

Доказательство серии 2.46. а) Предположим, что у нашего многочлена $P(z)$ есть корень $|z| \leq 1$. Обозначим точки $z_1 = z^m + 1$,

$z_2 = z^q + 1$, $z_3 = z^k + 1$, они лежат в круге $\overline{B}(1,1)$. Пусть их аргументы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соответственно. Заметим, что $z_i \neq 0, i = 1,2,3$, иначе $P(z) = 1 \neq 0$. У каждого ненулевого комплексного числа, лежащего в круге $\overline{B}(1,1)$, аргумент по модулю строго меньше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому $|\alpha_i| < \frac{\pi}{2}, i = 1,2,3$. Поскольку $z_1 z_2 z_3 = -1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pm\pi$. Из этих двух условий следует, что числа α_i одного знака. Можно считать, что они положительны (иначе заменим z на сопряжённый корень). Таким образом, числа α_i являются углами остроугольного треугольника. Известно, что для остроугольного треугольника выполнено неравенство $\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)\cos(\alpha_3) \leq \frac{1}{8}$, а равенство достигается только на равностороннем треугольнике. Для удобства читателей приведём соответствующее рассуждение. Функция $f(x) = -\ln(\cos(x))$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ является строго выпуклой, поскольку $f''(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$. Нам нужно максимизировать функцию $\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)\cos(\alpha_3)$, то есть минимизировать функцию $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\ln(\cos(\alpha_1)) - \ln(\cos(\alpha_2)) - \ln(\cos(\alpha_3))$, которая будет являться коэрцитивной на компакте $[0, \frac{\pi}{2}]^3$ (выпуклой с возможными значениями $+\infty$). У такой функции не более одного минимума, который на пересечении с гиперплоскостью $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ будет достигаться при равенстве аргументов.

Таким образом, $|\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)\cos(\alpha_3)| \leq \frac{1}{8}$. Так как $z_i \in \overline{B}(1,1)$, $|z_i| \leq 2\cos(\alpha_i)$. Поскольку $|z_1 z_2 z_3| = 1$, отсюда следует, что $|\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)\cos(\alpha_3)| \geq \frac{1}{8}$. Получаем единственный возможный случай, когда треугольник равносторонний и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Тогда z^m+1, z^q+1, z^k+1 имеют одинаковые аргументы $\frac{\pi}{3}$, значит, z^m, z^q, z^k имеют одинаковые аргументы $\frac{2\pi}{3}$. Обозначим аргумент числа z через $\gamma \in [0, 2\pi)$, тогда $\gamma = \frac{2\pi}{3m} + \frac{2\pi m_2}{m} = \frac{2\pi}{3q} + \frac{2\pi q_2}{q}$, $m_2 = 1, \ldots, m-1$, $q_2 = 1, \ldots, q-1$. Домножим на $\frac{3mq}{2\pi}$, тогда $q + 3m_2 q = m + 3q_2 m$. Значит, у q и m должны быть одинаковые остатки при делении на 3. Такой же остаток должен быть у k. Если эти остатки не равны 0, то мы уже получили плохой вектор (q, m, k). Если все числа (q, m, k) делятся на 3, поделим их на максимальную общую степень 3. У получившихся чисел также должен быть одинаковый ненулевой остаток при делении на 3, то есть и в этом случае (q, m, k) образуют плохой

вектор. Значит, для хороших векторов многочлен является растягивающим.

б) Доказательство сохраняется, с точностью до замены определений на $z_1 = 1 - z^m$, $z_2 = 1 - z^q$, до момента, когда мы получаем, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{3}$ (снова, не теряя общности, считаем углы положительными). Но теперь аргументы z^m, z^q получаются $\frac{4\pi}{3}$, у z^k он снова $\frac{2\pi}{3}$. Обозначим аргумент числа z через $\gamma \in [0, 2\pi)$, тогда $\gamma = \frac{4\pi}{3m} + \frac{2\pi m_2}{m} = \frac{2\pi}{3k} + \frac{2\pi k_2}{k}$, $m_2 = 1, \ldots, m-1$, $k_2 = 1, \ldots, k-1$. Домножим на $\frac{3mk}{2\pi}$, тогда $2k + 3m_2k = m + 3q_2m$. Значит, $m \equiv -k \pmod 3$. Аналогично $q \equiv -k \pmod 3$. Если эти условия не выполняются, мы можем быть уверены, что многочлен растягивающий. □

Доказательство серии 2.47. Обозначим наш многочлен $P(z) = (1 + z^m + z^{2m})(1 + z^q + z^{2q}) + 1$. Докажем, что если $(1 + z^m + z^{2m})(1 + z^q + z^{2q}) = -c$, где c — вещественное положительное число и $|z| \leq 1$, то $c < 1$. Этого достаточно, так как тогда при $|z| \leq 1$ у многочлена $P(z)$ не будет корней. Мы применим к $P(z)$ принцип открытости: аналитическая функция, отличная от константы, переводит открытое множество комплексной плоскости в открытое множество. Поэтому, максимум действительной части функции $P(z)$ на единичном круге достигается на его границе. Следовательно, нам достаточно доказать утверждение для случая $|z| = 1$, то есть $z = e^{i\alpha}$.

Исследуем свойства $p(z) = 1 + z + z^2$ для $|z| = 1$. Выделим на комплексной плоскости «белую зону» — точки единичной окружности с углами из $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, её дополнение назовём «серой зоной» (см. Рисунке 11). Заметим, что при сложении векторов z^2 и 1 получается ромб с диагональю, параллельной z. При этом, если точка z в белой зоне, то $p(z) = \lambda z$ для $\lambda \geq 0$, если z в серой, то $p(z) = \lambda z$ для $\lambda < 0$. В обоих случаях получаем, что $p(z)$ будет лежать в белой зоне. Кроме того, справедливо равенство $|p(z)| = |1 + z + z^2| = |1 + 2\cos\alpha|$.

Мы рассматриваем вопрос, при каких положительных вещественных c возможно $p(u)p(w) = -c$, где $u = z^m$, $w = z^q$, $|u| = |w| = |z| = 1$. Если u лежит в серой зоне, то аргумент $p(u)$ лежит в $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Аргумент $p(w)$ лежит в $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, так как $p(w)$ в белой зоне. При

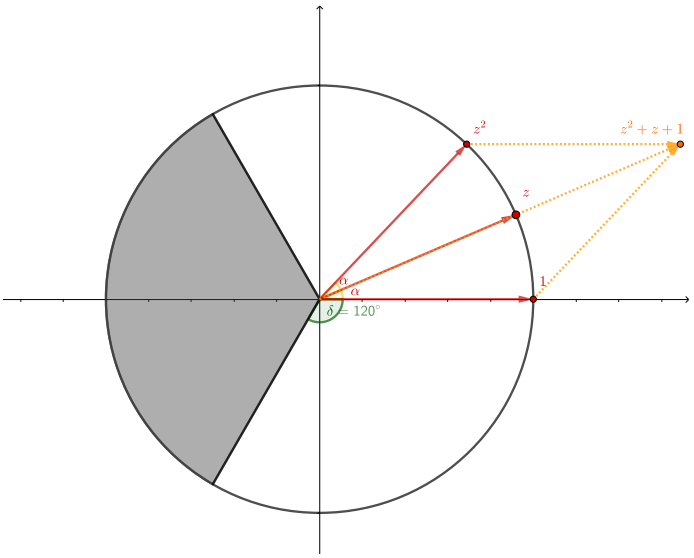


Рис. 11: Сумма вида $1 + z + z^2$

таких условиях сумма аргументов $p(u)$ и $p(w)$ не может быть равна π (-π), а значит, равенство $p(u)p(w) = -c$ невозможно. Тогда и u, и w должны лежать в белой зоне. Пусть у u аргумент β. Значит,

$$|p(u)p(w)| = (1 + 2\cos(\beta))(1 + 2\cos(\pi - \beta)) = 1 - 4\cos^2\beta$$

При β с $\cos\beta \neq 0$ эта величина строго меньше 1 и всё доказано. Это может нарушаться только при $u = \pm i$ или $w = \pm i$. Пусть $u = i$. Тогда $p(u) = 1 + i - 1 = i$, и чтобы $p(u)$, $p(w)$ в произведении давали число с аргументом π, $p(w) = i$. Тогда $w = i$, то есть выполняется $z^m = i$, $z^q = i$.

Докажем, что если $m \not\equiv q \pmod 4$, то такое невозможно. Обозначим через γ аргумент z, выбранный в диапазоне $[0, 2\pi)$. Поскольку $z^m = i$, $\gamma = \frac{\pi}{2m} + \frac{2\pi m_1}{m}$, где $m_1 = 0, \ldots, m-1$. Поскольку $z^q = i$, верна и другая формула $\gamma = \frac{\pi}{2q} + \frac{2\pi q_1}{q}$, где $q_1 = 0, \ldots, q-1$. Значит, $\frac{1}{2m} + \frac{2m_1}{m} = \frac{1}{2q} + \frac{2q_1}{q}$, откуда после домножения на $2mq$ получаем $q - m = 4(q_1 m - m_1 q)$, что невозможно при нашем условии.

Аналогично разбирается случай, когда $u = -i$, тогда верно $w = -i$, и $q - m$ должно снова делиться на 4. □

Доказательство серии 2.48. Докажем такое утверждение:

Полином $P(z) = (1+z^m)q(z^r)+1$, где $q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + 1$ — целый полином, является растягивающим, если

$$\min_{t\in\mathbb{R}}(\cos nt + a_{n-1}\cos(n-1)t + \ldots + a_1\cos t + 1) > -\frac{1}{2}.$$

По принципу открытости аналитического отображения, аналогично предыдущей серии, будем доказывать, что если $z = e^{i\alpha}$, $(1+z^m)q(z) = -c$, где c — вещественное положительное число, то $c < 1$. Заметим, что $1+z^m$ лежит в правой полуплоскости (если $1+z^m = 0$, то $c = 0$ не положительно). Так как произведение $1+z^m$ и $q(z^r)$ имеет аргумент π, то $q(z^r)$ имеет отрицательную вещественную часть. Пусть $q(z^r)$ имеет аргумент γ. Тогда $(1+z^m)$ имеет аргумент $\pi-\gamma$, и $|1+z^m| = |2\cos(\pi-\gamma)|$. Тогда

$$|(1+z^m)q(z^r)| = 2|\cos(\pi-\alpha)q(z^r)| = 2|\cos(\alpha)q(z^r)| = 2|\operatorname{Re}(q(z^r))| =$$
$$= -2\operatorname{Re}(q(z^r)) = 2(\cos nrs + a_{n-1}\cos(n-1)rs + \ldots + a_1\cos rs + 1) < 2\frac{1}{2} = 1$$

Значит, $c < 1$, что завершает доказательство утверждения.

В нашем случае $q(z) = z^2 \pm z + 1$, $\min\limits_{t\in\mathbb{R}}(\cos 2t \pm \cos t + 1) = \min\limits_{x\in[-1,1]} 2x^2 \pm x = -\frac{1}{8}$. □

Доказательство серии 2.49. Применяем принцип открытости аналитического отображения, как в предыдущих двух сериях. Будет достаточно доказать, что если при $|z| = 1$ верно $P(z) - 1 = -c$, где c — вещественное положительное число, то $c < 1$. Мы докажем, что равенство $P(z) - 1 = -c$ не выполняется ни для какого вещественного $c > 0$. Предположим противное. Пусть s — аргумент числа z, тогда аргументы $1+z^a$, $1+z^b$, $1+z^{(a+b)}$, $1+z^{2(a+b)}$, …, $1+z^{2^k(a+b)}$ с точностью до прибавления π, будут $\frac{as}{2}$, $\frac{bs}{2}$, $\frac{(a+b)s}{2}$, $(a+b)s$, …, $2^{k-1}(a+b)s$ (см. Рисунок 12).

Их сумма с точностью до прибавления 2π равна π, поэтому для некоторого $t \in \mathbb{Z}$

$$\frac{as}{2} + \frac{bs}{2} + \frac{(a+b)s}{2} + (a+b)s + \ldots + 2^{k-1}(a+b)s = \pi t.$$

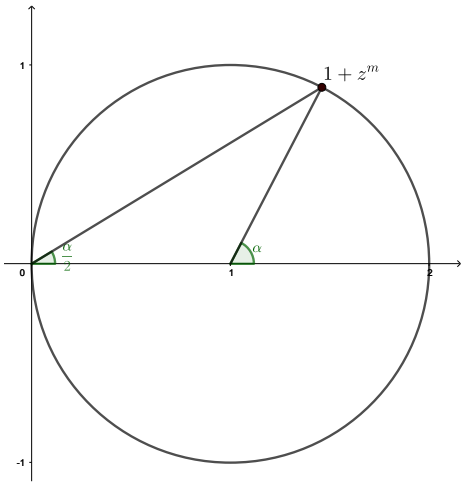


Рис. 12: Аргумент числа вида $1 + z^m$

Значит, $\pi t = (a + b)s(1 + 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1}) = (a + b)s2^k$. Тогда в последней скобке аргумент числа $z^{2^k(a+b)}$ будет с точностью до 2π равен πt. То есть, либо $1 + z^{2^k(a+b)} = 0$ (и тогда $P(z) - 1 = 0$, $c = 0$, противоречие), либо $1 + z^{2^k(a+b)} = 2$. Значит, теперь мы можем рассматривать равенство с меньшим числом скобок:

$$(1+z^a)(1+z^b)(1+z^{(a+b)})(1+z^{2(a+b)})(1+z^{4(a+b)})\ldots(1+z^{2^{k-1}(a+b)}) = -\frac{c}{2}.$$

Повторяем рассуждение, постепенно уменьшая число скобок. Так дойдём до многочлена $(1 + z^a)(1 + z^b)$, любое значение которого, как показано в доказательстве серии 2.45, всегда лежит в правой полуплоскости и не может быть отрицательным действительным числом. □

Теперь мы можем дать обещанное доказательство теоремы 2.40 (параграф 2.11). Через $b_+(d)$ обозначим количество хороших разбиений числа d, через $b_-(d)$ — количество плохих разбиений (определения см. параграф 2.11), а через $b(d)$ — количество всех разбиений числа d в сумму натуральных слагаемых. Таким образом, $b(d) = b_-(d) + b_+(d)$. Мы используем следующую известную оценку:

Лемма 2.51. *Для любого $d \in \mathbb{N}$ имеем:*

$$\frac{d(d-1)-r(r-1)}{12} - \frac{1}{2} \quad \leq \quad b(d) \quad \leq \quad \frac{d(d-1)-r(r-1)}{12} + \frac{1}{2},$$

где r — остаток от деления d на 3.

Поскольку слагаемое $r(r-1)$ на множестве остатков от деления на 3 принимает только значения 0 и 2, получаем:

Следствие 2.52. *Для любого $d \in \mathbb{N}$ имеем: $b(d) = \frac{d(d-1)}{12} + \omega_d$, где $\omega_d \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right]$.*

Доказательство теоремы 2.40. Сумма координат плохого вектора делится на 3, поэтому при $d \not\equiv 0 \pmod 3$ плохих разбиений нет, значит $b_+(d) = b(d)$, и для этой величины мы применяем следствие 2.52. Если же $d \equiv 0 \pmod 3$, то $d = 3^\ell d'$, $d' \not\equiv 0 \pmod 3$. Если $d = n_1 + n_2 + n_3$ — плохое разбиение, то существует $j \leq \ell - 1$, при котором $(n_1, n_2, n_3) = 3^j(3x + s, 3y + s, 3z + s)$, где $s \in \{1, 2\}$ и $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $x+y+z = 3^{-j-1}d - s$. Итак, каждое плохое разбиение числа d имеет вид $d = 3^j(3x+s)+3^j(3y+s)+3^j(3z+s)$, где $j = 0, \ldots, \ell-1$, $s \in \{1, 2\}$ и $x + y + z$ — произвольное разбиение числа $3^{-j-1}d - s$. Следовательно, если $b \equiv 0 \pmod 3$, то

$$b_+(d) = b(d) - \sum_{j=0}^{\ell-1} \left(b\left(3^{-j-1}d - 1\right) + b\left(3^{-j-1}d - 2\right)\right) \qquad (9)$$

Обозначим $a_j = 3^{-j-1}d$. Все числа a_j, кроме последнего $a_{\ell-1}$ делятся на 3. Поэтому j-тое слагаемое в сумме (9) при $j = 0, \ldots, \ell - 1$ равно по лемме 2.51

$$\frac{(a_j-1)(a_j-2)-2\cdot 1}{12}+\frac{(a_j-2)(a_j-3)}{12}+v_j = \frac{(a_j-1)(a_j-3)}{6}+v_j,$$

где $v_j \in [-1, 1]$. В последнем слагаемом $a_{\ell-1}$ не делится на 3, поэтому числитель в первой дроби может увеличиться на 2. Таким образом,

$$b_+(d) = \frac{d(d-1)}{12} - v - \sum_{j=0}^{\ell-1} \left(\frac{(a_j-1)(a_j-3)}{6} + v_j\right),$$

где $v \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right]$, и $v_j \in \left[-1, 1\right]$. Для оценки полученного выражения снизу мы заменим сумму слагаемых $\frac{a_j^2}{6}$ на бесконечную, а сумму $\frac{2a_j}{3}$ на первое слагаемое. Сложив полученную геометрическую прогрессию и оценив $\sum\limits_{j=0}^{l-1}(0.5 + v_j) \leq 1.5l \leq 1.5d$, получим требуемую оценку снизу. Для оценки сверху мы наоборот заменяем сумму $\frac{a_j^2}{6}$ на первое слагаемое, а сумму $\frac{2a_j}{3}$ на бесконечную геометрическую прогрессию. Таким образом, получаем верхнюю оценку. $\square$

Глава 3. Многомерные тайловые B-сплайны

3.1 Классические B-сплайны

Напомним, что одномерным кардинальным *B-сплайном* порядка n (обозначение B_n) называется свёртка $n+1$ функций $\chi_{[0,1]}$. В частности, $B_0 = \chi_{[0,1]}$, $B_1 = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$ и т.д.

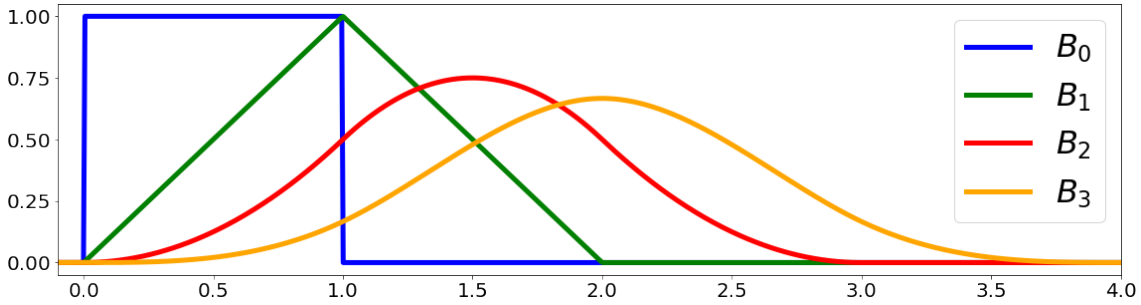


Рис. 13: Одномерные B-сплайны B_0, B_1, B_2, B_3.

B-сплайн B_n порядка n принадлежит $C^{n-1}(\mathbb{R})$; на каждом из отрезков $[k, k+1)$, $k = 0, \ldots, n$, эта функция — алгебраический многочлен степени n, вне отрезка $[0, n+1]$ B_n равен нулю.

Напомним, что одномерной *масштабирующей функцией* $\varphi(x)$ с коэффициентом растяжения 2 называется решение одномерного *масштабирующего уравнения*

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi(2x - k), \tag{10}$$

а *маской* этого уравнения является тригонометрический полином

$$a(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} c_k e^{-2\pi i k \xi}.$$

Мы всегда будем предполагать, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx \neq 0$ и нормировать решение масштабирующего уравнения условием $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$. Вы-

числив преобразование Фурье обеих частей уравнения (10), получим

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = a(\xi)\widehat{\varphi}(\xi). \tag{11}$$

Подставляя $s = 0$ и учитывая, что $\widehat{\varphi}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$, получим $\widehat{\varphi}(0) = a(0)\widehat{\varphi}(0)$, следовательно, $a(0) = 1, \sum_{k=0}^{N} c_k = 2$. Если две функции φ_1, φ_2 удовлетворяют масштабирующим уравнениям с масками $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$, то их свёртка также будет удовлетворять масштабирующему уравнению с маской $a_1(\xi)a_2(\xi)$ в силу (11). Поскольку функция $\varphi = \chi_{[0,1]}$ удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1)$ с маской $a_0(\xi) = \frac{1+e^{-2\pi i\xi}}{2}$ (пример 1.4), B-сплайн B_n, являясь свёрткой $n+1$ функций $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}$, также удовлетворяет масштабирующему уравнению с маской $a_n(\xi) = a_0^{n+1}(\xi)$. Таким образом, функция B_n — решение масштабирующего уравнения с маской $\left(\frac{1+e^{-2\pi i\xi}}{2}\right)^{n+1}$. Коэффициенты этого уравнения: $c_0 = 2^{-n}\binom{n+1}{0}$, $c_1 = 2^{-n}\binom{n+1}{1}$, …, $c_{n+1} = 2^{-n}\binom{n+1}{n+1}$, где $\binom{n+1}{k}$ — биномиальные коэффициенты.

Классическим обобщением B-сплайнов на функции многих переменных является прямое произведение нескольких одномерных B-сплайнов: $B_n(x_1, \ldots, x_d) = B_n(x_1) \cdots B_n(x_d)$. Эта функция также удовлетворяет масштабирующему уравнению. Его маска $a_n(\xi_1, \ldots, \xi_d) = a_n(\xi_1) \cdots a_n(\xi_d)$. Так, в двумерном случае B-сплайн нулевого порядка будет иметь вид

$$B_0(x, y) = \chi_{[0,1]}(x)\chi_{[0,1]}(y) = \chi_{[0,1]^2}(x, y).$$

Масштабирующее уравнение для него можно получить непосредственным перемножением одномерных масштабирующих уравнений:

$$\begin{gathered} B_0(x, y) = \big(\chi_{[0,1]}(2x) + \chi_{[0,1]}(2x-1)\big)\big(\chi_{[0,1]}(2y) + \chi_{[0,1]}(2y-1)\big) = \\ = B_0(2x, 2y) + B_0(2x-1, y) + B_0(2x, 2y-1) + B_0(2x-1, 2y-1), \end{gathered}$$

либо получив его коэффициенты из маски $a_0(\xi_1, \xi_2)$. Уравнение проиллюстрировано на Рисунке 14. B-сплайн $B_n(x, y)$ произвольного по-

рядка n равен свёртке $n+1$ B-сплайна $B_0(x,y)$:

$$B_n(x,y) = B_n(x)B_n(y) = (\chi_{[0,1]}(x) * \ldots * \chi_{[0,1]}(x)) \cdot \\ \cdot (\chi_{[0,1]}(y) * \ldots * \chi_{[0,1]}(y)) = B_0(x,y) * \ldots * B_0(x,y).$$

Линейный B-сплайн $B_1(x,y)$ показан на Рисунке 15. То же верно для случая d переменных.

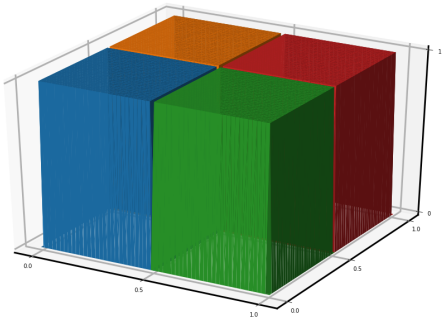


Рис. 14: Масштабирующее уравнение для $B_0(x,y)$.

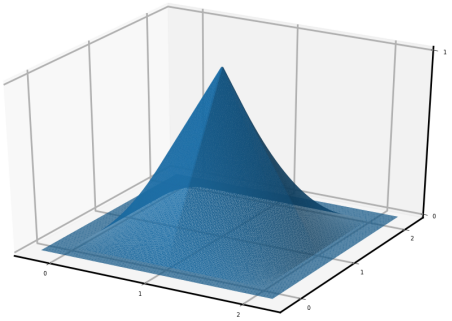


Рис. 15: Линейный B-сплайн двух переменных.

Таким образом, B-сплайн $B_n(x_1,\ldots,x_d)$ является решением масштабирующего уравнения с $(n+2)^d$ положительными коэффициентами. Поскольку количество коэффициентов растёт экспоненциально по размерности, использование классических d-мерных B-сплайнов часто приводит к неэффективным алгоритмам при больших d. Один из них, алгоритм SubD, мы рассмотрим подробно в параграфе 3.8. Тесно связанный с этим методом *каскадный алгоритм* (быстрое дискретное вейвлет-преобразование) используется для получения коэффициентов разложения по базису всплесков. Его сложность также зависит от количества ненулевых коэффициентов в масштабирующем уравнении. Используя другие конструкции многомерных B-сплайнов, можно при сохранении структурных и аппроксимационных свойств классических B-сплайнов получить меньшее число коэффициентов уравнения и, в некоторых случаях, более высокую гладкость. В следующем параграфе мы определим B-сплайны, основанные на тайлах, у которых при нужном выборе тайла будет по-

лучаться всего $(n+2)$ коэффициента масштабирующего уравнения, независимо от размерности d. Мы покажем, что некоторые из этих тайловых B-сплайнов имеют более высокую гладкость, чем классические B-сплайны такого же порядка.

3.2 Построение тайловых B-сплайнов

Мы начнём с определения тайловых B-сплайнов.

Определение 3.1. Для данного тайла $G \subset \mathbb{R}^d$ и данного $n \geq 0$ *тайловым B-сплайном* порядка n (обозначение B_n^G) будем называть свёртку $n+1$ функций χ_G.

В частности, $B_0^G = \chi_G$, $B_1^G = \chi_G * \chi_G$.

Определение 3.2. *Симметризованным тайловым B-сплайном* порядка n (обозначение Bs_n^G) будем называть свёртку $n+1$ функции $\chi_G * \chi_{-G}$.

Зафиксируем тайл G и будем далее использовать краткие обозначения $B_n = B_n^G, \mathrm{Bs}_n = \mathrm{Bs}_n^G$.

В многомерном случае мы рассматриваем масштабирующие уравнения с коэффициентом растяжения M вида

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\boldsymbol{k}} \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}), \tag{12}$$

маской этого уравнения называем тригонометрический полином переменных $\xi_1, \ldots, \xi_d$,

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{m} \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\boldsymbol{k}} e^{-2\pi i (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi})},$$

где $m = |\det M|$.

Тайловый B-сплайн B_0^G, т. е. характеристическая функция тайла χ_G, почти всюду удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\chi_G(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\Delta} \in D(M)} \chi_G(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Delta}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

(см. параграф 1.2, уравнение (2)). В данном случае $c_{\boldsymbol{k}} = 1$ для всех $\boldsymbol{k} \in D(M)$ и $c_{\boldsymbol{k}} = 0$ для $\boldsymbol{k} \notin D(M)$, а маска даётся формулой

$$\boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{m} \sum_{\boldsymbol{\Delta} \in D(M)} e^{-2\pi i(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{\xi})}.$$

Аналогично одномерному случаю, применяя преобразование Фурье к обеим частям масштабирующего уравнения (12), получим

$$\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{a}(M_1^T \boldsymbol{\xi}) \widehat{\varphi}(M_1^T \boldsymbol{\xi})$$

или

$$\widehat{\varphi}(M^T \boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}). \tag{13}$$

Отсюда следует, что если две функции φ_1, φ_2 удовлетворяют масштабирующим уравнениям с масками $a_1(\boldsymbol{\xi})$, $a_2(\boldsymbol{\xi})$ и коэффициентом растяжения M, то их свёртка также будет удовлетворять масштабирующему уравнению с маской $a_1(\boldsymbol{\xi}) a_2(\boldsymbol{\xi})$ и коэффициентом растяжения M. Поэтому, аналогично одномерному случаю, для маски a_n тайлового B-сплайна B_n справедлива формула $a_n = a_0^{n+1}$. Отсюда можно явно найти коэффициенты масштабирующего уравнения (12) на тайловые B-сплайны:

Предложение 3.3. *Пусть $\varphi = B_n^G$ — тайловый B-сплайн, где тайл G построен по матрице M и набору цифр $D = \{\boldsymbol{d}_0, \ldots, \boldsymbol{d}_{m-1}\}$. Для любого вектора $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$ обозначим через $C_{\boldsymbol{k}}$ число его представлений в виде суммы $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{s}_1 + \ldots + \boldsymbol{s}_{n+1}$ по всем упорядоченным наборам $(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{n+1})$, $\boldsymbol{s}_i \in D$, с возможными повторениями. Тогда масштабирующее уравнение на тайловый B-сплайн B_n^G имеет вид*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = m^{-n} \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} C_{\boldsymbol{k}} \varphi(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}).$$

Заметим, что числа $C_{\boldsymbol{k}}$ явно выражаются через мультиномиальные коэффициенты.

Симметризованный тайловый B-сплайн также удовлетворяет масштабирующему уравнению. Действительно, если $\varphi(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет масштабирующему уравнению с коэффициентами $c_{\boldsymbol{k}}$ и маской

$a(\boldsymbol{\xi})$, то $\varphi(-\boldsymbol{x})$ будет удовлетворять масштабирующему уравнению с коэффициентами $c_{\boldsymbol{k}}$ и маской $\bar{a}(\boldsymbol{\xi})$. Поэтому $\chi_G * \chi_{-G}$ соответствует масштабирующему уравнению с маской $|a_0|^2$, а Bs_n соответствует маске $|a_0|^{2(n+1)}$. Заметим, что для симметризованных тайловых B-сплайнов коэффициенты маски и её значения при любом $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ являются действительными.

Поскольку множество коэффициентов полинома a_n зависит только от порядка n и от множества цифр D, множество коэффициентов масштабирующего уравнения тайлового B-сплайна B_n зависит только от n, D, и не зависит от матрицы M. Таким образом, имеем

Следствие 3.4. *При фиксированном множестве цифр D все B-сплайны одного порядка определяются одним и тем же масштабирующим уравнением с заменой матрицы растяжения M. То же верно и для симметризованных B-сплайнов.*

Замечание 3.5. Для построения тайлового B-сплайна B_n по определению, нужно вычислять свёртку, что требует численного интегрирования. Однако, B_n можно найти и как решение соответствующего масштабирующего уравнения. Любую масштабирующую функцию можно вычислить точно на сколь угодно плотной сетке через произведение специальных матриц переноса (мы обсуждаем их подробнее в параграфе 3.7). В частности, в целых точках $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$ значения $B_n(\boldsymbol{k})$ совпадают с компонентами собственного вектора $\boldsymbol{v}$ матрицы переноса, соответствующего собственному значению 1. Значения функции $B_n(\boldsymbol{x})$ на решётке $M^{-1}\mathbb{Z}^d$ получаются умножением матриц переноса на вектор $\boldsymbol{v}$. Последующие умножения на матрицы переноса позволяют найти $B_n(\boldsymbol{x})$ для $\boldsymbol{x} \in M^{-2}\mathbb{Z}^d, M^{-3}\mathbb{Z}^d$ и т.д. Так через несколько итераций мы находим точные значения функции $B_n(\boldsymbol{x})$ на измельчённой решётке.

Предложение 3.6. *Целые сдвиги тайлового B-сплайна $\{B_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ образуют базис Рисса своей линейной оболочки. То же верно для сдвигов симметризованных тайловых B-сплайнов.*

Мы отложим доказательство до параграфа 3.8.

Из предложения 3.6 следует, что целые сдвиги тайлового B-сплайна $\varphi(\boldsymbol{x}) = B_n(\boldsymbol{x})$ порождают кратномасштабный анализ (КМА), и, соответственно, систему всплесков (см., например, [80]). Кроме того, к нашей масштабирующей функции $\varphi(\boldsymbol{x}) = B_n(\boldsymbol{x})$ можно применить процедуру ортогонализации, получив новую функцию φ_1, порождающую тот же КМА, однако её целочисленные сдвиги уже будут ортогональны. Это будет сделано в параграфе 3.3. Таким образом, мы получим ортогонализованные тайловые B-сплайны и в дальнейшем соответствующие ортонормированные системы всплесков.

Предложение 3.7. *Линейные комбинации целых сдвигов тайлового B-сплайна $\{B_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ порождают алгебраические полиномы степени не выше n. То же верно для сдвигов симметризованных тайловых B-сплайнов.*

Доказательство. Для порядка $n = 0$ это верно, поскольку $B_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}) = \chi_G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})$ и тайл удовлетворяет свойству $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \chi_G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}) \equiv 1$ почти всюду. Значит, линейные комбинации сдвигов $B_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})$ действительно порождают константу.

Известно, что сдвиги функции φ с компактным носителем порождают алгебраические полиномы степени не выше n, тогда и только тогда, когда преобразование Фурье $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ имеет нули порядка хотя бы $n+1$ во всех целых точках, кроме 0 (в силу теоремы Стрэнга-Фикса, см. [119, 25, 80]). Применив это утверждение сначала для $\varphi = B_0(\boldsymbol{x})$, получаем, что $\widehat{B}_0(\boldsymbol{\xi})$ имеет нули порядка 1 во всех целых ненулевых точках. Поскольку $\widehat{B}_n(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{B}_0^{n+1}(\boldsymbol{\xi})$, порядок нулей у $\widehat{B}_n(\boldsymbol{\xi})$ хотя бы $n + 1$. Теперь применяем утверждение в обратную сторону для $\varphi = B_n$, что завершает доказательство. □

Следствие 3.8. *Порядок аппроксимации целыми сдвигами тайлового B-сплайна B_n равен n.*

Это означает, что расстояние от любой гладкой функции f до пространства, порождённого функциями $\{B_n(a\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$, равно $O(a^{-(n+1)})$ при $a \to +\infty$ (см., например, [26]).

Замечание 3.9. Тайловые B-сплайны рассматривались также в работе [129] под названием эллиптические масштабирующие функции. Они определялись через преобразование Фурье и для них в изотропном случае (когда M подобна ортогональной матрице, умноженной на скаляр) получены аналоги предложений 3.6, 3.7 и следствия 3.8.

Случай двумерных тайловых B-сплайнов был исследован в работе [130] под названием α-сплайны. Вместо матрицы M в масштабирующем уравнении рассматривается комплексное число $\alpha \in \mathbb{Q}[i]$, $m = |\alpha|^2$, в частности, так можно получить аналоги тайловых B-сплайнов, порождённых двумя цифрами. В той же работе были построены алгоритмы SubD на основе α-сплайнов, при этом вопрос об их гладкости был сформулирован в виде открытой проблемы.

Случай двух цифр ($m = 2$)

В дальнейшем мы часто будем рассматривать случай, когда $m = |\det M| = 2$ (2-тайлы, двухциферные тайлы), изученный ранее в Главе 2. В этом случае $D(M) = \{\mathbf{0}, \boldsymbol{e}\}$. Ранее мы упоминали (Предложение 2.34), что любой 2-тайл является центрально-симметричным.

В случае центрально-симметричного тайла, когда $G = \boldsymbol{c} + G_0 = \boldsymbol{c} - G_0$, справедливы соотношения (всюду здесь и далее $\int$ означает $\int_{\mathbb{R}^d}$)

$$\chi_G{*}\chi_G(\boldsymbol{y}) = \int \chi_G(\boldsymbol{x})\chi_G(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int \chi_{G_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\chi_{G_0}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})d\boldsymbol{x} = \int \chi_{G_0}(\boldsymbol{x})\chi_{G_0}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{c})d\boldsymbol{x} = \chi_{G_0} * \chi_{G_0}(\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{c});$$

$$\chi_G{*}\chi_{-G}(\boldsymbol{y}) = \int \chi_G(\boldsymbol{x})\chi_{-G}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int \chi_{G_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\chi_{G_0}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})d\boldsymbol{x} = \int \chi_{G_0}(\boldsymbol{x})\chi_{G_0}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \chi_{G_0} * \chi_{G_0}(\boldsymbol{y}).$$

Поэтому для центрально-симметричных тайлов, в частности для всех 2-тайлов, B_{2n} и Bs_n отличаются только сдвигом. В дальнейшем мы сосредоточимся только на B-сплайнах, построенных по 2-тайлам.

Напомним, что тайл называется изотропным, если он порождён диагонализируемой матрицей, имеющей равные по модулю собственные значения. (см. определение 2.1).

Свойства 2-тайлов подробно исследовались в Главе 2. Напомним, что при каждом d в $\mathbb{R}^d$ существует конечное число различных, с точностью до аффинного подобия, 2-тайлов. В $\mathbb{R}^2$ есть ровно три 2-тайла, которые мы называем Квадрат, Дракон и Медведь, все они изотропные. Примеры матриц и цифр для этих тайлов даны в теореме 2.8, далее мы будем использовать именно их. В $\mathbb{R}^3$ существует семь 2-тайлов, среди них только один изотропный — куб (параграф 2.12).

В Главе 2 у нас получилась следующая классификация: в изотропном случае в нечётной размерности $d = 2k + 1$ все изотропные 2-тайлы являются параллелепипедами (теорема 2.11), в чётной размерности $d = 2k$ существует ровно три, с точностью до аффинного подобия, изотропных 2-тайла. Это параллелепипед, а также прямое произведение k (двумерных) Драконов и прямое произведение k (двумерных) Медведей (теорема 2.12).

В неизотропном случае, для каждого d, вопрос о количестве аффинно неэквивалентных классов 2-тайлов $N(d)$ сводится к вопросу о числе растягивающих многочленов со старшим коэффициентом 1 и свободным ± 2, и в Главе 2 нами получена следующая оценка (теорема 2.41)

$$\frac{d^2}{16} - \frac{43d}{36} - \frac{5}{6} \leq N(d) \leq 2^{d\left(1+\frac{16\ln\ln d}{\ln d}\right)}.$$

B-сплайны, построенные по 2-тайлам, будем называть соответственно именам тайлов, но со сдвигом индекса на единицу. Таким образом, характеристическая функция тайла Медведь B_0 — это Медведь-1, а свёртка k таких функций B_{k-1} это Медведь-k. Сдвиг индекса объясняется традиционной терминологией для одномерных B-сплайнов: функция B_{k-1} — это сплайн порядка $k-1$, который является свёрткой k функций $\chi_{[0,1]}$. В нашем случае сплайн определяется не через полиномы, а через свёртки характеристических функций,

поэтому более естественно в названии сплайнов использовать число сомножителей.

В предложении 3.3 были найдены коэффициенты масштабирующих уравнений тайловых B-сплайнов в общем случае. Для плоских тайлов они приобретают достаточно простой вид:

Следствие 3.10. *Пусть тайловый B-сплайн $\varphi = B_n^G$ построен по плоскому 2-тайлу с матрицей M и цифрами $D = \left\{\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right\}$. Обозначим $C_k = 2^{-n}\binom{n+1}{k}$ для $k = \{0, \dots, n+1\}$. Тогда B_n^G удовлетворяет масштабирующему уравнению*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{k\in\{0,1,\dots,n+1\}} C_k \varphi\left(M\boldsymbol{x} - \begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}\right). \tag{14}$$

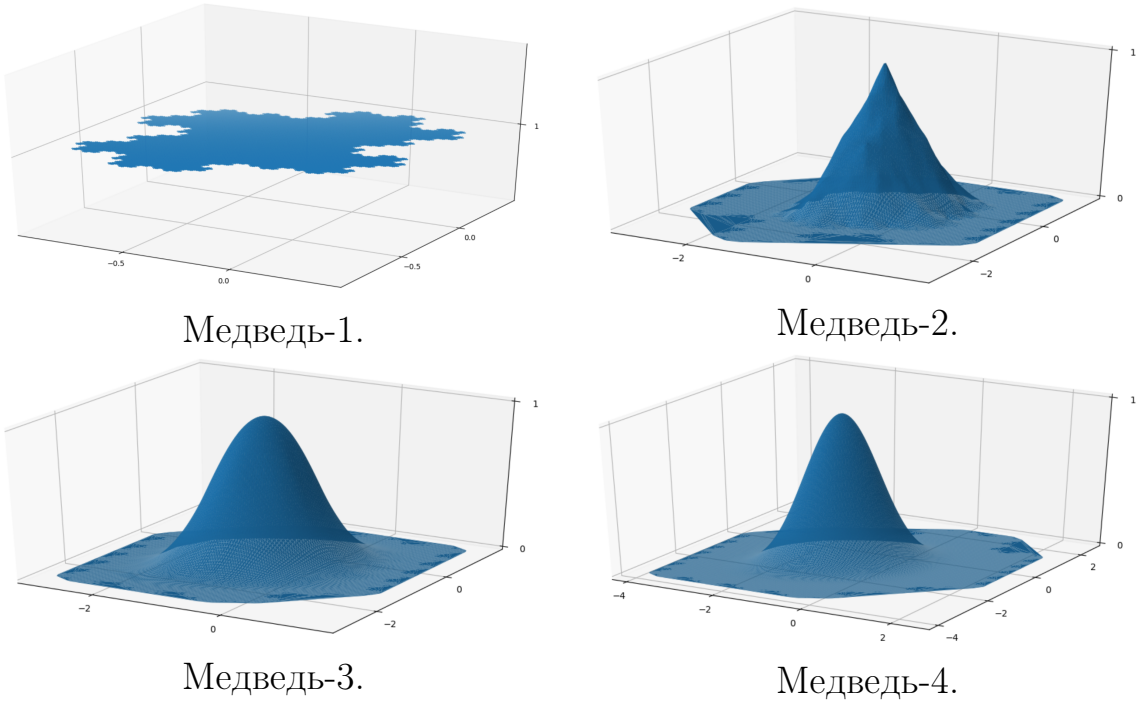
Таким образом, все тайловые B-сплайны, построенные по тайлам Медведь, Дракон и Квадрат, можно вычислить с помощью масштабирующего уравнения (14), см. замечание 3.5. На Рисунке 16 показаны Медведь-1, ..., Медведь-4, на Рисунке 17 Дракон-1, ..., Дракон-4, а на Рисунке 18 Квадрат-1, ..., Квадрат-4 [1].

В параграфе 3.7 мы вычислим показатель гладкости Гёльдера этих сплайнов и установим, что Медведь-2 не принадлежит C^1, Медведь-3 принадлежит C^2, а Медведь-4 принадлежит C^3. Таким образом, Медведь-3 и Медведь-4 имеют большую гладкость, чем Квадрат-3 и Квадрат-4 соответственно, хотя это может показаться парадоксальным (см. теорему 3.29).

3.3 Ортогонализация B-сплайнов

В предыдущем параграфе мы установили, что B-сплайн $\varphi(\boldsymbol{x}) = B_n(\boldsymbol{x})$ является масштабирующей функцией с компактным носителем. Её целочисленные сдвиги не ортогональны друг другу, поэтому она не порождает ортонормированную систему всплесков. Поскольку эти сдвиги образуют базис Рисса своей линейной оболочки, су-

[1] Исходный код программ, с помощью которых проделаны эти и дальнейшие вычисления, можно найти на github [140]



Медведь-1. Медведь-2.

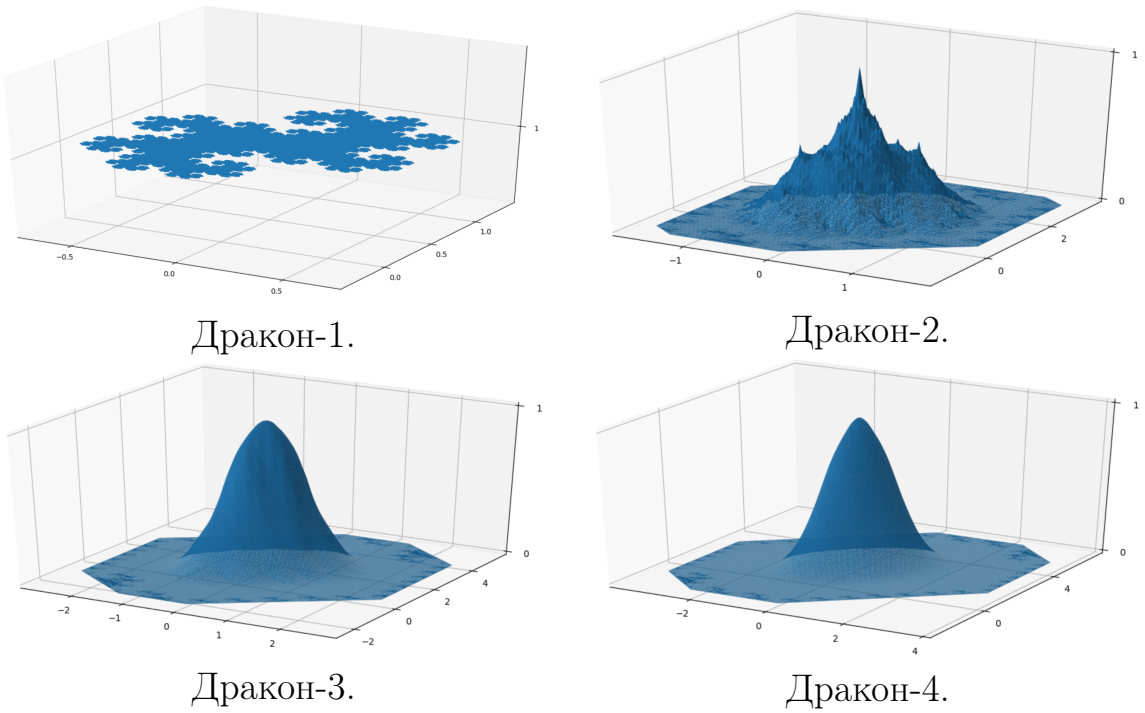
Медведь-3. Медведь-4.

Рис. 16: Тайловые B-сплайны с матрицей Медведя.

ществует стандартный способ их ортогонализовать: построить другую масштабирующую функцию $\varphi_1(\boldsymbol{x})$, целые сдвиги которой будут ортонормированным базисом в пространстве целых сдвигов $\varphi(\boldsymbol{x})$ (в терминах теории всплесков, она должна порождать тот же кратномасштабный анализ). Носитель функции φ_1 уже не будет конечным, но она будет быстро убывать на бесконечности (см. пример оценки в параграфе 3.6). Построение использует следующий общеизвестный факт (см., например, [80]).

Предложение 3.11. *Функция $\eta(\boldsymbol{x}) \in L_2$ обладает ортонормированными целыми сдвигами тогда и только тогда, когда $\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\eta}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{k})|^2 \equiv 1$.*

В частности, функция φ_1, заданная по формуле через преобразо-



Дракон-1. Дракон-2.

Дракон-3. Дракон-4.

Рис. 17: Тайловые B-сплайны с матрицей Дракона.

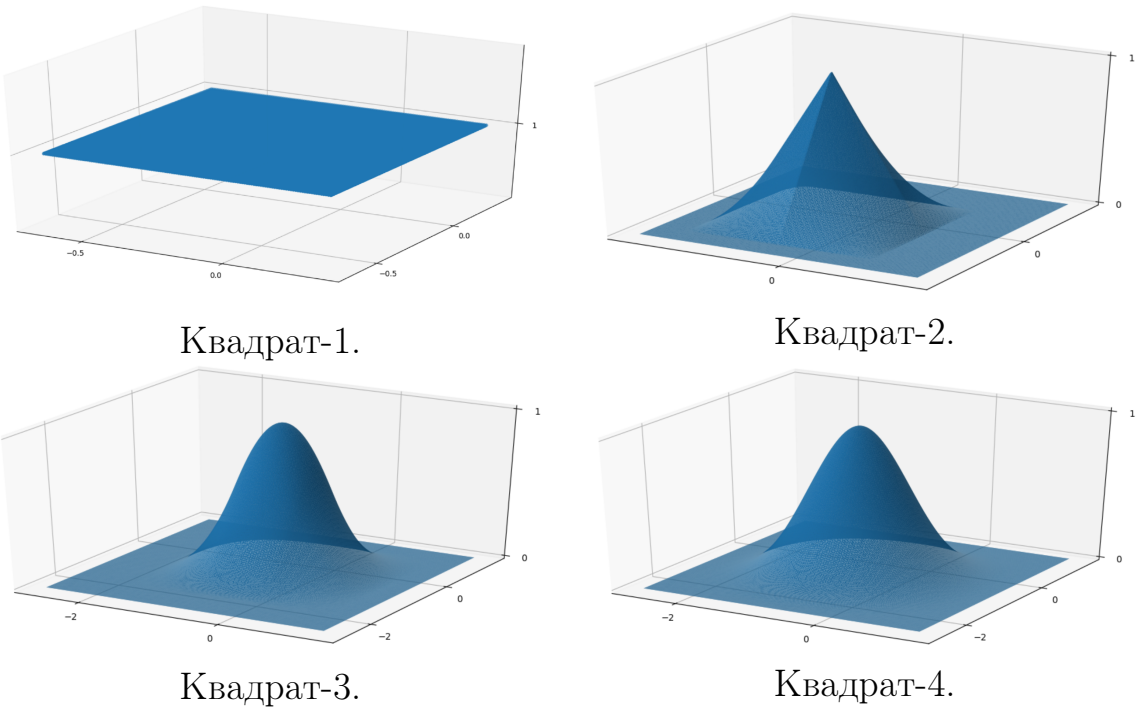
вание Фурье

$$\widehat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{k})|^2}}, \tag{15}$$

обладает этим свойством. Переход от функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ к функции $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ по формуле (15) является стандартной процедурой ортогонализации Баттла-Лемарье.

Из формулы (15) следует, что функция φ_1 выражается в виде линейной комбинации целочисленных сдвигов $\{\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ функции φ, коэффициенты разложения мы найдём ниже.

Теорема 3.12. *Пусть G — произвольный тайл в $\mathbb{R}^d$, $\varphi(\boldsymbol{x}) = B_n^G(\boldsymbol{x})$ — соответствующий тайловый B-сплайн, $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ — его ортогонализация. Положим $\Phi_{\boldsymbol{k}} = (\varphi(\cdot), \varphi(\cdot+\boldsymbol{k}))$ для всех $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$ и*



Квадрат-1. Квадрат-2.

Квадрат-3. Квадрат-4.

Рис. 18: Тайловые B-сплайны с матрицей Квадрата.

$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \Phi_{\boldsymbol{k}} e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})}$. *Тогда* $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ *является линейной комбинацией целочисленных сдвигов* $\varphi(\boldsymbol{x})$*:*

$$\varphi_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{k}} \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}),$$

где $b_{\boldsymbol{k}}$ *— коэффициенты Фурье функции* $\frac{1}{\sqrt{\Phi(\boldsymbol{\xi})}} = \sum b_{\boldsymbol{k}} e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})}$.

Доказательство. Разложим ортогонализованный сплайн $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ по сдвигам

$$\varphi_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{k}} \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}).$$

Тогда для любого $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$

$$\varphi_1(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{j}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{k}} \varphi(\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{j})) \overset{(\boldsymbol{l}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})}{=} \sum_{\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{j}} \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}).$$

Требование ортонормированности сдвигов запишется в виде ($\delta^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{j}}$ — символ Кронекера)

$$\delta^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{j}} = (\varphi_1, \varphi_1(\cdot+\boldsymbol{j})) = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{k}}\overline{b_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{j}}}(\varphi(\cdot-\boldsymbol{k}), \varphi(\cdot-\boldsymbol{l})) = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{k}}\overline{b_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{j}}}\Phi_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}}.$$

Это можно переписать как

$$\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^d}\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{k}}\overline{b_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m}+\boldsymbol{j}}}\right)\Phi_{\boldsymbol{m}} = \delta^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{j}}.$$

Обозначим через $A_{\boldsymbol{p}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{k}}\overline{b_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}}}$. Получаем, что для любого $\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^d$

$$\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^d} A_{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{m}}\Phi_{\boldsymbol{m}} = \delta^{\mathbf{0}}_{\boldsymbol{j}}$$

Другими словами, свёртка последовательностей A и Φ является δ-последовательностью. Тогда произведение их преобразований Фурье $A(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} A_{\boldsymbol{k}}e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})}$ и $\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \Phi_{\boldsymbol{k}}e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})}$ тождественно равно 1. Таким образом, $A(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\Phi(\boldsymbol{\xi})}$. Введём также преобразование Фурье $B(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} b_{\boldsymbol{k}}e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})}$. Тогда верно

$$A_{\boldsymbol{p}} = \int B(\boldsymbol{\xi})\overline{B(\boldsymbol{\xi})}e^{2\pi i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})}d\xi = \int |B(\boldsymbol{\xi})|^2 e^{2\pi i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})}d\boldsymbol{\xi}.$$

Значит, $|B(\boldsymbol{\xi})|^2 = \sum_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{Z}^d} A_{\boldsymbol{p}}e^{-2\pi i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\xi})} = A(\boldsymbol{\xi})$. Тогда,

$$|B(\boldsymbol{\xi})| = \frac{1}{\sqrt{\Phi(\boldsymbol{\xi})}},$$

то есть мы выразили коэффициенты $b_{\boldsymbol{k}}$ разложения функции φ_1 на сдвиги функции φ через числа $\Phi_{\boldsymbol{k}}$. □

По определению коэффициентов $\Phi_{\boldsymbol{k}} = (\varphi(\cdot), \varphi(\cdot+\boldsymbol{k}))$, для их вычисления требуется численное интегрирование. Оказывается, однако, что их можно найти проще, как компоненты собственного вектора специальной матрицы. Это будет сделано в следующем параграфе.

3.4 Формулы для коэффициентов $\Phi_{\boldsymbol{k}}$

Чтобы найти новую масштабирующую функцию φ_1, целочисленные сдвиги которой будут ортонормированы, необходимо найти вспомогательные числа $\Phi_{\boldsymbol{k}} = (\varphi(\cdot), \varphi(\cdot + \boldsymbol{k}))$.

Теорема 3.13. *1) Для любого целого $\boldsymbol{k}$ число $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ является значением функции $\varphi(\boldsymbol{x}) * \varphi(-\boldsymbol{x})$ в точке $-\boldsymbol{k}$.*

2) Для ряда Фурье, построенного по коэффициентам $\Phi_{\boldsymbol{k}}$, выполнено

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \Phi_{\boldsymbol{k}} e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{k})|^2.$$

Из пункта 1) следует, что только конечное число коэффициентов $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ не равно нулю, значит, $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ — тригонометрический полином.

Доказательство теоремы 3.13. Обозначим через f функцию $\varphi(\boldsymbol{x}) * \varphi(-\boldsymbol{x})$. Тогда с учётом того, что функция φ является вещественнозначной,

$$f(\boldsymbol{y}) = \int \varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x},$$

поэтому в точке $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{k}$ получаем

$$f(-\boldsymbol{k}) = \int \varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k})d\boldsymbol{x} = \Phi_{\boldsymbol{k}}.$$

Для доказательства пункта 2) заметим, что по теореме Планшереля

$$\Phi_{\boldsymbol{k}} = \int \varphi(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k})d\boldsymbol{x} = \int \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\overline{\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})}d\boldsymbol{\xi} = \int |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})|^2 e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})}d\boldsymbol{\xi},$$

поскольку $\widehat{\varphi(\cdot+\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{\xi}) = e^{2\pi i(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{k})}\varphi(\boldsymbol{\xi})$.

Отсюда следует, что коэффициенты разложения функции $\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{k})|^2$ в ряд Фурье также равны $\Phi_{\boldsymbol{k}}$. Значит, $\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \Phi_{\boldsymbol{k}} e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})} = \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{k})|^2$, что и требовалось получить. □

Замечание 3.14. В теореме 3.12 значения $\Phi_{\boldsymbol{k}} = (\varphi(\cdot), \varphi(\cdot+\boldsymbol{k}))$ определены через скалярное произведение, вычисление которого приводит к численному интегрированию. В теореме 3.13 мы показали, что они равны значениям функции $f(\boldsymbol{x}) := \varphi(\boldsymbol{x}) * \varphi(-\boldsymbol{x})$ в целых точках. Эта функция удовлетворяет масштабирующему уравнению с маской $a(\boldsymbol{\xi})\bar{a}(\boldsymbol{\xi}) = |a(\boldsymbol{\xi})|^2$. В частности, если $\varphi(\boldsymbol{x})$ — тайловый B-сплайн B_n, то $f = \varphi(\boldsymbol{x}) * \varphi(-\boldsymbol{x})$ — симметризованный тайловый B-сплайн Bs_n. Если $\varphi(\boldsymbol{x})$ — симметризованный тайловый B-сплайн Bs_n, то $f = \varphi(\boldsymbol{x}) * \varphi(-\boldsymbol{x})$ — симметризованный B-сплайн Bs_{2n}. Поэтому, зная масштабирующее уравнение на $\varphi(\boldsymbol{x})$, мы можем найти коэффициенты $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ как компоненты собственного вектора специальной матрицы (см. замечание 3.5).

Ортогонализованные тайловые B-сплайны для Медведя-2, Медведя-4, Дракона-2, Дракона-4, Квадрата-2, Квадрата-4 показаны на Рисунке 19.

3.5 Построение всплеск-функции

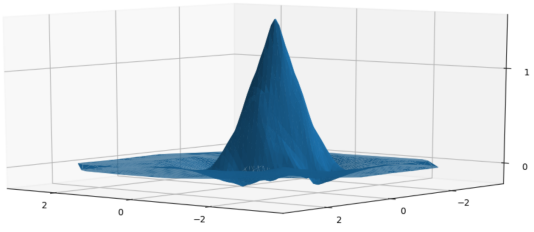
Напомним, что $\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{k})|^2$. Легко доказывается следующий факт:

Предложение 3.15. *Пусть исходный тайловый B-сплайн $\varphi(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет масштабирующему уравнению с маской $a(\boldsymbol{\xi})$. Тогда его ортогонализация $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ также является решением масштабирующего уравнения с маской*

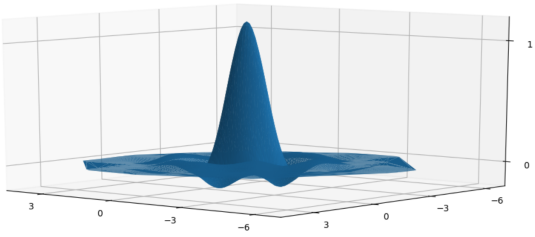
$$a_1(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi})\frac{\sqrt{\Phi(\boldsymbol{\xi})}}{\sqrt{\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})}}. \tag{16}$$

Доказательство. Пользуясь представлением масштабирующих уравнений после преобразования Фурье (13), нам достаточно проверить 1-периодичность функции

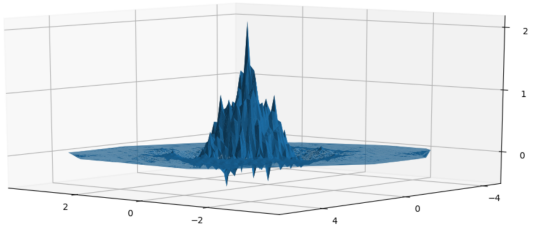
$$a_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\widehat{\varphi}_1(M^T\boldsymbol{\xi})}{\widehat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi})} = \frac{\widehat{\varphi}(M^T\boldsymbol{\xi})\sqrt{\Phi(\boldsymbol{\xi})}}{\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})\sqrt{\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})}} = a(\boldsymbol{\xi})\frac{\sqrt{\Phi(\boldsymbol{\xi})}}{\sqrt{\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})}}.$$



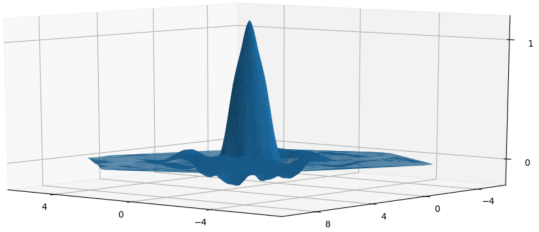
Ортогонализованный Медведь-2.



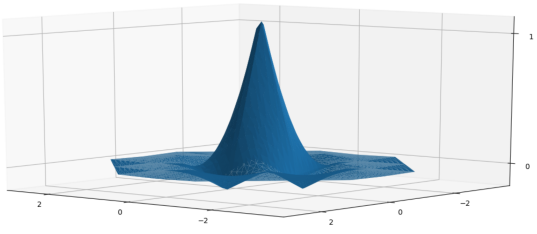
Ортогонализованный Медведь-4.



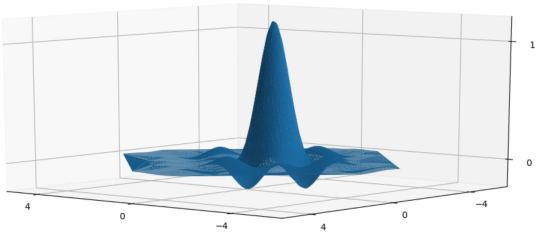
Ортогонализованный Дракон-2.



Ортогонализованный Дракон-4.



Ортогонализованный Квадрат-2.



Ортогонализованный Квадрат-4.

Рис. 19: Ортогонализованные тайловые B-сплайны.

Поскольку функции $a(\boldsymbol{\xi}), \Phi(\boldsymbol{\xi})$ 1-периодичны, а матрица M целочисленная, это верно. □

Таким образом, мы можем находить коэффициенты $c_{\boldsymbol{k}}$ масштабирующего уравнения функции φ_1, раскладывая в ряд Фурье маску

$a_1(\boldsymbol{\xi})$, определяемую формулой (16):

$$a_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{m} \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d} c_{\boldsymbol{k}} e^{-2\pi i (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\xi})}.$$

Ненулевых коэффициентов c_k будет бесконечно много, поэтому новая масштабирующая функция φ_1 уже не будет иметь компактный носитель. Но, как мы увидим далее, она будет экспоненциально убывать при $\boldsymbol{\xi} \to \infty$, что позволит эффективно приближать её финитными функциями (см. параграф 3.6).

Теперь займёмся явным построением всплеск-функции, соответствующей ортогонализованной функции $\varphi_1(x)$ в двухциферном случае, то есть если $m = 2$. В этом случае система Хаара имеет наиболее простой вид, поскольку порождается всего одной всплеск-функцией. Следующая теорема является вариантом общего утверждения о построении ортонормированных всплесков (см., например, [126]). Тем не менее мы приведём её полное доказательство для двухциферных тайловых B-сплайнов.

Теорема 3.16. *Пусть G — двухциферный тайл (2-тайл), то есть $m = |\det M| = 2$, а $\varphi = B_n^G$ — соответствующий ему тайловый B-сплайн. Через φ_1 обозначим его ортогонализацию, через $c_{\boldsymbol{k}}$ — коэффициенты масштабирующего уравнения на φ_1. Тогда*

1) соответствующая всплеск-функция $\psi(\boldsymbol{x})$ является линейной комбинацией M-сжатий функции φ_1 с коэффициентами $\pm c_{\boldsymbol{k}}$.

2) Для трёх типов аффинно неэквивалентных двухциферных тайлов, матрицы которых определены в теореме 2.8, справедливы такие формулы для всплеск-функции:

а) Если G — тайл Медведь, то есть $M = M_B$, то

$$\psi_B(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in K} c_{\boldsymbol{k}} (-1)^{(k_2 - k_1)} \varphi_1 \left(M_B \boldsymbol{x} + \boldsymbol{k} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \qquad (17)$$

б) Если G — тайл Квадрат, то есть $M = M_S$, то

$$\psi_S(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in K} c_{\boldsymbol{k}} (-1)^{k_1} \varphi_1 \left(M_S \boldsymbol{x} + \boldsymbol{k} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right);$$

в) Если G — тайл Дракон, то есть $M = M_D$, то

$$\psi_D(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}}(-1)^{(k_2-k_1)}\varphi_1\left(M_D\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Доказательство. Всплеск-функция должна иметь вид

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{w}\in W} p_{\boldsymbol{w}}\varphi_1(M\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}).$$

Введём для неё маску $p(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{m}\sum_{\boldsymbol{w}\in W} p_{\boldsymbol{w}}e^{-2\pi i(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi})}$, аналогично маске $a_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{m}\sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}}e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})}$ для масштабирующего уравнения на φ_1.

Лемма 3.17. *Пусть векторы $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$ принадлежат двум разным фактор-классам $\mathbb{Z}^d/M^T\mathbb{Z}^d$ матрицы M^T. Пусть $\boldsymbol{v} = M^{-T}\boldsymbol{u}$. Тогда для масок a_1 и p масштабирующей функции и всплеск-функции соответственно, имеем*

1) для любого $\boldsymbol{s}$ выполняется $|a_1(\boldsymbol{s})|^2 + |a_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v})|^2 = 1$ (ортонормированность φ_1);

2) для любого $\boldsymbol{s}$ выполняется $p(\boldsymbol{s})\bar{a}_1(\boldsymbol{s}) + p(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v})\bar{a}_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}) = 0$ (ортогональность φ_1, ψ).

Доказательство. Из масштабирующего уравнения на φ_1 следует, что

$$\widehat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi}) = a_1(M_1^T\boldsymbol{\xi})\widehat{\varphi}_1(M_1^T\boldsymbol{\xi})$$

или

$$\widehat{\varphi}_1(M^T\boldsymbol{\xi}) = a_1(\boldsymbol{\xi})\widehat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi}).$$

Поскольку целочисленные сдвиги φ_1 ортонормированы, для любого $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^d$ справедлива формула

$$\sum_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q})|^2 = 1.$$

Выберем векторы $\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$ из двух фактор-классов $\mathbb{Z}^d/M^T\mathbb{Z}^d$ матрицы M^T. Обозначим также $\boldsymbol{v} = M^{-T}u$.

$$1 = \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}_1(M^T\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q})|^2 = \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}_1(M^T\boldsymbol{s}+M^T\boldsymbol{q})|^2 +$$
$$+ \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}_1(M^T\boldsymbol{s}+M^T\boldsymbol{q}+M^T\boldsymbol{v})|^2 = \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^d} |a_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q})|^2|\widehat{\varphi}_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q})|^2 +$$
$$+ \sum_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Z}^d} |a_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{v})|^2|\widehat{\varphi}_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{v})|^2 = |a_1(\boldsymbol{s})|^2 + |a_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v})|^2$$

Таким образом, для любого $\boldsymbol{s}$ выполняется $|a_1(\boldsymbol{s})|^2 + |a_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v})|^2 = 1$ и 1) доказано.

Аналогично из ортогональности φ_1 и ψ получаем 2). □

Вернёмся к доказательству теоремы. Будем подбирать p, чтобы выполнялось условие ортогональности $p(\boldsymbol{s})\bar{a}_1(\boldsymbol{s})+p(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v})\bar{a}_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}) = 0$ из леммы. Заметим, что в двухциферном случае вектор $2\cdot\boldsymbol{v} = 2\cdot M_1^T u$ целочисленный, поэтому $a_1(\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{v}) = a_1(\boldsymbol{s})$, $p(\boldsymbol{s}+2\boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{s})$.

Рассмотрим случай Медведя, с матрицей $M = M_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, при этом $M_1^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. В качестве вектора u можно выбрать $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Поэтому, в качестве частного решения можно предъявить функцию $p(\boldsymbol{s}) = e^{-2\pi i s_2}\bar{a}_1(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v})$. В самом деле, $p(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{v}) = e^{-2\pi i(s_2+0.5)}\bar{a}_1(\boldsymbol{s}+2\cdot\boldsymbol{v}) = -e^{-2\pi i s_2}\bar{a}_1(\boldsymbol{s})$ и легко убедиться, что равенство выполнено.

Пользуясь равенством $\widehat{\psi}_B(\boldsymbol{\xi}) = p(M_1^T\boldsymbol{\xi})\widehat{\varphi}_1(M_1^T\boldsymbol{\xi})$, получаем

$$\widehat{\psi}_B(\boldsymbol{\xi}) = e^{-2\pi i(M_1^T\boldsymbol{\xi})_2}\bar{a}_1(M_1^T\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{v})\widehat{\varphi}_1(M_1^T\boldsymbol{\xi}).$$

$$\widehat{\psi}_B(\boldsymbol{\xi}) = e^{-2\pi i((0,1),M_1^T\boldsymbol{\xi})}\bar{a}_1(M_1^T\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{v})\widehat{\varphi}_1(M_1^T\boldsymbol{\xi}).$$

Поскольку

$$a_1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{m}\sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}} e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})},$$

$$\widehat{\psi}_B(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{m}\sum_{\boldsymbol{k}\in K} e^{-2\pi i((0,1),M_1^T\boldsymbol{\xi})} c_{\boldsymbol{k}} e^{2\pi i(\boldsymbol{k},M_1^T\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{v})}\widehat{\varphi}_1(M_1^T\boldsymbol{\xi}) =$$

$$\frac{1}{m}\sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}} e^{2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v})} e^{-2\pi i(-\boldsymbol{k}+(0,1),M_1^T\boldsymbol{\xi})}\widehat{\varphi}_1(M_1^T\boldsymbol{\xi})$$

Итак, для матрицы Медведя

$$\psi_B(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}} e^{2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v})}\varphi_1\left(M_B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

где $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-0.5\\0.5\end{pmatrix}$. Заметим, что поскольку каждый из векторов $\boldsymbol{k}$ в сумме целый, а $\boldsymbol{v}$ — полуцелый, экспонента $e^{2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v})}$ принимает только значения ± 1 и поэтому верно

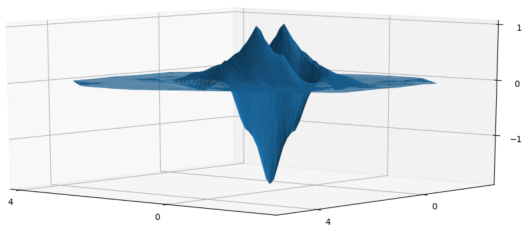
$$\psi_B(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in K} c_{\boldsymbol{k}}(-1)^{(k_2-k_1)}\varphi_1\left(M_B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{k}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right),$$

что и требовалось. Аналогичным образом получаются формулы для Дракона и Квадрата. □

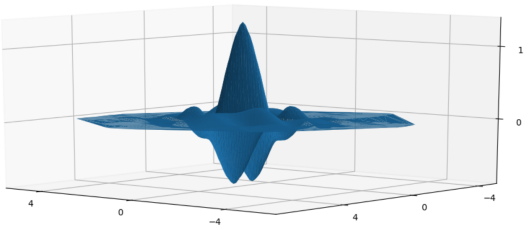
Построенные таким образом всплеск-функции для Медведя, Дракона, Квадрата порядков 2 и 4 показаны на Рисунке 20.

3.6 Приближение всплеск-функций конечными суммами

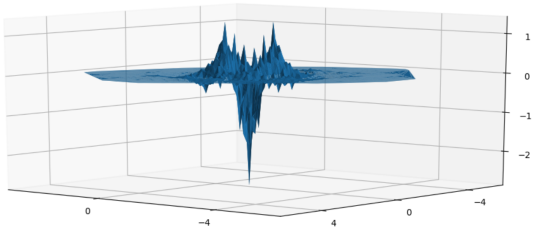
Мы получили формулы для систем ортогональных всплесков, порождённых тайловыми B-сплайнами. Их применение осложнено наличием бесконечного суммирования. В формуле (17) бесконечно много слагаемых, поскольку маска $a_1(\boldsymbol{\xi})$, полученная после ортогонализации, уже не является тригонометрическим полиномом. Чтобы оценить точность её приближения тригонометрическими полиномами, нужно знать скорость убывания коэффициентов $c_{\boldsymbol{k}}$. Мы докажем, что $|c_{\boldsymbol{k}}| \le C_1 e^{-C_2\|\boldsymbol{k}\|}$, где C_1, C_2 — положительные константы, и оценим показатель экспоненты C_2. Обозначим $z_1 = e^{-2\pi i(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\xi})}$,



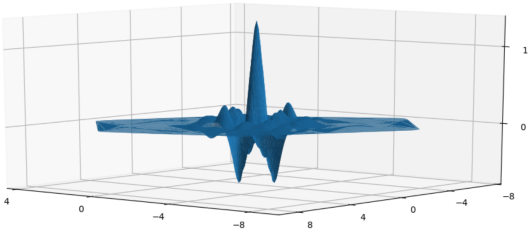
Всплеск-функция Медведя-2.



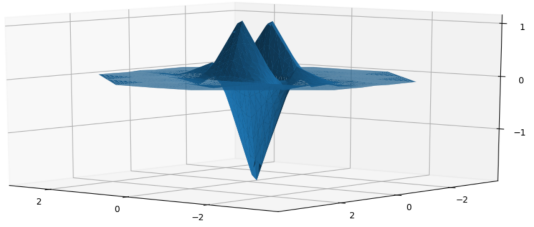
Всплеск-функция Медведя-4.



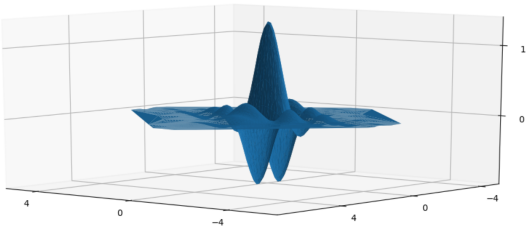
Всплеск-функция Дракона-2.



Всплеск-функция Дракона-4.



Всплеск-функция Квадрата-2.



Всплеск-функция Квадрата-4.

Рис. 20: Всплеск-функция, порождённая тайловым B-сплайном.

$z_2 = e^{-2\pi i(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{\xi})}$, $z = (z_1, z_2)$, где $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$. Тогда $e^{-2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi})} = z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ и $a_1(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{m}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^2} c_{\boldsymbol{k}} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$. Разложив функцию $a_1(\boldsymbol{z})$ в ряд Лорана в $\mathbb{C}^2$ и оценив скорость убывания его коэффициентов, мы получим оценку на C_2.

Воспользуемся тем, что $a_1(\boldsymbol{\xi}) = a(\boldsymbol{\xi})\frac{\sqrt{\Phi(\boldsymbol{\xi})}}{\sqrt{\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})}}$. Маска исходного уравнения $a(\boldsymbol{z})$ (до ортогонализации) имеет конечное число ненулевых коэффициентов разложения (поскольку исходное уравнение задано конечным числом коэффициентов $c_{\boldsymbol{k}}$), так что множитель $a(\boldsymbol{\xi})$ не влияет на скорость убывания коэффициентов $a_1(\boldsymbol{\xi})$. Также, как

мы увидим далее, наша оценка скорости убывания коэффициентов разложения функции в ряд Лорана будет зависеть только от её области голоморфности. Поэтому нас будут интересовать только нули знаменателя $\sqrt{\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})}$, то есть нули функции $\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})$. Таким образом, финальная оценка на показатель убывания коэффициентов $c_{\boldsymbol{k}}$ будет оценкой на коэффициенты разложения функции $\frac{1}{\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})}$ в ряд Лорана после замены на z. Нули знаменателя $\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})$ и оценки на скорость убывания такой функции можно выразить через нули знаменателя и оценки на скорость убывания функции $\frac{1}{\Phi(\boldsymbol{\xi})}$. Поскольку, как было показано в параграфе 3.4, коэффициенты разложения знаменателя данной функции в ряд Фурье равны $\Phi_{\boldsymbol{k}}$, коэффициенты разложения функции $\Phi(\boldsymbol{z})$ в ряд Лорана после замены будут также равны $\Phi_{\boldsymbol{k}}$. Поскольку мы знаем числа $\Phi_{\boldsymbol{k}}$, мы можем найти нули знаменателя функции $\frac{1}{\Phi(\boldsymbol{\xi})}$, а значит и $\frac{1}{\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})}$. Далее мы получим оценку на скорость убывания функции $f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{g(\boldsymbol{z})}$ в общем случае и затем применим её к функции $\frac{1}{\Phi(M^T\boldsymbol{\xi})}$.

Скорость убывания коэффициентов голоморфной функции двух переменных

Итак, нам нужно оценить скорость убывания коэффициентов функции $f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{g(\boldsymbol{z})}$ при разложении по степеням $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^2$. Для этого нам потребуются некоторые факты из многомерного комплексного анализа. Мы изучим, как устроено множество нулей функции $g(\boldsymbol{z})$, чтобы найти области голоморфности функции $f(\boldsymbol{z})$ и с помощью них оценить её коэффициенты. Отметим, что для голоморфной функции двух комплексных переменных множество нулей является объединением непрерывных кривых и, более того, не имеет компактных компонент связности.

Пусть $B_R = B_R^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — шар. *Дополнением шара* с радиусом r будем называть множество точек $B_r^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. *Кольцом* называется множество точек $A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. *Поликругом* радиуса $R = (R_1, R_2)$ с центром $\overline{0} \in \mathbb{C}^2$ называется множество точек $U(R) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^2 : |\boldsymbol{z}_v| < R_v, v = 1, 2\} = B_{R_1} \times B_{R_2}$.

Для изображения областей в $\mathbb{C}^2$ мы будем использовать диаграм-

мы Рейнхарта: $\{(|z_1|, |z_2|) \mid (z_1, z_2) \in U\}$. Так, поликруг на диаграмме представляется как прямоугольник с вершинами $(0, 0)$, (R_1, R_2).

Для заданных радиусов $r_1 < 1 < R_1$, $r_2 < 1 < R_2$ (их мы выберем позже) рассмотрим произведение колец $A = A_{r_1,R_1} \times A_{r_2,R_2}$. На диаграмме оно представляется как прямоугольник с вершинами (r_1, r_2), (R_1, R_2). Введём также области $P^{--} = B^-_{R_1} \times B^-_{R_2}$, $P^{+-} = B^+_{r_1} \times B^-_{R_2}$, $P^{-+} = B^-_{R_1} \times B^+_{r_2}$, $P^{++} = B^+_{r_1} \times B^+_{r_2}$. Область P^{--} является поликругом, остальные области являются прямыми произведениями шара и дополнения к шару. Объединение четырёх областей даёт всю комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$, а их пересечение — область A.

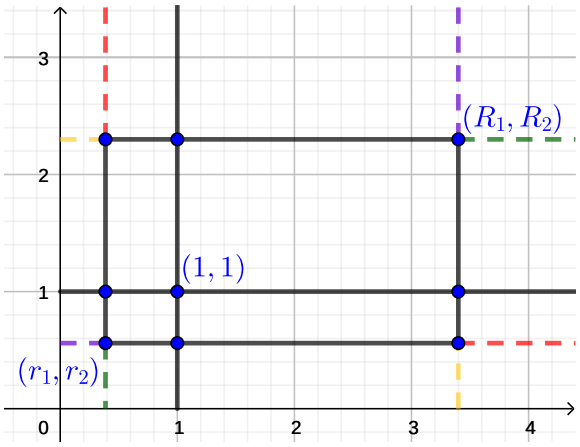


Рис. 21: Диаграмма Рейнхарта областей P^{--}, P^{+-}, P^{-+}, P^{++}

Предположим, функция $f = \frac{1}{g}$ лежит в $\mathscr{O}(A) \cap C(\overline{A})$, где $\mathscr{O}(A)$ обозначает множество функций, голоморфных в области A, $C(\overline{A})$ обозначает множество функций, непрерывных на замыкании A. Воспользуемся следующей классической теоремой о разложении в ряд Лорана [133]:

Теорема B. Если функция $f(x_1, x_2) \in \mathscr{O}(A) \cap C(\overline{A})$, то она раскладывается в сумму четырёх функций f^{++}, f^{+-}, f^{-+}, f^{--}, голоморфных в областях P^{++}, P^{+-}, P^{-+}, P^{--} соответственно.

Таким образом, мы получаем разложение функции $f = \frac{1}{g}$ на 4 слагаемых, пусть эти слагаемые f^{++}, f^{+-}, f^{-+}, f^{--}. Одно из них,

f^{--}, голоморфно в поликруге $P^{--} = B^-_{R_1} \times B^-_{R_2}$. Справедлива следующая теорема о разложении функции в степенной ряд в поликруге:

Теорема C. Пусть U — поликруг в $\mathbb{C}^2$ радиуса $R = (R_1, R_2)$ с центром $\overline{\mathbf{0}} \in \mathbb{C}^2$. Если $h \in \mathscr{O}(U) \cap C(\overline{U})$, то в каждой точке $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2) \in U$ она представляется кратным степенным рядом

$$h(\boldsymbol{z}) = \sum_{k_1,k_2 \geq 0} c_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}.$$

По этой теореме получаем: $f^{--}(x_1, x_2) = \sum\limits_{k_1,k_2 \geq 0} a_{k_1,k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2}$. Ряд сходится в поликруге P^{--}.

Остальные функции можно свести к голоморфным на поликруге заменой переменных. В функции f^{-+} заменим $z_1 = x_1$, $z_2 = \frac{1}{x_2}$. Тогда $f^{-+}(z_1, z_2)$ голоморфна в поликруге $P^{-+}(\boldsymbol{z}) = B^-_{R_1}(z_1) \times B^-_{\frac{1}{r_2}}(z_2)$, следовательно, она раскладывается в ряд $f^{-+}(z_1, z_2) = \sum\limits_{k_1,k_2 \geq 0} b_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$. Обозначим $a_{k_1,-k_2} = b_{k_1,k_2}$. Аналогичным образом получаем представление для оставшихся двух функций.

Функция $f(x_1, x_2)$ при этом раскладывается в сумму ряда

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} a_{k_1,k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2},$$

сходящегося в области A.

Оценим коэффициенты a_{k_1,k_2} для каждой из четырёх функций по формуле Коши и таким образом получим результирующую оценку на эти коэффициенты. Напомним формулировку для оценки Коши для степенного ряда двух переменных (см., например, [133]).

Теорема D. Если $h \in \mathscr{O}(U) \cap C(\overline{U})$, $|h| \leq M$ на множестве $\{|\boldsymbol{z}_1| = R_1\} \times \{|\boldsymbol{z}_2| = R_2\}$, то для коэффициентов степенного ряда справедливо неравенство

$$|c_{k_1,k_2}| \leqslant \frac{M}{R_1^{k_1} R_2^{k_2}}.$$

Применяем эту теорему отдельно к коэффициентам разложения f^{++}, f^{+-}, f^{-+}, f^{--} в каждом из четырёх поликругов по переменным z_1, z_2. Для $k_1, k_2 \geq 0$ получим оценки вида $|a_{k_1,k_2}| \leq \frac{C}{R_1^{k_1} R_2^{k_2}}$, $|a_{k_1,-k_2}| \leq \frac{C}{R_1^{k_1} r_2^{-k_2}}$, $|a_{-k_1,k_2}| \leq \frac{C}{r_1^{-k_1} r_2^{k_2}}$, $|a_{-k_1,-k_2}| \leq \frac{C}{r_1^{-k_1} r_2^{-k_2}}$.

Числа r_1, R_1, r_2, R_2 должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие $f = \frac{1}{g} \in \mathscr{O}(A) \cap C(\overline{A})$, где $A = A_{r_1,R_1} \times A_{r_2,R_2}$, то есть, чтобы у функции g не было нулей в замыкании области A. Для каждого возможного выбора r_1, R_1, r_2, R_2 получаются свои оценки на коэффициенты. Для простоты выберем $r_1 = \frac{1}{R_1} = r_2 = \frac{1}{R_2} = q$. Тогда картинка упрощается, прямоугольник на диаграмме Рейнхарта на Рисунке 21 становится квадратом с вершинами на биссектрисе координатного угла (см. Рисунок 22), а все оценки можно записать в общем виде

$$|a_{k_1,k_2}| \leq Cq^{|k_1|+|k_2|}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

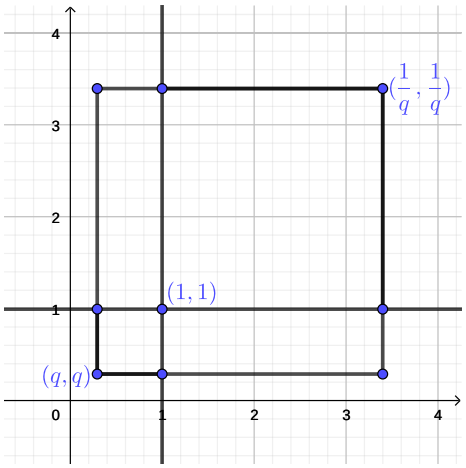


Рис. 22: Диаграмма Рейнхарта области $A(q,q) \times A(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$

Значение q подбирается численно с условием, чтобы в замыкании области $A(q,q) \times A(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$ не было нулей функции $g(x_1, x_2)$. Это всегда можно сделать, поскольку точка $(1,1)$ не является нулём функции g, а значит, в силу непрерывности функции g, существует и целая окрестность точки $(1,1)$, не содержащая нулей.

Собирая доказанное выше, получаем теорему

Теорема 3.18. *Пусть* $f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{g(\boldsymbol{z})}$, *где* g *голоморфна в области* $U \subset \mathbb{C}^2$, *содержащей точку* $(1,1)$, $g((1,1)) \neq 0$. *Пусть* q *выбрано так, что область* $A = A(q,q) \times A(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$ *лежит в* U *и не содержит нулей* $g(\boldsymbol{z})$ *в своём замыкании. Тогда в области* A *имеет место представление*

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} a_{k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

где коэффициенты оцениваются неравенством

$$|a_{k_1,k_2}| \leq C q^{|k_1|+|k_2|}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \tag{18}$$

для некоторой положительной константы C.

Оценка убывания коэффициентов всплеск-функций

Применим общую теорему о скорости убывания коэффициентов голоморфной функции, полученную в предыдущем параграфе, к оценке скорости убывания коэффициентов всплеск-функций, построенным по двухциферным тайлам в теореме 3.16.

Следствие 3.19. *Пусть* G — *двухциферный тайл,* $\varphi = B_n^G$ — *соответствующий ему тайловый B-сплайн. Через* φ_1 *обозначим его ортогонализацию, через* $c_{\boldsymbol{k}}$ — *коэффициенты масштабирующего уравнения для* φ_1. *Пусть* ψ — *соответствующая всплеск-функция, которая является линейной комбинацией* M*-сжатий функции* φ_1. *Для коэффициентов* $a_{k_1,k_2} = \pm c_{k_1,k_2}$ *этой линейной комбинации справедливо неравенство*

$$|a_{k_1,k_2}| = |c_{k_1,k_2}| \leq C q^{|k_1|+|k_2|}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \tag{19}$$

где q *выбирается так, чтобы у функции* $\Phi(M^T \boldsymbol{\xi})$ *после замены* $z_1 = e^{-2\pi i(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{\xi})}$, $z_2 = e^{-2\pi i(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{\xi})}$ *не было нулей в замыкании области* $A(q,q) \times A(\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$, *где* $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$.

Отсюда следует оценка на убывание самой всплеск-функции (константа C может поменяться).

Следствие 3.20. *Для ортогонализованного тайлового B-сплайна φ_1 и соответствующей ему всплеск-функции ψ выполнено*

$$|\varphi_1(x_1, x_2)| \leq Cq^{|x_1|+|x_2|}, x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

$$|\psi(x_1, x_2)| \leq Cq^{|x_1|+|x_2|}, x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

где q выбирается как в следствии 3.19.

Оценим скорость убывания всплеск-функции Медведя-2 и Медведя-4. То есть, мы рассматриваем G — тайл «Медведя» с матрицей из теоремы 2.8, $\varphi = B_2^G$ или $\varphi = B_4^G$.

Для Медведя-4 получаем $q = 0.85$. Примерное расположение нулей (рассмотрены только на некотором диапазоне) представлены на Рисунках 23, 24. Оранжевая прямая соответствует $y = x$, зелёная точка $(1, 1)$. Для Медведя-2 можно выбрать $q = 0.7$.

Следовательно, при $|k_1| + |k_2| > 40$, получаем, что для Медведя-4 $|c_{k_1,k_2}|$ не превосходит по порядку 10^{-3}, а для Медведя-2 10^{-6}. На самом деле, и при $|k_1| + |k_2| \leq 40$ большая часть коэффициентов будут малы. Сделаем более точный анализ убывания, чтобы установить, как много коэффициентов в разложении у всплеск-функции нужно сохранить, чтобы ℓ_2 и ℓ_1-норма вектора из этих коэффициентов и соответственно норма оставшейся функции не сильно изменились.

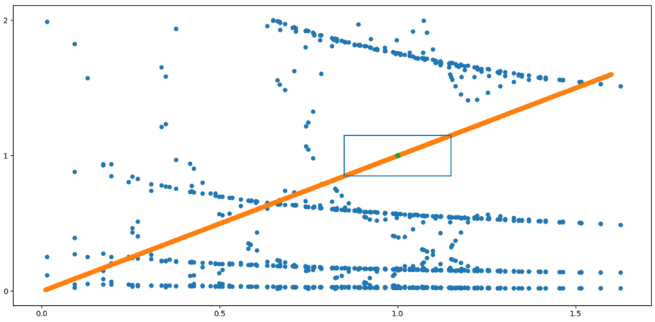


Рис. 23: Диаграмма Рейнхарта области нулей функции для Медведя-4 $\Phi(M_B^T \boldsymbol{\xi})$ (после замены на $\boldsymbol{z}$)

Поскольку мы не можем на практике хранить бесконечно много коэффициентов c_{k_1,k_2}, мы удаляем все коэффициенты, лежащие вне

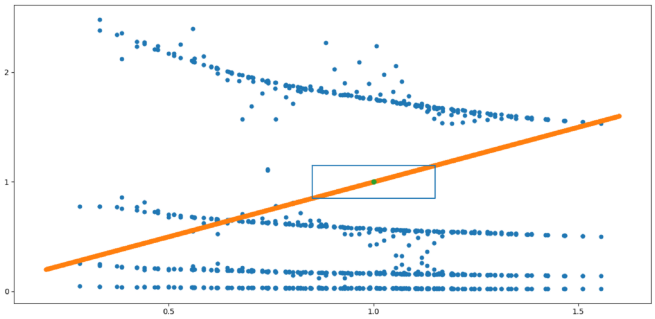


Рис. 24: Диаграмма Рейнхарта области нулей функции для Медведя-4 $\Phi(M_B^T\boldsymbol{\xi})$ (после замены на $\boldsymbol{z}$), другой масштаб. Изображён прямоугольник с вершинами (q,q), $(\frac{1}{q},\frac{1}{q})$.

какого-то большого квадрата, а именно, все коэффициенты с $|k_1|+|k_2|>m$. Каким нужно выбрать m, чтобы норма «хвоста», вектора из удалённых коэффициентов, была достаточно маленькой?

Предложение 3.21. *Для ℓ_2-нормы коэффициентов «хвоста» $H_2=\sqrt{\sum_{|k_1|+|k_2|>m} c_{k_1,k_2}^2}$ справедливо неравенство*

$$H_2 \le \frac{2Cq^{m+1}\sqrt{1+m-mq^2}}{(1-q^2)}, \tag{20}$$

а для ℓ_1-нормы коэффициентов $H_1=\sum_{|k_1|+|k_2|>m}|c_{k_1,k_2}|$ выполнено

$$H_1 \le \frac{4Cq^{m+1}(1+m-mq)}{(1-q)^2}, \tag{21}$$

где параметры q, C взяты из неравенства (18).

Таким образом, норма хвоста коэффициентов и в ℓ_1, и в ℓ_2, имеет порядок $O(q^m)$, где q — параметр, не превосходящий 1. После доказательства мы оценим константы при q^m для Медведя-2 и Медведя-4.

Доказательство предложения 3.21. Рассмотрим случай $k_1>0, k_2\ge 0$, общая оценка будет в 2 раза больше. Восполь-

зуемся неравенством (18). Справедливы неравенства

$$\sum_{\substack{k_1+k_2>m\\ k_1>0,k_2\geq 0}} c_{k_1,k_2}^2 \leq \sum_{s=m+1}^{\infty} sC^2q^{2s} \leq \frac{C^2q^{2m+2}(1+m-mq^2)}{(1-q^2)^2}.$$

Значит,

$$H_2 \leq \frac{2Cq^{m+1}\sqrt{1+m-mq^2}}{(1-q^2)}$$

и первая часть доказана.

Аналогично оценим ℓ_1-норму коэффициентов «хвоста».

$$\sum_{\substack{k_1+k_2>m\\ k_1>0,k_2\geq 0}} |c_{k_1,k_2}| \leq \sum_{s=m+1}^{\infty} sCq^s \leq \frac{Cq^{m+1}(1+m-mq)}{(1-q)^2}$$

Тогда

$$H_1 \leq \frac{4Cq^{m+1}(1+m-mq)}{(1-q)^2}.$$

□

Константа C может быть оценена из теоремы D. В дальнейших выкладках будем для простоты считать, что $C = 1$. Оценка значения q проиллюстрирована в параграфе 3.6.

Пример 3.22. (Медведь-2). Для Медведя-2 имеем $q = 0.7$. Значения правой части в оценке (20) при $q = 0.7$ и некоторых m приведены в Таблице 3. Рассмотрим $m = 22$, при котором получается $H_2 \leq 0.005$.

m	1	10	15	21	22	30	60
$H_2 \leq$	2.36	0.19	0.038	0.00525	0.00375	0.00025	0.00000025

Таблица 3: Оценки на ℓ_2-норму «хвоста» коэффициентов H_2 при $q = 0.7$

Среди оставшихся коэффициентов c_{k_1,k_2}, у которых $|k_1|+|k_2| \le m$, выберем как можно больше так, чтобы корень из суммы их квадратов не превосходил 0.005. Эти коэффициенты мы также удалим. При этом ℓ_2-норма остальных коэффициентов не превосходит 0.01 и мы получим небольшую погрешность.

Численные результаты показывают, что остаётся всего 65 коэффициентов, их расположение и значения показаны на Рисунке 25. Размер точек связан со значениями коэффициентов логарифмически. Значения коэффициентов также приведены в Таблице 6, оставлена только половина, поскольку в нашем случае $c_{i,j} = c_{-i,-j}$.

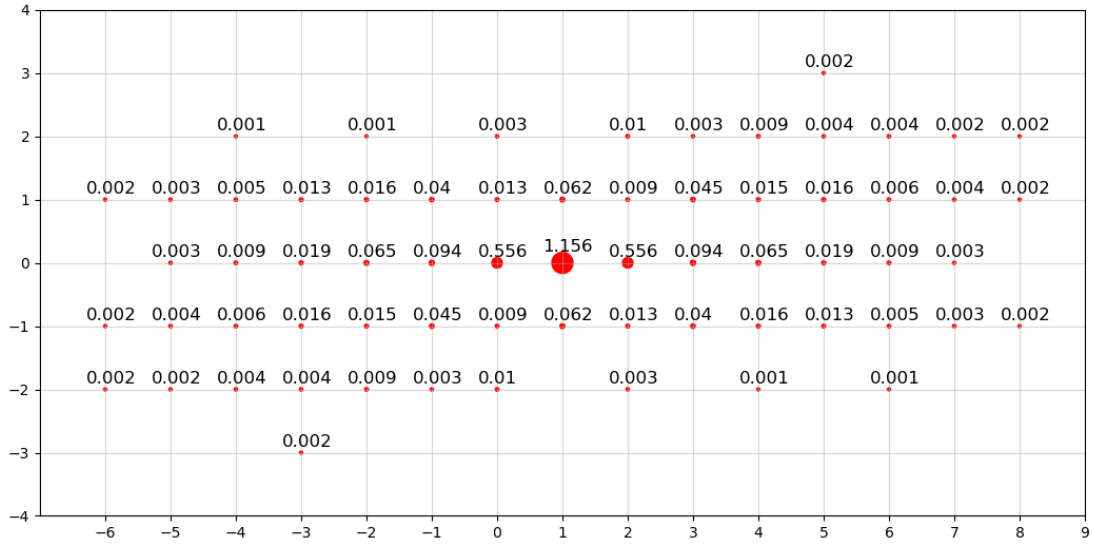


Рис. 25: Выбранные 65 коэффициентов, обеспечивающие ошибку в ℓ_2-норме < 0.01

Аналогично, значения правой части в оценке (21) для Медведя-2 при $C = 1$, $q = 0.7$ и при некоторых m приведены в Таблице 4. Рассмотрим $m = 32$, при котором получается $H_1 \le 0.005$.

m	1	10	20	30	32	45	60
$H_1 \leq$	28.3	3.52	0.17	0.007	0.0036	0.000048	0.0000003

Таблица 4: Оценки на ℓ_1-норму «хвоста» коэффициентов H_1 для Медведя-2

Снова выберем среди оставшихся коэффициентов c_{k_1,k_2}, у которых $|k_1| + |k_2| \leq m$, как можно больше так, чтобы сумма их модулей не превосходила 0.005, и удалим их. Численные вычисления показывают, что остаётся 149 коэффициентов, они показаны на Рисунке 26. При этом ℓ_1-норма удалённых коэффициентов не превосходит 0.01. Значения коэффициентов даны в Таблице 5.

i	1	0	3	4	1	3	3	-3
j	0	0	0	0	1	1	-1	0
$c_{i,j}$	1.15586	0.55632	-0.09441	-0.06459	0.06225	-0.04478	-0.03976	0.01911
i	5	4	4	2	5	0	-4	4
j	1	-1	1	-1	-1	-2	0	2
$c_{i,j}$	0.01591	0.01557	0.01535	-0.01304	0.01256	-0.00979	0.00935	0.00911
i	2	-4	-4	6	-5	5	-5	2
j	1	-1	1	2	-1	2	1	-2
$c_{i,j}$	-0.00862	-0.00644	-0.00543	-0.00430	-0.00418	-0.0041	-0.00350	0.00339
i	3	-5	-5	-6	5	-6	8	6
j	1	-1	1	2	-1	2	1	-2
$c_{i,j}$	0.00306	-0.00292	0.00207	0.00172	-0.00156	0.00153	0.00151	-0.00124
i	4	-6	5	7	-1	-7	6	-7
j	2	0	-2	-1	3	-2	-1	-2
$c_{i,j}$	0.00123	-0.00113	-0.00108	0.00102	-0.00101	0.00095	0.00091	0.00085
i	-1	1	-5	-7	-6	4	8	9
j	-2	0	-2	3	3	-1	3	1
$c_{i,j}$	0.00081	0.00079	0.00074	-0.00073	0.00059	-0.00057	-0.00057	-0.00047
i	-8	4	2	2	10	10	-7	5
j	-3	3	2	-2	2	3	3	3
$c_{i,j}$	-0.00046	0.00046	-0.00045	-0.00040s	-0.00037	-0.00036	-0.00032	0.00032
i	-7	1	0	-8	10	11	8	6
j	-2	-3	4	-3	1	-1	2	-3
$c_{i,j}$	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	-0.00022	0.00021	-0.00021	0.00019
i	-1	-9	-9	11	-5	4	9	10
j	2	1	-3	1	-4	4	4	4
$c_{i,j}$	-0.00018	-0.00018	0.00018	-0.00018	-0.00016	0.00015	0.00014	0.00012
i	12	3	11					
j	2	5	-2					
$c_{i,j}$	0.00012	0.00011	0.00011					

Таблица 5: Коэффициенты Медведя-2 для приближения в ℓ_1 с точностью 0.01

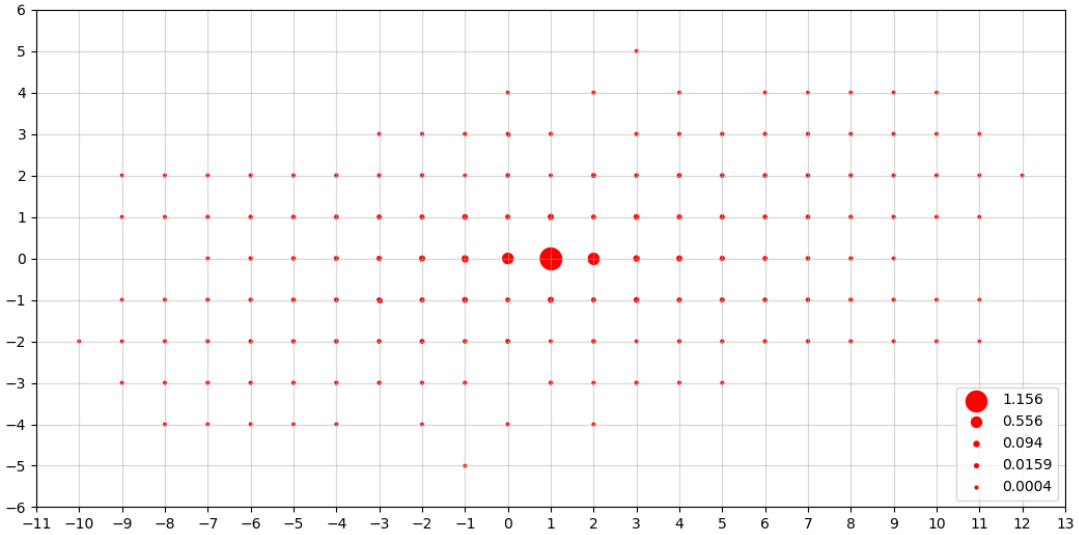


Рис. 26: Выбранные 149 коэффициентов, обеспечивающие ошибку в ℓ_1-норме < 0.01

i	1	0	3	4	1	3	3	-3
j	0	0	0	0	1	1	-1	0
$c_{i,j}$	1.15586	0.5563	-0.09441	-0.06459	0.06225	-0.04478	-0.0398	0.0191
i	5	4	4	2	5	0	-4	4
j	1	-1	1	-1	-1	-2	0	2
$c_{i,j}$	0.01591	0.01557	0.01535	-0.01304	0.01256	-0.00979	0.00935	0.00911
i	2	-4	-4	6	-5	5	-5	2
j	1	-1	1	2	-1	2	1	-2
$c_{i,j}$	-0.00862	-0.00644	-0.00543	-0.00430	-0.00418	-0.0041	-0.00350	0.00340

i	3	-5	-5	-6	5	-6	8	6	4
j	2	0	-2	-1	3	-2	-1	-2	-2
$c_{i,j}$	0.0031	-0.0029	0.0021	0.0017	-0.0016	0.0015	0.0015	-0.0012	0.0012

Таблица 6: Коэффициенты Медведя-2 для приближения в ℓ_2

Пример 3.23. (Медведь-4). Для Медведя-4 имеем $q = 0.85$. В Таблице 7 указаны значения правой части в оценке (20) при $q = 0.85$ и некоторых m. Рассмотрим $m = 53$, при котором для Медведя-4 получается $H_2 \leq 0.005$. Снова выберем как можно больше коэффициентов c_{k_1,k_2} ($|k_1| + |k_2| \leq m$), чтобы корень из суммы их квадратов

не превосходил 0.005, и удалим их. Тогда ℓ_2-норма оставшихся коэффициентов не превосходит 0.01. Их значения даны в Таблице 8.

m	1	10	20	30	40	53	60
$H_2 \leq$	5.89	2.34	0.61	0.14	0.03	0.0044	0.0015

Таблица 7: Оценки на ℓ_2-норму «хвоста» коэффициентов H_2 для Медведя-4

i	2	1	5	2	0	0	4	6
j	0	0	0	-1	-1	1	0	-1
$c_{i,j}$	1.08200	0.60379	-0.13271	0.08179	-0.06971	-0.06948	-0.06578	0.04453
i	6	-3	-2	-1	8	5	-4	3
j	1	0	0	-2	-1	-1	-1	2
$c_{i,j}$	0.04344	0.03556	0.03408	0.02357	-0.02329	0.02213	-0.02085	-0.01941
i	-3	7	5	-3	1	-5	-4	9
j	-2	-1	1	-1	1	-2	0	-1
$c_{i,j}$	-0.01931	-0.01870	0.01740	-0.01580	-0.01272	0.0122	-0.01128	0.01096
i	10	-5	8	6	-6	1	-4	-5
j	-1	-1	2	2	-1	2	-3	0
$c_{i,j}$	0.01051	0.00876	0.00874	-0.00846	0.00804	0.00796	0.00734	-0.00710
i	-3	9	-7	-2	-6	-6	1	11
j	2	-2	-2	-3	-2	-3	-1	-1
$c_{i,j}$	-0.00701	0.00677	-0.00635	-0.00626	-0.00607	-0.00598	-0.00577	-0.00505
i	0	11	8	10	9	0	-8	-8
j	3	-2	-2	-2	3	-2	1	-3
$c_{i,j}$	-0.00486	-0.0049	0.00460	-0.00425	-0.00408	0.00402	-0.00399	0.0040
i	6	-7	-7	7	-8	1	12	2
j	-3	-3	-1	3	-2	-4	-2	-3
$c_{i,j}$	0.00359	0.00347	-0.00339	0.0032	0.00323	-0.00302	0.00297	0.00293
i	13	-2	-9	-1	-7	1	-9	-8
j	-2	2	-2	2	-4	4	-3	-1
$c_{i,j}$	0.00289	-0.00280	0.00277	0.00257	0.00237	0.00230	-0.00230	-0.00228
i	-10	-9	-5	4	5	13	-1	-6
j	-3	-4	-4	3	-3	-1	-4	0
$c_{i,j}$	-0.00221	-0.00200	-0.00199	0.00198	0.00195	0.00181	0.00177	0.00174
i	14	12	7	-11	10	8	-2	-11
j	-2	4	-3	2	4	-3	-5	-4
$c_{i,j}$	-0.00171	-0.00161	-0.00148	-0.00147	0.00145	-0.00144	-0.00142	0.00138
i	-10	14	-9	-1	4	-11	-10	1
j	-2	4	0	-3	5	-3	1	3
$c_{i,j}$	-0.0014	0.00131	0.00131	-0.00129	0.00126	0.0013	0.00113	-0.00111
i	-12	-11	14	-12	15	14	-12	12
j	-3	-2	0	-4	0	-3	2	0
$c_{i,j}$	0.00104	-0.00093	-0.00091	-0.00088	-0.00087	-0.00085	0.00083	0.00081
i	-13	-10	-9	-8	-4	-5	-12	8
j	-4	-5	-1	3	-5	4	-5	4
$c_{i,j}$	-0.00081	0.00080	0.0008	0.00076	0.00073	0.00072	-0.00070	-0.00070
i	13	5						
j	-3	-4						
$c_{i,j}$	-0.00068	-0.00067						

Таблица 8: Коэффициенты Медведя-4 для приближения в ℓ_2 с точностью 0.01

3.7 Гладкость тайловых B-сплайнов

Гладкость является одним из важнейших параметров масштабирующих функций и порождаемых ими систем всплесков. Для всплесков, гладкость влечёт хорошие аппроксимационные свойства и быстрое убывание коэффициентов всплеск-разложений [126, 132]. В некоторых приложениях, например, в методе вейвлет-Галёркина, гладкость является ключевым свойством. Для алгоритмов SubD гладкость предельной функции определяет как качество приближаемой поверхности, так и скорость сходимости алгоритма [30].

Если для классических (кусочно-полиномиальных) сплайнов, гладкость определяется их порядком, то для тайловых B-сплайнов вычисление показателей гладкости представляет серьёзную проблему. Мы применим метод, разработанный в недавней статье [34] и вычислим точные показатели гладкости тайловых B-сплайнов низких порядков.

Определение 3.24. Общим показателем гладкости функции φ по Гёльдеру в пространстве C называется число

$$\alpha_\varphi = k + \sup\left\{\alpha \geq 0 \,:\, \|\varphi^{(k)}(\cdot + h) - \varphi^{(k)}\|_C \leq C\|h\|^\alpha, \forall h \in \mathbb{R}^d\right\},$$

где k — наибольшее число, для которого $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^d)$.

Если $\varphi \in C^\infty$, то полагаем $\alpha_\varphi = +\infty$.

Аналогично определяется показатель гладкости в L_2, с заменой $C^k(\mathbb{R}^d)$ на $W_2^k(\mathbb{R}^d)$.

Как известно, значение показателя Гёльдера масштабирующей функции определяется совместным спектральным радиусом (с заменой на L_2-радиус для гладкости в L_2). Они определяются так:

Определение 3.25. Для линейных операторов A_0, A_1 их совместным спектральным радиусом называется величина

$$\rho_C(A_0, A_1) = \lim_{s\to\infty} \max_\sigma \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(s)}\|^{1/s},\ \sigma\colon \{1, \dots, s\} \to \{0, 1\}.$$

Определение 3.26. Для линейных операторов A_0, A_1 их L_2-радиусом называется величина

$$\rho_2(A_0, A_1) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2^s} \sum_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(s)}\|^2 \right)^{1/2s}.$$

Пусть дано масштабирующее уравнение с конечным числом слагаемых. Рассмотрим множество

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,:\, \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{\infty} M^{-j}\boldsymbol{\gamma}_j\}.$$

Далее выберем для матрицы растяжения M произвольный набор цифр $D(M)$, порождающий некоторый тайл G_0. Этот тайл назовём *базисным тайлом*. В случае тайловых B-сплайнов в роли базисного тайла можно брать тайл, свёртки которого порождают данный B-сплайн.

Определение 3.27. Множество $\Omega \subset \mathbb{Z}^d$ — минимальное множество целых векторов, такое что $K \subset \Omega + G_0 = \bigcup\limits_{\boldsymbol{k}\in\Omega} (\boldsymbol{k} + G_0)$.

Это множество можно найти с помощью алгоритма из работы [33]. В одномерном случае для $M = 2$, $D(M) = \{0, 1\}$, базисный тайл $G_0 = [0, 1]$ — единичный отрезок. Если масштабирующее уравнение задано коэффициентами $c_0, \dots, c_N$, то $K = [0, N]$, $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$.

Если базисный тайл зафиксирован, то можно определить *матрицы переноса* (transition matrices) $(T_d)_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = c_{M\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\Delta}}$ для всех $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \Omega, \boldsymbol{\Delta} \in D(M)$.

С помощью этих матриц можно найти показатель гладкости по Гёльдеру масштабирующей функции φ (см. [34]). Он выражается через совместные спектральные характеристики матриц, ограниченных на специальное общее собственное подпространство, причём в большинстве случаев в качестве этого подпространства берётся $W = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid \sum_k x_k = 0\right\}$. А именно, если показатель Гёльдера

не превосходит единицы и если целые сдвиги функции φ линейно независимы (подробнее про это свойство см. параграф 3.8), то имеют место следующие равенства:

$$\alpha_\varphi = -\log_{\rho(M)}(\rho_C(T_0|_W, T_1|_W)),$$

$$\alpha_{\varphi,2} = -\log_2(\rho_2(T_0|_W, T_1|_W)),$$

где $\rho(M)$ обозначает спектральный радиус матрицы. В общем случае, если нет ограничения на показатель Гёльдера, он вычисляется по аналогичным формулам

$$\alpha_\varphi = -\log_{\rho(M)}(\rho_C(T_0|_{W_k}, T_1|_{W_k})), \tag{22}$$

$$\alpha_{\varphi,2} = -\log_2(\rho_2(T_0|_{W_k}, T_1|_{W_k})), \tag{23}$$

где W_k — пространство векторов из $\mathbb{R}^d$, ортогональное пространству полиномов d переменных степени не выше k; показатель k в формулах (22), (23) — максимальное число, для которого пространство W_k инвариантно относительно матриц T_0, T_1.

Замечание 3.28. Для L_2-радиуса $n \times n$ матриц A_0, A_1 есть явная формула для вычисления, выражающая его через наибольшее собственное значение линейного оператора $\mathscr{A}X = \frac{1}{2}(A_0^T X A_0 + A_1^T X A_1)$, действующего на пространстве симметрических $n \times n$ матриц X:

$$\rho_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathscr{A})}.$$

Так как оператор имеет инвариантный конус (конус положительно определённых матриц), то по теореме Крейна-Рутмана [79] старшее собственное значение $\lambda_{max}(\mathscr{A})$ неотрицательно. Матрица оператора $\mathscr{A}$ записывается следующим образом:

$$\frac{1}{2}(A_0 \otimes A_0 + A_1 \otimes A_1),$$

где $\otimes$ означает кронекеровское произведение матриц [134, 16]. Таким образом, вычисление L_2-радиуса сводится к проблеме вычисления

B-сплайн	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4
Квадрат	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
Дракон	0.2382	1.0962	1.8039	2.4395	3.0557
Медведь	0.3946	1.5372	2.6323	3.7092	4.7668

Таблица 9: Гладкость в L_2 двухциферных тайловых B-сплайнов.

B-сплайн	B_0	B_1	B_2	B_3
Квадрат	0	1	2	3
Дракон	0	0.47637	1.5584	2.1924
Медведь	0	0.7892	2.2349	3.0744

Таблица 10: Гладкость в C двухциферных тайловых B-сплайнов.

старшего собственного значения линейного оператора в размерности $\frac{n^2+n}{2}$.

Для совместного спектрального радиуса явной формулы скорее всего не существует. Более того, известно, что задача его вычисления для общих матриц с рациональными коэффициентами является алгоритмически неразрешимой, а для булевских матриц — NP-полной [23]. Тем не менее в большинстве случаев, в относительно небольших размерностях (до 25), удаётся алгоритмически найти точное значение совместного спектрального радиуса с помощью так называемого алгоритма инвариантного многогранника [62]. Мы применяем усовершенствованную версию этого алгоритма, представленную в [94].

В Таблицах 9, 10 представлены значения гладкости тайловых B-сплайнов до 4 порядка. Они приводят нас к следующей теореме.

Теорема 3.29. *Тайловые B-сплайны Медведь-3 и Медведь-4 принадлежат $C^2(\mathbb{R}^2)$ и $C^3(\mathbb{R}^2)$ соответственно.*

Как известно, классические двумерные B-сплайны соответствующих порядков не принадлежат C^2 (соответственно C^3).

Замечание 3.30. Утверждение теоремы может показаться парадоксальным — гладкость фрактального B-сплайна оказалась выше, чем гладкость прямоугольного. Возможно, это связано с тем, что куб имеет плоские грани, которые медленно сглаживаются при автосвёртках, а в тайлах со фрактальной структурой сглаживание происходит быстрее. На Рисунке 27 проиллюстрирована разница между автосвёрткой характеристической функции квадрата и круга: в случае круга площадь пересечения $\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ из формулы показателя Гёльдера убывает гораздо быстрее.

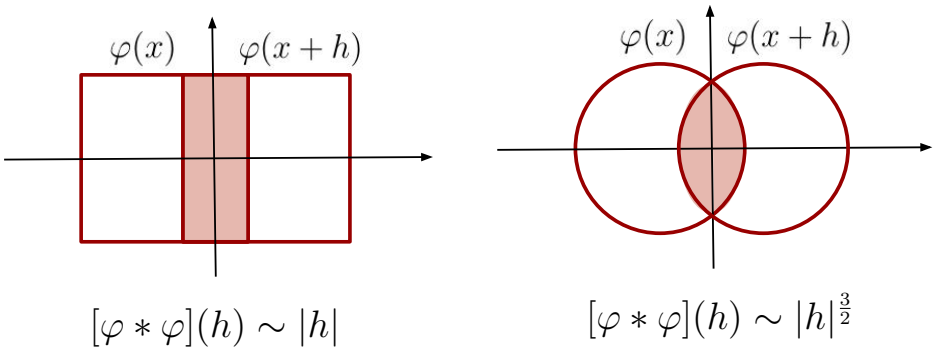


Рис. 27: Сравнение автосвёртки квадрата и круга.

Похожий феномен был замечен П. Освальдом при исследовании алгоритмов SubD [71, 107, 109]. Заметим также, что в одномерном случае среди всех масштабирующих уравнений с заданным количеством коэффициентов максимальную гладкость решения имеет B-сплайн [30]. Как мы видим, для функций двух переменных, для 4 и 5 коэффициентов максимальная гладкость получается у Медведей. Для сплайнов большего порядка гладкость вычислить не удаётся из-за больших объёмов вычисления спектрального радиуса.

На Рисунках 28 – 36 приведены графики частных производных порядка 1, 2 и 3 для Медведя-4.

Замечание 3.31. Значения гладкости для больших порядков тайловых B-сплайнов не приведены, поскольку поиск совместного спектрального радиуса затруднителен при больших размерах матриц. Матрицы переноса быстро растут при увеличении числа компонент

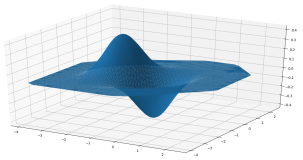


Рис. 28: Производная Медведя-4 по x.

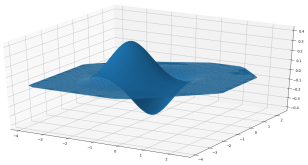


Рис. 29: Производная Медведя-4 по y.

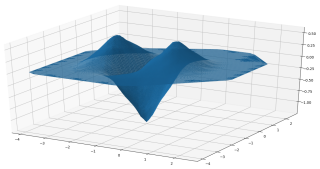


Рис. 30: Производная Медведя-4 по x, x.

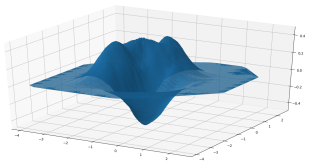


Рис. 31: Производная Медведя-4 по x, y.

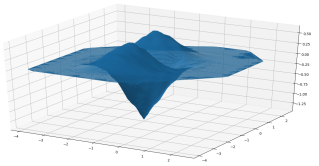


Рис. 32: Производная Медведя-4 по y, y.

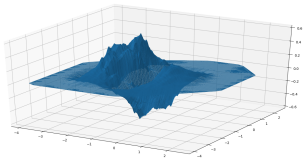


Рис. 33: Производная Медведя-4 по x, x, x.

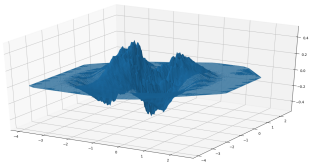


Рис. 34: Производная Медведя-4 по x, x, y.

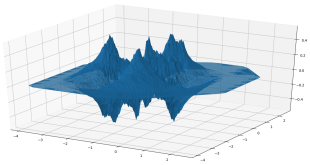


Рис. 35: Производная Медведя-4 по x, y, y.

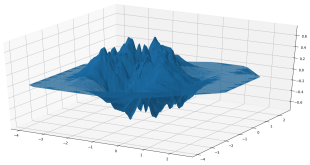


Рис. 36: Производная Медведя-4 по y, y, y.

в свёртке. Вопрос об асимптотике поведения гладкости при увеличении порядка B-сплайнов остаётся открытым.

3.8 Алгоритмы детализации поверхностей

В этом параграфе мы применим полученные тайловые B-сплайны для построения специального класса алгоритмов SubD (subdivision schemes / алгоритмы подразбиения / алгоритмы детализации поверхностей и др.).

Алгоритмы SubD — это линейные итеративные алгоритмы, строящие функцию по данным значениям на некоторой грубой решётке.

Результирующая поверхность получается как предел функций, построенных на каждой итерации по значениям, вычисленным на всё более плотной решётке (что объясняет название алгоритмы детализации). В случае плоской решётки поверхность является графиком предельной функции, можно также получать многообразия (см. конец параграфа 3.8). Далее мы рассмотрим эти алгоритмы и их свойства.

Пусть снова $M \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ — растягивающая матрица. Для произвольной маски (набора чисел) $\{c_{\boldsymbol{k}}\}$ вводится SubD-оператор $S : \ell_\infty(\mathbb{Z}^d) \to \ell_\infty(\mathbb{Z}^d)$:

$$[Su](\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} c_{\boldsymbol{k}-M\boldsymbol{j}} \cdot u(\boldsymbol{j}), \quad u \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^d).$$

После многократного применения SubD-оператора мы получим последовательность значений, по которой можно построить функцию.

Пример 3.32. Одномерный случай. Пусть $M = 2$, u — последовательность значений в целых точках. По ней можно построить функцию $f_0(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\chi_{[0,1]}(\cdot - k)$, постоянную на отрезках $[k, k+1], k \in \mathbb{Z}$. После q итераций SubD-оператора строится функция

$$f_q(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} [S^q u](k)\chi_{[0,1]}(2^q \cdot -k),$$

постоянная на отрезках $[\frac{k}{2^q}, \frac{k+1}{2^q}], k \in \mathbb{Z}$.

Вместо функции $\chi_{[0,1]}$ можно рассматривать любую другую функцию $h(x)$, удовлетворяющую свойству разбиения единицы, то есть $\sum_{j\in\mathbb{Z}} h(x-j) \equiv 1$, что равносильно $\widehat{h}(0) = 1, \widehat{h}(s) = 0, s \neq 0$. Например, $h(x) = B_1(x)$ даст кусочно-линейные функции f_q на каждой итерации. Если при некоторой допустимой функции h для любой последовательности u существует предел функций f_q (при $q \to \infty$) в L_∞, то говорят, что алгоритм SubD *сходится*. Соответствующий предел называется *предельной функцией* для заданной u.

Так же поступаем в общем, многомерном случае. Определим

$f_q = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} [S^q u](\boldsymbol{k})\chi_{[0,1]^d}(M^q \cdot -\boldsymbol{k})$ (кусочно-постоянное приближение).

Вместо $\chi_{[0,1]^d}$ можно подставить любую функцию $h(\boldsymbol{x})$ со свойством $\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{j}) \equiv 1$. В частности, подойдёт характеристическая функция любого тайла $h = \chi_G$, линейный многомерный B-сплайн B_1 и т.д..

Далее рассмотрим сходимость алгоритма в C^n. При $n \geq 0$ определим пространство функций

$$Q_n = \left\{ h \in C^n(\mathbb{R}^d) \mid \widehat{h}(0) = 1, \widehat{h} \begin{array}{l}\text{имеет нули порядка}\\ \text{хотя бы}\end{array} n+1 \text{ в любой точке } \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\right.$$

Тогда верно, что $h \in Q_n$ тогда и только тогда, когда $h \in C^n(\mathbb{R}^d)$, $\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d} h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{j}) \equiv 1$, где каждый алгебраический многочлен P_n переменных $x_1, \ldots, x_d$ степени не выше n лежит в линейной оболочке $\{h(\cdot - \boldsymbol{j})\}_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^d}$ ([25]).

Например, $\chi_{[0,1]^d} \notin Q_0$, классические сплайны B_1 и B_{n+1} принадлежат Q_0 и Q_n соответственно.

Определение 3.33. Алгоритм SubD сходится в C^n, если при некотором $h \in Q_n$, для любого $u \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^d)$ существует функция $f_u \in C^n(\mathbb{R}^d)$, такая что

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} [S^q u](\boldsymbol{k}) h(M^q \cdot - \boldsymbol{k}) - f_u(\cdot) \right\|_{C^n(\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad (q \to \infty).$$

Замечание 3.34. Всегда можно выбрать $h = B_{n+1}$ (классический B-сплайн порядка n). На самом деле, факт сходимости не зависит от выбора начальной функции $h \in Q_n$, т.е. в определении 3.33 слова «при некотором $h \in Q_n$» можно заменить на «при любом $h \in Q_n$».

Оператор S — линейный и инвариантный относительно целых сдвигов, т.е. при применении S к сдвигу на $\boldsymbol{k}$ последовательности u получаем сдвиг на $\boldsymbol{k}$ последовательности Su. Поэтому достаточно знать предельную функцию только для δ-последовательности $\delta(\boldsymbol{k}) = \delta^{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{k}}$, обозначим её через f_δ (в случае сходимости). Тогда для произвольной последовательности $u \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^d)$ предельная функция

будет иметь вид

$$f_u(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} f_\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})\cdot u(\boldsymbol{k}),$$

поскольку $u = \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} u(\boldsymbol{k})\delta(\boldsymbol{k})$. Оказывается [30], что f_δ удовлетворяет масштабирующему уравнению с коэффициентами SubD-оператора $c_{\boldsymbol{k}}$:

$$f_\delta(x) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} c_{\boldsymbol{k}} f_\delta(M\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}).$$

Мы будем брать в роли чисел $c_{\boldsymbol{k}}$ коэффициенты масштабирующих уравнений, которые порождают тайловые B-сплайны. Таким образом, f_δ будет равна тайловому B-сплайну B_n^G, а для произвольной исходной последовательности предельная функция будет линейной комбинацией целых сдвигов B_n^G. В частности, гладкость предельных функций будет совпадать с гладкостью B-сплайна.

Отметим, что количество вычислений на каждом шаге, которое требуется сделать для применения SubD-оператора, зависит от количества ненулевых коэффициентов c_k у масштабирующего уравнения — чем оно меньше, тем быстрее мы будем производить итерации.

Как мы получили в параграфах 3.1 и 3.2, у классического B-сплайна порядка n от d переменных B_n будет $(n+2)^d$ ненулевых коэффициентов. При этом в любой размерности можно взять тайловый B-сплайн с $n+2$ коэффициентами, порождённый тайлом-параллелепипедом из двух цифр (такие тайлы существуют в любой размерности, см. [136]). При этом сами функции, B-сплайны, и соответственно предельные поверхности у алгоритмов SubD такие же, как в классическом случае, поскольку они являются свёртками тех же характеристических функций параллелепипедов. Единственное отличие в том, как организован данный алгоритм. Получаем следующую теорему:

Теорема 3.35. *Алгоритм SubD в $\mathbb{R}^d$, порождённый тайловым B-сплайном B_n^G, где G — тайл-параллелепипед, имеет сложность*

вычисления одной итерации $n+2$. Классический d-мерный алгоритм SubD порядка n, порождённый произведением d одномерных B-сплайнов B_n, имеет сложность вычисления одной итерации $(n+2)^d$. Эти алгоритмы порождают одни и те же предельные поверхности.

Известно (см., например, [36, 47]), что для сходимости алгоритма SubD в C^n необходимо, чтобы

1) соответствующее масштабирующее уравнение имело решение $\varphi \in C^n$ (в общем случае известно лишь, что масштабирующее уравнение всегда имеет единственное решение с точностью до умножения на константу в пространстве обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'$ [132]).

2) выполнялось правило сумм: маска уравнения a имеет нули порядка хотя бы $n+1$ в точках $M^{-T}\boldsymbol{\Delta}_*$ для всех $\boldsymbol{\Delta}_* \in D_* \setminus \{0\}$, где D_* — произвольное множество цифр, соответствующих транспонированной матрице M^T, и $a(0) = 1$ (см., например, [30]). Это условие легко переписывается в виде линейных соотношений на коэффициенты $c_{\boldsymbol{k}}$ масштабирующего уравнения. В частности, правило сумм порядка $n = 0$ равносильно тому, что $\sum_{\boldsymbol{k}} c_{M\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\Delta}} = 1$ для каждого вектора $\boldsymbol{\Delta} \in D$, где D — цифры базисного тайла.

Эти условия не являются достаточными, соответствующие примеры хорошо известны [80]. Тем не менее, если выполнены условия 1, 2 и дополнительно известно, что предельная масштабирующая функция φ устойчива, то есть её целочисленные сдвиги линейно независимы, то алгоритм гарантированно сходится в C^n ([30] при $n = 0$, [110] при $n \geq 1$). Известно, что функция φ устойчива тогда и только тогда, когда её преобразование Фурье не имеет периодических нулей, то есть не существует точки $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, для которой $\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi} + k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}^d$ (см., например, [30]).

Предложение 3.36. *Для любого $n \geq 1$ B-сплайн d переменных B_n порядка n непрерывен, устойчив и его масштабирующее уравнение удовлетворяет правилу сумм порядка n.*

Доказательство. Поскольку свёртка характеристических функций

нескольких компактных множеств непрерывна, функция B_n непрерывна. Устойчивость следует из того, что у преобразования Фурье $\widehat{B}_n(\boldsymbol{\xi})$ нет периодических нулей. Действительно, поскольку преобразование Фурье свёртки является произведением преобразований Фурье сомножителей, выполнено $\widehat{B}_n(\boldsymbol{\xi}) = (\widehat{B}_0(\boldsymbol{\xi}))^{n+1}$. Поскольку у тайла целочисленные сдвиги линейно независимы, у соответствующего преобразования Фурье $\widehat{B}_0(\boldsymbol{\xi})$ нет периодических нулей, а тогда и у преобразования Фурье $\widehat{B}_n(\boldsymbol{\xi})$ нет периодических нулей.

Проверим правило сумм. Для B_0 выполнено правило порядка 0 по определению тайла, так как $c_{\boldsymbol{\Delta}} = 1$ для любого $\boldsymbol{\Delta} \in D$ и цифры принадлежат разным классам $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$. Зафиксируем D_* — произвольное множество цифр, соответствующих транспонированной матрице M^T. Тогда для маски a_0 выполнено правило сумм порядка 0 и в терминах преобразования Фурье: $a_0(M^{-T}\boldsymbol{\Delta}_*) = 0$ для всех $\boldsymbol{\Delta}_* \in D_* \setminus \{\mathbf{0}\}$ и $a_0(\mathbf{0}) = 1$. Поскольку маска тайлового B-сплайна B_n равна $a_n(M^{-T}\boldsymbol{\Delta}_*) = a_0(M^{-T}\boldsymbol{\Delta}_*)^{n+1}$, то для B_n выполнено правило сумм порядка n. □

Следствие 3.37. *Пусть показатель гладкости по Гёльдеру тайлового B-сплайна B_n равен α. Тогда алгоритм SubD, построенный по B_n, сходится в C^k при любом $k \leq \alpha$.*

Одним из важнейших вопросов теории алгоритмов SubD является вопрос о скорости сходимости. В [39] скорость сходимости алгоритмов SubD в $C^n(\mathbb{R})$ (обобщённая скорость сходимости) была определена с помощью разностных схем. Затем она обобщалась на многомерный случай ([41]). Мы используем аналогичное определение в терминах из работы [110]. Везде далее для простоты мы будем предполагать, что матрица M изотропна, то есть она диагонализуема и все её собственные значения равны по модулю (общий случай рассматривается аналогично, см. [34]).

Оказывается [36, 30], что алгоритм сходится в C^n с экспоненциальной скоростью: для любого $u \in \ell_\infty, \|u\|_{\ell_\infty} = 1$, $r = 0, \ldots, n$ выполнено

$$\|f_q^{(r)} - f^{(r)}\|_{C(\mathbb{R}^d)} \leq C \cdot \tau_r^{-q},$$

где $f = f_u$ — предельная функция для u, f_q — результат итерации q. Показатели сходимости $\tau_0 = \ldots = \tau_{n-1} = m^{\frac{1}{d}}$, где $m = |\det M|$, τ_n зависит от коэффициентов алгоритма SubD. А именно, выполнено

$$\tau_n = \rho_C(T_0|_{W_k}, T_1|_{W_k}) \cdot m^{\frac{n}{d}},$$

где напомним

$$\rho_C(A_0, A_1) = \lim_{s\to\infty} \max_{\sigma} \|A_{\sigma(1)} \ldots A_{\sigma(s)}\|^{1/s},\ \sigma\colon \{1, \ldots, s\} \to \{0, 1\}$$

— это совместный спектральный радиус двух операторов (см. подробнее параграф 3.7 и определение числа k там).

Определение 3.38. Обобщённой скоростью сходимости алгоритма SubD будем называть число $n - \frac{1}{d}\log_m \tau = -\frac{1}{d}\log_m \rho$.

Тогда справедливо следующее известное [110]

Предложение 3.39. *Гладкость по Гёльдеру α_φ предельной функции φ алгоритма SubD не меньше, чем обобщённая скорость сходимости. В случае устойчивости φ, эти параметры совпадают.*

Следствие 3.40. *Пусть тайловый B-сплайн $B_n^G \in C^n(\mathbb{R}^d)$. Тогда алгоритм SubD, построенный по нему, сходится с обобщённой скоростью $n - \frac{1}{d}\log_m \tau = -\frac{1}{d}\log_m \rho = \alpha_\varphi$. В частности, верно, что $\tau = m^{\frac{n-\alpha_\varphi}{d}}$.*

Так как тайловые B-сплайны устойчивы, мы можем оценить обобщённую скорость сходимости их алгоритмов SubD. Как это следует из Таблицы 10, среди всех рассмотренных сплайнов наиболее гладким является Медведь-4.

Теорема 3.41. *Алгоритмы SubD, построенные по тайловому B-сплайну Медведь-3 и Медведь-4 сходятся в C^2 и C^3 соответственно.*

Классические алгоритмы SubD, построенные по двумерным B-сплайнам соответствующих порядков, не сходятся в C^2 (соответственно C^3).

Отметим, что сходимость алгоритма в пространстве функций высокой гладкости сильно влияет на качество порождаемой поверхности, например, сходимость в C^2 означает, что в каждой точке кривизна поверхности будет сходиться к кривизне предельной поверхности. В частности, если предельная поверхность локально выпукла в некоторой точке, то тем же свойством будут обладать поверхности, полученные через несколько итераций алгоритма.

С учётом оптимальности по скорости сходимости Медведя-4 и малым количеством его ненулевых коэффициентов (всего 5), построим алгоритм SubD на его основе. Такую схему можно применять как в том случае, когда изначально у нас есть функция, заданная в целых точках на плоскости (например, таким образом можно смотреть на изображение), так и тогда, когда первоначальные точки образуют грубое приближение поверхности. На Рисунке 37 показан шаблон вычисления: в значения точек, обведенных в круг, записывается линейная комбинация значений отмеченных точек. Направление вычисления с каждой итерацией домножается на M^{-1}.

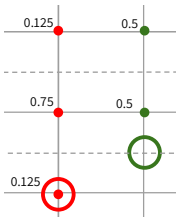


Рис. 37: Шаблон вычисления алгоритма Медведь-4.

Рассмотрим применение алгоритма SubD Медведь-4 к поверхности немного деформированного тора, заданного грубым приближением (см. Рисунок 38). На последующих рисунках 39 – 43 показаны результаты после нескольких итераций Медведя-4.

Также проиллюстрируем применение алгоритма Медведь-4 к поверхности с границей, на примере катеноида (Рисунки 44 – 46).

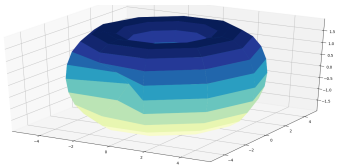


Рис. 38: Исходное приближение

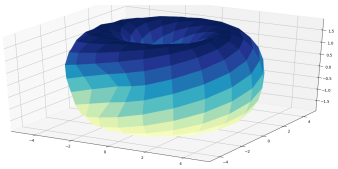


Рис. 39: После одной итерации.

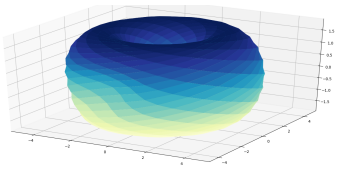


Рис. 40: После двух итераций.

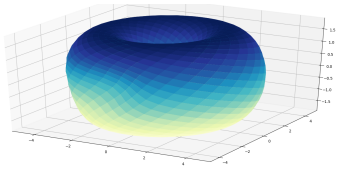


Рис. 41: После трёх итераций.

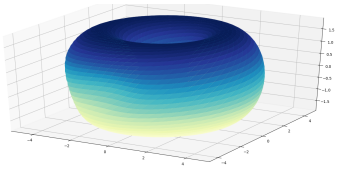


Рис. 42: После четырёх итераций.

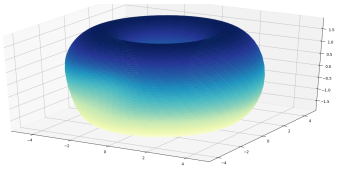


Рис. 43: После пяти итераций.

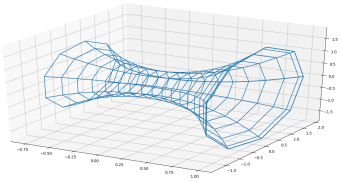


Рис. 44: Исходное приближение

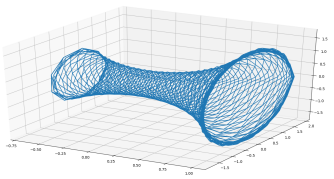


Рис. 45: После двух итераций.

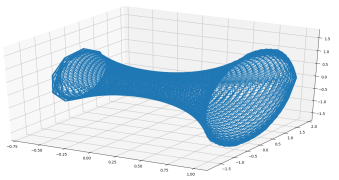


Рис. 46: После четырёх итераций.

Глава 4. Многогранные тайлы

4.1 Введение

Как правило, тайлы имеют фрактальную структуру, что затрудняет их использование в приложениях. Естественная задача — найти и охарактеризовать по возможности простые множества, обладающие этим свойством. Например, параллелепипеды, многогранники или многогранные множества. *Многогранным множеством* называется объединение конечного числа выпуклых многогранников. Каждый многогранник предполагается компактным и невырожденным (имеющим непустую внутренность).

Кроме чисто геометрического интереса, этот вопрос важен в кристаллографии, при исследовании алгоритмов SubD (subdivision schemes), в теории приближений, при построении всплесков и других ортогональных систем в $L_2(\mathbb{R}^d)$, см. [27, 60, 80, 86, 104, 126] и ссылки в этих работах.

Для классификации таких самоподобных замощений нам будет непринципиально, порождены они целой матрицей и цифрами, или нет. Поэтому мы будем использовать следующее определение:

Определение 4.1. Если для непустого компактного множества G существуют растягивающая матрица $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ и набор векторов $S(M) \subset \mathbb{R}^d$, такие что $G = \bigcup\limits_{s\in S(M)} M^{-1}(G+s)$, где множества $M^{-1}(G+s)$ попарно имеют меру пересечения нуль, то множество G называется *тайлом*.

Для изученных нами ранее объектов из определения 1.2 мы будем в данной главе использовать полное название «целый тайл», чтобы не путать их с тайлами.

Замечание 4.2. Заметим, что любому набору векторов $S(M)$ и растягивающей матрице M будет соответствовать единственный тайл, так как по классической теореме Хатчинсона [69] любому конечному набору сжатий соответствует единственный инвариантный компакт.

В начале мы рассмотрим простейший случай: тайлы-параллелепипеды. Такие тайлы были охарактеризованы в работе [61]. Мы получим их полную классификацию в параграфе 4.3, сначала рассмотрев вспомогательные определения 4.2. Далее мы получим классификацию тайлов, являющихся многогранными множествами, сначала в одномерном случае 4.5, а потом в общем 4.6.

В параграфе 1.3 было описано построение функций Хаара многих переменных. Применяя его к тайлам, которые являются параллелепипедами, получим так называемые системы бокс-Хаара. Они имеют простую структуру и бо̀льшую гладкость по сравнению с другими базисами Хаара. При использовании многогранных тайлов получим функции Хаара с носителями — многогранными множествами.

4.2 Приводимые тайлы

Мы начнём с определений прямых произведений тайлов и докажем их основные свойства.

Для любых векторов $a = (a_1, \dots, a_p)$, $b = (b_1, \dots, b_q)$ будем обозначать $a \times b = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$. Для любых множеств векторов A и B будем обозначать $A \times B = \{a \times b \mid a \in A, b \in B\}$.

Определение 4.3. Пусть зафиксированы тайлы G_1 с матрицей M_1 и набором сдвигов S_1 в $\mathbb{R}^{d_1}$, G_2 с матрицей M_2 и набором сдвигов S_2 в $\mathbb{R}^{d_2}$. Тогда *прямым произведением тайлов* G_1 и G_2 называется множество $G_1 \times G_2$.

Предложение 4.4. *1) Множество $G_1 \times G_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ также является тайлом для блочно-диагональной матрицы M, составленной из блоков M_1 и M_2 и набора сдвигов $S_1 \times S_2$.*

2) Если оба множества G_1 и G_2 целые тайлы, то их произведение как тайлов будет также целым тайлом.

Доказательство. Будем обозначать через $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ произведение $s_1 \times$

s_2. Для доказательства 1) убеждаемся в том, что

$$\bigcup_{s=s_1\times s_2\in S_1\times S_2} M^{-1}(G+s) = \bigcup_{\substack{s_1\times s_2\in S_1\times S_2\\ g_1\times g_2\in G_1\times G_2}} \begin{pmatrix} {M_1}^{-1} & 0\\ 0 & {M_2}^{-1}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} g_1\\ g_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\end{pmatrix}\right)$$
$$= \bigcup_{s_1\times s_2\in S_1\times S_2} \begin{pmatrix} M_1^{-1}(G_1+s_1)\\ M_2^{-1}(G_2+s_2)\end{pmatrix} = G_1\times G_2,$$

и аналогично, что множества

$$\begin{pmatrix} {M_1}^{-1} & 0\\ 0 & {M_2}^{-1}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} G_1\\ G_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\end{pmatrix}\right) \text{ и } \begin{pmatrix} {M_1}^{-1} & 0\\ 0 & {M_2}^{-1}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} G_1\\ G_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s_1'\\ s_2'\end{pmatrix}\right)$$

пересекаются по мере нуль.

Теперь проверим 2), пусть множества G_1 и G_2 тайлы, $D_1 := S_1, D_2 := S_2$ — множество цифр. Берём в качестве набора сдвигов множество $D_1\times D_2$, получается нужное множество:

$$G = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} M^{-i}\begin{pmatrix} d_{i_1}\\ d_{i_2}\end{pmatrix} : d_{i_1}\in D_1, d_{i_2}\in D_2\right\} =$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\begin{pmatrix} M_1^{-i}d_{i_1}\\ M_2^{-i}d_{i_2}\end{pmatrix} : d_{i_1}\in D_1, d_{i_2}\in D_2\right\} =$$
$$= \left\{\sum_{i=1}^{\infty} M_1^{-i}d_{i_1} : d_{i_1}\in D_1\right\}\times\left\{\sum_{i=1}^{\infty} M_2^{-i}d_{i_2} : d_{i_2}\in D_2\right\} = G_1\times G_2.$$

Также легко понять, что если G_1 своими целыми сдвигами покрывало $\mathbb{R}^{d_1}$ в один слой, а G_2 покрывало $\mathbb{R}^{d_2}$ в один слой, то $G_1\times G_2$ покрывает $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ в один слой:

$$\bigcup_{(z_1,z_2)\in\mathbb{Z}^{d_1+d_2}}\left(G_1\times G_2+\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}\right) = \bigcup_{z_1\in\mathbb{Z}^{d_1}}(G_1+z_1)\times\bigcup_{z_2\in\mathbb{Z}^{d_2}}(G_2+z_2) = \mathbb{R}^{d_1+d_2}.$$

При $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ имеем

$$\mu\left(\left(G_1 \times G_2 + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \cap \left(G_1 \times G_2 + \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}\right)\right) = \mu\left((G_1 + z_1) \cap (G_1 + z_3)\right) \cdot \\ \cdot \mu\left((G_2 + z_2) \cap (G_2 + z_4)\right) = 0.$$

Проверим также, что множество сдвигов $D_1 \times D_2$ является набором цифр. Пусть есть два сдвига, лежащих в $D_1 \times D_2$, первый составлен из $d_{k_1} \in D_1$ и $d_{k_2} \in D_2$, второй из $d_{l_1} \in D_1$ и $d_{l_2} \in D_2$. Надо проверить, что они лежат в разных классах эквивалентности относительно M. Если

$$\left(\begin{pmatrix} d_{k_1} \\ d_{k_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_{l_1} \\ d_{l_2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

то $(d_{k_1} - d_{l_1}) = M_1 z_1$, $(d_{k_2} - d_{l_2}) = M_2 z_2 \Rightarrow d_{k_1} = d_{l_1}$, $d_{k_2} = d_{l_2}$, то есть это возможно только в случае совпадения цифр.

Предложение доказано. □

Определение 4.5. Назовём тайл *неприводимым*, если он не является прямым произведением других тайлов.

Далее мы поймём, в каких случаях тайлы могут получаться не фрактальными множествами, а простыми — параллелепипедами, многогранниками, объединением многогранников. В следующем параграфе мы охарактеризуем неприводимые тайлы-параллелепипеды и докажем, что остальные тайлы-параллелепипеды будут являться их прямым произведением.

4.3 Классификация бокс-тайлов

Исследуем, как устроены «простые» тайлы, которые являются параллелепипедами (любыми, не только прямоугольными). Будем называть такие множества *бокс-тайлами*. Если тайл при этом является целым, то будем его называть *целым бокс-тайлом*.

Ясно, что любой тайл раскладывается в произведение каких-то неприводимых тайлов. В теореме 4.6 мы докажем, что бокс-тайл раскладывается в произведение именно бокс-тайлов (неприводимых), а целый бокс-тайл раскладывается в произведение целых бокс-тайлов. После чего в теореме 4.7 классифицируем неприводимые бокс-тайлы и далее приведём несколько примеров.

Теорема 4.6. *Любой бокс-тайл является в некотором базисе прямым произведением неприводимых бокс-тайлов; любой целый бокс-тайл в некотором базисе — прямым произведением неприводимых целых бокс-тайлов.*

Доказательство. Пусть исходный тайл G порожден матрицей M и системой сдвигов S. Так как это тайл, он является объединением неперекрывающихся (то есть пересекающихся по мере нуль) копий (сдвигов) $G_1, \dots, G_k$ своего сжатия, полученного с помощью матрицы M^{-1}.

Докажем, что параллелепипед может замощаться сдвигами параллелепипеда (аффинно подобного ему), только если грани маленьких параллелепипедов параллельны граням большого (тогда рёбра маленьких параллелепипедов как пересечения граней будут также параллельны рёбрам большого параллелепипеда). В самом деле, для каждой грани большого параллелепипеда есть параллельная ей грань маленького параллелепипеда, например, которая примыкает к ней. Каждый из параллелепипедов состоит из пар параллельных граней, в силу аффинного подобия у них их одинаковое количество, поэтому и каждой грани маленького параллелепипеда можно сопоставить параллельную ей грань большого.

Введём систему координат вдоль рёбер исходного параллелепипеда G, положив началом координат одну из вершин. Поскольку рёбра параллелепипеда $M^{-1}G$ параллельны рёбрам G, при сжатии матрицей M^{-1} происходит перестановка базисных направлений (рёбра $M^{-1}G$ также проходят через новое начало координат и в силу параллельности рёбрам исходного параллелепипеда совпадают по направлениям с ними). Эта перестановка разбивается на циклы, следовательно, в новом базисе матрица M^{-1} имеет блочно-диагональный

вид, где каждый блок соответствует своему циклу. Для каждого цикла рассмотрим проекцию G' исходного параллелепипеда G на подпространство X, порождённое координатными осями, входящими в этот цикл. Обозначим через M_1 блок в матрице M (в нашем новом базисе), соответствующий нашему циклу. Рассмотрим также те из множеств $G_1, \ldots, G_k$, которые примыкают к G', пусть они (обозначим их $G_1, \ldots, G_q$) получаются из G_1 сдвигами $s_1, \ldots s_q \in D$. Сдвиги $s_1, \ldots s_q \in D$ параллельны X, поскольку в противном случае у них будет ортогональная X составляющая, препятствующая примыканию всех $G_1, \ldots, G_q$ к X. Множества $G'_1, \ldots, G'_q$ дают в объединении G' (поскольку G заполняется сдвигами $G_1, \ldots, G_k$, вся его проекция G', лежащая в X, должна покрываться примыкающими к нему множествами) и не перекрываются (иначе перекрывались бы $G_1, \ldots, G_q$, поскольку они являются сдвигами друг друга вдоль X). Все множества G'_i совпадают с точностью до сдвига с множеством $M_1^{-1}G'$. Получаем, что G' — бокс-тайл, так как получается объединением своих неперекрывающихся сжатых копий G'_i, полученных с помощью матрицы M_1. Другими словами, G' — бокс-тайл, соответствующий зафиксированному циклу.

Если исходный тайл G является целым тайлом, то исходный набор сдвигов является набором цифр для матрицы M. Все векторы $s_1, \ldots, s_q$ параллельны X, поэтому если оставить только их координаты, соответствующие пространству X, получим целые векторы $s'_1, \ldots, s'_q$ меньшей размерности. Они дают набор цифр для M_1, иначе, если $s'_k - s'_l = M_1 z_1$, то $s_k - s_l = Mz$ (так как s_k отличается от s'_k большим числом нулевых координат). С помощью них и матрицы M_1 покрывается G', то есть мы знаем, что

$$G' = \bigcup_{s \in \{s'_1, \ldots, s'_q\}} M_1^{-1}(G' + s),$$

причём множества $M_1^{-1}(G'+s)$ неперекрывающиеся. Отсюда следует, что

$$G' = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} M_1^{-i} s_i : s_i \in \{s'_1, \ldots, s'_q\} \right\}.$$

Кроме того, целые сдвиги G' заполняют пространство X в один слой (поскольку целые сдвиги G заполняют $\mathbb{R}^d$ в один слой, а если оставить из них только параллельные X, то мы получим замощение X). Получаем, что G' удовлетворяет всем требованиям целого тайла. Поэтому целый бокс-тайл раскладывается именно в целые бокс-тайлы.

Тайл G', соответствующий одному циклу, является неприводимым, так как в противном случае перестановка его базисных направлений распадалась бы на независимые циклы, соответствующие множителям прямого произведения. Таким образом, теорема доказана. □

Теорема 4.7. *Пусть зафиксирована растягивающая матрица $M \in \mathbb{Z}^{d\times d}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) Существует неприводимый бокс-тайл, построенный по этой матрице и какому-то набору целых сдвигов.

б) В некотором базисе над $\mathbb{Z}^d$ матрица имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} \\ \pm p_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где все p_i — натуральные числа. При этом произведение всех p_i по модулю равно определителю исходной матрицы.

Доказательство. Пусть M — целая растягивающая матрица.

Докажем, что из а) следует б). Пусть есть неприводимый бокс-тайл G, порождённый набором целых сдвигов S и матрицей M. Матрица M^{-1} осуществляет перестановку направлений вдоль рёбер, поэтому есть такая её степень M^{-k}, что она действует сжатием вдоль каждого ребра. Покажем, что аттрактор G может порождаться и

матрицей M^k с некоторым набором сдвигов. В самом деле,

$$G = \bigcup_{s\in\{s_1,\dots,s_m\}} M^{-1}(G+s) = \bigcup_{s\in\{s_1,\dots,s_m\}} M^{-1}\left(\bigcup_{s'\in\{s_1,\dots,s_m\}} M^{-1}(G+s')+s\right)$$
$$= \bigcup_{s,s'\in\{s_1,\dots,s_m\}} M^{-2}(G+s'+Ms).$$

Поэтому можно считать, что порождающей матрицей была матрица M^2, а соответствующим набором сдвигов — множество $\{G+s'+Ms \mid s, s' \in \{s_1,\dots,s_m\}\}$. При этом сдвиги всё ещё целые, поскольку матрица M целая. Аналогично можно сделать и для бо̀льших степеней, в том числе для M^k.

Теперь докажем, что если бокс-тайл G порождён целой матрицей M_1, осуществляющей растяжение отдельно вдоль ребёр (в нашем случае $M_1 = M^k$), и целыми сдвигами, то его рёбра являются векторами с целыми координатами. Параллелепипед G разбивается своими сжатиями с помощью решётки (см. Рисунок 47). Зафиксируем любое ребро e, пусть матрица M_1^{-1} сжимает его в h раз. К ребру e примыкают несколько сжатых множеств, первое из них $M_1^{-1}G$. Пусть следующее, соседнее с ним вдоль ребра e — множество $M_1^{-1}(G+s_0)$. В силу устройства матрицы M_1 сдвиг s_0 должен быть направлен вдоль e. Если сдвинуть множество $M_1^{-1}G$ на вектор $s_1 = M_1^{-1}s_0 = \frac{s_0}{h}$, то мы получим как раз множество $M_1^{-1}(G+s_0)$. С другой стороны, эти два множества примыкают друг к другу, являясь соседями среди множеств, имеющих пересечение с ребром e. Поэтому ребро $\frac{e}{h}$ параллелепипеда $M_1^{-1}G$ сдвигом на s_1 должно переходить в ребро параллелепипеда $M_1^{-1}(G+s_0)$. Отсюда $\frac{|e|}{h} = |s_1| = \frac{|s_0|}{h}$, а тогда, раз e и s_0 сонаправлены, они равны, значит, e — целый вектор.

Зафиксируем вершину параллелограмма G и рассмотрим его рёбра, идущие из неё. Построим на этих векторах (с целыми координатами) базис. Действие M^{-1} в этом базисе соответствует некоторой перестановке-циклу из базисных векторов. Перенумеруем и поменяем направления базисных векторов так, что e_1 переходит при действии M^{-1} в $e_2 \cdot k_1$, e_2 переходит в $e_3 \cdot k_2$, …, e_n переходит в

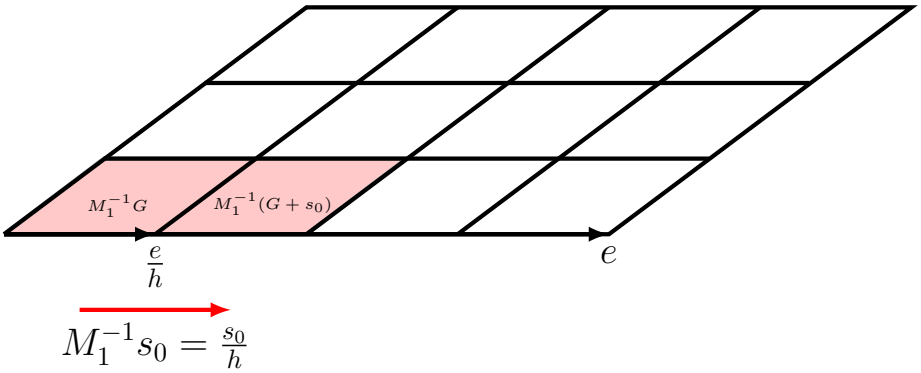


Рис. 47: Доказательство того, что рёбра G целые

$\pm e_1 \cdot k_n$ (базис останется при этом целым). Поскольку сдвигами сжатого параллелепипеда заполняется исходный, каждое $k_i = \frac{1}{p_i}$, где p_i – натуральное число (на сколько частей разбилась соответствующая сторона). Всего частей $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, поэтому данное произведение равно модулю определителя исходной матрицы (числу цифр в случае тайла).

Тогда матрица M^{-1} в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \pm\frac{1}{p_n} \\ \frac{1}{p_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{p_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, M в данном базисе запишется как

$$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p_{n-1} \\ \pm p_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать для необходимости.

Докажем, что из б) следует а). Поскольку из вида матрицы (в нужном базисе) следует, что при действии сжатием M^{-1} базисные

направления переставляются по циклу, любой тайл, построенный по M, точно является неприводимым (иначе перестановка, порождаемая им, распадалась бы на несколько циклов). Построим параллелепипед G, натянутый на векторы имеющегося у нас целого базиса. В силу вида матрицы M, сдвигами $M^{-1}G$ можно замостить весь параллелепипед G, поскольку каждое ребро параллелепипеда G делится на целое число частей (количество зависит от значений p_i) с помощью сжатия матрицей M^{-1}. Наименьший по длине вектор сдвига вдоль ребра e параллелепипеда G равен e, сжатому в целое число раз, пусть в N. Вектор e целый, поэтому в исходном базисе все векторы сдвигов вдоль ребра e будут иметь рациональные координаты (эти векторы имеют вид $\frac{k_e^j e}{N_e}$). Растянем все векторы сдвигов (для всех рёбер e) одновременно так, чтобы они стали целыми (домножив на соответствующее большое число N), при этом параллелепипед G также растянется до параллелепипеда G_1. Тогда G_1 — тайл, построенный по этим растянутым целым сдвигам (которые имеют вид $\frac{Nk_e^j e}{N_e}$) и матрице M — по-прежнему является неприводимым бокс-тайлом, что и требовалось доказать.

Замечание 4.8. Для любого неприводимого бокс-тайла в циклическом виде его матрицы из пункта б не может быть так, что все числа $p_i = 1$. Иначе $M^q e_1 = e_1$, где q — длина цикла, противоречие с тем, что M^{-1} — сжимающий оператор.

□

Следствие 4.9. *Если определитель матрицы M, с помощью которой порождается бокс-тайл, является простым числом, то тайл неприводим.*

Доказательство. Иначе матрица бы распадалась на блочно-диагональные куски, соответствующие неприводимым тайлам, определитель бы был произведением определителей, которые по предыдущему замечанию не равны 1. □

4.4 Примеры

Пример 4.10. Частным случаем бокс-тайла является целый 2-тайл Квадрат 6. Матрица $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ с определителем 2 состоит из одного циклического блока и порождает целый бокс-тайл (например, при цифрах $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, см. Рисунок 6).

Пример 4.11. Построим неприводимый бокс-тайл в $\mathbb{R}^3$. Будем использовать для этого матрицу M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $|\det M| = 2$, сдвигов будет два, то есть бокс-тайл разбивается сжатием с помощью M^{-1} на две части. Чтобы понять, как именно, обратимся к матрице M^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разбиение изображено на Рисунке 48.

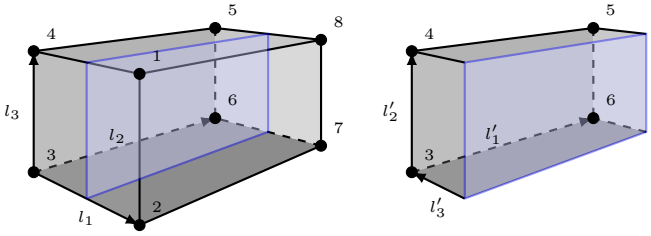


Рис. 48: Пример бокс-тайла с двумя сдвигами

Пример 4.12. Матрице

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

соответствует неприводимый бокс-тайл с 12 сдвигами. Разбиение изображено на Рисунке 49.

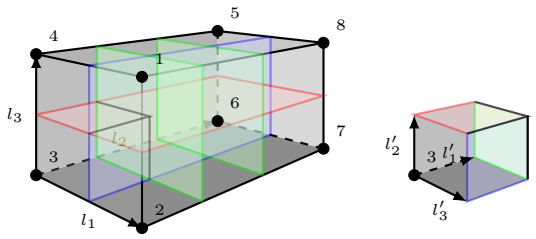


Рис. 49: Пример бокс-тайла с 12 сдвигами

Далее мы получим классификацию всех многогранных тайлов, а также целых многогранных тайлов. В параграфе 4.7 будут даны формулировки основных результатов, в 4.8 идеи доказательств, в параграфах 4.10, 4.11, 4.12 — полные доказательства.

4.5 Классификация многогранных тайлов на прямой

В этом параграфе мы классифицируем одномерные многогранные тайлы, то есть, тайлы, состоящие из конечного числа отрезков. Общий многомерный случай мы рассмотрим далее в параграфе 4.6.

Задача о классификации одномерных многогранных тайлов может быть сведена к задаче о покрытии целочисленных отрезков сдвигами одного множества (классификация целочисленных тайлов). Эта задача была решена Лонгом [92] в 1967 с использованием сильного комбинаторного результата де Брёйна [21]. Мы приведем данную классификацию в несколько иной формулировке, с нашей точки зрения несколько более ясной и наглядной, с использованием арифметических прогрессий. Мы снабдим этот результат новым доказательством, не опирающимся на ранее известные результаты. В работе Bodini и Rivals (2006) [17] также была приведена классификация целочисленных тайлов (по-видимому, авторы не знали о работе Лонга). Также в этой работе получены результаты о периодах замощения и

приведён алгоритм, вычисляющий минимальный целочисленный интервал замощения. Доказательства в данной работе не приводятся. Кроме того, заметим, что задачи, связанные с целочисленными тайлами, изучались в работах [121], [84], [20], [83].

Приведение к комбинаторной задаче

Лемма 4.13. *Множество W, состоящее из конечного числа отрезков с целочисленными концами, является тайлом тогда и только тогда, когда некоторое конечное число неперекрывающихся сдвигов множества W заполняет в точности некоторый отрезок.*

Доказательство. Предположим, такие сдвиги существуют и заполняют отрезок длины h, а множество W состоит из отрезков I_1, I_2, …, I_n с целыми длинами. Тогда сдвигами множества W/h можно покрыть отрезок длины 1, поэтому можно покрыть и все отрезки I_1, I_2, …, I_n, то есть замостить множество W своими сжатыми в h раз копиями.

Наоборот, для тайла (уже не обязательно с целочисленными концами), можно измельчить его разбиение до достаточно малого так, чтобы каждое сжатое множество содержалось полностью в каком-то из отрезков исходного множества. Тогда неперекрывающимися сжатыми множествами можно, к примеру, заполнить первый отрезок множества W. Растянув всё обратно, получим замощение отрезка с помощью сдвигов исходного множества. □

Лемма 4.14. *Если W — тайл из конечного числа отрезков, то все его отрезки имеют одинаковую длину, а расстояния между ними кратны этой длине.*

Доказательство. Как мы знаем из доказательства леммы 4.13, некоторые неперекрывающиеся сдвиги множества W покрывают отрезок. Можно считать, что все сдвиги положительны, то есть осуществляют сдвиг вправо.

Сжав или растянув при необходимости картинку, можно считать, что длина самого левого отрезка I_1 у W равна 1. Если это единственный отрезок у W, утверждение доказано. Иначе, чтобы заполнить

место сразу после отрезка I_1, среди сдвигов должен быть сдвиг на 1. Отметим, что длины всех сдвигов тогда не меньше 1, иначе отрезок I_1 будет пересекать свою сдвинутую версию.

а) Длины всех отрезков W не больше 1, иначе при сдвиге на 1 мы получим самопересечение у отрезка с длиной больше 1 (см. Рисунок 50).

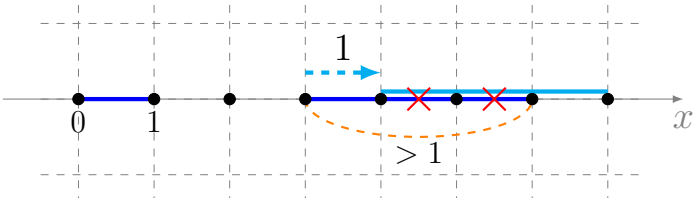


Рис. 50: Пункт а

б) Длины всех отрезков W не меньше 1. В самом деле, пусть это неверно, найдём самый левый отрезок J с длиной $a < 1$. Тогда после сдвига на 1 образуется дырка длиной $1 - a$, которую нужно заполнить. Слева от этой дырки только один отрезок длины меньше 1, который может влезть в дырку, это J. Но при этом J сдвинется меньше, чем на 1, противоречие с тем, что длины всех сдвигов не менее 1 (см. Рисунок 51).

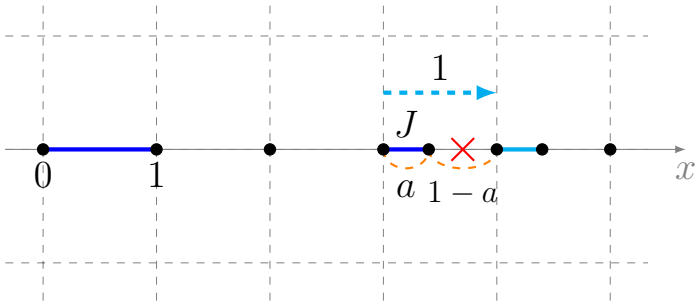


Рис. 51: Пункт б

в) Все промежутки между отрезками W должны заполняться неперекрывающимися отрезками длины 1, поэтому все эти промежутки, очевидно, имеют целую длину.

Лемма доказана. □

Замечание 4.15. Теперь можно заметить, что утверждение леммы 4.13 верно не только для множеств W с целочисленными концами. В одну сторону мы это уже увидели, докажем в другую. Теперь мы знаем, что длины всех отрезков одинаковы, пусть l. Пусть мы покрыли отрезок длины $l \cdot m$, тогда сжав множество в m раз, мы сможем покрыть неперекрывающимися сдвигами любой отрезок длины l, а значит, и всё множество W.

Итак, с помощью подобия, задачу классификации одномерных многогранных тайлов мы свели к классификации таких конечных множеств целых отрезков длины 1 на прямой, что некоторые их положительные неперекрывающиеся сдвиги заполняют отрезок на прямой, то есть к задаче, решённой в работе К. Лонга [92]. Ниже мы приведём новое, автономное от других работ, доказательство этого результата.

Сразу выделим случай, когда W — единственный отрезок длины 1, он подходит, в дальнейшем считаем, что отрезков хотя бы два. Будем считать, что W начинается в точке 0. В множество сдвигов W, с помощью которых заполняется отрезок, будем для удобства включать сдвиг на 0.

Определение 4.16. *Допустимым* W будем называть конечное множество из хотя бы двух целых отрезков длины 1 на прямой, включающее 0, для которого существует такое множество векторов-сдвигов $L \ni 0$, что сдвиги W на векторы из L не перекрываются и заполняют отрезок на прямой.

Заметим, что $\{1, \ldots, l-1\} \subset L$, так как это единственный способ полностью заполнить промежуток между первыми двумя отрезками (см. Рисунок 52). Чтобы при всех этих сдвигах никакой отрезок не задел следующий, расстояния между всеми отрезками должны быть хотя бы l.

Пример 4.17. Пример множества W и его сдвигов, удовлетворяющего всем условиям, дан на Рисунке 53. При этом $L = \{0, 1, 2, 9, 10, 11\}$.

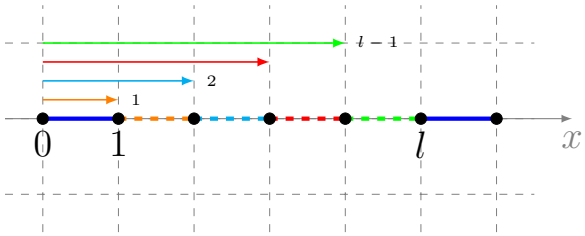


Рис. 52: Доказательство того, что $\{1, \ldots, l-1\} \subset L$



Рис. 53: Пример одномерного тайла и его сдвигов

Вспомогательный результат

Определение 4.18. Назовём множество целых чисел Q *ℓ-множеством*, если в нём конечное число отрезков (подряд идущих целых чисел), начало каждого отрезка (первое число в последовательности подряд идущих) делится на l, а длины отрезков (количество чисел в подряд идущем блоке) равны l.

Например, в примере 4.17 L являлось 3-множеством.

Теорема 4.19. *Пусть $W \subset \mathbb{R}$ – допустимый тайл. Докажем, что для $\forall k \in \mathbb{Z} \geq 0$ верно*

1) Начала всех отрезков в W, не превосходящие k, делятся на l;

2) $L \cap \{0, 1, \ldots, k, k+1\}$ это какое-то ℓ-множество $\cap$ $\{0, 1, \ldots, k, k+1\}$.

Доказательство. Докажем, используя индукцию по k.

База: $k = 0$. Тогда в 1) начало отрезков это только 0, делится на l, в 2) слева будет $\{0, 1\}$, в роли ℓ-множества можно взять $\{0, 1, \ldots l-1\}$.

Шаг: пусть утверждение верно для k, докажем его для $k+1$.

Для проверки 1) достаточно доказать, что если $k+1$ — начало отрезка I, то $k+1$ делится на l. Предположим, что $k+1$ не делится

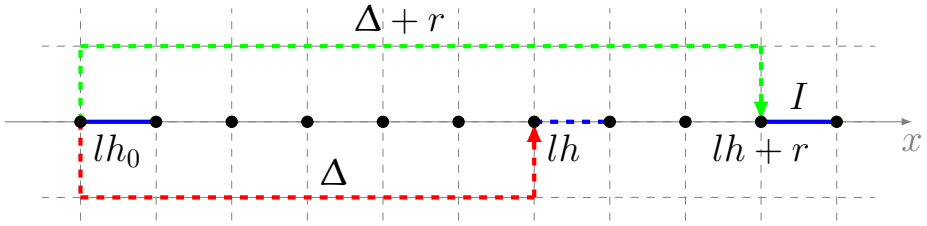


Рис. 54: Для доказательства 1)

на l, $k+1 = l \cdot h + r$, $r \neq 0$, $r < l$. Иллюстрация к доказательству на Рисунке 54.

В точке $l \cdot h$ не может начинаться отрезок множества W, так как его расстояние до I меньше l, и если бы в W содержался отрезок $[lh, lh+1]$, он бы при сдвиге на $r \in L$ попадал бы в $I \subset W$, приводя к самопересечению. Поэтому в L должен быть сдвиг на Δ, который переведёт в точку $l \cdot h$ какой-то из предыдущих отрезков. По предположению индукции 1) этот предыдущий отрезок начинается с точки $l \cdot h_0$, $\Delta = lh - lh_0$, то есть Δ делится на l, заметим также, что $\Delta \leq k$.

Лемма 4.20. *При условиях теоремы 4.19 имеем*

$$\{\Delta + 1, \ldots, \Delta + l - 1\} \cap \{0, \ldots, k+1\} \subset L \cap \{0, \ldots, k+1\}.$$

Доказательство. По предположению индукции 2) $L \cap \{0, \ldots, k+1\}$ – начало ℓ-множества, поэтому $\Delta \in L \cap \{0, \ldots, k+1\}$ лежит в каком-то из отрезков этого ℓ-множества, пусть в L_1. В силу того, что L_1 — отрезок ℓ-множества, единственное число в нём, которое делится на l, это его начало. Поскольку Δ делится на l, оно и является началом этого отрезка, тогда $\{\Delta, \Delta + 1, \ldots, \Delta + l - 1\} \cap \{0, \ldots, k+1\} = L_1 \cap \{0, \ldots, k+1\} \subset L \cap \{0, \ldots, k+1\}$. □

Заметим, что $\Delta + r = lh - lh_0 + r \leq lh + r = k + 1$, поэтому $\Delta + r \in \{\Delta + 1, \ldots, \Delta + l - 1\} \cap \{0, \ldots, k+1\}$, тогда $\Delta + r \in L$, но при этом сдвиге на $\Delta + r$, отрезок, начинающийся с lh_0, перейдёт в отрезок I, противоречие с тем, что $I \subset W$.

Теперь проверим 2). Предположим противное, что для $k+2$ утверждение 2) не выполняется (а для $k+1$ оно выполнено).

Случай 1: $k + 2 \notin L$.

Нарушение условия 2) при этом может произойти, только если $k+1 \in L$, но отрезок L, в котором лежит $k+1$, имеет длину, меньшую l. В этом случае $k+2$ не делится на l.

При сдвиге на $k+1 \in L$ начало второго отрезка W переходит в точку $k+1+l$, поэтому, как минимум, всё пространство до $k+2+l$ будет в итоге заполнено.

Подслучай A: в W есть отрезок, начинающийся с $k+2$, пусть J.

Рассмотрим ближайшие к точке $k+2$ точки A (слева) и B (справа), делящиеся на l, они не совпадают с $k+2$, так как $k+2$ не делится на l (см. Рисунок 55).

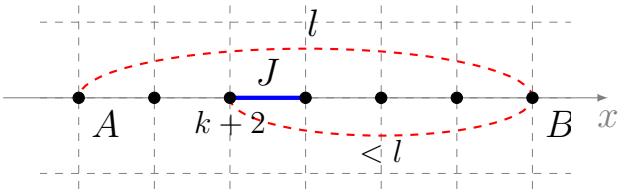


Рис. 55: Случай A (случай 1)

Координата $B+1$ не превосходит $k+2+l$, поэтому $[B, B+1]$ точно лежит в отрезке, который будет покрыт в итоге.

Из-за того, что расстояние от $k+2$ до B меньше, чем l, а $J \subset W$ и $\{1, \ldots, l-1\} \subset L$, в L есть сдвиг, переводящий J в $[B, B+1]$.

С другой стороны, заметим, что $A \in L$, так как A — начало того отрезка в L, в котором лежит $k+1$. Множество W начинается с двух отрезков $[0,1], [l, l+1]$, тогда при сдвиге на A второй перейдёт в отрезок $[B, B+1]$, то есть мы получили этот отрезок двумя разными сдвигами из L, противоречие.

Подслучай B: $[k+2, k+3]$ закрывается сдвигом какого-то предыдущего отрезка $I \subset W$.

$[k+1, k+2] \notin W$, так как туда переходит $[0,1]$ при сдвиге на $k+1$. Значит, начало I не превосходит k, тогда по предположению индукции 1) $I = [lh, lh+1]$. $k+2 \notin L$, поэтому $h \neq 0$, значит, размер сдвига $\Delta = k+2-lh \leq k+2-l \leq k+1$.

$\Delta \in L \cap \{0, 1 \ldots k+1\}$, это множество является началом ℓ-множества, поэтому Δ лежит в L в каком-то отрезке, причём не в

его начале, поскольку $\Delta = (k+2) - lh$ не делится на l. Тогда $\Delta - 1$ лежит в том же отрезке L, то есть $\Delta - 1 \in L$. Тогда при сдвиге на $\Delta - 1$ $I = [lh, lh+1]$ перейдёт в $[k+1, k+2]$, но туда же при сдвиге на $k+1 \in L$ переходит $[0,1]$, противоречие (см. Рисунок 56).

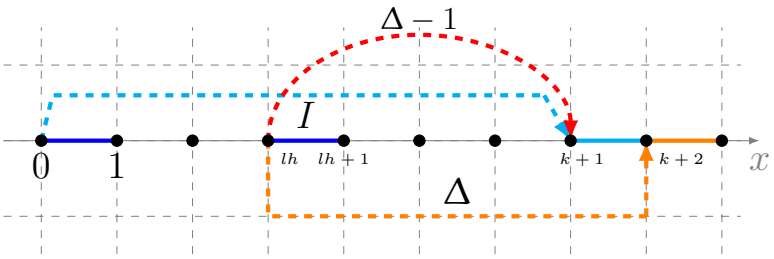


Рис. 56: Случай B (случай 1)

Случай 2: $k+2 \in L$.

Подслучай A: $k+2$ делится на l.

Тогда $k+2 = lh$. Противоречие с 2) для $k+2$ может при этом достигаться, только если в L уже есть $l(h-1), \ldots l(h-1)+l-1$ и добавление $k+2$ делает отрезок из L длиннее l. Но тогда при сдвиге на $l(h-1)$ начало множества W $[0,1], [l, l+1]$ перейдёт в $[l(h-1), l(h-1)+1], [lh, lh+1]$, то есть мы получили отрезок $[lh, lh+1]$ двумя способами — из отрезка $[0,1]$ и из отрезка $[l, l+1]$, противоречие.

Подслучай B: $k+2$ не делится на l.

Утверждение 2) верно для $k+1$, поэтому противоречие для $k+2$ при этом может быть, только если $k+1 \notin L$. $[k+1, k+2] \not\subset W$, в противном случае при сдвиге на 1 он попадёт в $[k+2, k+3]$, и мы получим $[k+2, k+3]$ двумя способами, из $[0,1]$ и $[k+1, k+2]$ (см. Рисунок 57).

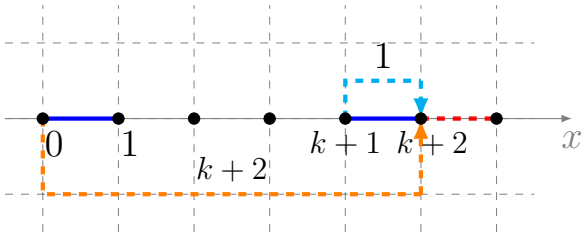


Рис. 57: Подслучай B (случай 2), 1

Значит, $[k+1, k+2]$ должен получаться сдвигом из $[lh_0, lh_0+1]$ (по предположению индукции 1 начала отрезков, не превосходящие k, делятся на l). Пусть $\Delta = k+1-lh_0$ — величина сдвига. $h_0 \neq 0$, так как $k+1 \notin L$, значит, $\Delta \leq k+1-l$, тогда весь отрезок в L, содержащий Δ, попадёт и в $L \cap \{0, 1, \dots k+1\}$. Так как мы рассматриваем подслучай B, $\Delta+1$ не делится на l и поэтому лежит в том же отрезке в $L \cap \{0, 1, \dots k+1\}$. При сдвиге на $\Delta+1$ отрезок $[lh_0, lh_0+1]$ переходит в $[k+2, k+3]$, противоречие с тем, что мы получаем его также из $[0, 1]$ (см. Рисунок 58).

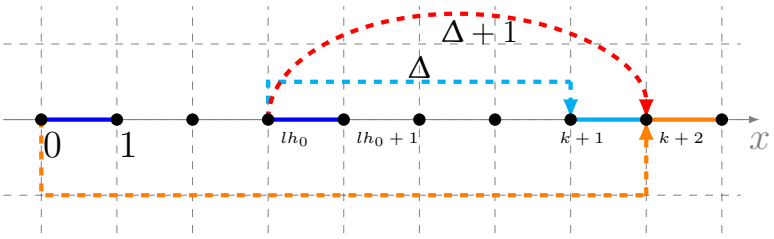


Рис. 58: Подслучай B (случай 2), 2

□

Основная теорема об одномерных многогранных тайлах

Теперь, пользуясь теоремой 4.19, поймём, как устроены многогранные тайлы на прямой. Будем рассматривать тайлы с целочисленными концами отрезков, с началом в нуле, но длинами отрезков не обязательно 1.

Перейдём от тайлов, состоящих из отрезков и заполняющих сдвигами отрезок прямой, к тайлам из целых чисел, заполняющих сдвигами множество подряд идущих целых чисел (будем называть такое множество отрезком целых чисел). А именно, пусть W тайл из отрезков, определим тайл из целых чисел Y соотношением $z \in Y \Leftrightarrow [z, z+1] \subset W$. Множество Y также имеет начало в нуле и непусто. Если тайл W заполнял некоторым множеством сдвигов отрезок $[0, y_0+1]$, то тем же множеством сдвигов тайл Y заполняет отрезок целых чисел $\{0, 1, \dots, y_0\}$ (и поэтому является тайлом). Наоборот, по

тайлу из целых чисел Y с началом в нуле, который заполняет множеством своих сдвигов L отрезок целых чисел $\{0, 1, \ldots, y_0\}$, однозначно восстанавливается множество $W = \bigcup\limits_{y \in Y} [y, y+1]$, состоящее из отрезков с целочисленными концами. Сдвигая множество W на элементы множества L, получим замощение отрезка $[0, y_0 + 1]$ в один слой, поэтому множество W будет тайлом из отрезков. Таким образом, эти задачи классификации тайлов эквивалентны.

Определение 4.21. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ и для любых несовпадающих пар (i_1, j_1) и (i_2, j_2) $a_{i_1} + b_{j_1} \neq a_{i_2} + b_{j_2}$. Тогда будем называть суммой множеств A и B их сумму по Минковскому, то есть, множество $A \oplus B = \{a_i + b_j \mid i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots k\}$.

Лемма 4.22. *Если $A \oplus B = A \oplus C$, то $B = C$.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$, $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$, $c_1 < \ldots < c_m$. Предположим, утверждение леммы неверно, пусть $b_1 = c_1, \ldots, b_p = c_p, b_{p+1} \neq c_{p+1}$, $p < k, p < m$. Сумма множеств прямая, поэтому минимальный элемент в $A \oplus B \setminus \{a_1 + b_1, \ldots a_n + b_p\}$ равен $a_1 + b_{p+1}$, в $A \oplus C \setminus \{a_1 + c_1, \ldots a_n + c_p\}$ равен $a_1 + c_{p+1}$. Эти множества равны, поэтому $b_{p+1} = c_{p+1}$, противоречие. Аналогично разбирается случай, когда $B \subsetneq C$ $(p = k)$ или наоборот $(p = m)$. □

Теорема 4.23. *Пусть Y является тайлом в $\mathbb{Z}$ с длиной отрезков (подряд идущих целых чисел в Y) равной s. Тогда Y можно представить как сумму нескольких арифметических прогрессий. Можно выбрать это представление так, чтобы одно из слагаемых равнялось прогрессии $\{0, \ldots, s-1\}$.*

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по h – минимальному числу сдвигов Y, которые необходимо сделать, чтобы заполнить полностью отрезок целых чисел.

База: если $h = 0$, то у нас уже есть отрезок длины s, который сам является арифметической прогрессией нужного вида.

Шаг: пусть утверждение доказано для всех $h_1 < h$, докажем его для h. Если длина отрезков $s \neq 1$, то представим $Y = Y_0 \oplus \{0, \dots s-1\}$, где у Y_0 длина всех отрезков 1 (взяв в качестве Y_0 начала отрезков в Y). Это представление в виде прямой суммы корректно, поскольку расстояния между точками Y_0 хотя бы s, и если $y_1, y_2 \in Y_0, y_1 < y_2$, $s_1, s_2 \in \{0, \dots s-1\}$, то $y_1 + s_1 < y_2 + s_2$. Y_0 также аттрактор, пусть l_0 — расстояние между первыми двумя его точками. Осталось доказать, что Y_0 представимо в виде суммы арифметических прогрессий. Применим предыдущую теорему для Y_0 с очень большим k (например, больше, чем величина максимального сдвига). Получим, что множество всех сдвигов L_0 является ℓ-множеством, где в роли l выступает l_0. Из определения ℓ-множества следует, что $L_0 = \{0, 1 \dots l_0 - 1\} \oplus L_1$, где L_1 — начала отрезков в L_0. Поскольку L_0 множество сдвигов, $Y_0 \oplus L_0$ — отрезок целых чисел. Получаем, что $Y_0 \oplus \{0, 1 \dots l_0 - 1\} \oplus L_1$ — отрезок целых чисел. Рассмотрим $Y_1 = Y_0 \oplus \{0, 1 \dots l_0 - 1\}$ — корректно определённое множество, состоящее из нескольких отрезков целых чисел. Оно является тайлом, так как $Y_1 \oplus L_1$ — отрезок целых чисел, то есть мы смогли замостить отрезок целых чисел, сдвигая Y_1 с помощью L_1. Поскольку все расстояния между точками в Y_0 делятся на l_0, то длина первого отрезка в Y_1 делится на l_0 (первый отрезок в Y_1 склеивается из нескольких отрезков длины l_0), пусть эта длина $p \cdot l_0$. Элементов в L_1 в l_0 раз меньше, чем в L_0, а в L_0 элементов в s раз больше, чем в множестве сдвигов, соответствующих Y. Поскольку l_0 как расстояние между первыми точками Y_0 строго больше s, то в L_1 элементов строго меньше h, поэтому для тайла Y_1 применимо предположение индукции. Тогда Y_1 представляется как сумма арифметических прогрессий, одна из которых $\{0, 1, \dots, p \cdot l_0 - 1\}$. Представим $\{0, 1, \dots, p \cdot l_0 - 1\} = \{0, 1, \dots l_0 - 1\} \oplus \{0, l_0, 2 \cdot l_0, \dots (p-1) \cdot l_0\}$. Получаем, что Y_1 представляется как сумма арифметических прогрессий, одна из которых $\{0, 1, \dots l_0 - 1\}$. Вспомним, что $Y_1 = Y_0 \oplus \{0, 1 \dots l_0 - 1\}$. Отсюда из леммы про прямую сумму множеств следует, что Y_0 является суммой арифметических прогрессий, что мы и хотели получить. $\square$

Теперь уточним, какие именно арифметические прогрессии можно складывать, чтобы получать тайлы. Для этого нам будет удобнее переформулировать задачу на язык многочленов. Вместо множества A, состоящего из целых чисел $\{a_1, \dots a_n\}$, будем рассматривать многочлен $(z^{a_1}+\ldots+z^{a_n})$. Прямая сумма множеств при этом превратится в произведение таких многочленов, арифметические прогрессии превратятся в геометрические прогрессии.

Если Y — тайл, а L — множество сдвигов, то $Y \oplus L$ — отрезок целых чисел. Поэтому можно считать, что L — тайл, а Y — множество сдвигов. Значит, L также является суммой арифметических прогрессий. Общая сумма арифметических прогрессий даёт отрезок целых чисел. Наша задача эквивалентна вопросу о том, при каких $a_1, d_1 \dots, a_n, d_n$ существует N такое, что $1 + z + \dots z^N = (1 + z^{a_1} + \dots z^{a_1\cdot(d_1-1)}) \cdot \dots \cdot (1 + z^{a_n} + \dots z^{a_n\cdot(d_n-1)})$. После этого сумму произвольного подмножества набора прогрессий можно взять в роли тайла, а сумма оставшихся будет множеством сдвигов.

Обозначим $P_d(z) = 1 + z + \dots + z^{d-1}$.

Лемма 4.24. *В предыдущих обозначениях* $P_{d_1\cdot\ldots\cdot d_n}(z) = P_{d_1}(z) \cdot P_{d_2}(z^{d_1}) \cdot P_{d_3}(z^{d_1\cdot d_2}) \cdot \ldots \cdot P_{d_n}(z^{d_1\cdot\ldots\cdot d_{n-1}})$.

Доказательство. Докажем по индукции по k, что $P_{d_1\cdot\ldots\cdot d_k}(z) = P_{d_1}(z) \cdot P_{d_2}(z^{d_1}) \cdot \ldots \cdot P_{d_k}(z^{d_1\cdot\ldots\cdot d_{k-1}})$.

База: $k = 1$ очевидна, $k = 2$ следует из явной проверки $(1 + z + \dots z^{d_1\cdot d_2-1}) = (1 + z + \dots z^{d_1-1}) \cdot (1 + z^{d_1} + \dots z^{d_1\cdot(d_2-1)})$.

Шаг: пусть доказано для $k > 1$, докажем для $k+1$. $P_{d_1\cdot\ldots\cdot d_{k+1}}(z) = P_{d_1}(z) \cdot P_{d_2\cdot\ldots\cdot d_{k+1}}(z^{d_1}) = P_{d_1}(z) \cdot P_{d_2}(z^{d_1 1}) \cdot \ldots \cdot P_{d_{k+1}}(z^{d_1 d_2\cdot\ldots\cdot d_k}) = P_{d_1}(z) \cdot P_{d_2}(z^{d_1}) \cdot \ldots \cdot P_{d_{k+1}}(z^{d_1\cdot\ldots\cdot d_k})$. □

Теорема 4.25. *Пусть* $a_1 \le \ldots \le a_n$. *Тогда* $1 + z + \dots z^N = (1 + z^{a_1} + \dots z^{a_1\cdot(d_1-1)}) \cdot \ldots \cdot (1 + z^{a_n} + \dots z^{a_n\cdot(d_n-1)})$ *тогда и только тогда, когда* $a_1 = 1$, …, $a_k = d_1 \cdot \ldots \cdot d_{k-1}$ $\forall 2 \le k \le n$, $N = d_1 \cdot \dots d_n$.

Доказательство. Достаточность следует из предыдущей леммы.

Для доказательства необходимости воспользуемся индукцией. Равенство $a_1 = 1$ следует из того, что слева есть слагаемое z, зна-

чит, оно должно получаться справа, что невозможно, если все входящие степени z больше 1. Пусть мы уже доказали, что $a_1 = 1$, $a_i = d_1 \cdot \ldots \cdot d_{i-1}$ $\forall 2 \le i \le k$, докажем это для $k+1$. По предположению индукции $1+z+\ldots+z^N = P_{d_1}(z)\cdot\ldots\cdot P_{d_k}(z^{d_1\cdot\ldots\cdot d_{k-1}})\cdot(1+z^{a_{k+1}}+\ldots z^{a_{k+1}\cdot(d_{k+1}-1)})\cdot\ldots\cdot(1+z^{a_n}+\ldots z^{a_n\cdot(d_n-1)}) = P_{d_1\cdot\ldots\cdot d_k}(z)\cdot(1+z^{a_{k+1}}+\ldots z^{a_{k+1}\cdot(d_{k+1}-1)})\cdot\ldots\cdot(1+z^{a_n}+\ldots z^{a_n\cdot(d_n-1)})$. Если $k \ne n$, то есть разложение ещё не закончено, то слева есть слагаемое $z^{d_1\cdot\ldots\cdot d_k}$. Справа оно не может получиться умножением чего-то из первой скобки на 1 из всех остальных, поэтому содержит степень не меньшую, чем a_{k+1}, значит, $a_{k+1} \le d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$. При этом в правой сумме все слагаемые вида z^s, где $s < d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$ уже получаются с помощью произведения первой скобки и нескольких 1, поэтому они не должны получаться справа ещё каким-то способом, а значит, $a_{k+1} \ge d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$.

Получаем, как и требовалось, что $a_{k+1} = d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$. Формула для N при этом следует из леммы, так как $P_N(z) = 1+z+\ldots+z^{N-1} = P_{d_1}(z)\cdot\ldots\cdot P_{d_n}(z^{d_1\cdot\ldots\cdot d_{n-1}}) = P_{d_1\cdot\ldots\cdot d_n}(z)$. □

Для удобства формулировки основного полученного результата введём такие обозначения. Для натуральных чисел a, n, обозначим $\mathcal{S}(a,n) = \{ka \mid k = 0,\ldots,n-1\}$ — соответствующую арифметическую прогрессию. Для натурального числа r и положительных векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^r$, обозначим $\mathcal{S}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) = \mathcal{S}(a_1,n_1)+\ldots+\mathcal{S}(a_r,n_r)$ — суммы по Минковскому арифметических прогрессий $\mathcal{S}(a_i,n_i)$. Пару векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^r$ назовем *допустимой*, если $a_1 = n_1 = 1$, и для каждого $i \ge 2$, выполнено: $a_i \ge 2, n_i \ge 2$, и a_i делится на $a_{i-1}n_{i-1}$.

Итак, мы доказали следующую основную теорему об одномерных многогранных тайлах:

Теорема 4.26. *Множество $G \subset \mathbb{R}$, являющееся объединением конечного числа отрезков, является тайлом тогда и только тогда, когда найдутся $r \in \mathbb{N}$ и допустимая пара векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^r$ такая, что G эквивалентно, с точностью до умножения на константу, множеству*

$$\left\{ [k, k+1], \quad k \in \mathcal{S}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) \right\}. \tag{24}$$

4.6 Классификация многогранных тайлов в $\mathbb{R}^d$

Перейдём теперь к произвольной размерности. Вопрос классификации тайлов-многогранников исследовался в [104, 127, 135]. Несложно показать, что среди всех выпуклых многогранников (и даже среди выпуклых тел) только параллелепипед является тайлом. Для невыпуклых многогранников вопрос гораздо более сложен. В [135] было показано, что на двумерной плоскости невыпуклый многоугольник не может быть тайлом. Случай большей размерности был оставлен в качестве открытой проблемы. В недавней работе [127] было показано, что если у тайла есть выпуклый угол, аффинно подобный $\mathbb{R}^d$ (простой), то данный тайл аффинно эквивалентен объединению целых сдвигов единичного куба. Поэтому, в случае когда многогранник имеет хотя бы один простой выпуклый угол, мы знаем его общий вид. Это, однако, не решает проблему полностью, поскольку не все многогранники данного вида являются тайлами. Но главная сложность состоит в том, что не все многогранники имеют хотя бы один выпуклый угол. В качестве примера рассмотрим правильный тетраэдр в $\mathbb{R}^3$ и каждую из его вершин «вдавим внутрь», сделав на ее месте ямку в виде тетраэдра (59). Что касается многогранных множеств, то они уже на двумерной плоскости могут не иметь выпуклых углов (60). Выпуклость в [127] существенна, и доказательство не проходит в общем случае. Таким образом, вопрос о многогранниках-тайлах оставался открытым.

С другой стороны, известны примеры несвязных многогранных множеств, являющихся тайлами [135]. Поэтому, разумно ставить задачу следующим образом:

Задача 1. *Найти все многогранные множества в $\mathbb{R}^d$, являющиеся тайлами.*

Вторая задача сужает вопрос на один класс тайлов — аттракторов, рассмотренных нами ранее (определение 1.1).

Единичный куб в $\mathbb{R}^d$ является аттрактором (и даже целым тайлом), порождённым матрицей $M = 2I$, где I — единичная матрица, и 2^d цифрами $D = \big\{(s_1, \ldots, s_d),\ s_i \in \{0, 1\}\big\}$. Тот же куб порождается и другими парами (M, D). Например, при надлежащем выбо-

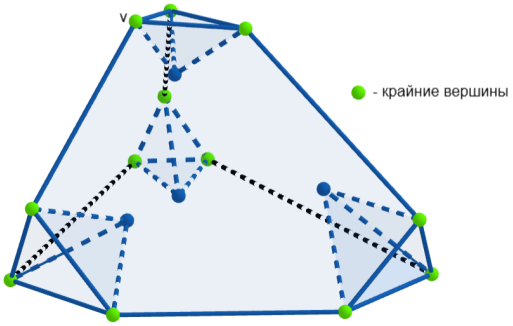


Рис. 59: 3D многогранник без выпуклых углов.

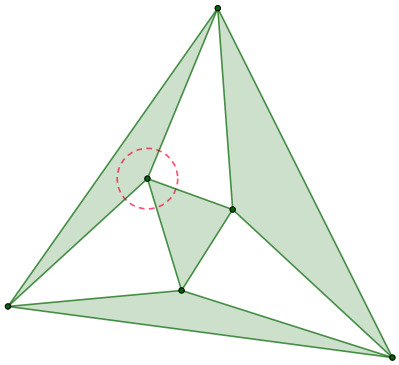


Рис. 60: 2D многогранное множество без выпуклых углов.

ре матрицы M, куб является аттрактором, задаваемым всего двумя цифрами. Системы счисления в $\mathbb{Z}^d$, имеющие в качестве аттрактора единичный куб или параллелепипед, исследовались, в частности, в [61, 135], мы описывали такие системы в параграфе 4.3. Вопрос — есть ли другие многогранные аттракторы в $\mathbb{R}^d$?

Задача 2. *Найти все многогранные множества в $\mathbb{R}^d$, являющиеся аттракторами.*

Мы даем решения задач 1 и 2. В теореме 4.27 классифицированы все многогранные множества в $\mathbb{R}^d$, являющиеся тайлами. В любой размерности таких множеств (не эквивалентных друг другу) бесконечно много. А с многогранными аттракторами ситуация иная. Теорема 4.29 устанавливает, что все они — параллелепипеды.

4.7 Основные результаты

Мы рассматриваем компактный тайл G и его разбиение (замощение, тайлинг) $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i=1}^N$; для каждого элемента разбиения $T \in \mathcal{T}$ его подобие множеству G задается аффинным преобразованием $A : T \to G$; все эти преобразования имеют одну и ту же линейную часть, заданную растягивающей матрицей M, и отличаются только сдвигами.

Ранее в теореме 4.26 мы получили классификацию для одномер-

ного случая. Напомним, что множество G получилось эквивалентно объединению целых сдвигов единичного отрезка, заданному формулой (24). Общее число отрезков равно $n_1 \cdots n_r$; случай одного отрезка соответствует $r = 1$.

Теперь мы формулируем основной результат, классифицирующий многогранные самоподобные тайлы в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 4.27. *Многогранное множество в $\mathbb{R}^d$ является тайлом тогда и только тогда, когда оно аффинно эквивалентно прямому произведению d одномерных множеств вида (24). Каждое из этих d множеств порождено своей тройкой $(r, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})$, где $r \in \mathbb{N}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}$ — допустимая пара из $\mathbb{Z}^r$.*

Замечание 4.28. Пример такого множества дан на Рисунке 61. Одно из множеств порождено тройкой $(3, (1, 2, 12), (1, 3, 2))$, а другое $(3, (1, 2, 8), (1, 2, 3))$. Соответствующие арифметические прогрессии получаются $(0), (0, 2, 4), (0, 12)$ (их сумма даёт множество по оси x), $(0), (0, 2), (0, 8, 16)$ (их сумма даёт множество по оси y).

Итак, все тайлы, являющиеся многогранными множествами — прямые произведения соответствующих одномерных множеств. В частности, они являются дизъюнктным объединением единичных кубиков целочисленной решетки.

В частности, такой же вид должны иметь все многогранные аттракторы. Следующий результат, однако, показывает, что их семейство гораздо беднее и ограничивается параллелепипедами.

Теорема 4.29. *Если аттрактор является многогранным множеством, то это — параллелепипед.*

Схемы и основные шаги доказательств теорем 4.27 и 4.29 приведены в следующем параграфе, далее они доказаны полностью.

4.8 Наброски доказательств

Перед тем, как изложить полные доказательства теорем 4.27, 4.29, мы изложим план и сформулируем основные идеи.

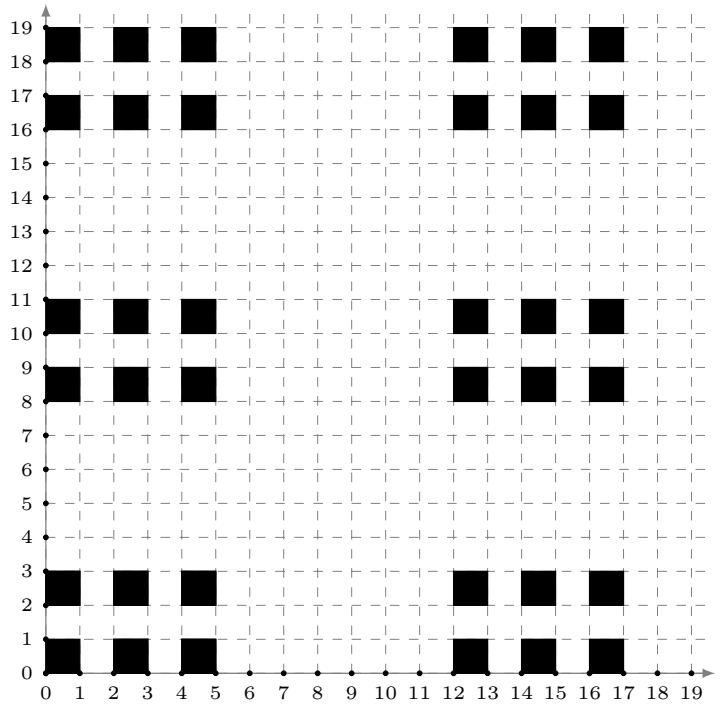


Рис. 61: Пример тайла — двумерного многогранного множества.

Доказательство теоремы 4.27: краткое изложение. Доказательство теоремы 4.27 состоит из нескольких шагов. Мы кратко опишем их ниже и потом дадим детальное доказательство. Доказательство теоремы 4.29 гораздо короче (конечно, после использования теоремы 4.27); его идея описана в конце этого параграфа. Полное доказательство теоремы 4.29 дано в параграфе 4.12. Мы используем стандартное обозначение $\mathrm{co}(X)$ для выпуклой оболочки множества X.

Шаги доказательства теоремы 4.27. Пусть у нас есть многогранное множество $G \subset \mathbb{R}^d$ с замощением $\mathcal{T}$.

`Шаг 1`. Выпуклая оболочка множества G является выпуклым многогранником. Его вершины называются *крайними вершинами* G. Для произвольной крайней вершины $\boldsymbol{v}$, мы рассматриваем соответствую-

щий *угол* K множества G, являющийся пересечением G с малым шаром с центром в $\boldsymbol{v}$. Это конус с вершиной $\boldsymbol{v}$, возможно невыпуклый. В частичном порядке, определённом конусом $\mathrm{co}\,(K)$ (мы сохраняем те же обозначения для угла и соответствующего конуса), вершина $\boldsymbol{v}$ — минимальный элемент многогранника $\mathrm{co}\,(G)$. Отсюда следует, что существует единственный элемент замощения $T \in \mathcal{T}$, содержащий $\boldsymbol{v}$ (см. предложение 4.33). Более того, достаточно малый угол G в крайней вершине $\boldsymbol{v}$ также является углом T, и $\boldsymbol{v}$ является также крайней вершиной для T (предложение 4.34).

Шаг 2. Таким образом, для каждой крайней вершины $\boldsymbol{v}$ множества G, существует единственный элемент из $\mathcal{T}$, содержащий $\boldsymbol{v}$, для которого $\boldsymbol{v}$ также является крайней вершиной с тем же углом. Это определяет отображение из множества крайних вершин G в крайние вершины T. Поскольку тайл самоподобный, T аффинно подобно G и поэтому это отображение определяет отображение множества крайних вершин G в себя. Граф, соответствующий этому отображению, имеет одно выходящее ребро из каждой вершины и поэтому имеет цикл какой-то длины n. Рассмотрим n-ю итерацию $\mathcal{T}^n$ замощения $\mathcal{T}(T, D)$, $\mathcal{T}^n = \mathcal{T}(T_n, D_n)$, где $T_n = M^{-n}G$, $D_n = \{\sum_{k=0, s_k \in D}^{n-1} M^k s_k\} = D + MD + \cdots + M^{n-1}D$. Таким образом,

$$G = \sum_{s \in D_n} M^{-n}(G + s).$$

Поскольку в графе есть цикл длины n, то у замощения $\mathcal{T}(T_n, D_n)$ есть *неподвижная* вершина $\boldsymbol{v}$, соответствующая себе. Чтобы упростить обозначения, мы используем одинаковый символ $\mathcal{T}$ для всех итераций. Итак, вершина $\boldsymbol{v}$ соответствует той же вершине T. Более того, после дополнительных итераций замощения, можно считать, что выпуклый угол $\mathrm{co}\,(K)$ имеет те же соответствующие грани в G, что и в T. Это доказано в предложении 4.36.

Шаг 3. Итак, у G есть хотя бы одна *неподвижная вершина* $\boldsymbol{v}$, которая соответствует той же крайней вершине G и элементу замощения T. Если K — угол в вершине $\boldsymbol{v}$, то множество $\mathrm{co}\,(K)$ является углом $\mathrm{co}\,(G)$; оно выпукло и имеет вершину в вершине $\boldsymbol{v}$. Наша цель

— доказать, что на самом деле угол K является выпуклым и простым (имеет ровно d рёбер). Для этого, мы сначала показываем, что если K содержит грань выпуклого угла $\mathrm{co}\,(K)$, то пересечение всех элементов с этой гранью определяет замощение на ней (лемма 4.37). Это позволит нам применить индукцию по размерности граней.

Шаг 4. Если угол K в неподвижной вершине $\boldsymbol{v}$ содержит j-мерную грань L множества $\mathrm{co}\,(K)$, то он содержит параллелепипед в L с тем же углом в $\boldsymbol{v}$ (лемма 4.39).

Шаг 5. Это ключевое место в доказательстве. Мы устанавливаем следующий вспомогательный геометрический факт, возможно, не лишённый собственного интереса.

Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклый многогранный конус. Предположим, что все его фасады (грани коразмерности один) простые, то есть, аффинно подобны $\mathbb{R}^{d-1}_+$ (см. параграф 4.9 для подробных определений). Для произвольных векторов, идущих из вершины вдоль рёбер (один вектор на каждом ребре), выполнено следующее: либо C простой, либо существует два фасада A, B и два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ из нашего семейства различных рёбер, таких что сдвинутые параллелепипеды $\boldsymbol{a} + P(A)$ и $\boldsymbol{b} + P(B)$ имеют общую внутреннюю точку, где $P(X)$ — параллелепипед, порождённый векторами на фасаде X (см. Рисунок 62). Если C простой, эти параллелепипеды образуют границу полноразмерного параллелепипеда с углом C. Это лемма 4.41, которая может быть названа «лемма о лилии», поскольку параллелепипеды образуют «лепестки лилии».

Шаг 6. Применяя результат предыдущего шага, мы доказываем по индукции по j следующее утверждение: если вершина $\boldsymbol{v}$ неподвижная, то для любого $j = 1, \dots, d$, угол K содержит все грани размерности j выпуклого угла $\mathrm{co}\,(K)$ и все эти грани простые (предложение 4.40). Выбирая $j = d$, мы сразу получаем, что угол K выпуклый и простой.

Шаг 7. Итак, угол G в каждой неподвижной вершине выпуклый и простой. Значит, по [127, теореме 1.9], множество G эквивалентно объединению нескольких целых сдвигов единичного куба. Тогда мы

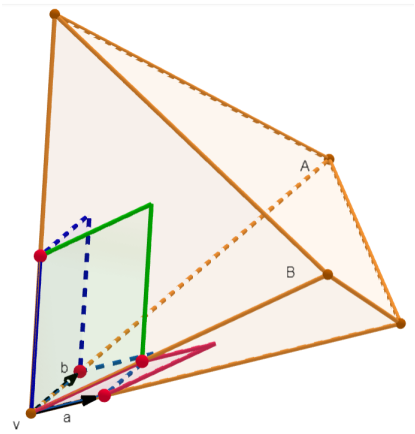


Рис. 62: «Лилия»: параллелепипеды на гранях, порождённые векторами вдоль рёбер.

устанавливаем лемму 4.42, в соответствие с которой существует подмножество замощения $\mathcal{T}$, образующее замощение прямоугольного параллелепипеда. Тогда мы применяем основной результат статьи [102] о дискретном замощении куба и получаем, что T — прямое произведение d одномерных тайлов. Заметим, что в случае бесконечных дискретных замощений множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ это не выполняется, см. [105]. Тогда таким же является и G. Остаётся применить классификацию одномерных тайлов 4.26.

Схема доказательства теоремы 4.29. Из теоремы 4.27 следует, что G состоит из непересекающихся целых сдвигов единичного куба. Взяв достаточно большую итерацию самоподобного замощения $\mathcal{T}$, можно считать, что диаметр тайла меньше 1. Значит, один тайл не может пересекать несколько кубов, т.е., каждый тайл лежит в одном из кубов. Если G состоит из более, чем одного куба, то рассмотрим сдвиги тайла $T = M^{-1}G$, лежащие в двух фиксированных кубах. Несложно показать, что векторы $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d$, для которых тайлы $M^{-1}(G + \boldsymbol{s})$ составляют первый куб, находятся в тех же классах смежности $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$, что векторы $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^d$ для второго куба. Последнее невозможно, поскольку все эти векторы являются цифрами из D и должны принадлежать разным классам.

4.9 Обозначения и вспомогательные сведения

Теперь перейдём к полным доказательствам теорем 4.27, 4.29.

Мы используем теоремы об отделимости. Пусть X и Y подмножества $\mathbb{R}^d$. Множество X отделено от Y ненулевым элементом $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$, если $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \leq (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$. Эта отделимость *сильная*, если множество $Y \setminus X$ непустое и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) < (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y})$ для всех $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y \setminus X$. Заметим, что эта отделимость несимметрична по X, Y. По выпуклой теореме об отделимости, если X, Y оба выпуклы, внутренность Y непуста и не пересекает X, то X может быть отделён от Y. Каждая грань выпуклого многогранника G сильно отделима от него. Точка на поверхности G сильно отделима от неё в точности, когда она крайняя.

Конусы

Конус K с вершиной в начале координат это замкнутое подмножество $\mathbb{R}^d$, такое что если $\boldsymbol{x} \in K$, то для любого $\lambda \geq 0$ выполнено $\lambda \boldsymbol{x} \in K$. Конус невырожденный, если у него непустая внутренность. Конус *точечный*, если он не содержит прямой. Конус *выпуклый*, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K$, имеем $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in K$. Любой луч, который лежит на границе конуса, называется его *образующей*. Если образующая не лежит в выпуклой оболочке других образующих, она называется *крайним ребром*. В этом случае мы опускаем слово «крайняя» и называем её ребром.

Далее мы всегда предполагаем, что выпуклый конус невырожден и точечный. В этом случае он может быть сильно отделён от его вершины.

Выпуклый конус $K \subset \mathbb{R}^d$ называется многогранным, если он определён системой линейных неравенств. У него есть грани всех размерностей от нуля (вершина) до d (весь конус). *Фасад* это грань размерности $d-1$; ребро это грань размерности 1. Конус *простой*, если он аффинно подобен положительному ортанту $\mathbb{R}^d_+$. Так, у простого конуса в точности d фасадов и d рёбер. Конус имеет простые фасады, если все его фасады — простые $(d-1)$-мерные конусы. Яс-

но, что в этом случае все его грани размерностей $\leq d-1$ являются простыми.

Угол — это пересечение конуса с шаром с центром в вершине. Конус — это *продолжение* любого своего угла. Мы часто отождествляем угол и его продолжение и используем для них одинаковые обозначения.

Каждый выпуклый конус определяет частичный порядок в $\mathbb{R}^d$ следующим образом: $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$, если $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in K$. В частности, $\boldsymbol{x} \geq 0$, если $\boldsymbol{x} \in K$. Поскольку K точечный, если $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}$ возможно, только если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Точка $\boldsymbol{x}$ называется *минимальной* для множества $\Omega \in \mathbb{R}^d$, если $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ для всех $\boldsymbol{y} \in \Omega$. Не любое множество имеет минимальный элемент, но, если он существует, он единственный. В самом деле, если есть два минимальных элемента $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, то $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}$, а значит $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Пусть B — подмножество гиперплоскости L с непустой (в L) внутренностью и $\boldsymbol{v} \notin L$ — точка. Тогда все отрезки, соединяющие $\boldsymbol{v}$ с точками из B, образуют *ограниченный конус* с вершиной $\boldsymbol{v}$ и основанием B.

Многогранные множества

Угол многогранного множества G — это его пересечение с малым шаром с центром в вершине $\boldsymbol{v}$ одного из выпуклых многогранников, составляющих G. Мы всегда предполагаем, что шар достаточно мал и пересекает только те грани составляющих выпуклых многогранников, которые содержат $\boldsymbol{v}$. Ясно, что продолжение угла невырождено, но возможно не выпукло и не точечно.

Точка многогранного множества G называется *крайней вершиной*, если она вершина $\operatorname{co}(G)$ (см. Рисунок 59). Точка $\boldsymbol{v} \in G$ — крайняя вершина, тогда и только тогда, когда она может быть сильно отделена от G. Эта вершина называется *выпуклой*, если она является вершиной выпуклого угла множества G (как обычно, выпуклый угол предполагается невырожденным и точечным).

Аналогично мы определяем *составную крайнюю грань* L многогранного множества $G \subset \mathbb{R}^d$. Это пересечение G с отделяющей

гиперплоскостью L. Для упрощения обозначений мы будем называть L *крайней гранью*. Это объединение нескольких выпуклых множеств, являющихся гранями многогранников, образующих G. Максимальная размерность этих множеств назовём *размерностью крайней грани*. Крайняя грань размерности $d-1$ это *крайний фасад*. Пусть $G' \subset G$ — крайний фасад и S — выпуклое подмножество G'; тогда *слой* S — это ограниченный конус с основанием S, который содержится в G. Не каждое выпуклое подмножество фасада имеет слой. Например, если ABC — треугольник и A', B', C' — середины его сторон, то объединение треугольников $AB'C'$ и $BC'A'$ — многогранное множество с фасадом AB. У этого фасада, однако, нет слоя.

Как мы уже упоминали, существуют многогранники без выпуклых вершин. Однако, крайние вершины всегда существуют.

Предложение 4.30. *Если K — угол многогранного множества в его крайней вершине, то* $\operatorname{co}(K)$ *— невырожденный выпуклый точечный конус.*

Доказательство. Выпуклость и невырожденность очевидны. Точечность $\operatorname{co}(K)$ следует из точечности угла $\operatorname{co}(G)$, который содержит $\operatorname{co}(K)$.

□

Предложение 4.31. *Каждое многогранное множество содержится в выпуклой оболочке своих крайних вершин.*

Доказательство. Крайние вершины многогранного множества G являются вершинами выпуклого многогранника $\operatorname{co}(G)$. По теореме Минковского, выпуклый многогранник это выпуклая оболочка своих вершин.

□

Следствие 4.32. *Каждое многогранное множество в $\mathbb{R}^d$ имеет хотя бы $d+1$ крайнюю вершину.*

4.10 Доказательство теоремы 4.27: вспомогательные результаты

Мы начнем с нескольких базовых фактов, для которых даже не нужно условие самоподобности замощения.

Предложение 4.33. *Предположим, что $\mathcal{T}$ — замощение многогранного множества G; тогда любая крайняя вершина G содержится в единственном элементе $\mathcal{T}$.*

Доказательство. Пусть элемент $T \in \mathcal{T}$ содержит крайнюю вершину $\boldsymbol{v}$ множества G. Обозначим через $\tilde{K}$ продолжение угла $\mathrm{co}(G)$ в вершине $\boldsymbol{v}$. Поскольку $\mathrm{co}(G) \subset \tilde{K}$ и $T \subset G$, отсюда следует, что $T \subset \tilde{K}$. Значит, $\boldsymbol{v}$ — минимальный элемент T в частичном порядке, определённом конусом $\tilde{K}$. Если другой элемент $T' \in \mathcal{T}$ также содержит $\boldsymbol{v}$, тогда $\boldsymbol{v}$ — минимальный элемент T'. Из единственности минимального элемента и из того, что T' — параллельный сдвиг T на какой-то ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$, мы получаем, что $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}$; поэтому, $\boldsymbol{a} = 0$ и $T' = T$. □

Предложение 4.34. *Если элемент $T \in \mathcal{T}$ содержит крайнюю вершину $\boldsymbol{v}$ множества G, тогда он содержит достаточно малый угол в $\boldsymbol{v}$. В частности, если замощение многогранное, тогда T и G имеют общий угол в $\boldsymbol{v}$ и эта вершина крайняя для T.*

Доказательство. Согласно предложению 4.33, T — единственный элемент замощения, содержащий $\boldsymbol{v}$, следовательно, все другие элементы $\mathcal{T}$ находятся на положительных расстояниях от $\boldsymbol{v}$. Выбирая радиус шара меньше, чем все эти расстояния, мы получим угол, который не пересекает другие элементы $\mathcal{T}$. С другой стороны, замощение покрывает всё множество G, поэтому пересечение малого шара с G совпадает с его пересечением с T. Таким образом, T и G имеют общий угол в $\boldsymbol{v}$. Более того, поскольку $\boldsymbol{v}$ может быть сильно отделена от G гиперплоскостью, та же гиперплоскость отделяет $\boldsymbol{v}$ от T, поскольку $T \subset G$. Следовательно, $\boldsymbol{v}$ — крайняя вершина T. □

Таким образом, каждая крайняя вершина G сопоставлена крайней вершине T, являющейся минимальным элементом T в частичном порядке, определённом углом $\mathrm{co}(G)$ в этой вершине. Обратное соответствие может быть некорректно определено: крайняя вершина T может не иметь соответствующих ей вершин из G или иметь несколько.

Теперь мы начнём использовать самоподобие рассматриваемых тайлов. Каждый элемент T подобен G с помощью какого-то аффинного преобразования $A : T \to G$. Оно отображает каждую крайнюю вершину T в соответствующую вершину G. Преобразования всех элементов имеют одну и ту же линейную часть, определённую растягивающей матрицей M.

Определение 4.35. Пусть многогранное множество G — тайл с замощением $\mathcal{T}$. Тогда его крайняя вершина $\boldsymbol{v}$ называется *неподвижной*, если единственный элемент $T \in \mathcal{T}$, содержащий $\boldsymbol{v}$, удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\boldsymbol{v}$ — это неподвижная точка аффинного преобразования $A : T \to G$;

2) преобразование A сохраняет угол K множества G в вершине $\boldsymbol{v}$ и сохраняет все грани конуса $\mathrm{co}\,(K)$;

3) продолжение K содержит G.

Крайние вершины зависят только от многогранного множества G, в то время как неподвижные вершины зависят также от его замощения. Как мы знаем, у G есть хотя бы $d+1$ крайняя вершина. Однако, для некоторых замощений, никакие из этих вершин не являются неподвижными. Тем не менее, как минимум одна из них станет неподвижной после нескольких итераций замощения. Это гарантируется следующим предложением:

Предложение 4.36. *У самоподобного замощения $\mathcal{T}$ многогранного множества G всегда существует итерация $\mathcal{T}^n$ такая, что G с замощением $\mathcal{T}^n$ имеет хотя бы одну неподвижную вершину.*

Доказательство. Из предложения 4.34 следует, что каждая крайняя вершина $\boldsymbol{u}$ тайла G соответствует единственной крайней вер-

шине $\boldsymbol{u}'$ элемента T. Последняя, в свою очередь, соответствует единственной крайней вершине $A\boldsymbol{u}'$ тайла G. Поэтому, у нас есть отображение $\boldsymbol{u} \mapsto A\boldsymbol{u}'$, определённое на множестве крайних вершин G. Обозначим это отображение через φ. В целом, φ может не быть инъективным. Итерируя φ, получаем крайнюю вершину $\boldsymbol{v}$ множества G и число k такое, что $\varphi^k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$. Это означает, что для замощения $\mathcal{T}^k$, вершина $\boldsymbol{v}$ покрыта соответствующей ей (в смысле подобия) вершине элемента замощения. Таким образом, после перехода к некоторой степени замощения, мы предполагаем (сохраняя для нового замощения старые обозначения), что G и T имеют одинаковую соответствующую вершину $\boldsymbol{v}$, т.е., $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Согласно предложению 4.34, углы G и T в $\boldsymbol{v}$ совпадают. Следовательно, преобразование A сохраняет этот угол K и поэтому, определяет перестановку её крайних рёбер. Некоторая степень этой перестановки тождественная. Это означает, что снова переходя к итерации замощения, мы можем считать, что A отображает каждое крайнее ребро конуса K в себя. Следовательно, оно сохраняет все грани $\mathrm{co}\,(K)$ и поэтому, $\boldsymbol{v}$ — неподвижная вершина.

С возможным дополнительным итерированием замощения можно предполагать, что элемент T достаточно мал и содержится в малом шаре, определённом углом K. Следовательно, T содержится в продолжении угла K. Поскольку A отображает T в G и сохраняет угол K, G также содержится в продолжении K. □

В дальнейшем мы упрощаем обозначения и предполагаем, что нам уже дана n-я итерация замощения. Таким образом, для замощения $\mathcal{T}$ множества G, существует неподвижная вершина $\boldsymbol{v}$.

До сих пор мы имели дело с элементами, покрывающими крайние вершины. Теперь приступим к изучению крайних граней. Отметим, что мы рассматриваем только грани выпуклых конусов. Пусть K — угол многогранного множества G и L — j-мерная грань выпуклого конуса $\mathrm{co}(K)$, $j \geq 1$. Обозначим $G_L = G \cap L$. Если G — тайл, то G лежит в продолжении K. Следовательно, в этом случае $\mathrm{co}\,(G_L)$ — j-мерная грань $\mathrm{co}\,(G)$. Следующая лемма была доказана В.Ю. Протасовым в совместной работе [139]. Она уменьшает размерность в

доказательстве теоремы 4.27.

Лемма 4.37. *Пусть $\mathcal{T}$ — замощение G, $\boldsymbol{v} \in G$ — его неподвижная вершина, и T его элемент, содержащий $\boldsymbol{v}$. Предположим, угол K в $\boldsymbol{v}$ содержит грань L множества* $\operatorname{co}(K)$*; тогда все элементы $\mathcal{T}$, пересекающие G_L, — это сдвиги T на векторы, параллельные L. Множество пересечений образует замощение G_L. Если $T \cap L$ — составной фасад T, то у любого его выпуклого подмножества есть слой в T.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{z}$ — произвольная точка G_L и элемент $T' = T + \boldsymbol{a}$ содержит эту точку. Пусть гиперплоскость $\{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = 0\}$ сильно отделяет L от K. Тогда она сильно отделяет G_L от K. Это означает, что $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}) = 0$, в то время как $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) < 0$ для всех точек $\boldsymbol{x} \in G \setminus G_L$. Поскольку $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a} \in T$, выполнено $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \leq 0$. Таким образом, $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \geq (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{z}) = 0$, откуда следует $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \geq 0$. Однако, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} \in T'$ и значит, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} \in G$. Отсюда верно $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) \leq 0$ и поэтому $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}) = 0$. Таким образом, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a} \in G_L$ и тогда вектор сдвига $\boldsymbol{a}$ параллелен L. Это верно для всех элементов замощения, пересекающих G_L.

Итак, множества $T' \cap L$, где T' — произвольный сдвиг T, параллельный L, являются сдвигами $T \cap L$. Ясно, что они покрывают G_L. Так как аффинное преобразование A сохраняет L, то верно, что все непустые множества $T_i \cap G_L$ подобны G_L при помощи преобразования A. Чтобы доказать, что они образуют замощение G_L, остаётся показать, что внутренности (в L) этих множеств не пересекаются. Это будет сделано по индукции по $j = \dim L$ в обратном порядке, т.е., начиная с $j = d$.

Предположим, что $j \leq d - 1$ и что утверждение верно для всех $(j+1)$-мерных граней L': множества $T_i \cap G_{L'}$ не имеют общих внутренних точек в L'. Возьмём произвольную j-мерную грань L и выберем $(j+1)$-мерную грань L', содержащую L. По предположению индукции, пересечения T_i с L' (обозначим их T_i') образуют замощение $G_{L'}$. Если мы покажем, что пересечения T_i' с L имеют непересекающиеся внутренности (в L), то получим, что они образуют замощение G_L, и доказательство будет завершено. В самом деле, для всевозможных

$(j+1)$-мерных граней, содержащих L, замощение G_L будет одним и тем же. Чтобы это увидеть, заметим, что это замощение однозначно определяется аффинным преобразованием грани L и её системой сдвигов L. Ни преобразование подобия, ни система сдвигов не зависят от L'. В самом деле, сдвиги L — сдвиги T, параллельные L и преобразование подобия — ограничение $A|_L$ оператора подобия A на его инвариантное подпространство L. Итак, нам необходимо показать, что пересечения T_i' с L имеют непересекающиеся внутренности в L. Для простоты мы осуществляем доказательство для $j = d-1$, доказательство для других j дословно повторяется. Таким образом, $L' = \mathrm{co}\,(K)$ и L — гиперграань (фасад) L'. Обозначим $\tilde{T} = T \cap L$ и предположим противное: есть элементы $\tilde{T} + \boldsymbol{a}$ и $\tilde{T} + \boldsymbol{b}$, у которых есть общая внутренняя точка $\boldsymbol{x} \in L$. Это точка принадлежит множеству $P + \boldsymbol{a}$, где P — один из выпуклых многогранников, образующих многогранное множество G. Тогда $\tilde{P} + \boldsymbol{a}$, которое является пересечением $P + \boldsymbol{a}$ с L — фасад выпуклого многогранника $P + \boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{x}$ — внутренняя точка этого фасада, то какая-то её окрестность $U(\boldsymbol{x})$ лежит в $P + \boldsymbol{a}$ (более точно, "половина" этой окрестности, являющаяся пересечением $U(\boldsymbol{x})$ с полупространством, содержащим G). Поэтому, $U(\boldsymbol{x})$ лежит в $T + \boldsymbol{a}$. Однако, в этом случае множество $T + \boldsymbol{b}$ не может пересекать $U(\boldsymbol{x})$, иначе оно будет иметь общие внутренние точки с $T + \boldsymbol{a}$. Если, с другой стороны, $\boldsymbol{x}$ принадлежит границе $\tilde{P} + \boldsymbol{a}$, тогда мы используем наше предположение, что $\boldsymbol{x}$ — общая внутренняя точка $\tilde{T} + \boldsymbol{a}$ и $\tilde{T} + \boldsymbol{b}$. Каждый достаточно малый сдвиг $\boldsymbol{x}$ вдоль L также даёт внутреннюю точку обоих $\tilde{T} + \boldsymbol{a}$ и $\tilde{T} + \boldsymbol{b}$. Однако, есть малый сдвиг, отправляющий $\boldsymbol{x}$ в какую-то точку $\tilde{\boldsymbol{x}}$ во внутренности $\tilde{P} + \boldsymbol{a}$. В самом деле, каждая граничная точка выпуклого многогранника может быть сдвинута в его внутренность. Теперь мы повторяем доказательство выше для точки $\tilde{\boldsymbol{x}}$, которая принадлежит внутренности $\tilde{P} + \boldsymbol{a}$. Это завершает доказательство для замощения G_L.

Наконец, для каждого $T' \in \mathcal{T}$, $T' \neq T$, есть ограниченный конус в G с основанием $T \cap L$, который не пересекает T'. Поскольку множество $\mathcal{T}$ конечно, пересечение этих конусов содержит ограниченный конус с основанием $T \cap L$. Этот конус не пересекается с другими элементами из $\mathcal{T}$, значит, он лежит в T. Поэтому, это слой фасада $T \cap L$

в T. □

В частности, для $j = 1$, получаем:

Следствие 4.38. *Пусть ℓ — крайнее ребро G, выходящее из неподвижной вершины $\boldsymbol{v} \in G$. Пусть $\mathcal{T}$ — замощение G и T его элемент, содержащий $\boldsymbol{v}$. Тогда все элементы $\mathcal{T}$, пересекающие ℓ, являются сдвигами T на векторы, параллельные ℓ. Множества из пересечений образуют замощение ℓ.*

Доказательство. Как мы знаем, все рёбра $\mathrm{co}(K)$ (грани размерности 1) это крайние рёбра K и они лежат в K. Следовательно, выполнены предположения леммы 4.37 для ℓ. Применяя теперь лемму 4.37 в случае $j = 1$, завершаем доказательство. □

Теперь покажем, что если угол K неподвижной вершины содержит грань угла $\mathrm{co}\,(K)$, то множество $T \cap L$ содержит специальный параллелепипед.

Лемма 4.39. *При предположениях леммы 4.37, пусть L — простой j-мерный конус с рёбрами ℓ_s, $s = 1, \ldots, j$. Пусть $\boldsymbol{b}_s$ — наиболее удалённая точка от $\boldsymbol{v}$ на ребре ℓ_s, для которой отрезок $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_s]$ лежит в T. Тогда T содержит j-мерный параллелепипед, порождённый отрезками $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_s]\,,\ s = 1, \ldots, j$.*

Доказательство. Доказательство ведётся индукцией по размерности j. Для $j = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно выполняется для какой-то размерности $n < j$. Рассмотрим грань L_{n+1}, порождённую рёбрами $\ell_1, \ldots, \ell_{n+1}$ и её грань L_n, порождённую первыми n рёбрами. Поскольку L_{n+1} — простой конус, мы можем отождествить его с $\mathbb{R}^{n+1}_+$ и предположить, что все отрезки $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_s]$ имеют длину один. Обозначим $\boldsymbol{b}_s - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_s$. Мы используем одни и те же обозначения для элементов из $\mathcal{T}$ и для их пересечений с гранью L_{n+1}. Нам необходимо показать, что единичный куб $P_{n+1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_+\,,\, x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n+1\}$ содержится в T. По индуктивному предположению, T содержит его грани $P_n = \{\boldsymbol{x} \in P_{n+1}\,,\, x_{n+1} = 0\}$. Поскольку по следствию 4.38 сдвиги множества $T \cap \ell_{n+1}$ образуют

замощение ℓ_{n+1}, отсюда следует, что множество $T' = T + \boldsymbol{e}_{n+1}$ также элемент $\mathcal{T}$.

Если P_{n+1} не лежит в T, тогда существует точка $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} P_{n+1}$, которая не в T (см. Рисунок 63). С другой стороны, она должна ле-

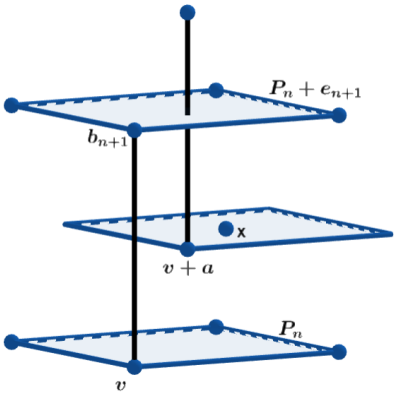


Рис. 63: Иллюстрация к доказательству леммы 4.39

жать в каком-то элементе $T'' = T + \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \in \operatorname{int} P_{n+1}$. Для каждого $\boldsymbol{y} \in T'$, имеем $y_{n+1} \geq 1$, следовательно, ни одна из точек $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$ не лежит в T', и тогда $T' \neq T''$. С другой стороны, T'' должен содержать параллельный сдвиг отрезка $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_{n+1}]$ на вектор $\boldsymbol{a}$. Этот отрезок $[\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{n+1} + \boldsymbol{a}]$ имеет длину один, и он пересекает грань $P_n + \boldsymbol{e}_{n+1}$ у P_{n+1}. Однако, эта грань лежит в T' с каким-то слоем (лемма 4.37). Следовательно, T и T' имеют общую внутреннюю точку. Противоречие доказывает, что P_{n+1} лежит в T, что завершает шаг индукции. □

4.11 Финальная часть доказательства теоремы 4.27

Теперь мы докажем следующее основное предложение, из которого легко следует теорема 4.27:

Предложение 4.40. *Если многогранное множество является тайлом, то тогда его углы во всех неподвижных вершинах выпуклы и просты.*

Нам понадобится следующая геометрическая лемма, которая, возможно, не лишена и самостоятельного интереса. Пусть C — выпуклый многогранный конус с простыми фасадами и с вершиной в начале координат O. На каждом ребре C выбрана произвольная точка $\boldsymbol{c} \neq 0$, которую мы будем называть *направляющей точкой*, и отрезок $[O, \boldsymbol{c}]$ — *направляющий* отрезок этого ребра. Для данного фасада H у C, обозначим через $P(H)$ его *направляющий параллелепипед*, линейную оболочку направляющих отрезков этого фасада. Таким образом, $P(H)$ — $(d-1)$-мерный параллелепипед, содержащийся в H. Семейство всех таких параллелепипедов образует «лилию», основанную на конусе C.

Лемма 4.41. *(Лемма о лилии). Для выпуклого многогранного конуса C с простыми фасадами и для произвольных направляющих точек на его рёбрах, выполнено следующее: либо C простой, либо существуют два фасада A, B и две направляющие точки $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ на различных рёбрах C такие, что сдвинутые параллелепипеды $\boldsymbol{a} + P(A)$ и $\boldsymbol{b} + P(B)$ имеют общую внутреннюю точку (см. Рисунки 64, 65).*

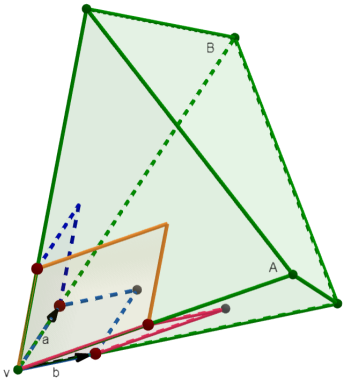


Рис. 64: Параллелепипеды на фасадах лилии, порождённые направляющими векторами.

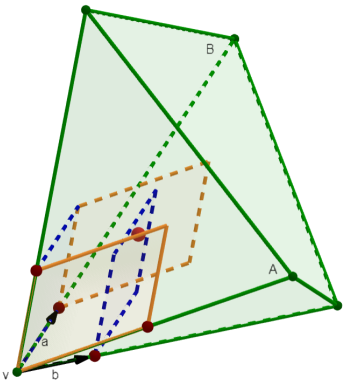


Рис. 65: Пересечение параллелепипедов $\boldsymbol{a} + P(A)$ и $\boldsymbol{b} + P(B)$.

Доказательство леммы 4.41. Если C не является простым, тогда существуют две его грани A, B, не имеющие общую грань размерности $(d-2)$. Тогда есть два ребра конуса C $a \subset A$ и $b \subset B$ такие, что $(d-1)$-мерные конусы $C_a = \mathrm{co}\{a, B\}$ и $C_b = \mathrm{co}\{b, A\}$ имеют общую внутреннюю точку. Ясно, что a не лежит в B, иначе $C_a = B$ и оно не может иметь общие внутренние точки с C_b, поскольку у A и B нет общих фасадов. Аналогично, b не лежит в A. Поскольку a и b оба лежат в $C_a \cap C_b$, у множества $C_a \cap C_b$ есть внутренние точки, сколь угодно близкие к $\mathrm{co}\{a, b\}$. Теперь обозначим через $\boldsymbol{a}_i\,,\ i = 1, \dots d-1$, направляющие точки рёбер грани A, $\boldsymbol{a}_1 \in a$. Аналогично, $\boldsymbol{b}_i\,,\ i = 1, \dots d-1$ — направляющие точки на рёбрах B, $\boldsymbol{b}_1 \in b$. Общая внутренняя точка $\boldsymbol{x}$ у C_a и C_b выражается так:

$$\boldsymbol{x} \quad = \quad \alpha\,\boldsymbol{a}_1 \,+\, \sum_{i=1}^{d-1} t_i \boldsymbol{b}_i \quad = \quad \beta\,\boldsymbol{b}_1 \,+\, \sum_{i=1}^{d-1} s_i \boldsymbol{a}_i\,, \tag{25}$$

где все коэффициенты α, β, t_i, s_i положительные. После умножения данного равенства на положительную константу, можно считать, что $\alpha < 1$ и $\beta < 1$. Более того, выбирая $\boldsymbol{x}$ достаточно близко к $\mathrm{co}\{a, b\}$, мы можем считать, что все t_i и s_i малые, в частности, все они меньше, чем 1 и $t_1 < \beta,\ s_1 < \alpha$. Переписывая (25), получаем

$$-(\beta - t_1)\,\boldsymbol{b}_1 \,+\, \sum_{i=2}^{d-1} t_i \boldsymbol{b}_i \quad = \quad -(\alpha - s_1)\,\boldsymbol{a}_1 \,+\, \sum_{i=2}^{d-1} s_i \boldsymbol{a}_i\,.$$

Теперь мы добавляем $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1$ к обеим частям этого равенства и получаем

$$\boldsymbol{a}_1 + \Big(1-(\beta-t_1)\Big)\,\boldsymbol{b}_1 + \sum_{i=2}^{d-1} t_i \boldsymbol{b}_i \quad = \quad \boldsymbol{b}_1 + \Big(1-(\alpha-s_1)\Big)\,\boldsymbol{a}_1 + \sum_{i=2}^{d-1} s_i \boldsymbol{a}_i\,. \tag{26}$$

Заметим, что точка $\Big(1-(\beta-t_1)\Big)\,\boldsymbol{b}_1 + \sum_{i=2}^{d-1} t_i \boldsymbol{b}_i$ принадлежит внутренности параллелепипеда $P(B)$. В самом деле, это линейная комбинация векторов $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{d-1}$ и все коэффициенты этой комбинации

из интервала $(0, 1)$. Следовательно, левая часть равенства (26) — это внутренняя точка параллелепипеда $\boldsymbol{a}_1 + P(B)$. Аналогично, левая часть — это внутренняя точка $\boldsymbol{b}_1 + P(A)$. Таким образом, параллелепипеды $\boldsymbol{a}_1 + P(B)$ и $\boldsymbol{b}_1 + P(A)$ имеют общую внутреннюю точку. Осталось обозначить $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1$, что завершает доказательство. □

Доказательство предложения 4.40. Как обычно, G обозначает многогранное множество, $\mathcal{T}$ — его самоподобное замощение, K — угол G в неподвижной вершине $\boldsymbol{v}$, и $T \in \mathcal{T}$ — элемент, покрывающий $\boldsymbol{v}$. После возможных итераций замощений можно предположить, что размер T настолько мал, насколько необходимо. Мы докажем следующее утверждение, из которого немедленно следует предложение 4.40:

Для любого $j = 1, \ldots, d$, угол K содержит все грани размерности j выпуклого угла $\operatorname{co}(K)$ *и все эти грани простые.*

Применяя это утверждение к $j = d$, получаем, что K содержит целый выпуклый конус $\operatorname{co}(K)$, который, более того, простой. Поэтому, $K = \operatorname{co}(K)$, и значит, K действительно является выпуклым и простым. Доказательство этого утверждения — индукция по размерности j.

$\underline{j = 1}$. В этом случае грани — крайние рёбра $\operatorname{co}(K)$, которые, как мы знаем, совпадает с крайними рёбрами K. Поэтому, в этом случае утверждение верно.

$\underline{j \to j + 1}$. Предположим, что утверждение выполняется для некоторого $j \leq d-1$. Допустим противное: угол $\operatorname{co}(K)$ имеет грань L размерности $j+1$, которая не лежит в K. Тогда множество $S = L \setminus K$ непусто. Поскольку $\operatorname{co}(K)$ достаточно мало, отсюда следует, что S — угол с вершиной в $\boldsymbol{v}$.

Пусть H — произвольная j-мерная грань L. Она также является гранью $\operatorname{co}(G)$ и, по предположению индукции, H простая и содержится в K. Для произвольного ребра L мы выбираем направляющую точку $\boldsymbol{a}$ так, чтобы направляющий отрезок $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}]$ был наибольшим по включению отрезком этого ребра, содержащимся в T. Применяя

лемму 4.39, заключаем, что j-мерный параллелепипед $P(H)$, порождённый j направляющими отрезками грани H, содержится в T. По следствию 4.38, для каждого направляющего отрезка $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}]$ грани L, множество $T + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v})$ — элемент $\mathcal{T}$ и значит, это множество лежит в K. Поэтому, $P(H) + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v}) \subset K$. Итак, для каждого фасада H грани L и для каждой направляющей точки $\boldsymbol{a}$ грани L, сдвинутый параллелепипед $P(H)+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{v})$ лежит в K. Теперь мы рассматриваем два случая.

1) L — простой конус. Поэтому $(j+1)$ сдвинутых параллелепипедов $P(H) + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v})$, где H — фасад L и $\boldsymbol{a} \notin H$ — направляющая точка, образуют границу $(j+1)$-мерного параллелепипеда, порождённого направляющими отрезками L. Эта граница лежит в K и должна пересекать открытый конус S. Следовательно, $K \cap S \neq \emptyset$, что противоречит определению S. Таким образом, $S = \emptyset$, и поэтому $L \subset K$.

2) L не простой, то есть, у него хотя бы $j+2$ рёбер. Давайте покажем, что этот случай невозможен. Применяя лемму 4.41 к конусу L, получаем две его j-мерные грани A, B и два различных ребра a, b с направляющими точками $\boldsymbol{a} \in a, \boldsymbol{b} \in b$, для которых параллелепипеды $P(A) + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v})$ и $P(B) + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{v})$ имеют общую внутреннюю точку. Первый содержится в элементе $T + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v})$, второй в элементе $T + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{v})$. Более того, поскольку $P(A)$ имеет слой в T (лемма 4.37), отсюда следует, что эти два элемента имеют общую внутреннюю точку. Значит, они совпадают, что невозможно, поскольку $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{v}) \neq (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{v})$, так как эти векторы в разных рёбрах L.

Это завершает индуктивный шаг, доказывая предложение. □

Таким образом, мы доказали, что для каждой неподвижной вершины G, соответствующий угол G — выпуклый и простой. Поскольку G имеет хотя бы один выпуклый угол, отсюда следует, что у него есть простой выпуклый угол. Теперь мы можем применить главный результат [127, теоремы 1.9]: если множество — тайл и у него есть хотя бы один выпуклый многогранный угол, то тогда оно аффинно подобно объединению целых сдвигов единичных кубов. Следующий

шаг — показать, что замощение этого множества содержит замощение параллелепипеда.

Лемма 4.42. *Пусть множество G является объединением целых сдвигов единичного куба, имеет замощение $\mathcal{T}$ и выпуклый простой угол K в крайней вершине. Тогда для некоторой итерации $\mathcal{T}$ найдётся подмножество, составляющее замощение некоторого прямоугольного параллелепипеда с углом K.*

Доказательство леммы 4.42. Проитерировав замощение, можно считать, что матрица M диагональна и диаметр T меньше единицы. Пусть P_0 — параллелепипед, натянутый на рёбра $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_s]$, $s = 1, \ldots, d$ из леммы 4.39. Покажем, что параллелепипед $P = MP_0$ искомый. Поскольку K простой, мы отождествляем его с $\mathbb{R}^d_+$. Образ целого сдвига единичного куба под действием M^{-1} будет называться *кирпич*. Поскольку G состоит из сдвигов единичного куба, T состоит из кирпичей.

Тогда $T+\boldsymbol{b}_i \in \mathcal{T}$, поэтому, внутренность параллелепипеда $P_0+\boldsymbol{b}_i$, являясь частью элемента $T + \boldsymbol{b}_i$, не пересекает T. Обозначим через $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j=1}^d$ канонический базис $\mathbb{R}^d$ и через h_j длины рёбер P. Используя подобие G и T получаем, что внутренность параллелепипеда $P + h_1\boldsymbol{e}_i$ не пересекает G. Среди всех единичных кубов, образующих G, мы выбираем самые «высокие» относительно i-й координаты (чьи центры имеют самую большую i-ю координату среди всех кубов). Есть два возможных случая:

Предположим, что никакой из самых высоких кубов не пересекает ось Ox_i; тогда элемент $T' \in \mathcal{T}$, содержащий вершину $h_i\boldsymbol{e}_i$ P имеет кирпич выше, чем эта вершина, то есть, i-я координата центра этого кирпича превышает h_i. Поскольку диаметр T' меньше единицы, этот кирпич содержится в $P + h_i\boldsymbol{e}_i$, что невозможно. Поэтому, для каждого i, существует самый высокий относительно i-й координаты куб в G, пересекающий ось Ox_i. Следовательно, T также имеет самый высокий кирпич (обозначим его через B_i), который пересекает ось Ox_i.

Если какой-то элемент $T+\boldsymbol{a} \in \mathcal{T}$, пересекающий внутренность P, содержит точку, чья i-я координата превосходит h_i, то кирпич $B_i+\boldsymbol{a}$

будет выше уровня $x_i = h_i$. С другой стороны, все другие координаты этого кирпича лежат на отрезках $[0, h_k]$, $k \neq i$. Значит, $B_i + \boldsymbol{a} \subset P + h_i \boldsymbol{e}_i$. Тогда кирпич $B_i + \boldsymbol{a}$ вне G, что невозможно, поскольку он часть элемента $T + \boldsymbol{a}$. Итак, у всех точек любого элемента, пересекающего P, i-я координата не более h_i. Применяя то же рассуждение для всех i, видим, что каждый элемент, пересекающий P, лежит в P. Значит, эти элементы образуют замощение P. □

Замечание 4.43. *Если среди единичных кубов, образующих множество G, хотя бы один отделим от остальных, то лемма 4.42 очевидна. В самом деле, если все элементы какой-то итерации $\mathcal{T}$ имеют диаметр менее единицы, тогда все элементы, пересекающие выделенный куб, не пересекают остальные кубы. Поэтому они образуют замощение данного куба. Однако, если в G нет отделимых кубов, то лемма 4.42 менее очевидна.*

Доказательство теоремы 4.27. Пусть G — многогранное множество и $\mathcal{T}$ — его самоподобное замощение. Согласно предложению 4.36, существует некоторая итерация этого замощения, для которой у G есть неподвижная вершина $\boldsymbol{v}$. Предложение 4.40 утверждает, что угол K в $\boldsymbol{v}$ — выпуклый и простой. Значит, по [127, теореме 1.9], множество G эквивалентно объединению нескольких целых сдвигов единичного куба. Все углы этого множества прямоугольные, то есть, равны конусу $\mathbb{R}^d_+$. Теперь мы применяем лемму 4.42 и получаем, что существует итерация замощения $\mathcal{T}$, подмножество которой образует замощение параллелепипеда P с углом K. Следовательно, P — прямоугольный параллелепипед. Поскольку элемент T покрывает вершину $\boldsymbol{v}$, аффинно подобен G и имеет тот же угол K, после аффинного преобразования с диагональной матрицей, T становится объединением целых сдвигов единичного куба, и несколько целых сдвигов T покрывают параллелепипед. Заменяя каждый единичный куб его центром, получаем дискретное замощение параллелепипеда в $\mathbb{Z}^d$. В соответствии с главным результатом [102], каждое дискретное замощение это прямое произведение одномерных дискретных замощений отрезка целых чисел. Поэтому, $\mathcal{T}$ — прямое произведение d

замощений отрезка. Применяя классификацию одномерных тайлов 4.26, завершаем доказательство. □

4.12 Доказательство теоремы 4.29

Пусть многогранное множество G является тайлом, соответствующие элементы разбиения $\mathcal{T}$. Если G — аттрактор, то $\mathcal{T} = \{M^{-1}(G + \boldsymbol{s}),\ \boldsymbol{s} \in D\}$, M — целая растягивающая матрица, D — набор цифр, то есть полная система вычетов $\mathbb{Z}^d/M\mathbb{Z}^d$.

Доказательство теоремы 4.29. Применяя теорему 4.27, получаем, что G это прямое произведение d множеств вида (24). Следовательно, G эквивалентно объединению непересекающихся целых сдвигов единичного куба. Для каждого $n \geq 2$, напомним, что n-я итерация $\mathcal{T}^n$ замощения $\mathcal{T}$ определяется матрицей M^n и множеством цифр $D_n = D + MD + \cdots + M^{n-1}D$. Ясно, что все элементы D_n из различных классов эквивалентности $\mathbb{Z}^d/M^n\mathbb{Z}^d$. Если n достаточно большое, то диаметр множества $M^{-n}G$ меньше единицы. Значит, каждый элемент содержится в одном из единичных кубов, образующих G.

Если G содержит больше, чем один куб, то возьмём два из них, пусть C и C'. Тогда $C' = C + \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^d$. Пусть $\boldsymbol{u}$ — произвольная вершина C и $T \in \mathcal{T}^n$ — элемент замощения, содержащий $\boldsymbol{u}$. В частичном порядке, задаваемом углом куба C в $\boldsymbol{u}$, точка $\boldsymbol{u}$ — минимальная точка C. Поскольку $T \subset C$, получаем, что $\boldsymbol{u}$ — минимальная точка T. Вершина $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}$ куба C' покрыта другим элементом $T' \in \mathcal{T}^n$. Пусть $T' = T + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^d$. Тем же способом мы показываем, что $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a}$ — минимальная точка T' относительно того же порядка. Поскольку параллельный перенос сохраняет минимальность точек, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}$, и значит $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Итак, $T' = T + \boldsymbol{a}$. Поскольку $\mathcal{T}^n = \{M^{-n}(G + \boldsymbol{s}),\ \boldsymbol{s} \in D_n\}$, имеем $T = M^{-n}(G + \boldsymbol{s}_1)$, $T' = M^{-n}(G + \boldsymbol{s}_1)$, где $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in D_n$. Таким образом, $T' = T + \boldsymbol{a} = T + M^{-n}(\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{s}_1)$. Это означает, что $\boldsymbol{a} = M^{-n}(\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{s}_1)$ и тогда $\boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{s}_1 = M^n\boldsymbol{a}$, что невозможно, поскольку $\boldsymbol{s}_1$ и $\boldsymbol{s}_2$ из разных классов эквивалентности $\mathbb{Z}^d/M^n\mathbb{Z}^d$. □

Список литературы

[1] S. Akiyama, H. Brunotte, A. Pethő, J. Thuswaldner, Generalized radix representations and dynamical systems III // Osaka J. Math., **45**:2 (2008), 347–374.

[2] S. Akiyama, N. Gjini, On the connectedness of self-affine attractors // Archiv der Mathematik, **82**:2 (2004), 153–163.

[3] S. Akiyama, B. Loridant, Boundary parametrization of planar self-affine tiles with collinear digit set // Science China Mathematics, **53**:9 (2010), 2173–2194.

[4] S. Akiyama, B. Loridant, J. M. Thuswaldner, Topology of planar self-affine tiles with collinear digit set, J. Fractal Geom., **8**:1 (2021), 53–93.

[5] S. Akiyama, S.A.A. Pethő, On the distribution of polynomials with bounded roots II. Polynomials with integer coefficients // Uniform Distribution Theory, **9**:1 (2014), 5–19.

[6] S. Akiyama, J. Thuswaldner, A survey on topological properties of tiles related to number systems // Geom Dedicata, **109**:1 (2004), 89–105.

[7] S.V. Astashkin, P.A. Terekhin, Sequences of dilations and translations equivalent to the Haar system in L^p-spaces // Journal of Approximation Theory, **274** (2022), 105672.

[8] C. Bandt, Combinatorial topology of three-dimensional self-affine tiles, arXiv:1002.0710.

[9] C. Bandt, Self-similar sets. V. Integer matrices and fractal tilings of $\mathbb{R}^n$ // Proc. Amer. Math. Soc., **112**:2 (1991), 549–562.

[10] C. Bandt, G. Gelbrich, Classification of self-affine lattice tilings // J. London Math. Soc., **50**:3 (1994), 581–593.

[11] C. Bandt, D. Mekhontsev, A. Tetenov, A single fractal pinwheel tile // Proceedings of the American Mathematical Society **146**:3 (2018), 1271–1285.

[12] C. Bandt, Y. Wang, Disk-Like Self-Affine Tiles in $\mathbb{R}^2$ // Discrete and Computational Geometry, **26**:4 (2001), 591–601.

[13] G. Battle, A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions // Communications in Mathematical Physics **110**:4 (1987), 601–615.

[14] J.J. Benedetto, M. Leon, The construction of multiple dyadic minimally supported frequency wavelets on $\mathbb{R}^d$ // Contemp. Math., **247** (1999), 43–74.

[15] P. Bezier, Definition numerique des courbes et surface // Automatisme, **11**:4 (1966), 625-–632.

[16] D. Blondel, Yu. Nesterov, Computationally efficient approximations of the joint spectral radius // SIAM J. Matrix Anal., **27**:1 (2005), 256–272.

[17] O. Bodini, E. Rivals, *Tiling an interval of the discrete line* // Combinatorial pattern matching (Barcelona, 2006), Lecture Notes in Comput. Sci., **4009**, Springer, Berlin, 117–128.

[18] C. De Boor, On calculation with B-splines // Journal of Approximation Theory, **6**:1 (1972), 50—62.

[19] M. Bownik, Anisotropic Hardy spaces and wavelets, Mem. Amer. Math. Soc. 164 (781), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 122 pp.

[20] N.G. de Bruijn, On bases for the set of integers // Publ. Math. (Debrecen), **1** (1950), 232–242.

[21] N.G. de Bruijn, On number systems // Nieuw Arch. Wisk. (3), **4** (1956), 15–17.

[22] J.J. Benedetto, S. Sumetkijakan, Tight frames and geometric properties of wavelet sets // Adv. Comput. Math., **24**:1–4 (2006), 35–56.

[23] V. Blondel, S. Gaubert, J. Tsitsiklis, Approximating the spectral radius of sets of matrices in the max-algebra is NP-hard // IEEE Trans. Autom. Control, **45**:9 (2000), 1762–1765.

[24] V. Blondel, J. Tsitsiklis, The boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable // Systems & Control Letters **41**:2 (2000), 135–140.

[25] C. de Boor, R. DeVore, A. Ron, The structure of finitely generated shift-invariant spaces in $L_2(\mathbb{R}^d)$ // Journal of Functional Analysis, **119**:1 (1994), 37–78.

[26] C. de Boor, R. DeVore, A. Ron, Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$ // Transactions of the American Mathematical Society, **341**:2 (1994), 787–806.

[27] C.A. Cabrelli, C. Heil, U.M. Molter, Self-similarity and multiwavelets in higher dimensions, Mem. Amer. Math. Soc., 170:807, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 82 pp.

[28] P.F. de Casteljau, De Casteljau's autobiography: My time at Citroën // Computer Aided Geometric Design, **16**:7 (1999), 583–586.

[29] E. Catmull, J. Clark, Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes // Computer Aided Design, **10**:6 (1978), 350—355.

[30] A.S. Cavaretta, W. Dahmen, and C.A. Micchelli, Stationary subdivision, Mem. Amer. Math. Soc. 93 (453), 1991, 186 pp.

[31] G.M. Chaikin, An algorithm for high speed curve generation // Computer Graphics and Image Processing, **3** (1974), 346-–349.

[32] M. Charina, Vector multivariate subdivision schemes: Comparison of spectral methods for their regularity analysis // Appl. Comp. Harm. Anal., **32**:1 (2012), 86–108.

[33] M. Charina, T. Mejstrik, Multiple multivariate subdivision schemes: Matrix and operator approaches // Comp. Appl. Math., **349** (2019), 279–291.

[34] M. Charina, V.Yu. Protasov, Regularity of anisotropic refinable functions // Appl. Comput. Harmon. Anal., **47**:3 (2019), 795–821.

[35] D.-R. Chen, R.-Q. Jia, S.D. Reimenschneider, Convergence of vector subdivision schemes in Sobolev spaces // Appl. Comp. Harm. Anal., **12**:1 (2002), 128–149.

[36] M. Charina, C. Conti, T. Sauer, Regularity of multivariate vector subdivision schemes // Numerical algorithms, **39**:1-3 (2005), 97–113.

[37] A. Cohen, I. Daubechies, A new technique to estimate the regularity of refinable functions // Revista Mathematica Iberoamericana, **12**:2 (1996), 527–591.

[38] M. Cotronei, D. Ghisi, M. Rossini, T. Sauer, An anisotropic directional subdivision and multiresolution scheme // Adv. Comput. Math., **41** (2015), 709–726.

[39] C. Conti, K. Jetter, Concerning order of convergence for subdivision // Numerical Algorithms, **36**:4 (2004), 345–363.

[40] M.G. Cox, The numerical evaluation of B-splines // IMA Journal of Applied mathematics, **10**:2 (1972), 134–149.

[41] A. Cohen, K. Gröchenig, and L.F. Villemoes, Regularity of multivariate refinable functions // Constr. Approx., **15**:2 (1999), 241–255.

[42] G.R. Conner, J.M. Thuswaldner, Self-affine manifolds // Advances in Mathematics, **100**:289 (2016), 725–783.

[43] X. Dai, D.R. Larson, D.M. Speegle, Wavelet sets in $\mathbb{R}^n$ // J. Fourier Anal. Appl., **3**:4 (1997), 451–456.

[44] I. Daubechies, J.C. Lagarias, Two-scale difference equations I. Existence and global regularity of solutions // SIAM Journal on Mathematical Analysis, **22**:5 (1991), 1388–1410.

[45] I. Daubechies, J.C. Lagarias, Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // SIAM Journal on Mathematical Analysis, **23**:4 (1992), 1031–1079.

[46] I.B. Davydkin, A.V. Tetenov, On convex hulls of self-similar sets // Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics, **5**:2 (2005), 21–27.

[47] Q. Deng, K.-S. Lau, Connectedness of a class of planar self-affine tiles // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **380**:2 (2011), 493–500.

[48] G. Deslauriers, S. Dubuc, Symmetric iterative interpolation processes // Constructive Approximation: Special Issue: Fractal Approximation (1989), 49–68.

[49] N. Desprez, Chaoscope software, http://www.chaoscope.org/.

[50] D. Doo, M. Sabin, Behavior of recursive division surfaces near extraordinary points // Computer Aided Design, **10**:6 (1978), 356–370.

[51] A. Dubickas, Counting integer reducible polynomials with bounded measure // Appl. Anal. Discrete Math., **10**:2 (2016), 308–324.

[52] A. Dubickas, S.V. Konyagin, On the number of polynomials of bounded measure // Acta Arith., **86**:4 (1998), 325–342.

[53] S. Dubuc, Interpolation through an iterative scheme // Journal of mathematical analysis and applications, **114**:1 (1986), 185–204.

[54] N. Dyn, D. Levin, Interpolating subdivision schemes for the generation of curves and surfaces // Multivariate Approximation and Interpolation: Proceedings of an International Workshop held at the University of Duisburg, August 14–18, 1989. Birkhäuser Basel, 1990, 91–106.

[55] T. Eirola, Sobolev characterization of solutions of dilation equations // SIAM J. Math. Anal., **23**:4 (1992), 1015–1030.

[56] X. Fu, J.-P. Gabardo, Self-affine scaling sets in $\mathbb{R}^2$ // Memoirs of the American Mathematical Society, **233**:1097, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, 85 pp.

[57] A. Garsia, Arithmetic properties of Bernoulli convolutions // Trans. Amer. Math. Soc., **102**:3 (1962), 409–432.

[58] G. Gelbrich, Self-affine Lattice Reptiles with Two Pieces in $\mathbb{R}^n$ // Math. Nachr., **178**:1 (1996), 129–134.

[59] W.J. Gilbert, Radix representations of quadratic fields // J. Math. Anal. Appl., **83**:1 (1981), 264–274.

[60] K. Gröchenig, A. Haas, Self-similar lattice tilings // J. Fourier Anal. Appl., **1**:2 (1994), 131–170.

[61] C. Gröchenig, W.R. Madych, Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of $\mathbb{R}^n$ // IEEE Trans. Inform. Theory, **38**:2 (1992), 556–568.

[62] N. Guglielmi, V. Protasov, Exact computation of joint spectral characteristics of linear operators // Foundations of Computational Mathematics, **13**:1 (2013), 37–97.

[63] N. Guglielmi, V. Protasov, Invariant polytopes of sets of matrices with applications to regularity of wavelets and subdivisions // SIAM J. Matrix Anal. Appl., **37**:1 (2016), 18–52.

[64] R. Gundy, A. Jonsson, Scaling functions on $\mathbb{R}^2$ for dilations of determinant ± 2 // Appl. Comput. Harmon. Anal., **29**:1 (2010), 49–62.

[65] B. Han, Solutions in Sobolev spaces of vector refinement equations with a general dilation matrix // Advances Comput. Math., **24**:1-4 (2006), 375–403.

[66] B. Han, Computing the smoothness exponent of a symmetric multivariate refinable function // SIAM J. Matr. Anal. Appl., **24**:3 (2003), 693–714.

[67] D. Hacon, N.C. Saldanha, J.J.P. Veerman, Remarks on self-affine tilings // Exp. Math., **3**:4 (1994), 317–327.

[68] X.G. He, K.S. Lau, Characterization of tile digit sets with prime determinants // Appl. Comput. Harmonic Anal., **16**:3 (2004), 159–173.

[69] J.E. Hutchinson, Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J., **30**:5 (1981), 713–747.

[70] R-Q. Jia, S.R. Zhang, Spectral properties of the transition operator associated with multivariate refinement equation // Lin. Alg. Appl., **292**:1-3 (1999), 155–178.

[71] Q. Jiang, P. Oswald, Triangular $\sqrt{3}$-subdivision schemes: the regular case // J. Comput. Appl. Math., 156:1 (2003), 47–75.

[72] I. Kirat, K.-S. Lau, On the connectedness of self-affine tiles // J. Lond. Math. Soc., **62**:1 (2000), 291–304.

[73] I. Kirat, K.-S. Lau, Classification of integral expanding matrices and self-affine tiles // Discrete Comput. Geom., **28**:1 (2002), 49–73.

[74] A.V. Krivoshein, E.A. Lebedeva, Uncertainty principle for the Cantor dyadic group, Journal of Mathematical Analysis and Applications **423**:2 (2015), 1231–1242.

[75] I. Kirat, K.-S. Lau, H. Rao, Expanding polynomials and connectedness of self-affine tiles // Discrete Comput. Geom., **31**:2 (2004), 275–286.

[76] P. Kirschenhofer, J.M. Thuswaldner, Shift radix systems–a survey // Numeration and Substitution 2012, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014, 1–59.

[77] P. Kirschenhofer, A. Thuswaldner, Distribution results on polynomials with bounded roots // Monatshefte für Mathematik, **185**:4 (2018), 689–715.

[78] A. Kravchenko, D. Mekhontsev, IFS Builder 3d software, http://fractals.nsu.ru/builder3d_en.htm.

[79] M.G. Krein, M.A. Rutman, Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space // Uspekhi Matematicheskikh Nauk, **3**:1 (1948), 3–95.

[80] A. Krivoshein, V.Yu. Protasov, and M.A. Skopina, Multivariate wavelets frames, Ind. Appl. Math. Springer, Singapore, 2016, 248 pp.

[81] A. Krivoshein, M. Skopina, Wavelet approximation in Orlicz spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **516**:1 (2022), 126473.

[82] L. Kobbelt, $\sqrt{3}$-subdivision // Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, 2000, 103–112.

[83] M.N. Kolountzakis, M. Matolcsi, Tilings by translation, arXiv:1009.3799, 2010.

[84] J.C. Lagarias, Y. Wang, Tiling the line with translates of one tile // Invent. Math., **124**:1 (1996), 341–365.

[85] J. C. Lagarias, Y. Wang, Haar type orthonormal wavelet bases in $\mathbb{R}^2$ // J. Fourier Anal. Appl., **2**:1 (1995), 1–14.

[86] J. Lagarias, Y. Wang, Haar bases for $L_2(\mathbb{R}^n)$ and algebraic number theory // J. Number Theory, **57**:1 (1996), 181–197.

[87] J. Lagarias, Y. Wang, Integral self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$. II. Lattice tilings // J. Fourier Anal. Appl., **3**:1 (1997), 83–102.

[88] J. Lagarias, Y. Wang, Corrigendum/addendum: Haar bases for $L_2(\mathbb{R}^n)$ and algebraic number theory, J. Number Theory 57 (1996), no. 1, 181 – 197 // J. Number Theory, **76**:2 (1999), 330–336.

[89] E.A. Lebedeva, Uncertainty constants and quasispline wavelets, Applied and Computational Harmonic Analysis **30**:2 (2011), 214–230.

[90] P.-G. Lemarié, Ondelettes à localisation exponentielle // J. Math. Pures Appl. **67** (1988), 227–236.

[91] J.-C. Liu, J.L. Jun, X. Heng-wen, On the connectedness of planar self-affine sets // Chaos, Solitons & Fractals, **69** (2014), 107–116.

[92] C. Long, Addition theorems for sets of integers // Pacific J. Math., **23**:1 (1967), 107–112.

[93] A. Małecka, Haar functions in weighted Besov and Triebel–Lizorkin spaces, Journal of Approximation Theory, **200** (2015), 1–27.

[94] T. Mejstrik, Algorithm 1011: Improved Invariant Polytope Algorithm and Applications // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), **46**:3 (2020), 1–26.

[95] T. Mejstrik, t-toolboxes for Matlab, tommsch.com/science.php, 2018.

[96] D. Mekhontsev, IFStile software, http://ifstile.com.

[97] K.D. Merrill, Simple Wavelet Sets in $\mathbb{R}^n$ // J. Geom. Anal., **25**:2 (2015), 1295–1305.

[98] K.D. Merrill, Generalized Multiresolution Analyses, Lect. Notes Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkh¨auser/Springer, Cham, 2018, 113 pp.

[99] C.A. Micchelli, H. Prautzsch, Uniform refinement of curves // Linear Algebra and its Applications, **114** (1989), 841–870.

[100] F. Morgan, Geometric Measure Theory, A beginner's guide, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988, 145 pp.

[101] C. Möller, U. Reif, A tree-based approach to joint spectral radius determination // Lin.Alg. Appl., **563** (2014), 154–170.

[102] M.B. Nathanson, Complementing sets of n-tuples of integers // Proceedings of the American Mathematical Society, **34**:1 (1972), 71–72.

[103] S.-M. Ngai, V.F. Sirvent, J.J.P. Veerman, Y. Wang, On 2-reptiles in the plane // Geom. Dedicata, **82**:1 (2000), 325–344.

[104] K. Nishio, T. Miyazaki, Describing polyhedral tilings and higher dimensional polytopes by sequence of their two-dimensional components // Sci. Rep. **7** (2017), 40269.

[105] I. Niven, A characterization of complementing sets of pairs of integers // Duke Mathematical Journal, **38**:1 (1971), 193–203.

[106] I. Novikov, E. Semenov, Haar series and linear operators, Math. Appl., 367, Kluwer, Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 218 pp.

[107] P. Oswald, Designing composite triangular subdivision schemes // Computer Aided Geometric Design, **22**:7 (2005), 659–679.

[108] P. Oswald, Multivariate Haar systems in Besov function spaces, Sbornik Mathematics, **212**:6 (2021), 810.

[109] P. Oswald, P. Shröder, Composite primal/dual $\sqrt{3}$-subdivision schemes // Computer Aided Geometric Design, **20**:3 (2003), 135–164.

[110] V. Protasov, The stability of subdivision operator at its fixed point // SIAM journal on mathematical analysis, **33**:2 (2001), 448–460.

[111] V.Yu. Protasov, Surface dimension, tiles, and synchronising automata // SIAM J. Math. Anal., **52**:4 (2020), 3463–3486.

[112] H. Rademacher, Über partielle und totale Differenzierbarkeit I. // Math. Ann. **89** (1919), 340–359.

[113] G. de Rham, Sur une courbe plane // Journal of Pure and Applied Mathematics, **35** (1956), 25-–42.

[114] R.F. Riesenfeld, Application of B-spline Approximation to Geometric Problems of Computer Aided Design, PhD thesis, Syracuse University, 1972.

[115] A. Ron, Z. Shen, The Sobolev regularity of refinable functions // J. Approx. Theory, **106**:2 (2000), 185–225.

[116] I. Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quarterly of Applied Mathematics, **4** (1946), 45–99.

[117] M. Skopina, On construction of multivariate wavelets with vanishing moments // Applied and Computational Harmonic Analysis **20**:3 (2006), 375–390.

[118] W. Steiner, J.M. Thuswaldner, Rational self-affine tiles // Trans. Amer. Math. Soc., **367**:11 (2015), 7863–7894.

[119] G. Strang, G. Fix, A Fourier analysis of the finite element variational method // Constructive aspects of functional analysis (Erice, 1971), C.I.M.E. Summer Schools, 57, Cremonese, 1973, 793–840.

[120] J-O. Strömberg, A modified Franklin system and higher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces // Fundamental Papers in Wavelet Theory. Princeton University Press, 2009, 197–215.

[121] R. Tijdeman, Decomposition of the integers as a direct sum of two subsets // Technical Report, Math. Inst., Univ. of Leiden W **91-14** (1991), 1–16.

[122] J.M. Thuswaldner, S.-Q. Zhang, On self-affine tiles whose boundary is a sphere // Trans. Amer. Math. Soc., **373**:1 (2020), 491–527.

[123] J.M. Uray, Characterization of expansive polynomials by special determinants // Publ. Math. Debr., **98**:3-4 (2021), 379–399.

[124] L. Velho, D. Zorin, 4–8 Subdivision // Computer Aided Geometric Design, **18**:5 (2001), 397–427.

[125] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Mathematische Annalen, **77**:3 (1916), 313–352.

[126] P. Wojtaszczyk, A Mathematical Introduction to Wavelets, London Math. Soc. Stud. Texts, 37, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, 261 pp.

[127] Y. Yang, Y. Zhang, Tilings of convex polyhedral cones and topological properties of self-affine tiles // Discrete & Computational Geometry, **66** (2020), 876–901.

[128] V.G. Zakharov, Rotation properties of 2D isotropic dilation matrices // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., **16**:1 (2018), 1850001, 14 pp.

[129] V.G. Zakharov, Elliptic scaling functions as compactly supported multivariate analogs of the B-splines // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, **12**:02 (2014).

[130] S. Zube, Number systems, α-splines and refinement // Journal of computational and applied mathematics, **172**:2 (2004), 207–231.

[131] К. де Бор, Практическое руководство по сплайнам, Радио и связь, М., 1985, 304 с.

[132] И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина, Теория всплесков, Физматлит, М., 2005, 613 с.

[133] Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ, т. 1, 2, 4-е стереотип. изд., Лань, СПб., 2004, 336 с., 464 с.

[134] В.Ю. Протасов, Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход // Изв. РАН. Сер. матем., **61**:5 (1997), 99–136.

Работы автора по теме диссертации:

[135] T. Zaitseva, Haar wavelets and subdivision algorithms on the plane // Advances in Systems Science and Applications, **17**:3 (2017), 49–57.

[136] Т.И. Зайцева, Простые тайлы и аттракторы // Матем. сб., **211**:9 (2020), 24–59.

[137] Т.И. Зайцева, Многомерные тайловые B-сплайны // Изв. РАН. Сер. матем., **87**:2 (2023), 89–132.

[138] Т.И. Зайцева, В.Ю. Протасов, Самоподобные 2-аттракторы и тайлы // Матем. сб., **213**:6 (2022), 71–110.

[139] В.Ю. Протасов, Т.И. Зайцева, Самоподобные замощения многогранников // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, **500**:5 (2021), 55–61.

[140] T. Zaitseva, TZZZZ /Tile Bsplines, https://github.com/TZZZZ/Tile Bsplines.

Тезисы конференций:

[141] Т.И. Зайцева, Самоподобные тайлы и B-сплайны // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2023 г., стр. 143–145.

[142] T. Zaitseva, New types of smooth subdivision algorithms // ACM SIGGRAPH 2022 Posters (SIGGRAPH '22). NY, USA, 64, 1–2.

[143] T. Zaitseva, Self-affine tilings, multivariate B-splines and subdivision schemes // Computational Geometry: Young Researchers Forum, 2022, 55–59.

[144] T. Zaitseva, Bear subdivision schemes for modeling smooth surfaces // Curves and Surfaces, 2022, 228–228.