ОТЗЫВ
официального оппонента

на диссертацию Тюленева Александра Ивановича «Характеризация следов пространств Соболева на нерегулярных подмножествах метрических пространств с мерой», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которым она представлена к защите

Задачи, исследуемые в диссертации А.И. Тюленева, относятся к геометрической теории функций. По постановкам рассматриваемых задач и методам их исследования диссертация относится к действительному анализу, полностью соответствует специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ и отрасли «физико-математические науки», по которым она представлена к защите.

Актуальность темы диссертации

Основной целью диссертации А.И. Тюленева является исследование «проблемы следа» для пространств Соболева $W_p^1(X)$. Так называют задачу внутреннего описания следов на произвольных замкнутых подмножествах области определения функции из рассматриваемого класса.

Возникновение подобных задач обычно связывают с работами Х. Уитни (1934), в которых он исследовал условия, при которых функцию можно продолжить с непустого замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$ до функции класса $C^l(\mathbb{R}^n)$. Задача оказалась весьма сложной и далеко не сразу получила решение в работах Ч. Фефферманa (2005–2007).

Особую актуальность проблема следа получила в связи с возникновением и бурным развитием теории пространств Соболева и ее применениями в задачах математической физики. Сложность такой задачи для этих классов подчеркивается тем, что при $1 < p \leqslant n$ функции из классов $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ являются лишь интегрируемыми в некоторой степени и определены только с точностью до значений на множествах меры нуль. Поэтому до работ автора диссертации, в основном, изучался случай $p > n$ (П. Шварцман, Ч. Фефферман).

Исследование проблемы следа часто приводит к новым полезным инструментам. Так, например, в этом русле были введены пространства Бесова $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, которые входят в список наиболее востребованных функциональных пространств.

В последние три десятилетия активно развивается новое направление в теории функциональных пространств — анализ на метрических пространствах с мерой, позволяющих рассматривать классы Соболева $W_p^1(X)$ на любом метрическом пространстве $(X, d, \mathfrak{m})$, снабженном борелевской мерой $\mathfrak{m}$ и метрикой d, которые связаны условием удвоения (пространства однородного типа по современной терминологии) и удовлетворяют некоторому неравенству типа Пуанкаре. Исследования в этом направлении ведутся аналитиками во многих странах (например, в Германии, Италии, США, Финляндии). На такие пространства были перенесены многие факты из теории соболевских пространств, например, теоремы вложения, тонкие свойства

функций (сходимость средних Стеклова, аппроксимация Лузина) и др. Существенная часть диссертации А.И. Тюленева посвящена проблеме следов в такой общей ситуации.

Все это свидетельствует о том, что тема диссертационной работы А.И. Тюленева является безусловно актуальной.

Содержание диссертации и степень новизны полученных результатов

В первой главе диссертации определяется основной язык, на котором ведется изложение в части работы, посвященной ее главным результатам. Кроме того, в главе 1 формируется новый геометрический и теоретико-функциональный инструментарий, который является базой для всех дальнейших построений и доказательств. Среди важнейших понятий главы 1 отметим весьма широкий и гибкий подход к определению $\mathfrak{m}$-следа функции из пространства $W_p^1(X)$ (определение 1.3.19), понятия d-толстого и θ-котолстого множества.

Результаты диссертации А.И. Тюленева можно разделить на три группы.

К первой группе относятся результаты, изложенные в главах 2 и 3, в которых вводятся новые классы θ-котолстых множеств, обобщающих классы множеств корегулярных по Альфорсу–Давиду, найдены точные внутренние описания следов для классов Соболева $W_p^1(X)$ при $p \in (1, \infty)$, $0 \leqslant \theta < p$, а также построены конкретные примеры θ-котолстых множеств с упрощенными критериями на след.

В главе 2 решается задача описания следов функций из пространств $W_p^1(X)$ на θ-котолстых подмножествах в X. Ключевыми для этого описания являются понятия θ-корегулярной и сильно θ-корегулярной последовательности мер $\{\mathfrak{m}_k\}$ (определение 2.1.1). Они введены в §2.1, где изучаются необходимые для дальнейшего свойства таких последовательностей мер.

В §2.2 вводятся несколько конструкций функционалов, обобщающих функционалы Брудного–Шварцмана, максимальные функции Кальдерона и функционалы типа Бесова. В §2.3–2.5 строится новый оператор продолжения, который дает возможность получить полную характеристику следов, а также обсуждается еще ряд сложных технических моментов, связанных с основными результатами главы 2.

В §2.6 приведены формулировки и доказательства основных результатов главы 2 — это теоремы 2.6.1, 2.6.3 и 2.6.6, которые а) дают ряд эквивалентных описаний $\mathfrak{m}$-пространства следов, б) дают характеризацию p-точного пространства следов, в) обсуждают связи между операторами продолжения.

Глава 3 посвящена иллюстрации результатов главы 2. В ней рассмотрен ряд интересных примеров, которые важны для приложений, но не могли быть получены с помощью известных ранее методов. Из этих примеров отметим конструктивное построение последовательностей мер $\{\mathfrak{m}_k\}$ для простой спрямляемой кривой в $\mathbb{R}^2$, что дает возможность описания следа пространства $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ на такой кривой во всем диапазоне $p \in (1, \infty)$.

Ко второй группе относятся результаты, изложенные в главах 4 и 5, где исследуются свойства пористости множеств в зависимости от поведения обхвата по Хаусдорфу. Эти свойства использованы для почти точного описания следов пространств $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ на произвольном компакте, на котором след существует.

В главе 4 изучаются свойства пористости множеств в $\mathbb{R}^n$. Основными результатами здесь являются теоремы 4.4.50 и ее следствие — теорема 4.4.60, выражающие зависимость пористости куба Q от поведения обхватов Хаусдорфа пересечений $Q \cap S$.

Полученные результаты являются точными. Они дают геометрическую основу для доказательства основных результатов главы 5.

В главе 5 решается задача «почти точного» внутреннего описания следов пространств $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ на компактных множествах $S \subset \mathbb{R}^n$. При этом на компакт S не накладывается никаких дополнительных предположений. Смысл основных результатов главы 5 состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ построено линейное нормированное пространство $X_\varepsilon(S)$ со свойствами

$$W_p^1(\mathbb{R}^n) \subset X_\varepsilon(S) \subset W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^n),$$

причем норма в этом пространстве задается внутренним образом.

К третьей группе относятся результаты, изложенные в главах 6 и 7, в которых строятся новые шкалы пространств Бесова переменной гладкости, включающие классы следов весовых пространств Соболева.

В главе 6 диссертации строятся две новые шкалы пространств типа Бесова с переменным показателем гладкости и доказывается их совпадение (основная здесь — теорема 6.7.6) в некотором диапазоне параметров. Эти результаты используются затем для точного описания следов весового пространства Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Вес предполагается принадлежащим локальному классу Макенхаупта. Кроме того, строятся пространства Бесова переменной гладкости на липшицевых областях евклидова пространства.

В главе 7 рассматривается задача точного описания следов для пространства Соболева $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^n$ при прежнем условии на вес. Основной результат главы 7 (теорема 7.2.1) состоит в том, что класс следов $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)|_{\mathbb{R}^n}$ совпадает с некоторым классом типа Бесова $\widetilde{B}_{1,1,1}^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$, построенным в предыдущей главе. Отметим, что случай $p = 1$ для шкал пространств L_p и W_p^l является весьма специфическим и гораздо труднее поддается исследованию.

Все результаты получены диссертантом самостоятельно и являются новыми. Они дают существенные продвижения в решении сложной и давно стоящей проблемы описания следов гладких функций на нерегулярных множествах. Для решения вопросов, затронутых в диссертации, автору пришлось развить новые и довольно сложные и глубокие методы.

Основные результаты диссертации

Следующие результаты являются основными в диссертации:

— при $1 < p < \infty$ и $0 \leqslant \theta < p$ получены точные описания следов функций из классов Соболева $W_p^1(X)$ на θ-котолстых замкнутых подмножествах $S \subset X$, где X — пространство с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, допускающее $(1, p)$-неравенство Пуанкаре;

— при $0 \leqslant \theta < p$ для θ-котолстого множества S, состоящего из конечного числа корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств, построено упрощенное точное описание следов пространств $W_p^1(X)$ на S;

— на произвольной спрямляемой плоской кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений построены явные конструкции мер типа Фростмана, с помощью которых получены упрощенные точные описания следов пространств $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ на Γ;

— при $d \in (0, n]$ изучены свойства пористости множеств в $\mathbb{R}^n$ в зависимости от поведения d-обхвата по Хаусдорфу пересечений множества с кубами; с помощью этих

свойств получено почти точное описание следов класса Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^n)$, реализованное как линейное нормированное пространство между $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S$ и $W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^n)|_S$ (в зависимости от $\varepsilon > 0$);

— введены новые шкалы пространств Бесова переменной гладкости на $\mathbb{R}^n$ и изучен вопрос об их совпадении, а также введены пространства Бесова переменной гладкости на липшицевых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и доказаны теоремы о продолжении функций из этих пространств на все $\mathbb{R}^n$;

— для весового пространства Соболева $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$, $l > 1$ (γ — вес, принадлежащий локальному классу Макенхаупта $A_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$) доказано совпадение класса следов на гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ с некоторым пространством Бесова переменной гладкости, введенным в диссертации;

— для описания следа весового пространства Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ (γ — вес из локального класса Макенхаупта $A_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$) строится новое функциональное пространство на $\mathbb{R}^n$, совпадающее с ним, а также соответствующий нелинейный оператор продолжения.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Результаты диссертации являются обоснованными и достоверными, что подтверждается их полными и строгими доказательствами в соответствии с правилами, принятыми в математике.

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 статьях из списка ВАК (среди них есть статьи в престижных зарубежных математических журналах — Nonlinear Analysis, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Annales Academiae Scientiarum Fennicae) и прошли апробацию на престижных международных математических конференциях и семинарах (перечень таких конференций впечатляет).

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Научная и практическая значимость результатов диссертации

Диссертационная работа А.И. Тюленева носит теоретический характер. Ее результаты могут использоваться в теории функциональных пространств, гармоническом анализе, в теории краевых задач для уравнений в частных производных.

Диссертация может использоваться в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском, Новосибирском, Белорусском, Саратовском университетах, Российском университете дружбы народов.

Замечания

По тексту диссертации имеется несколько замечаний, в основном, редакторского характера.

1) На странице 30 во введении появляется функционал $\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}$, который ранее не был определен;

2) В формуле (1.2.40) усреднение должно вестись лишь по ограниченным множествам;

3) При доказательстве теоремы 2.1.44 можно было бы упомянуть, что используется модификация классического алгоритма Фростмана;

4) Стоило бы отметить, при каких ограничениях на параметры пространство X_ε, используемое в пятой главе, может быть неполным;

5) Было бы интересно исследовать, является ли квазинормированное пространство Z, построенное в седьмой главе, нормированным?

Приведенные замечания принципиально не влияют на ценность диссертационной работы А.И. Тюленева и не меняют положительного мнения о ней.

Мне много раз приходилось слушать доклады А. И. Тюленева на различных конференциях и школах, в том числе и за рубежом. Они всегда производили очень благоприятное впечатление и свидетельствовали о том, что он является сложившимся и высококвалифицированным математиком.

Диссертационная работа Тюленева Александра Ивановича «Характеризация следов пространств Соболева на нерегулярных подмножествах метрических пространств с мерой» является законченной научно-квалификационной работой, которую можно характеризовать как крупное научное достижение в области теории функций. Она соответствует всем требованиям ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени, установленным для диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор Тюленев Александр Иванович заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
Вениамин Григорьевич Кротов,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ;
профессор, профессор кафедры теории функций
Белорусского государственного университета
Адрес: 220030, Республика Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 4, к. 1307,
тел. +375-29-6111302; e-mail: vgkrotov@mail.ru

ПОДПИСЬ Кротова В.Г.
Начальник управления
организационной работы
документационного обеспечения
Черкасская Н.Б.
«08» 12 2023