ОТЗЫВ ОППОНЕНТА

о диссертации Тюленева Александра Ивановича

"Характеризация следов пространств Соболева на нерегулярных подмножествах метрических пространств с мерой",

представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности

1.1.1. – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа А.И. Тюленева посвящена весьма трудной и важной для геометрического анализа задаче точного внутреннего описания следов функций из пространств Соболева на нерегулярных подмножествах метрических пространств с мерой.

Исторически первой проблемой такого типа была проблема Уитни, сформулированная им в 1930-х годах: описать во внутренних терминах следы функций класса $C^m(\mathbb{R}^n)$ на подмножествах $\mathbb{R}^n$. Эта проблема оставалась открытой более 70-лет и была решена полностью лишь относительно недавно в серии работ Ч. Феффермана.

Теория следов функций из пространств Соболева была, по-сути, инициирована в работе Э. Гальярдо 1957 года, который доказал, след пространства Соболева $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ совпадает с пространством Бесова $B^{1-1/p}_{p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ (при условии $1 < p < \infty$). Идентификация следа пространства $W^m_p(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ при любом $m \in \mathbb{N}$ принадлежит О. Бесову, 1961.

Что касается следов пространств Соболева $W^m_p(\mathbb{R}^n)$ на произвольных замкнутых подмножествах $S \subset \mathbb{R}^n$, то даже в случае $m = 1$ известно не так много. А именно, при $p > n$ в работе П. Шварцмана (2009) получены точные внутренние описания следа пространства $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ на любом замкнутом подмножестве $S \subset \mathbb{R}^n$. В случае $m > 1$ таких результатов нет даже при $p > n$. Совсем недавно в совместных работах со своими учениками Ч. Фефферман лишь построил алгоритм почти оптимального продолжения функций из пространства $W^m_p(\mathbb{R}^n)$ с произвольного замкнутого подмножества на все пространство.

Случай $1 < p \leq n$ изучен крайне мало. В силу отсутствия вложения $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ в пространство непрерывных функций, возникает масса трудностей как аналитического, так и геометрического характера. При указанных ограничениях на параметры все известные до настоящего времени работы затрагивали вопрос конструктивного описания следов пространств Соболева на подмножестве S при весьма сильных ограничениях на геометрию S. Отметим для сравнения, что случай $p > n$ не требует анализа геометрии подмножества S.

Пусть (X, d, μ) будет метрическим пространством с мерой. Нынешняя диссертация посвящена внутреннему описанию следов пространств Соболева $W^1_p(X)$ на подмножествах S определённого класса. При этом пространство Соболева $W^1_p(X)$ определяется, используя *минимальный p-ослабленный уклон* $|\nabla f|_{*,p}$, который получается с помощью естественной процедуры релаксации в L_p локальной константы Липшица $\operatorname{lip} f$ (часто называемой *верхним градиентом*).

Измеримое подмножество $S \subset X$ называется *α-регулярным* по Альфорсу, если для любого метрического шара $B_r(x)$ с центром в $x \in S$ и ограниченного радиуса r выполняется

$$\mu(S \cap B_r(x)) \approx r^\alpha.$$

Пусть пространство X само является a-регулярным, а его подмножество S - β-регулярным, а также *пористым*. В этом случае результат Э. Саксмана (2017) гласит, что следом пространства Соболева $W^1_p(X)$ на S является пространство Бесова $B^{1-\theta/p}_{p,p}$, где $\theta = \alpha - \beta$ является коразмерностью Хаусдорфа множества S.

Аналогичные результаты были получены и в других недавних работах (например, П. Швармана, Л. Игнатцевой, Н. Шанмугалингам), но всегда при условии, что множество S является *θ-корегулярным* по Альфорсу для некоторого $\theta \geq 0$, то есть, выполняется условие

$$\mu(S \cap B_r(x)) \approx \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}$$

для любого шара $B_r(x)$ ограниченного радиуса r с центром в точке $x \in S$. В частности, такое множество S имеет коразмерность Хаусдорфа θ.

А.И. Тюленев рассматривает в настоящей диссертации гораздо более широкий класс *θ-котолстых* подмножеств S (развивая идеи В. Рычкова). Для любых $\theta \geq 0$ и $r > 0$ определим *θ-коразмерностный обхват* подмножества $S \subset X$ на масштабе r следующим образом:

$$\mathcal{H}_{\theta,r}(S) = \inf_{\{B_i\}} \sum_i \frac{\mu(B_i)}{r_i^\theta},$$

где inf берётся по всем покрытиям $\{B_i\}$ множества S шарами B_i с радиусами $r_i < r$. Множество S называется *θ-котолстым*, если

$$\mathcal{H}_{\theta,r}(S \cap B_r(x)) \geq \lambda \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}$$

для некоторого $\lambda > 0$ и всех $x \in S, r \in (0, 1]$.

Это условие является существенным обобщением условия (ко)регулярности по Альфорсу, так как ограничивает коразмерностный обхват только снизу. Например, любое линейно связное подмножество компактного риманового многообразия, состоящее из более, чем из одной точки, является 1-толстым. Более того, имеются примеры θ-котолстых множеств, которые являются объединением счётного числа корегулярных по Альфорсу множеств различной коразмерности.

Бóльшая часть диссертации посвящена точному внутреннему описанию следов пространств Соболева $W^1_p(X)$ на θ-котолстых подмножествах $S \subset X$. При этом на пространство X накладываются достаточно мягкие ограничения: оно должно удовлетворять свойству удвоения меры шаров, а также $(1, p)$-неравенству Пуанкаре

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \fint_{B_r(x)} |f - c| d\mu \leq Cr \left(\fint_{B_{\lambda r}(x)} (\operatorname{lip} f)^p d\mu \right)^{1/p},$$

которое должно выполняться для некоторого $\lambda \geq 1$, для всех $x \in X, r > 0$ и для произвольных липшицевых функций f на X.

Эти два условия - свойство удвоения и неравенство Пуанкаре, появляются естественным образом во многих работах по анализу на метрических пространствах. Конечно, эти условия выполняются на евклидовых пространствах, на многих многообразиях, включая многообразия неотрицательной кривизны Риччи, а также на метрических пространствах, которые являются пределами таких многообразий в смысле Громова-Хаусдорфа.

Наличие понятия градиента/уклона позволяет определить пространство $W_p^1(X)$ как замыкание пространства липшицевых функций по отношению к норме

$$\|f\|_{W_p^1} = \|f\|_{L_p} + \||\nabla f|_{*,p}\|_{L_p}$$

С помощью нормы $\|f\|_{W_p^1}$ определяется понятие p-ёмкости C_p.

Известно, что любая функция $F \in W_p^1(X)$ имеет представителя $\bar{F}(x)$ равного пределу при $r \to 0$ среднего значения F по шару $B_r(x)$, причём $F = \bar{F}$ квазивсюду, то есть вне множества C_p-ёмкости ноль. Понятие представителя позволяет определить след функции $F \in W_p^1(X)$ на подмножестве $S \subset X$, просто взяв ограничение $\bar{F}$ на S (определённое с точностью до множества ёмкости 0). Таким образом получается пространство следов $W_p^1(X)|_S$.

Более того, для любой меры $\mathfrak{m}$, положительной на S и абсолютно непрерывной по отношению к ёмкости C_p, определим пространство следов $W_p^1(X)|_S^{\mathfrak{m}}$ как факторизацию пространства $W_p^1(X)|_S$ по отношению равенства $\mathfrak{m}$-почти всюду.

Один из основных результатов диссертации, теорема 2.6.1, даёт описание функций в $W_p^1(X)|_S^{\mathfrak{m}}$ во внутренних терминах, предполагая, что S является θ-котолстым.

Для этого строится последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$, начиная с $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$, так, что (i) мера $\mathfrak{m}_k$ является в некотором смысле близкой к θ-корегулярной в масштабе ε^k для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$; (ii) последовательность мер растёт не быстрее, чем ε^{-k}. Такая последовательность мер называется θ-регулярной; она заменяет собой регулярную меру Хаусдорфа.

А.И. Тюленев доказывает в теореме 2.1.8, что существование θ-регулярной последовательности мер эквивалентно тому, что множество S является θ-котолстым, что само по себе является очень нетривиальным результатом. В отдельных примерах диссертант показывает, как такую последовательность можно построить исходя из последовательности мер Хаусдорфа различных размерностей.

Имея последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\}$, определим аналог максимальной функции Кальдерона следующим образом:

$$f^{\#}_{\{\mathfrak{m}_k\}}(x) = \sup_{r\in(0,1]} \frac{1}{r} \inf_c \fint_{B_r(x)} |f - c| \, d\mathfrak{m}_{k(r)},$$

где $k = k(r)$ определяется масштабом меры $\mathfrak{m}_k$, то есть соотношением $\varepsilon^k \approx r$. Наконец, определим функционал Кальдерона по формуле

$$CN(f) = \|f\|_{L_p(\mathfrak{m})} + \|f^{\#}_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(\mu)}.$$

Похожим способом определяются функционалы Брудного-Шварцмана $BSN(f)$ и Бесова $BN(f)$.

Основная теорема А.И. Тюленева утверждает следующее:

$$f \in W_p^1(X)|_S^{\mathfrak{m}} \Leftrightarrow CN(f) < \infty \Leftrightarrow BSN(f) < \infty \Leftrightarrow BN(f) < \infty.$$

Тем самым даётся несколько эквивалентных описаний следов на S функций из класса $W_p^1(X)$ во внутренних терминах θ-котолстого множества S.

Это – исключительно сильная теорема, которая является новой даже в случае $X = \mathbb{R}^n$, и существенно усиливает все предшествующие результаты.

Второй основной результат диссертации - теорема 5.7.15. Пусть $1 < p \leq n$ и пусть подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $\mathcal{H}_\infty^d(S) > 0$ для некоторого $d \in (n-p, n]$. При этих условиях А.И. Тюленев даёт "почти" точное описание следа пространства $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ на S в следующем смысле: строится функциональное пространство на множестве S которое содержит $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S$ и содержится в $W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^n)|_S$.

Отличительная особенность этого результата в том, что не делается практически никаких предположений о геометрии множества S, что делает этот результат уникальным в теории следа. Ранее подобные результаты были известны только в случае $p > n$.

Наконец, третий основной результат диссертации - теорема 6.8.13, посвящён следам весовых пространств Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$ на подпространствах $\mathbb{R}^m$, где γ обозначает вес Макенхаупта. А.И. Тюленев доказал, что след $W_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)|_{\mathbb{R}^m}$ идентифицируется с пространством Бесова переменной гладкости $B_{p,p}^{\{\gamma_k\}}(\mathbb{R}^m)$, где весовая последовательность $\{\gamma_k\}$ определяется по весу γ.

Опишем коротко структуру диссертации, которая состоит из 7 глав.

Первая глава носит вспомогательный характер и содержит фундамент для дальнейших построений. При этом, наряду с упоминанием некоторых классических конструкций теории меры и геометрического анализа, автор вводит ряд новых понятий, которые затем активно используются в последующих главах. Так, например, вводятся классы d-толстых и θ-котолстых множеств и изучаются их некоторые свойства.

Вторая глава является ключевой. В ней для метрического пространства с мерой $X = (X, d, \mu)$, удовлетворяющего свойству удвоения и допускающего $(1, p)$-неравенство Пуанкаре, строится систематическая теория следа пространства $W_p^1(X)$ на θ-котолстых подмножествах $S \subset X$. При этом получено несколько эквивалентных критериев на след: с помощью функционалов Бесова, функционалов Брудного–Шварцмана и обобщённых функционалов Кальдерона, соответственно. Ключевым наблюдением является дуальная характеристика θ-котолстых множеств в терминах последовательностей θ-корегулярных мер. Неформально говоря, каждая мера адаптирована под масштаб ϵ^k, где $\epsilon \in (0, 1)$ – некоторое фиксированное для данного множества число.

В третьей главе абстрактные критерии, полученные во второй главе, иллюстрируются на нетривиальных примерах, которые могут представлять интерес для приложений. Например, детально рассматривается ситуация множества, состоящего из конечного числа регулярных по Альфорсу частей разной коразмерности. Интересно отметить, что даже такой, на первый взгляд, простой пример не

мог быть охвачен известными ранее методами. Кроме того, получено упрощённое точное внутреннее описание следа пространства $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ на произвольной плоской спрямляемой кривой без самопересечений.

Четвертая глава является техническим фундаментом для последующей пятой главы, но, тем не менее, представляет и самостоятельный интерес. В ней рассматривается вопрос о наличии шаровых полостей, или что равносильно пористости, у подмножеств $\mathbb{R}^n$ в зависимости от локального поведения d-обхвата по Хаусдорфу при $d \in [0, n)$. Интересно отметить, что многими математиками рассматривался в некотором смысле обратный вопрос, а именно, изучалось, как свойства пористости влияют на локальную размерность множества по Хаусдорфу. Один из основных результатов главы состоит в том, что если для произвольного множества S и произвольного куба Q имеет место неравенство $\mathcal{H}_\infty^d(Q \cap S) < 1$, то найдется весьма массивное множество $U \subset Q \setminus S$, расположенное в некотором смысле на "ненулевой глубине" внутри $\mathbb{R}^n \setminus S$. В частности, если S является d-толстым, то оно является пористым, то есть в качестве U можно выбрать шар (куб), размер которого сравним с размером Q.

Пятая глава посвящена решению проблемы почти точного описания следа пространства $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $p \in (1, n]$ на произвольном компакте, на котором след существует. В столь большой общности такие задачи ранее не рассматривались. Отметим лишь совместную работу П. Хайлаша и О. Мартио, где похожий вопрос изучался лишь для регулярных по Альфорсу множеств. Задачу почти точного описания следа стоит рассматривать как ослабленный вариант изначально поставленной задачи точного описания следа.

Несмотря на то, что техника развитая в пятой главе не позволяет решить проблему точного описания следа для любых компактов, она является достаточно мощной и, несомненно, найдет приложения в близких задачах анализа. Ключевым моментом пятой главы является оригинальная конструкция оператора продолжения, которая базируется на нетривиальных комбинаторных методах, разработанных в четвертой главе.

В шестой главе изучаются две новые шкалы пространств Бесова переменной гладкости, введённые автором. Проводится детальный анализ свойств этих пространств, изучаются эквивалентные нормировки. Пространства из первой шкалы состоят из функций, интегрируемых в некоторой степени. Элементами пространств из второй шкалы являются распределения. При некоторых естественных ограничениях на переменную гладкость показывается эквивалентность различных подходов к построению теории пространств переменной гладкости. Интересно отметить, что в предшествующих работах близкие по смыслу пространства переменной гладкости рассматривались без их привязки к проблеме следа.

В заключительной седьмой главе показано, что в случае, когда γ – вес из класса Макенхаупта $A_1(\mathbb{R}^n)$, след весового пространства Соболева $W_1^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$ при $l \geq 2$ можно отождествить с пространством Бесова переменной гладкости. Если же $l = 1$, то след пространства $W_1^1(\mathbb{R}^n, \gamma)$ описывается с помощью нового, построенного в диссертации функционального пространства. При этом построен новый нелинейный оператор продолжения, который может оказаться интересным

и в других близких задачах.

В целом настоящая диссертация представляет собой серьёзное и всестороннее исследование актуальной темы: проблемы следа пространств Соболева. Диссертация является самостоятельно выполенной научной работой, в которой решены важные научные задачи, прежде представлявшиеся недоступными. Для их решения автор разработал новые методы, которые безусловно найдут дальнейшее применение и развитие в этой и смежных областях математического анализа.

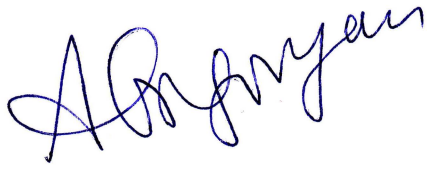
Основные результаты диссертации полностью изложены в 11 статьях, опубликованных автором по теме диссертации в журналах, входящих в список ВАК и являющихся ведущими российскими и зарубежными научными изданиями. Текст автореферата полно отражает содержание диссертации.

Таким образом, настоящая диссертация удовлетворяет всем требованиям предъявляемым ВАК РФ к докторским диссертациям, а её автор – Александр Иванович Тюленев, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

04.12.2023

Официальный оппонент:
Александр Асатурович Григорьян
доктор физико-математических наук
по специальности 1.1.2. – дифференциальные
уравнения и математическая физика
профессор факультета математики
университета Билефельда.
Адрес: Германия, г. Билефельд, Университетская ул. 25.
тлф.+49-521-106-4996, e-mail: grigor@math.uni-bielefeld.de

Alexander A. Grigor'yan
Professor für Mathematik
Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld
Universitätsstr. 25, Bielefeld, Deutschland



Подпись А.А. Григорьяна заверяю:
Unterschrift von A.A. Grigor'yan bestätige:

Декан факультета математики университета Билефельда
Dekan der Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld

Профессор М. Кассманн
Prof. Dr. M. Kaßmann

