ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Тюленева Александра Ивановича "Характеризация следов пространств Соболева на нерегулярных подмножествах метрических пространств с мерой" представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Тюленева А.И. восходит к двум классическим проблемам современного анализа. Первой из них следует назвать проблему характеризации следов пространств Соболева. Как известно, отображения этих пространств не обязательно являются непрерывными, формально они определены "почти всюду"по мере Лебега, тем не менее, можно ввести понятие следа (=сужения на многообразия меньшей размерности) на языке функционального анализа, как непрерывный оператор соответствующих банаховых пространств. Для гладких многообразий красивая и точная характеризация следов соболевских функций получена в терминах пространств Бесова, однако, когда многообразие в той или иной степени теряет регулярность, вопросы о следах значительно усложняются. И здесь мы подходим ко второй классической задаче, послужившей истоком для настоящей диссертации, именно, к проблеме Уитни: для данного компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ найти необходимые и достаточные условия на заданную функцию $f : K \to \mathbb{R}$ с тем, чтобы она являлась сужением на K некоторого гладкого отображения класса $C^k(\mathbb{R}^n)$. Здесь уже не предполагается никакой регулярности на компакт K. Проблема при этом становится столь трудной (даже для указанного гладкого случая!), что сам Уитни решил ее лишь в ослабленной формулировке — когда на K заданы вдобавок так называемые *джеты*, т.е. значения производных до порядка k включительно. Диссертация посвящена в основном изучению проблемы Уитни для соболевских пространств с производными лишь первого порядка, но в случае ослабленной регулярности — когда показатель суммируемости не гарантирует даже непрерывности данного отображения. Разумеется, здесь в проблеме появляется "скачок сложности". Тем не менее, автору удалось добиться впечатляющих успехов по данной проблеме.

Со времени появления обоих указанных задач прошло уже много десятилетий. Лишь относительно недавно проблема Уитни для гладкого случая была решена в работах Филдсовского лауреата Ч.Феффермана и его учеников. Однако описание искомого оператора продолжения дается в этих работах столь сложно и громоздко, что крайне затруднительно проверить, является ли та или иная функция сужением гладкого отображения на данный компакт, поэтому даже и в гладком случае проблема Уитни пока еще не полностью снята "с повестки дня", и поиски "обозримых"критериев продолжаются, в том числе и самими авторами указанных работ. Еще в большей степени это можно сказать и про ситуацию с соболевскими пространствами $W^k_p(\mathbb{R}^n)$ с $p > n$, когда имеется известное вложение в $C^{k-1,\alpha}$, т.е. когда регулярность функции становится "почти"классической. При таком облегчающем предположении недавно также было доказано существования линейного оператора продолжения (тут в первую очередь стоит отметить работы П.Шварцмана и все того же Ч.Феффермана с соавторами), но "обозримого" критерия и здесь получить пока не удается, за исключением плоского случая $n = 2$. Диссертант же исследует более трудную ситуацию $p < n$, когда у соболевских функций отсутствует даже непрерывность, причем, не ограничиваясь рамками евклидовых пространств, рассматриваются функции, заданные на метрических пространствах с мерой (м.п.м).

Диссертация состоит из Введения, 7-ми глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 124 именований. Общий объем диссертации — 325 страниц.

В первой главе даются базовые определения и вводятся одно из центральных понятий — θ-котолостые множества (в случае евклидовых пространств это понятие дополняет класс так называемых d-толстых множеств, введенных ранее В.Рычковым). Отправной точкой для этих классов являются так называемые d-регулярные по Альфорсу множества, для которых проблема следов в указанной постановке была успешно решена ранее. Но класс регулярных по Альфорсу множеств слишком узок, по метрическим свойствам они очень похожи на обычные многообразия фиксированной размерности. Класс θ-котолстых множеств значительно шире, и, что самое интересное, такие множества могут состоять из частей разной размерности. Понятно, что для работы с такими множествами обычные меры Хаусдорфа неэффективны — их нельзя применить к "кускам"разных размерностей. Автор находит удачное понятие θ-(ко)регулярной последовательности мер, которое "схватывает"характер ситуации, т.к. эти меры улавливают изменение структуры множества при разных масштабах. Особенно приятно, что данная последовательность не выглядит вычурно и громоздко — автор здесь дает естественную и элегантную модификацию классической конструкции мер Фростмана.

Вторая глава носит ключевой характер — в ней дается полное решение проблемы следов соболевских пространств W_p^1 для класса котолстых множеств. Для формулировки соответствующих критериев используются три эквивалентных способа: обобщенные функционалы Брудного–Шварцмана, m_k-максимальная функция Кальдерона, m_k-функционал Бесова. Все они строятся на основе соответствующей корегулярной последовательности мер m_k. В этой же главе автором получены тонкие результаты о взаимоотношении данных функционалов, а также построен искомый линейный оператор продолжения из пространства следов в соответсвующее соболевское пространство $W_p^1(X)$.

Третья глава представляет особый интерес, т.к. в ней общие абстрактные результаты второй главы применяются к некоторым конкретным примерам, где указанные корегулярные меры и пр. могут быть сосчитаны явным образом. Именно, на кусочно-корегулярных по Альфорсу–Давиду множествах; для подмножеств Q-регулярного м.п.м. X при $p > Q$, и, наконец, для случая простой (без самопересечений) спрямляемой кривой в $\mathbb{R}^2$. Последний результат представляется наиболее оригинальным и интересным, и там полученные формулы носят особенно элегантный характер.

В четвертой главе исследована взаимосвязь введенных понятий с другим интересным объектом геометрического анализ, — классом пористых множеств. Найдены условия, при которых толстые множества являются пористыми. Полученные критерии пористости играют важную роль при построении функционалов Бесова и в следующей главе.

В пятой главе изучается проблема следов соболевских пространств $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ для компактных множеств S "общего вида", без каких-либо ограничений на геометрию. Понятно, что в такой более общей формулировке проблема становится гораздо сложнее. Автором получено "почти точное" внутреннее описание этих следов. Именно, для каждого $\varepsilon > 0$ им строится банахово пространство $X(\varepsilon)$, которое содержит $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S$ и содержится в $W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^n)|_S$. При этом строится линейный непрерывный оператор продолжения для соответствующих банаховых пространств. Важную роль тут играет так называемая *обобщенная двоичная функция типа Кальдерона*, задаваемая с помощью последовательности мер, обобщающих конструкцию Фростмана.

В последних двух главах (6-й и 7-й) задача модифицируется: ищется след соболевских функций на линейных подпространствах и на гиперплоскостях, но зато усложняется другой основной объект — именно, рассматриваются соболевские пространства с весом из локального класса Макенхаупта. Для решения этих задач строится оригинальная теория пространств Бесова переменной гладкости с двумя новы-

ми шкалами. Доказываются тонкие и интересные результаты о взаимосвязи и даже о совпадении этих пространств при выполнении указанных автором условий. Разработанный инструментарий используется для полного решения проблемы следов весовых пространств Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$ на линейных подпространствах в случае $p > 1$ (в шестой главе), и для гиперплоскостей в предельном случае $p = 1$ (в заключительной седьмой главе). Результат для единичного показателя суммируемости является исключительно интересным, т.к. при этом показателе, как известно, теряется рефлексивность пространств Лебега и Соболева, и перестает работать "обычная" техника из случая $p > 1$.

Диссертация написано хорошо, формулировки определений и результатов приводятся аккуратно, аргументация подробная. Хотя работа не лишена и некоторых недостатков. Например, автор часто использует термин "обхват множества по Хаусдорфу", который представляется несколько старомодным — в современной литературе для этого понятия чаще употребляется термин "вместимость по Хаусдорфу"(=англ. "Hausdorff content").

Приведенные замечания принципиально не влияют на ценность диссертационной работы А.И.Тюленева и не меняют положительного мнения о ней. Диссертация в целом выполнена на высоком уровне, написана хорошим языком, читается с интересом, и свидетельствует о высокой профессиональной культуре автора. В ней излагаются результаты законченного исследования, выполненного на актуальную тему и посвященного решению важнейшей научной задачи, восходящей к работам классиков: характеризации следов пространств Соболева и операторов продолжения для широких классов нерегулярных множеств общей природы в метрических пространствах. Формулировка задачи очень проста и доступна любому студенту, а вот ее решение составляет труднейшую проблему для современной математики, до сих пор неприступную в общем случае несмотря на усилия множества ученых мирового уровня.

Основные результаты работы полностью изложены в 11 печатных трудах, опубликованных автором по теме диссертации. Рассматриваемая диссертация посвящена актуальной теме, является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение важной научной проблемы. Данная диссертация является самостоятельно выполненным научным исследованием. Автором получены результаты, имеющие научную и практическую ценность. Таким образом, диссертация полностью удовлетворяет требованиям, сформулированным в п.9 Положения ВАК РФ о присуждении ученых степеней, а ее автор, Тюленев А.И., заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент Коробков М.В.
01.12.2023

Коробков Михаил Вячеславович
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.01 — математический анализ), доцент, ведущий научный сотрудник Лаборатории геометрической теории управления Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, e-mail: korob@math.nsc.ru, тел.:+7-9232263793
Адрес местонахождения научной организации: 630090, г.Новосибирск, проспект Академика Коптюга 4, e-mail: im@math.nsc.ru, тел.: +7(383)333-28-92

Подпись М.В. Коробкова заверяю

Учёный секретарь
Дагурова
11.12.2023

Подпись работника
Коробкова М.В.
Заверяю
Специалист отдела ДОУ
ИМ СО РАН Е.Г.Кирда
«11» декабря 2023 г.