Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
(ПОМИ РАН)

Юридический адрес: 191023, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ,
ВН. ТЕР. Г. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ОКРУГ ДВОРЦОВЫЙ ОКРУГ,
УЛ. КАРАВАННАЯ, Д. 24-26 ЛИТЕРА А,
ПОМЕЩ. 3Н, 5Н, 7Н, 8Н, 9Н, 15Н, 17Н, 18Н, 19Н, 21Н, 22Н, 24Н.

Фактический адрес: 191023 Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27
тел. (812) 312-40-58, факс (812) 310-53-77
e-mail: admin@pdmi.ras.ru
ИНН 7825351570 КПП 784101001

07.12.2023 № 11102/33/02-2171/263

На _____ от _____

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН)
Чл.-корр. РАН
М. А. Всемирнов

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию А. И. Тюленева «Характеризация следов пространств Соболева на нерегулярных подмножествах метрических пространств с мерой», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Работа посвящена классической тематике описания следа гладкой функции на множестве. Результаты такого типа сопутствуют теории пространств гладких функций нескольких переменных почти что с самого её рождения и впервые появились в работах Уитни. Теория претерпела бурное развитие в 50-х и 60-х годах, важный вклад в неё в то время внесли такие математики как Ароншайн, Бабич, Бесов, Гальярдо, Никольский и Слободецкий. В некотором смысле, в этот период были описаны следы функций классов типа пространства Соболева на множествах, напоминающих гладкие подмногообразия евклидова пространства. Следующая веха — это работы Ю. Брудного и Шварцмана (80-е) годы и Феффермана (2000-е), в которых исследовались следы функций самого классического класса $C^m(\mathbb{R}^d)$ и было доказано, что след описывается конечными

наборами точек (т.н. Finiteness Principle). Сейчас теория продолжает развиваться. Задача об описании следа функции одного из самых простых классов, а именно, пространства Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^d)$, на произвольном подмножестве евклидова пространства по-прежнему не решена (в работах Шварцмана, Феффермана и учеников последнего 2010-х годов рассмотрен более простой случай $p > d$). Основные результаты диссертации дают существенное продвижение в этом направлении. Задача по-прежнему далека от состояния решенной или почти решенной. Отметим существенный интерес к ней; например, продвижениям по ней (в случае $p < d$) посвящены недавние работы Шварцмана, Феффермана и учеников последнего. По-видимому, методы и результаты этой группы и диссертанта независимы и существенно различны.

В работе получены продвижения по проблеме следа двух типов. В первом случае (вторая глава диссертации) проблема следа полностью решена, однако на изучаемое множество накладывается определённое условие регулярности. Отметим высокую общность этих результатов. Задача поставлена и изучается на метрических пространствах с мерой. Геометрия таких пространств и анализ на них — современная, динамически развивающаяся область (например, см. работы учеников Амброзио и пр.). Важный пример таких структур даётся римановыми многообразиями с особенностями, однако, класс метрических пространств с мерой совсем не ограничен ими. Метрические пространства с мерой, изучаемые в диссертации, в той или иной степени «непрерывны» — в них достаточно много кривых (термин «непрерывный» здесь используется скорее в значении «не дискретный»). «Непрерывность» гарантируется условием удвоения меры, постулирующем «конечномерность» рассматриваемого пространства, и справедливостью аналога неравенства Пуанкаре. Отметим, что требование этих двух условий очень широко распространено в литературе по пространствам Соболева на метрических пространствах с мерой, без них даже определение класса Соболева вызывает затруднение. Как было сказано, подмножество метрического пространства с мерой, на котором предполагается изучать след соболевских функций, не произвольно. В литературе был рассмотрен случай регулярного по Альфорсу—Давиду подмножества. Условие Альфорса—Давида может быть описано как требование однородности множества как по пространству, так и по масштабу. Скажем, фракталы так или иначе удовлетворяют этому условию. В своем описании следа автор накладывает на множество существенно более слабое условие. Класс рассматриваемых множеств автор называет котолстыми по аналогии с толстыми множествами, по-видимому, впервые рассмотренными Рычковым. В некотором смысле, важно, чтобы множество не было слишком «разреженным» на каких-то масштабах, а

«сгущаться» ему позволено. Для каждого котолстого множества строится последовательность мер на этом множестве, в некотором смысле заменяющую меру Хаусдорфа соответствующей размерности. Логично называть такие меры мерами типа Фростмана. По этой последовательности мер строится специальная максимальная функция, в некотором смысле, измеряющая гладкость. Основной результат состоит в том, что функция на множестве является следом соболевской функции тогда и только тогда, когда норма построенной максимальной функции в пространстве L_p по мерам типа Фростмана конечна. Это и даёт явное описание следа. Норму максимальной функции можно заменить на определённую норму в духе пространства Бесова самой функции (эта норма, а также третья норма в духе Брудного—Шварцмана строится тоже по последовательности мер типа Фростмана).

Хотя построение мер типа Фростмана не совсем конструктивно, в третьей главе автор приводит примеры, в которых эти последовательности мер (и описание следа) удаётся построить явно и относительно «элементарно». Особенно отметим здесь рассмотренный случай кривых на плоскости. Вообще говоря, кривая — совершенно не обязательно регулярное по Альфорсу—Давиду множество. Однако, кривая всегда является толстым множеством, и поэтому результаты автора позволяют описать след пространства Соболева на ней. Результаты являются новыми даже в таком, казалось бы, простом случае. Более того, автор приводит более ясную конструкцию мер типа Фростмана, основанную на формуле площади и простом подсчете точек нульмерных множеств.

Четвёртая глава посвящена пористым подмножествам евклидова пространства. Понятие пористости множества довольно часто встречается в литературе, посвященной геометрической теории меры, геометрической теории множеств и связанным вопросам. Оказывается, что рассмотренные во второй главе котолстые множества, в некотором смысле, являются пористыми (точнее, их части, имеющие малый обхват по Хаусдорфу). Аналогичный факт был известен для регулярных по Альфорсу—Давиду множеств, однако, его доказательство для случая котолстых множеств существенно сложнее и требует проведения более серьезного комбинаторного анализа. Отметим, что результаты четвёртой главы необходимы для доказательства основных результатов пятой главы.

Пятая глава предлагает второй подход к проблеме следа. Рассматривается следующее упрощение этой задачи: нужно найти такое пространство функций на

множестве S, что оно содержит пространство следов функций класса $W_p^1(\mathbb{R}^d)$ и содержится в пространстве следов функций класса $W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^d)$. Здесь число ε сколь угодно малое положительное, а множество S — произвольный компакт в евклидовом пространстве (отметим, что пятая глава изложена в классической общности множеств евклидового пространства). Конструкция «промежуточного» пространства следов технически напоминает конструкцию второй главы: строится последовательность мер типа Фростмана, при помощи неё задаётся максимальная функция, измеряющая гладкость, и требуется её суммируемость со степенью p. Отметим новую конструкцию оператора продолжения (то есть, построения соболевской функции по её следу). Во всех предыдущих работах продолжение осуществлялось классическим оператором Уитни или небольшими его модификациями. В частности, оно основывалось на построении кубов Уитни. По-видимому, для произвольного множества S такой метод не работает. В работе кубы Уитни заменены на в некотором смысле «пористые» кубы, и оператор продолжения строится по ним приблизительно так же, как оператор продолжения Уитни строится по кубам Уитни. Тем не менее, комбинаторные детали здесь весьма нетривиальны.

Шестая глава посвящена описанию некоторого нового класса пространств Бесова переменной гладкости, которые затем в седьмой главе возникают как пространства следов на гиперплоскости весовых пространств Соболева. Эти исследования продолжают изыскания по пространствам Бесова обобщенной гладкости, проведенные ранее Калябиным, Гольдманом и др. математиками.

В седьмой главе рассмотрена проблема описания следа пространства $W_1^l(\mathbb{R}^d, w)$, где вес w лежит в классе Макенхаупта A_1 на гиперплоскости. Здесь трудность, в том числе, кроется в предельном показателе суммируемости $p = 1$. Тем не менее, задачу удаётся решить при помощи пространства Бесова переменной гладкости, введённого в шестой главе.

Таким образом, диссертация вносит фундаментальный вклад в развитие теории следов гладких функций, существенно расширяя область применения данной теории, обогащая её методы и усиливая связи с геометрическим анализом. Помимо довольно большого числа опечаток (не умаляющих ценности и важности работы), можно подвергнуть критике следующие стороны работы. Во-первых, нет ясности необходимости построения именно последовательности мер Фростмана. Хотя автор и говорит о такой

необходимости во введении, какого-либо математического обоснования или утверждения, подкрепляющего уверенность в необходимости перехода к последовательностям мер вместо одной меры, автор не предоставил. Возможно, здесь не так-то просто это выразить строго. Во-вторых, хочется видеть более подробное описание соотношений результатов автора с результатами и методами других математиков, работающих в этой области (Шварцман, Фефферман, и др.). В-третьих, в случае следов весовых пространств Соболева в седьмой главе не обсуждается наличие линейного оператора продолжения (то есть, строится нелинейный оператор, а вот наличие линейного ни доказано, ни опровергнуто). Впрочем, все эти три пункта носят скорее характер пожеланий и не умаляют положительной оценки работы.

Подводя итог, можно сказать, что диссертация написана на остроактуальную тему. В ней решено несколько важных и трудных задач о следах и продолжения для пространств гладких функций в ситуациях, ранее не поддававшихся анализу. Все результаты новые, снабжены строгими математическими доказательствами, их достоверность и обоснованность несомненны.

С результатами диссертации полезно ознакомить учёных, работающих в Санкт-Петербургском и Московском государственных университетах, Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, МИАН, ПОМИ РАН. Целесообразно продолжить исследования, представленные в диссертации, в названных учреждениях.

Диссертация А.И. Тюленева удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании лаборатории математического анализа ПОМИ РАН 1 декабря 2023 г. (протокол № 12).

Главный научный сотрудник
лаборатории математического анализа,
доктор физико-математических наук,
академик РАН **Кисляков С.В.**

Старший научный сотрудник
лаборатории математического анализа **Столяров Д.М.**