ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Тюленев Александр Иванович

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДОВ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ С МЕРОЙ

1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2023

Содержание

Введение 3

Краткое содержание диссертации 14

Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ 36

1.1. Соглашение о константах 36

1.2. Сведения из геометрического анализа 36

1.3. Пространства Соболева 59

1.4. Релаксация свойств удвоения 65

1.5. d-толстые и θ-котолстые множества 69

Глава 2. СЛЕДЫ ПРОСТРАНСТВ $W_p^1(\mathrm{X})$ НА θ-КОТОЛСТЫХ МНОЖЕСТВАХ 75

2.1. θ-корегулярные последовательности мер 75

2.2. Точки Лебега функций 89

2.3. Оператор продолжения 97

2.4. Оценки для функционалов на пространстве следов 110

2.5. Неравенства для следов потенциалов Рисса 115

2.6. Доказательства основных результатов 121

Глава 3. КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕРЫ θ-КОТОЛСТЫХ МНОЖЕСТВ И УПРОЩЁННЫЕ КРИТЕРИИ НА СЛЕД 132

3.1. Следы пространств $W_p^1(\mathrm{X})$ на кусочно регулярных множествах 132

3.2. Следы пространств $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ на кривых 152

3.3. Следы пространств $W_p^1(\mathrm{X})$ на любых множествах при больших p 166

Глава 4. СВОЙСТВА ТИПА ПОРИСТОСТИ МНОЖЕСТВ В $\mathbb{R}^n$ 168

4.1. Предварительные сведения 170

4.2. (d, λ)-толстая псевдометрика 174

4.3. Краеугольные семейства кубов 177

4.4. Основные результаты 185

4.5. Примеры 196

Глава 5. ПОЧТИ ТОЧНОЕ ОПИСАНИЕ СЛЕДОВ ПРОСТРАНСТВ $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ НА КОМПАКТАХ 197

5.1. Предварительные сведения 199
5.2. Комбинаторные инструменты 203
5.3. Максимальные функции типа Кальдерона и новые функциональные пространства 211
5.4. Оператор продолжения 214
5.5. Обратная теорема о следе 226
5.6. Прямая теорема о следе 233
5.7. Основные результаты 245

Глава 6. Пространства Бесова переменной гладкости 250
6.1. Некоторые определения и обозначения 250
6.2. Классы весовых последовательностей 251
6.3. Различные пространства Бесова переменной гладкости 254
6.4. Формула представления Рычкова и её следствия 256
6.5. Эквивалентные квазинормы в пространствах $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ 266
6.6. Сплайн разложения функций в пространствах $\tilde{\mathrm{B}}^{l}_{p,q,r}(\{t_k\})$ 268
6.7. Сравнение пространств $\tilde{\mathrm{B}}^{l}_{p,q,r}(\{t_k\})$ и $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$. 277
6.8. Приложения к проблеме следа 283
6.9. Пространства $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ на липшицевых областях 286

Глава 7. СЛЕДЫ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ $W^l_1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ 291
7.1. Соглашения об обозначениях 291
7.2. Случай $l>1$ 292
7.3. Случай $l=1$ 297
Список литературы 317
Работы автора по теме диссертации 324

Введение

Актуальность темы. Ближе к концу XX века усилия многих математиков со всего мира привели к созданию нового большого направления в геометрическом анализе, известного как *анализ на метрических пространствах с мерой.* Под метрическим пространством с мерой обычно понимают тройку $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$, в которой пара (X, d) – полное сепарабельное метрическое пространство, а μ – борелевски регулярная внешняя мера, принимающая конечные положительные значения на всех шарах положительного радиуса. При этом в последние годы активно изучаются пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$, в которых мера μ обладает *свойством удвоения*, а вся тройка $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ допускает соответствующее *неравенство Пуанкаре*, связывающее локальные средние по шарам осцилляции липшицевых на X функций со средними от их локальных констант Липшица. Такие метрические пространства с мерой мы будем далее называть *допустимыми пространствами.* С одной стороны, в силу свойства удвоения μ, допустимые пространства локально компактны, а поэтому бесконечномерные эффекты в них исключены. С другой стороны, класс допустимых пространств весьма широк и включает в себя конечномерные евклидовы пространства, снабжённые весовой мерой Лебега с весом из класса Макенхаупта, римановы многообразия с ограниченной снизу кривизной Риччи, группы Карно, снабжённые соответствующей мерой Хаара, а также различные фракталы. Более того, недавно начала интенсивно развиваться теория так называемых $RCD(K, N)$-пространств, введённых Н. Джильи в [59, 60]. При $K > -\infty$, $N < +\infty$ эти пространства являются естественным далеко идущим обобщением классических римановых многообразий, у которых кривизна Риччи ограничена снизу K, а размерность ограничена сверху N. Как следует из результатов [99], $RCD(K, N)$-пространства являются допустимыми пространствами при всех $K > -\infty$ и $N \in [1, +\infty)$.

Поскольку наличие какой-либо дополнительной структуры у допустимого пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ априори не предполагается, большинство известных к настоящему времени исследований было посвящено построению так называемого анализа первого порядка, неотъемлемой частью которого является теория пространств Соболева первого порядка $W^1_p(\mathrm{X})$ при $p \in [1, \infty]$. Современное состояние теории пространств $W^1_p(\mathrm{X})$, $p \in [1, \infty]$, отражено в недавних монографиях [29], [62], [71] и обзоре [23].

В некоторых случаях, когда допустимое метрическое пространство с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ обладает некоторой дополнительной структурой, возможно содержательное построение теории пространств Соболева $W^l_p(\mathrm{X})$ при $l \geq 2$ и $p \in [1, \infty]$. Так, например, если X является $RCD(K, N)$-пространством, то, как показал Н. Джильи [60], пространство Соболева $W^2_p(\mathrm{X})$

содержит весьма богатый запас тестовых функций при всех $p \in [1, \infty]$. Если же X – риманово многообразие, снабжённое соответствующей мерой, то пространства $W_p^l(\mathrm{X})$ нетривиальны при всех $l \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty]$ [69].

Несмотря на чрезвычайно интенсивное развитие теории пространств Соболева на допустимых метрических пространствах с мерой, некоторые естественные проблемы этой теории остаются открытыми. Пожалуй, одна из наиболее трудных и интригующих из них – это *проблема следа*, то есть задача *точного внутреннего описания* следов функций из пространства Соболева $W_p^l(\mathrm{X})$ при $l \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ на *произвольных замкнутых* подмножествах $S \subset \mathrm{X}$. Неформально (мы пока оставляем в стороне точное определение следа соболевской функции, которое само по себе нетривиально) она может быть поставлена следующим образом.

Проблема следов пространств Соболева. Пусть $p \in [1, \infty]$, $l \in \mathbb{N}$, а S – замкнутое непустое подмножество допустимого метрического пространства с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$. Для заданной функции $f : S \to \mathbb{R}$ найти условия, которые необходимы и достаточны для существования функции $F \in W_p^l(\mathrm{X})$ такой, что след F на S совпадает с f.

Стоит отметить, что в полной общности указанная задача чрезвычайно сложна. Более того, даже весьма частный её случай, относящийся к пространствам $W_p^1(\mathbb{R}^n)$, остаётся открытой проблемой на протяжении уже почти 70-ти лет. Большая часть диссертации посвящена решению проблемы следов пространств Соболева для весьма широких классов замкнутых подмножеств S различных метрических пространств с мерой $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$.

Стоит отметить, что проблеме следа предшествовала так называемая проблема Х. Уитни, которая звучит следующим образом.

Проблема Уитни. Пусть $l, n \geq 1$ – произвольные натуральные числа, а $S \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое непустое множество. Для заданной функции $f : S \to \mathbb{R}$ найти условия, которые необходимы и достаточны для существования функции $F \in C^l(\mathbb{R}^n)$ такой, что поточечное ограничение F на S совпадает с f.

Указанная задача оказалась столь сложна, что сам Х. Уитни решил ее полностью лишь в случае $n = 1$ [123]. В многомерном случае им был решен ослабленный вариант этой проблемы. Неформально говоря, при $n > 1$ Х. Уитни показал [122], как продолжать функцию f с замкнутого подмножества $S \subset \mathbb{R}^n$, используя не только значения f на S, но и значения так называемых джетов на S, которые апостериори играют роль следов младших производных продолженной функции. Лишь недавно, спустя более чем 70 лет после работ Х. Уитни, в работах [47],[48],[49],[50] Ч. Фефферман дал полное решение проблемы Уитни, а также других тесно связанных с ней задач.

Таким образом, проблема следов пространств Соболева является естественным продолжением и обобщением классической проблемы Уитни, а потому представляет не меньшую трудность. При этом в отличие от проблемы Уитни, проблема следов пространств Соболева очень трудна даже при $l = 1$. Указанные факты не стоит считать единственной причиной актуальности задачи. Действительно, именно проблема характеризации следов пространств Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^n)$ на плоскостях $\mathbb{R}^d$ при $p \in (1, \infty)$, $l, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $d \in \{1, ..., n-1\}$ привела к созданию теории пространств Бесова $\mathrm{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ [1]. Наконец, проблема следов пространств Соболева имеет естественные приложения в краевых задачах для уравнений математической физики [43],[86] (см. также ссылки в этих работах).

Все известные до настоящего времени результаты, касающиеся проблемы следов пространств Соболева, можно условно разделить на *три большие группы.*

К первой группе относятся результаты, полученные для пространств $W^l_p(\mathbb{R}^n)$ при $l \in \mathbb{N}$, $p > n$ *без каких-либо дополнительных предположений регулярности* относительно множества $S \subset \mathbb{R}^n$, на котором изучается след. Согласно известной теореме вложения Соболева, в этом случае каждый элемент $F \in W^l_p(\mathbb{R}^n)$ может быть переопределён на множестве лебеговой меры нуль так, что полученная функция будет принадлежать пространству $C^{l-1}(\mathbb{R}^n)$. Этот факт позволяет изучать следы пространств $W^l_p(\mathbb{R}^n)$ на любых непустых подмножествах $\mathbb{R}^n$. Большую роль в развитии этого направления сыграли работы П. Шварцмана [113, 114, 116], а также совместные работы Ч. Феффермана и его учеников [51, 52, 53, 54, 73]. Стоит отметить, что случай $p \in (n, \infty]$ оказывается существенно более простым, нежели случай $p \in (1, n]$. Грубо говоря, при $p > n$ функции из пространств Соболева ведут себя настолько хорошо, что решение задачи о следе не требует, по крайней мере в случае $l = 1$, глубокого анализа геометрии множества S.

Ко второй группе следует отнести результаты, которые получены в диапазоне параметров $p \in (1, \infty)$ для *достаточно регулярных* подмножеств допустимых пространств $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$. Действительно, как отмечалось выше, даже в случае $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$ анализ пространств Соболева $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, n]$ приносит массу трудностей. Резюмируя, можно сказать, что всё, что было известно до настоящего времени о проблеме следа во всем диапазоне параметров $p \in (1, \infty)$ – это описание следов пространств Соболева $W^1_p(\mathrm{X})$, $p \in (1, \infty)$ на так называемых корегулярных по Альфорсу-Давиду множествах. В случае, если X – риманово многообразие с мерой, порождённой формой объёма, такие множества можно рассматривать как естественные обобщения подмногообразий. При $\theta \geq 0$ множество $S \subset \mathrm{X}$ называется θ-корегулярным по Альфорсу–Давиду, если оно замкнуто и для некоторых констант $c_{S,1}, c_{S,2} > 0$ выполнено

неравенство

$$c_{S,1}\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \le \mathcal{H}_\theta(B_r(x)\cap S) \le c_{S,2}\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{при всех} \quad x\in S \quad \text{и всех} \quad r\in(0,1].$$

Здесь и далее через $B_r(x)$ обозначен замкнутый шар с центром в точке x радиуса r, а через $\mathcal{H}_\theta$ – θ-коразмерностная мера Хаусдорфа. Для произвольных допустимых метрических пространств с мерой $\mathrm{X}=(\mathrm{X},\mathrm{d},\mu)$ задача о следах пространств $W^1_p(\mathrm{X})$ решена во всем диапазоне $p\in(1,\infty)$ для θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств в работе [111] при $\theta=0$, а в работе [104] при $\theta>0$. Близкие по смыслу задачи описания следа пространства $W^1_p(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$ области Ω рассмотрены так же в [56], [57], [58], [90], [109] при некоторых предположениях относительно Ω и дополнительном предположении θ-корегулярности границы $\partial\Omega$ по Альфорсу–Давиду. Если $\mathrm{X}=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2,\mathcal{L}^n)$, то задача о следе решена для пространств $W^l_p(\mathbb{R}^n)$, $l\in\mathbb{N}$, для θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств при $\theta=0$ в [112], а при $\theta\in(0,1)$ в [72]. В случае, когда X – группа Карно с соответствующей однородной нормой и мерой Хаара, проблема следов пространств $W^l_p(\mathrm{X})$, $l\in\mathbb{N}$ на θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множествах была решена в [8, 9]. При этом в случае $l>1$ рассматривалась более простая задача об описании следов джетов.

Наконец, *к третьей группе* относятся результаты по проблеме следов пространств Соболева $W^l_1(\mathrm{X})$, $l\in\mathbb{N}$ и пространств функций ограниченной вариации $BV(\mathrm{X})$. Этот случай является особо сложным, поскольку эти функциональные пространства оказываются весьма специфическими с точки зрения общей теории банаховых пространств (в частности, они нерефлексивны). Отметим прежде всего недавние работы [85], [91], где аналогичные задачи решены для пространств $W^1_1(\Omega)$ и $BV(\Omega)$, изначально определённых на достаточно регулярной области $\Omega\subset\mathrm{X}$, а след ищется на границе $\partial\Omega$ области Ω. Однако методы, развитые в указанных работах, фактически дают решение изначально поставленной задачи о следе только при $l=1$ для 1-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств.

Таким образом, анализ всех известных в мировой литературе результатов показывает, что даже для классических пространств Соболева первого порядка $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ при $p\in[1,n]$ задача о следе была ранее решена при очень сильных дополнительных ограничениях на множество S. Действительно, например, множество в $\mathbb{R}^2$, полученное приклеиванием граничной точки отрезка к одной граничной точке двумерного диска, не может быть θ-корегулярным по Альфорсу–Давиду ни при каком $\theta\ge 0$, а значит след пространства $W^1_p(\mathbb{R}^2)$ на таком множестве не может быть изучен с помощью известных ранее методов.

Таким образом, для допустимых пространств $\mathrm{X}=(\mathrm{X},\mathrm{d},\mu)$ требуется некоторое естественное ослабление условия θ-корегулярности по Альфорсу–Давиду, которое бы позволило

получить достаточно широкий класс множеств, допускающих конструктивное описание следов пространств Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$ во всем диапазоне параметров $p \in (1, \infty)$. В частности, такое условие должно допускать наличие у множества кусков разной коразмерности. Наиболее естественным шагом в этом направлении является замена требования регулярности меры Хаусдорфа на требование регулярности соответствующего обхвата по Хаусдорфу снизу. А именно, пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – допустимое пространство. При $\theta \geq 0$ множество $S \subset \mathrm{X}$ будем называть θ-*котолстым*, если

$$\lambda_S \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \leq \mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x) \cap S) \quad \text{при всех} \quad x \in S \quad \text{и всех} \quad r \in (0, 1].$$

Здесь и далее $\mathcal{H}_{\theta,r}$ – θ-коразмерностный обхват по Хаусдорфу, впервые введённый в [20].

Стоит отметить, что понятие θ-котолстого множества является естественным обобщением понятия d-толстого множества, введённого В. Рычковым в [101] для случая $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$. Действительно, мы покажем, что при $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, n]$ множество $S \subset \mathbb{R}^n$ является θ-котолстым в том и только том случае, если оно является $(n-\theta)$-толстым в смысле В. Рычкова. Класс всех θ-котолстых множеств содержит класс всех θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств, но вообще говоря является *существенно более широким.* Например, любое линейно связное подмножество в компактном римановом многообразии, состоящее более чем из одной точки, является 1-котолстым, но не является, вообще говоря 1-корегулярным по Альфорсу–Давиду. Более того, можно привести примеры θ-котолстых множеств, которые являются объединением счётного семейства корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств попарно различной коразмерности.

Совсем недавно в статьях [25], [26] изучены различные тонкие геометрические свойства d-толстых множеств в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Однако, в случае общих метрических пространств соответствующие множества рассмотрены в диссертации впервые.

Стоит подчеркнуть, что решение задачи о следе в столь большой общности потребовало введения в диссертации многих новых понятий и методов. Действительно, в предшествующих работах меры Хаусдорфа являлись основным инструментом, позволяющим корректно задать норму в пространстве следов. В случае θ-котолстых множеств использование мер Хаусдорфа оказываются неэффективным. Более того, для таких множеств не существует одной канонической меры, которая была бы хорошо приспособлена для решения задачи о следах. В общем случае приходится прибегать к целой последовательности мер. В диссертации введены специальные классы последовательностей борелевских мер, названных θ-корегулярными. Неформально говоря, использование последовательности мер вместо какой-либо отдельно взятой меры мотивировано тем, что θ-котолстое множество может выглядеть по-разному на

“разных масштабах”. Каждая мера из θ-корегулярной последовательности адаптирована под соответствующий масштаб.

Отметим также, что в диссертации *рассмотрено направление*, тесно примыкающее к задаче о следе и связанное с проблемой пористости множеств в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Более точно, для заданного непустого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и параметра $d \in [0, n)$ мы изучаем вопрос о наличии S-полостей в кубах Q, то есть “достаточно больших” открытых $U \subset Q \setminus S$, в зависимости от поведения соответствующего обхвата по Хаусдорфу $\mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S)$. Насколько нам известно, в такой постановке задача ранее не рассматривалась. В некотором смысле обратная задача изучалась многими авторами ранее. А именно, весьма подробно в литературе освещен вопрос о влиянии пористости множества на его Хаусдорфову размерность. Грубо говоря, ранее было осознано [84, 96, 105], что если все кубы достаточно малого диаметра с центрами в множестве S имеют достаточно большие кубические S-полости, то размерность множества S строго меньше n. Стоит отметить, что несмотря на то, что рассматриваемая нами задача представляет и самостоятельный интерес, она возникает достаточно естественным образом при решении проблемы почти точного описания следов пространств Соболева $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ при $n \in \mathbb{N}$, $p \in (1, n]$ на произвольных компактах $K \subset \mathbb{R}^n$.

Как отмечалось выше, даже в частном случае $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \mathcal{L}^n)$, если множество $S \subset \mathrm{R}^n$ не обладает никакими дополнительными свойствами регулярности, то в диапазоне параметров $p \in (1, n]$ задача о следе пространств $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ на S никогда ранее не рассматривалась. В диссертации сделан первый шаг в этом направлении. А именно, при каждом $p \in (1, n]$ получено *почти точное* описание следа пространства $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ на произвольном компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, на котором след существует. Ключевым моментом здесь является построение *нового оператора продолжения* из соответствующего пространства следов $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_K$ в $W^1_p(\mathbb{R}^n)$. Все известные ранее работы опирались на незначительную модификацию метода продолжения Х. Уитни. В диссертации предложен новый метод, основанный на глубоком анализе геометрических свойств компакта K, связанных с обхватом по Хаусдорфу. Предложенная конструкция может оказаться полезной и в других областях геометрического анализа и теории функциональных пространств.

В случае $p = 1$ в диссертации рассматривается проблема следа для пространств Соболева, заданных на евклидовых пространствах с весовой мерой Лебега, то есть при некотором $n \in \mathbb{N}$ имеем $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_2, \gamma\mathcal{L}^{n+1})$, где γ-измеримая почти всюду положительная локально интегрируемая функция, называемая весом. В таком случае пространство $W^l_1(\mathrm{X})$ называется *весовым пространством Соболева* и обозначается $W^l_1(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$. Насколько нам известно, начиная с пионерской работы Гальярдо 1957 года [55] задача описания следов весовых

пространств Соболева $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ рассматривалась только в [10, 17, 94]. В указанных работах рассматривались лишь модельные ситуации, когда вес γ в сущности зависит от некоторой выделенной группы переменных. Более точно, в [10, 94] вес γ предполагался зависящим только от координаты x_{n+1}, а в [17] только от координат $x_1, ..., x_n$. Конечно, такая скудность сведений обусловлена большой трудностью задачи. Попытки описать следы пространств $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$, $l \in \mathbb{N}$ при минимальных ограничениях на вес γ наталкиваются на существенные трудности.

При $n \in \mathbb{N}$ в диссертации получено точное описание следов пространств $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ на гиперплоскости $S = \mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ при всех $l \in \mathbb{N}$ для случая, когда вес γ принадлежит *локальному классу Макенхаупта* $A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, являющегося обобщением класса Макенхаупта $A_1(\mathbb{R}^{n+1})$ [95]. Класс $A_1(\mathbb{R}^{n+1})$ возникает естественным образом во многих задачах гармонического анализа и теории меры (см. например гл. 5 монографии [119]). Следует отметить, что гиперплоскость, безусловно, является 1-корегулярным по Альфорсу–Давиду множеством в случае, если вес γ существенно ограничен в окрестности этой гиперплоскости. Если же вес γ стремится к бесконечности при приближении к гиперплоскости, то она, вообще говоря, уже не является 1-корегулярным по Альфорсу–Давиду множеством. В силу вышесказанного в такой постановке задача о следе не может быть решена ранее известными методами. В диссертации показано, что при $l > 1$ следом пространства $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ является так называемое пространство Бесова переменной гладкости. Случай $l = 1$ является самым трудным и потребовал построения в диссертации *нового функционального пространства*. В диссертации построен также принципиально *новый нелинейный оператор продолжения* из соответствующего пространства следов $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}$ в само пространство $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$.

Наконец, в диссертации рассмотрено направление, связанное с *пространствами Бесова переменной гладкости*. Стоит отметить, что пространства переменной гладкости, или, как их иногда называют в зарубежной литературе, 2-микролокальные пространства, впервые появились в работах Ж.-М. Бони и С. Жафара [30, 74], где они использовались для описания локальной регулярности и локальных осцилляций функций в окрестностях точек сингулярности. Затем такие пространства нашли применение во фрактальном анализе и обработке сигналов [75, 108]. Исторической предпосылкой для создания теории пространств Бесова переменной гладкости послужила теория так называемых пространств Бесова обобщённой гладкости, созданная в работах Г. А. Калябина, М. Л. Гольдмана (см. обзор П. Л. Лизоркина этих результатов в добавлении к монографии Х. Трибеля [15]), а также в статье В. Фаркаса и Х. Г. Леопольда [46]. Как уже кратко отмечалось выше, пространства Бесова переменной гладкости тесно связаны с весовыми пространствами Соболева. Более точно, в работе [16]

при $p, q \in (1, +\infty)$, $d \in \mathbb{N}$ для некоторой весовой последовательности $\{t_k\}$ было введено новое пространство Бесова переменной гладкости $\overline{\mathrm{B}}^l_{p,q}(\mathbb{R}^d, \{t_k\})$ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Если $\{t_k\} = \{2^{ks}\}$ и $l > s$, то $\overline{\mathrm{B}}^l_{p,q}(\mathbb{R}^d, \{t_k\})$ совпадают с точностью до эквивалентных норм с классическими пространствами Бесова $\mathrm{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ при всех $p, q \in (1, +\infty)$. Кроме того, было показано, что при $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $l \geq n - d > 0$ и $p \in (1, \infty)$ пространства $\overline{\mathrm{B}}^l_{p,p}(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$ являются следами на $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ весовых пространств Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^n, \gamma)$ с весом γ из класса Макенхаупта $A_p(\mathbb{R}^n)$. При этом весовая последовательность $\{\gamma_k\}$ однозначно строится по весу γ. Подчеркнём, что проблема следа в случае $p = 1$ не рассматривалась в [16]. Следует отметить, что близкие по смыслу (но, вообще говоря, не совпадающие с ними!) функциональные пространства Бесова переменной гладкости изучались ранее многими математиками безотносительно их привязки к пространствам следов весовых пространств Соболева. Отметим в этой связи работы О. В. Бесова [2, 3, 4], Д. Дрихема [42], Э. Гонсалез, С. Моура и Ю. Невес [64], Х. Кемпки [80, 81], Х. Кемпки и Я. Выбирал [79].

В настоящей диссертации вводятся две новые шкалы пространств Бесова переменной гладкости. Первая шкала $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, $p, q \in (0, +\infty]$, $r \in (0, p]$ обобщает и расширяет аналогичную шкалу пространств Бесова переменной гладкости, введённую в [16] лишь при $p, q \in (1, +\infty)$ и $r = 1$. Кроме того, новый параметр r помогает получать более деликатные результаты. Вторая шкала $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$, $p, q \in (0, +\infty]$ является обобщением шкалы весовых пространств Бесова, изученной Рычковым в [102]. В диссертации изучается взаимосвязь между этими двумя новыми шкалами пространств. Кроме того, изучается их связь с пространствами Бесова переменной гладкости, известными в мировой литературе. В определённом диапазоне параметров p, q, r при естественных ограничениях на переменную гладкость $\{t_k\}$ доказывается совпадение пространств $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ и $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\mathbb{R}^n, \{t_k\})$ с точностью до эквивалентности соответствующих квазинорм. В качестве приложения мы получаем новое эквивалентное описание следов весовых пространств Соболева с весом из класса Макенхаупта на плоскостях. Кроме того, в диссертации изучаются проблемы построения теории пространств Бесова переменной гладкости на некоторых классах областей с негладкой границей в евклидовых пространств, а также проблемы их продолжения на все пространство с сохранением свойств гладкости.

Цели работы.

- Для допустимых пространств $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ ввести новые классы θ-котолстых множеств, обобщающие классы θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств.

- При любом $p \in (1, \infty)$ получить точное внутреннее описание следов пространств Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$ на θ-котолстых множествах при $\theta \in [0, p)$.

- При $p \in (1, \infty)$ и $\theta \in [0, p)$ построить конкретные примеры θ-котолстых множеств и и получить для них упрощённые критерии на следы пространств $W_p^1(\mathrm{X})$.

- При $n \in \mathbb{N}$, $d \in [0, n)$ исследовать свойства пористости подмножеств $\mathbb{R}^n$ в зависимости от локального поведения d-обхвата по Хаусдорфу.

- Получить почти точное внутреннее описание следа пространства Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ в случае $p \in (1, n]$ на произвольном компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, на котором след существует.

- Построить новые шкалы пространств Бесова переменной гладкости, включающие в себя пространства следов весовых пространств Соболева.

- При $n, l \in \mathbb{N}$ получить точное внутреннее описание следа пространства Соболева $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ с весом из локального класса Макенхаупта $\gamma \in A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ на $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. При каждом $p \in (1, \infty)$ и любом $\theta \in [0, p)$, для случая, когда $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – пространство с мерой, удовлетворяющей свойству удвоения, допускающее $(1, p)$-неравенство Пуанкаре, получены различные эквивалентные точные внутренние описания следов пространства Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$ на θ-котолстых замкнутых множествах $S \subset \mathrm{X}$.

2. В случае, когда θ-котолстое замкнутое множество S состоит из конечного числа корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств, получено упрощённое точное внутреннее описание следов пространств $W_p^1(\mathrm{X})$ на S.

3. На произвольных спрямляемых кривых Γ положительной длины без самопересечений в $\mathbb{R}^2$ построены явные конструкции мер типа Фростмана, с помощью которых получены упрощённые точные внутренние описания следов пространств $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ на Γ при всех $p \in (1, \infty)$.

4. При $n \in \mathbb{N}$, $d \in (0, n]$ изучены свойства пористости множеств $S \subset \mathbb{R}^n$ в зависимости от поведения d-обхватов по Хаусдорфу $\mathcal{H}_\infty^d(Q \cap S)$ пересечений кубов Q с S.

5. При любых $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $p \in (1, n]$ получено почти точное внутреннее описание следов пространств Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ на произвольных компактных множествах $S \subset \mathbb{R}^n$,

на которых след существует. При этом, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ построен новый линейный ограниченный оператор продолжения из пространства следов $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ в пространство $W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$.

6. Введены две новые шкалы пространств Бесова переменной гладкости во всем диапазоне параметров интегрируемости и суммируемости. Изучен вопрос совпадения этих шкал между собою в некотором достаточно широком диапазоне параметров.

7. Введены новые пространства Бесова переменной гладкости на липшицевых областях $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Доказаны теоремы о продолжении элементов этих пространств с области Ω на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением свойств гладкости.

8. При $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_2, \gamma\mathcal{L}^{n+1})$, в случае, когда вес γ принадлежит локальному классу Макенхаупта $A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, при каждом $l > 1$ доказано, что след пространства Соболева $W^l_1(\mathrm{X})$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ совпадает с введённым в диссертации пространством Бесова переменной гладкости.

9. При $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_2, \gamma\mathcal{L}^{n+1})$, в случае, когда вес γ принадлежит локальному классу Макенхаупта $A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$, доказано, что след пространства $W^1_1(\mathrm{X})$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ – суть некоторое новое функциональное пространство, построенное в диссертации. При этом построен новый нелинейный ограниченный оператор продолжения из соответствующего пространства следов $W^1_1(\mathrm{X})|_{\mathbb{R}^n}$ в пространство $W^1_1(\mathrm{X})$.

Методы исследования. В работе используются методы теории метрических пространств с мерой, теории функциональных пространств, геометрического анализа, геометрической теории меры, а также классические методы теории бесконечномерных нормированных пространств. Кроме того, для получения ряда существенных результатов диссертации были развиты принципиально новые методы продолжения функций с нерегулярных подмножеств метрических пространств с мерой.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функциональных пространств, в геометрической теории меры, а также в теории граничных задач для уравнений математической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского), семинаре по комплексному анализу (Семинар Гончара), семинаре "Коллоквиум МИАН" и общеинститутском семинаре "Математика и ее приложения" Математического института им. В. А. Стеклова, семинаре по теории функций действительного переменного механико-математического факультета МГУ, Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций, семинаре "Geometric Analysis and PDE" университета имени Бен-Гуриона (Израиль), семинаре "Geometric Analysis" Билефельдского университета (Германия), семинаре "Beijing–Moscow Mathematics Colloquium" (Российско-Китайский семинар), а также на международных конференциях, в том числе:

— международная конференция "Mecklenburg Workshop Approximation Methods and Function Spaces", 16–20 марта 2015, Хасенвинкель, Германия,

— международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского, 25–29 мая 2015, МИАН, Москва,

— летняя школа-семинар по динамическим системам, геометрии и теории управления 6–17 июля 2015, Максимиха, Байкал,

— международная конференция "The 9th Whitney Problems Workshop", 29 мая–2 июня 2016, университет Технион, Хайфа, Израиль,

— международная конференция "Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis (FSDONA 2016)", 4–9 июля 2016, Прага, Чехия,

— международная конференция "Матсборник-150: алгебра, геометрия, анализ", 7–9 ноября 2016, МИАН, Москва,

— международная конференция "Геометрический анализ и теория управления", 8–12 декабря 2016, институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,

— международная конференция "The 10th Whitney Problems Workshop", 14–18 августа 2017, Уильямсбург, США,

— международная конференция "New perspectives in the Theory of Function Spaces and their Applications", 17–23 сентября 2017, Бедлево, Польша,

— международная конференция "The 14th Whitney Problems Online Workshop", июль 2021, online, США,

— международная конференция "The 30th St. Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis", 1–6 июля 2021, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург,

— конференция международных математических центров мирового уровня, 9–13 августа 2021, центр Сириус, Сочи,

— международная конференция “Аппроксимация и дискретизация”, 30 августа–3 сентября 2021, Москва,

— конференция И. Г Петровского (24-я сессия) “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, 26–30 декабря 2021, МГУ, Москва,

— международная конференция “Многомерная аппроксимация и дискретизация” 27 июня – 1 июля 2022, центр Сириус, Сочи,

— международная конференция по геометрическому анализу, посвященная памяти Ю. Г. Решетняка, 23–29 октября 2022, институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,

— вторая конференция Математических центров России. Секция «Действительный и функциональный анализ», 7–11 ноября 2022, МГУ, Москва.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science. Список этих работ приведен в диссертации отдельно.

Личный вклад. Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Все результаты, выносимые на защиту и опубликованные в совместных работах, принадлежат автору

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 7 глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 124 наименований. Общий объём диссертации составляет 325 страниц.

Краткое содержание диссертации

Нумерация приводимых ниже результатов соответствует нумерации в основном тексте.

Во **введении** даётся краткий обзор известных результатов и результатов диссертации.

В **первой главе** приводятся все необходимые предварительные сведения, которые будут использоваться в остальных главах диссертации. Кроме того, вводится некоторый новый математический аппарат, являющийся фундаментом для дальнейших построений.

В §1.2 для удобства читателя напоминаются стандартные факты из теории меры и геометрического анализа, а также фиксируются основные обозначения. Кроме того, мы приводим некоторые современные концепции из анализа на метрических пространствах с мерой.

На протяжении всей работы под шаром B в метрическом пространстве (X, d) мы всегда понимаем замкнутый шар. При $r > 0$ и $x \in \mathrm{X}$ положим $B_r(x) := \{y \in \mathrm{X} : \mathrm{d}(y, x) \le r\}$, при этом если B – шар в X, то через r_B обозначим его радиус, а через x_B – его центр. Поскольку центр и радиус шара не всегда однозначно определены, будем считать, что шар всегда задан вместе с некоторым фиксированным центром и радиусом.

На протяжении всей диссертации под *метрическим пространством с мерой*, далее сокращенно м.п.м., понимается тройка $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$, в которой пара (X, d) – полное сепарабельное метрическое пространство, а μ – борелевски регулярная мера на (X, d), принимающая конечные положительные значения на всех шарах положительного радиуса. Нам будет удобно считать меру μ *внешней.* В таком случае μ является счетно полуаддитивной функцией на множестве всех подмножеств 2^{X}, а её сужение на соответствующую сигма-алгебру измеримых множеств $\mathfrak{G}_\mu$ (по нашему определению $\mathfrak{G}_\mu$ содержит сигма алгебру борелевских подмножеств (X, d)) является счетно аддитивной функцией.

Следуя [61] будем говорить, что мера μ обладает *равномерно локальным свойством удвоения*, если для любого $R \in (0, +\infty)$

$$\sup_{x \in \mathrm{X}} \sup_{r \in (0, R]} \frac{\mu(B_{2r}(x))}{\mu(B_r(x))} < +\infty.$$

Наконец, напомним, что при $p \in [1, \infty)$ м.п.м. $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ называется *допускающим слабое локальное* $(1, p)$*–неравенство Пуанкаре*, если для любого $R > 0$ существуют константы $C = C(R, p)$ и $\lambda = \lambda(R, p)$ такие, что для любой липишицевой функции $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \fint_{B_r(x)} |f(y) - c| \, d\mu(y) \le Cr \Big(\fint_{B_{\lambda r}(x)} (\operatorname{lip} f(y))^p \, d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при всех} \quad (x, r) \in \mathrm{X} \times (0, R],$$

где $\operatorname{lip} f(y) := \overline{\lim}_{z \to y} |f(y) - f(z)| / \mathrm{d}(y, z)$ при условии, что y – предельная точка, и $\operatorname{lip} f(y) := 0$ в изолированной точке y.

Важный класс м.п.м. описан в следующем определении.

Определение 1.2.70. При $p \in [1, \infty)$ говорят, что м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ является p*-допустимым* и писать $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$, если мера μ обладает равномерно локальным свойством удвоения, а м.п.м. X допускает слабое локальное $(1, p)$-неравенство Пуанкаре.

Оказывается, что классы $\mathfrak{A}_p$, $p \in [1, \infty)$, весьма широки. В частности, при любом $p \in [1, \infty)$ класс $\mathfrak{A}_p$ включает в себя все римановы многообразия, кривизна Риччи которых ограничена снизу. Более того, принадлежность пространства X классу $\mathfrak{A}_p$ при некотором $p \in [1, \infty)$ влечёт наличие у X многих замечательных свойств. Например, X локально

компактно, а значит "бесконечномерные" эффекты исключены. Кроме того, X связно, и даже локально квазивыпукло. Классам $\mathfrak{A}_p$ и анализу на них посвящено большое число работ. Монография [71], пожалуй, наиболее полно отражает современное состояние теории.

Поскольку определения d-обхвата по Хаусдорфу $\mathcal{H}^d_\delta$ и d-меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^d$ стандартны, напомним более современные определения *θ-коразмерностного обхвата и меры Хаусдорфа*, соответственно. При $\theta \geq 0$, $\delta \in (0, +\infty]$ для заданного множества E в м.п.м. $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ положим $\mathcal{H}_{\theta,\delta}(E) := \inf \sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^\theta}$, где инфимум взят по всем не более чем счётным покрытиям $\mathcal{B}$ множества E замкнутыми шарами с радиусами $r_B \in (0, \delta)$. Соответственно, полагаем $\mathcal{H}_\theta(E) := \lim_{\delta\to+0} \mathcal{H}_{\theta,\delta}(E)$.

Также в §1.2 напоминаются определения и основные свойства d-регулярных по Альфорсу–Давиду множеств и θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств.

Определение 1.2.92. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой. Пусть μ обладает свойством равномерно локального удвоения.

При $\theta \geq 0$ множество $S \subset \mathrm{X}$ называется *θ-корегулярным по Альфорсу–Давиду*, если оно замкнуто и существуют константы $c_{\theta,1}(S), c_{\theta,2}(S) > 0$ такие, что

$$c_{\theta,1}(S)\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \leq \mathcal{H}_\theta(B_r(x)\cap S) \leq c_{\theta,2}(S)\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{для всех} \quad (x,r) \in S\times(0,1].$$

Класс всех θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств обозначим символом $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$.

При $d \geq 0$ множество $S \subset \mathrm{X}$ называется *d-регулярным по Альфорсу–Давиду*, если оно замкнуто и существуют константы $c^d_1(S), c^d_2(S) > 0$ такие, что

$$c^d_1(S)r^d \leq \mathcal{H}^d(B_r(x)\cap S) \leq c^d_2(S)r^d \quad \text{для всех} \quad (x,r) \in S\times(0,1].$$

Класс всех d-регулярных по Альфорсу–Давиду множеств обозначим символом $\mathcal{ADR}^d(\mathrm{X})$.

Классы $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ активно использовалось в работах [58, 90, 91], где изучались следы пространств Соболева на границах некоторых достаточно регулярных областей.

Также мы напоминаем крайне важное для дальнейшего понятие пористости множества. Пористым множествам посвящена крайне обширная литература по причине их востребованности во многих разделах геометрического анализа и дифференциальных уравнений. Здесь мы дадим лишь ссылку на недавний обзор [110].

Определение 1.2.103. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – произвольное метрическое пространство. Для множества $S \subset \mathrm{X}$ и параметра $\sigma \in (0, 1]$ будем говорить, что шар $B = B_r(x)$ является *(S,σ)-пористым*, если найдется шар $B' = B_{r'}(x') \subset B_r(x) \setminus S$ такой, что $r' \geq \sigma r$. Семейство всех (S,τ)-пористых шаров будем обозначать через $\mathcal{POR}_S(\sigma) := \mathcal{POR}^{\mathrm{X}}_S(\sigma)$. Шар $B = B_r(x)$ называется *S-пористым*, если он (S,σ)-пористый при некотором $\sigma \in (0, 1)$.

Кроме того, при $r \in (0,1]$ положим $S_r(\sigma) := \{x \in S : B_r(x) \in \mathcal{POR}_S(\sigma)\}$. Будем говорить, что S является *σ-пористым*, если $S = S_r(\sigma)$ при всех $r \in (0,1]$.

В §1.3 мы напоминаем читателю о различных популярных в мировой литературе подходах к построению теории пространств Соболева первого порядка $W^1_p(\mathrm{X})$, $p \in (1,\infty)$, на метрических пространствах с мерой. К счастью, в случае, когда пространство X принадлежит классу $\mathfrak{A}_p$, все подходы оказываются эквивалентны в соответствующем смысле. Также мы вкратце перечисляем важнейшие свойства пространств $W^1_p(\mathrm{X})$.

Напомним понятие p-емкости C_p (см., например §1.4 в [29]). Напомним, что при $p \in (1,\infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$ для любого $F \in W^1_p(\mathrm{X})$ существует борелевская функция $\overline{F}$, называемая *p-точным представителем* F, такая, что для некоторого множества E_F, имеющего p-емкость нуль, равенство $\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |\overline{F}(x) - F(y)|\, d\mu(y) = 0$ справедливо при всех $x \in \mathrm{X}\setminus E_F$. Это факт позволяет нам ввести определение следа соболевской функции.

Для борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ через $\mathfrak{B}(E)$ будем обозначать множество всех борелевских функций $f : E \to [-\infty,+\infty]$. Напомним также, что при $p \in [1,\infty)$ некоторое свойство функции называется выполненным p-квазивсюду (p-к.в. для краткости), если оно выполнено всюду за исключением множества p-емкости нуль.

Определение 1.3.17. Пусть $p \in (1,\infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Пусть $S \subset \mathrm{X}$ – борелевское множество с ёмкостью $C_p(S) > 0$. Для элемента $F \in W^1_p(\mathrm{X})$ определим *p-точный след* $F|_S$ на множестве S элемента F равенством $F|_S := \{f \in \mathfrak{B}(S) : f(x) = \overline{F}(x)$ при p-к.в. $x \in S\}$. Более того, определим *p-точное пространство следов* равенством $W^1_p(\mathrm{X})|_S := \{F|_S : F \in W^1_p(\mathrm{X})\}$ и положим $\|f\|_{W^1_p(\mathrm{X})|_S} := \inf\{\|F\|_{W^1_p(\mathrm{X})} : f = F|_S\}$ при $f \in W^1_p(\mathrm{X})|_S$. Наконец скажем, что $F \in W^1_p(\mathrm{X})$ является *p-точным продолжением* заданной функции $f \in \mathfrak{B}(S)$, если $f \in F|_S$.

В диссертации нам понадобится также более гибкий подход к понятию следа соболевской функции. Для его изложения фиксируем некоторые обозначения.

Для заданной борелевски регулярной меры $\mathfrak{m}$ на X символом $\operatorname{supp}\mathfrak{m}$ обозначим носитель меры $\mathfrak{m}$. Кроме того, символом $L_0(\mathfrak{m})$ обозначим множество $\mathfrak{m}$-классов эквивалентности $[f]_{\mathfrak{m}}$ функций $f \in \mathfrak{B}(\operatorname{supp}\mathfrak{m})$. Наконец, через $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$ обозначим оператор $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{B}(\operatorname{supp}\mathfrak{m}) \to L_0(\mathfrak{m})$, сопоставляющий каждой функции $f \in \mathfrak{B}(\operatorname{supp}\mathfrak{m})$ элемент $[f]_{\mathfrak{m}}$. Скажем, что мера $\mathfrak{m}$ абсолютно непрерывна относительно ёмкости C_p, если для всякого множества $E \subset \mathrm{X}$ из равенства $C_p(E) = 0$ следует равенство $\mathfrak{m}(E) = 0$.

Определение 1.3.19. Пусть $p \in (1,\infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Пусть $S \subset \mathrm{X}$ – борелевское множество с емкостью $C_p(S) > 0$. Пусть $\mathfrak{m}$ – ненулевая борелевски регулярная мера на X такая, что $\mathfrak{m}$ абсолютно непрерывна относительно C_p и $S \subset \operatorname{supp}\mathfrak{m}$. Для элемента $F \in W^1_p(\mathrm{X})$ определим его $\mathfrak{m}$-след $F|^{\mathfrak{m}}_S$ на S как $\mathfrak{m}$-класс эквивалентности p-точного следа F на S, то есть $F|^{\mathfrak{m}}_S := [F|_S]_{\mathfrak{m}}$

(символ $[F|_S]_{\mathfrak{m}}$ следует понимать как $\mathfrak{m}$-класс эквивалентности любой борелевской функции $f \in F|_S$). Кроме того, определим $\mathfrak{m}$-пространство следов как образ p-точного пространства следов в пространстве $L_0(\mathfrak{m})$ относительно отображения $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$, то есть $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}} := \mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(W_p^1(\mathrm{X})|_S)$. Положим $\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}}} := \inf\{\|F\|_{W_p^1(\mathrm{X})} : f = F|_S^{\mathfrak{m}}\}$ при $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}}$. Наконец, скажем, что $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ является $\mathfrak{m}$-*продолжением* заданной функции $f \in \mathfrak{B}(S)$ (или $\mathfrak{m}$-класса эквивалентности $[f]_{\mathfrak{m}}$), если $f \in F|_S^{\mathfrak{m}}$ (если $[f]_{\mathfrak{m}} = F|_S^{\mathfrak{m}}$).

В §1.4 обсуждаются различные асимптотические свойства удвоения борелевски регулярных мер на м.п.м. X, которые являются некоторым естественным ослаблением свойства равномерно локального удвоения. Кроме того, в этом параграфе вводится новое понятие точки Лебега относительно последовательности мер, которое является обобщением классического понятия точки Лебега локально интегрируемой функции. Пусть последовательность борелевски регулярных локально конечных мер $\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ на X такова, что $\operatorname{supp}\mathfrak{m}_k = S$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$ для некоторого непустого замкнутого множества $S \subset \mathrm{X}$ и при любом $k \in \mathbb{N}_0$ мера $\mathfrak{m}_k$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathfrak{m}_0$. Положим $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}) := \cap_{k=0}^{\infty} L_1^{loc}(\mathfrak{m}_k)$. При $\epsilon \in (0,1)$ и $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ скажем, что $\underline{x} \in S$ является $(\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon)$-*точкой Лебега* f, если существует такой борелевский представитель $\overline{f}$ элемента f, что $\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(\underline{x})} |\overline{f}(\underline{x}) - f(y)|\, d\mathfrak{m}_{k_\epsilon(r)}(y) = 0$, где $k_\epsilon(r) := \max\{k \in \mathbb{Z} : r \le \epsilon^k\}$. Через $\mathfrak{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(f)$ обозначим множество всех $(\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon)$-точек Лебега f.

В §1.5 мы фиксируем м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ с мерой μ обладающей равномерно локальным свойством удвоения. Мы вводим центральные для данной диссертации понятия d-толстого и θ-котолстого подмножеств X, соответственно. Отметим, что d-толстые множества в $\mathbb{R}^n$ при $d \in [0,n]$, по-видимому, впервые рассматривались В. Рычковым [101]. Затем они активно изучались в [25, 26], где были названы d-регулярными снизу в смысле обхвата по Хаусдорфу. В случае общих м.п.м. указанные классы множеств рассматриваются впервые.

Определение 1.5.1. При $\theta \ge 0$ и $\lambda \in (0,1]$ скажем, что множество $S \subset \mathrm{X}$ является (θ,λ)-*котолстым*, если $\lambda \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \le \mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x) \cap S)$ при всех $(x,r) \in S \times (0,1]$. Класс всех (θ,λ)-котолстых множеств обозначим через $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X},\lambda)$. При $d \ge 0$ и $\lambda \in (0,1]$ скажем, что множество $S \subset \mathrm{X}$ является (d,λ)-*толстым*, если $\lambda r^d \le \mathcal{H}_r^d(B_r(x) \cap S)$ при всех $(x,r) \in S \times (0,1]$. Класс всех (d,λ)-толстых множеств обозначим через $\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X},\lambda)$.

Скажем, что множество $S \subset \mathrm{X}$ является θ-*котолстым* (d-*толстым*), если оно (θ,λ)-котолстое ((d,λ)-толстое) при некотором $\lambda \in (0,1]$. Положим $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X}) := \cup_{\lambda\in(0,1]}\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X},\lambda)$ и $\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X}) := \cup_{\lambda\in(0,1]}\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X},\lambda)$.

В §1.5 мы изучаем базовые свойства классов $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ и $\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X})$. В частности, мы показываем, что, если мера μ обладает равномерно локальным свойством удвоения, то

$\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X}) \subset \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$. Далее, мы показываем, что класс $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$, $\theta \geq 0$, чрезвычайно широк. Например, если м.п.м. X является Q-регулярным по Альфорсу при $Q > 1$ (то есть $\mu(B_r(x)) \approx r^Q$ при $(x, r) \in \mathrm{X} \times [0, +\infty)$), то любое линейно связное множество, состоящее более чем из одной точки, при любом $\theta \in [Q-1, Q)$ принадлежит классу $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$. Наиболее простой пример множества $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X}) \setminus \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$, $\theta > 0$, можно построить, положив $S = S^1 \cup S^2$ при $S^i \in \mathcal{ADR}_{\theta_i}(\mathrm{X})$, $i = 1, 2$ и $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \theta$. Это наблюдение мотивирует ввести следующее определение.

Определение 1.5.17. Будем говорить, что замкнутое множество $S \subset \mathrm{X}$ является *кусочно корегулярным по Альфорсу–Давиду*, если существуют числа $0 \leq \theta_1(S) < ... < \theta_N(S)$, $N \in \mathbb{N}$ и множества $S^i \in \mathcal{ADR}_{\theta_i(S)}(\mathrm{X})$ такие, что $S = \cup_{i=1}^N S^i$. Полагаем по определению $\theta(S) := \theta_N(S)$. Через $\mathcal{PADR}(\mathrm{X})$ будем обозначать класс всех кусочно регулярных по Альфорсу–Давиду замкнутых множеств. При $\theta \geq 0$ положим $\mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X}) := \{S \in \mathcal{PADR}(\mathrm{X}) : \theta(S) = \theta\}$.

Мы показываем в §1.5, что, если μ обладает равномерно локальным свойством удвоения, то при любом $\theta \geq 0$ справедливо включение $\mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X}) \subset \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$.

Вторая глава диссертации целиком посвящена проблеме описания следов пространств Соболева на θ-котолстых подмножествах метрических пространств с мерой. На протяжении всей главы будем считать фиксированными параметр $p \in (1, \infty)$ и м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_p$.

В §2.1 даётся определение θ-корегулярной последовательности мер, которое является одним из краеугольных в диссертации.

Определение 2.1.1. Последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^\infty$ на м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ называется *θ-корегулярной*, если при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ мера $\mathfrak{m}_k$ борелевски регулярная, локально конечная и существует $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) \in (0, 1)$ такое, что выполнены следующие свойства:

(**M**1) существует такое замкнутое множество $S \subset \mathrm{X}$, что $\operatorname{supp} \mathfrak{m}_k = S$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$;

(**M**2) существует константа $C_1 > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{m}_k(B_r(x)) \leq C_1 \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{при всех} \quad x \in \mathrm{X} \quad \text{и всех} \quad r \in (0, \epsilon^k];$$

(**M**3) существует константа $C_2 > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{m}_k(B_r(x)) \geq C_2 \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{при всех} \quad x \in S \quad \text{и всех} \quad r \in [\epsilon^k, 1];$$

(**M**4) $\mathfrak{m}_k = w_k \mathfrak{m}_0$ при $w_k \in L_\infty(\mathfrak{m}_0)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$, и существует такая константа $C_3 > 0$, что для любых $k, j \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства

$$\frac{\epsilon^{\theta j}}{C_3} \leq \frac{w_k(x)}{w_{k+j}(x)} \leq C_3 \quad \text{для} \quad \mathfrak{m}_0 - \text{п.в. } x \in S.$$

Класс всех θ-корегулярных последовательностей мер $\{\mathfrak{m}_k\}$, удовлетворяющих условию (**M**1), будем обозначать через $\mathfrak{M}_\theta(S)$. Кроме того, скажем, что последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ является *сильно θ-корегулярной*, если

(**M**5) для каждого борелевского множества $E \subset S$,

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\mathfrak{m}_k(B_{\epsilon^k}(\underline{x}) \cap E)}{\mathfrak{m}_k(B_{\epsilon^k}(\underline{x}))} > 0 \quad \text{при} \quad \mathfrak{m}_0 - \text{п.в. } \underline{x} \in E.$$

Класс всех сильно θ-корегулярных последовательностей мер $\{\mathfrak{m}_k\}$, удовлетворяющих условию (**M**1) будем обозначать через $\mathfrak{M}^{str}_\theta(S)$.

Основным результатом параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.1.8. *Пусть $\theta \geq 0$ и пусть $S \subset \mathrm{X}$ – замкнутое непустое множество. Если $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$, то $\mathfrak{M}^{str}_\theta(S) \neq \emptyset$. Если $\mathfrak{M}_\theta(S) \neq \emptyset$, то $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$.*

Таким образом, при $\theta \geq 0$ имеют место следующие эквивалентности:

$$S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\theta(S) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{M}^{str}_\theta(S) \neq \emptyset.$$

Иными словами, значение теоремы 2.1.8 состоит в том, что она даёт дуальную характеристику θ-котолстых множеств. Этот результат в некотором смысле является естественным обобщением известной характеризации регулярных по Альфорсу–Давиду подмножеств $\mathbb{R}^n$ в терминах существования сконцентрированных на них регулярных мер. А именно, в [78] показано, что $S \in \mathcal{ADR}^d(\mathbb{R}^n)$ при $d \in [0, n]$ в том и только том случае, если существует борелевски регулярная мера ν с носителем $\operatorname{supp}\nu = S$ такая, что $\nu(B_r(x)) \approx r^d$ при всех $(x, r) \in S \times (0, 1]$. Аналогичный факт нетрудно установить и для классов $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$. Крайне любопытно, что в отличие от класса $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$, принадлежность множества S классу $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$, $\theta \geq 0$ невозможно характеризовать в терминах существования какой-то одной "достаточно хорошей" меры. Причина этого эффекта в том, что, если множество S принадлежит классу $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ при $\theta > 0$, то оно может состоять из бесконечного числа кусков разной коразмерности.

Далее в параграфе §2.1 мы изучаем простейшие свойства θ-корегулярных, а также сильно θ-корегулярных последовательностей мер. Кроме того, мы исследуем тонкий вопрос несовпадения классов $\mathfrak{M}_\theta(S)$ и $\mathfrak{M}^{str}_\theta(S)$. Мы построим относительно простой пример, показывающий, что включение $\mathfrak{M}^{str}_\theta(S) \subset \mathfrak{M}_\theta(S)$, вообще говоря, строгое.

В §2.2 мы вводим функционал типа Брудного-Шварцмана, который будут основными инструментом для характеризации следов пространств Соболева. Его можно рассматривать как обобщение функционалов, использованных Ю. Брудным в статье [7] и П. Шварцманом в работе [112], на случай метрических пространств с мерой. Насколько нам известно, в такой форме подобные функционалы вводятся впервые.

Определение 2.2.1. При $c > 0$ и $\delta > 0$ будем говорить, что семейство замкнутых шаров $\mathcal{B} := \{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^N$, $N \in \mathbb{N}$ является (S, c, δ)-*хорошим*, если выполнены следующие условия:

(**B1**) $B_{r_i}(x_i) \cap B_{r_j}(x_j) = \emptyset$, если $i, j \in \{1, ..., N\}$ и $i \neq j$;

(**B2**) $0 < \min\{r_i : i = 1, ..., N\} \leq \max\{r_i : i = 1, ..., N\} \leq \delta$;

(**B3**) $B_{cr_i}(x_i) \cap S \neq \emptyset$ при всех $i \in \{0, ..., N\}$.

Скажем, что $\mathcal{B}$ является (S, c, δ)-*семейством Уитни*, если помимо (**B1**)–(**B3**) выполнено

(**B4**) $B \subset \mathrm{X} \setminus S$ для всех $B \in \mathcal{B}$.

Будем называть $(S, c, 1)$-хорошие семейства и $(S, c, 1)$-семейства Уитни просто (S, c)-хорошими семействами и (S, c)-семействами Уитни, соответственно.

Пусть $\mathfrak{m}$ – борелевски регулярная локально конечная мера на X. Если борелевское множество $G \subset \mathrm{X}$ таково, что $\mathfrak{m}(G) \in (0, +\infty)$, то при $f \in L_1^{loc}(\mathrm{X})$ положим

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, G) := \inf_{c \in \mathbb{R}} \fint_G |f(x) - c| \, d\mathfrak{m}(x).$$

Если $\mathfrak{m}(G) = 0$, то формально полагаем $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, G) = 0$.

При $r > 0$ положим

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}}(f, B_r(x)) := \begin{cases} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, B_{2r}(x)), & \text{если} \quad B_r(x) \cap \operatorname{supp} \mathfrak{m} \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если} \quad B_r(x) \cap \operatorname{supp} \mathfrak{m} = \emptyset. \end{cases}$$

Определение 2.2.7. Пусть фиксирован параметр $\theta \geq 0$, множество $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ и последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ вместе с параметром $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) \in (0, 1)$. При $\delta \in (0, 1]$ и $c > 0$ введем *функционал типа Брудного–Шварцмана на масштабе* δ, действие которого на пространстве $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ (функционал принимает значения в $[0, +\infty]$) задаётся формулой

$$\mathcal{BSN}^\delta_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) := \sup\Big(\sum_{B \in \mathcal{B}^\delta} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p} \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB) \Big)^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}),$$

где супремум взят по всем конечным (S, c, δ)-хорошим семействам замкнутых шаров $\mathcal{B}^\delta$. Положим также $\mathrm{BSN}^\delta_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) := \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} + \mathcal{BSN}^\delta_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f), \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$. В приведённом выше определении использовано следующее обозначение. Если шар B имеет радиус $r > 0$, то $k(B) := k_\epsilon(r) = \max\{k \in \mathbb{Z} : r \leq \epsilon^k\}$.

В §2.2 мы также вводим новые функционалы на пространстве $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$, которые затем в §2.6 позволяют получить альтернативное описание пространства $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$. Мы фиксируем

параметр $\theta \in [0,p)$, непустое замкнутое множество $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ и, наконец, последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(\mathrm{X})$ вместе с параметром $\epsilon \in (0, \frac{1}{10})$.

Мы стартуем с естественного обобщения классической максимальной функции Кальдерона [33]. При $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ определим $\{\mathfrak{m}_k\}$-*максимальную функцию Кальдерона* по формуле

$$f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}(x) := \sup_{r\in(0,1]} \frac{1}{r} \widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(r)}}(f, B_r(x)), \quad x \in \mathrm{X},$$

где $k(r) := \max\{k \in \mathbb{Z} : \epsilon^k \geq r\}$.

Определение 2.2.12. Определим *функционал Кальдерона* на пространстве $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ со значениями в $[0,+\infty]$, полагая $\mathcal{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) := \|f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(\mu)}$ при $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$. Кроме того, положим также $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) := \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} + \|f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(\mu)}$ при $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$.

Далее вводится обобщение полунормы Бесова.

Определение 2.2.16. При $\sigma \in (0,1]$, введём *функционал Бесова* на $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ со значениями в $[0,+\infty]$, полагая при каждом $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$,

$$\mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f) := \|f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(S,\mu)} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{k(\theta-p)} \int\limits_{S_{\epsilon^k}(\sigma)} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_{\epsilon^k}(x))\Big)^p d\mathfrak{m}_k(x)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Кроме того, положим $\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f) := \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} + \mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)$ при $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$.

Основной результат §2.2 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.2.40. *Если* $\mathrm{BSN}^\delta_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$ *при некоторых* $c > 1$ *и* $\delta \in (0,1]$, *то*

$$\mathfrak{m}_0(S \setminus (\mathfrak{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(f)) = 0.$$

В §2.3 мы строим новый оператор продолжения, который позволяет получить обратимую характеристику следа пространства Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$ на θ-котолстых множествах.

Далее в §2.4 мы устанавливаем важные для доказательства основных результатов главы неравенства между функционалами $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}$, $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}$, и $\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}$. Хотя результаты параграфа §2.4 выглядят достаточно техническими, они играют большую роль при доказательстве основных результатов в §2.6.

В §2.5, используя рассуждения работы [35], мы устанавливаем аналог неравенства Хедберга–Вольфа для потенциалов Рисса в случае м.п.м. $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Этот результат в комбинации со свойствами θ-корегулярных последовательностей мер $\{\mathfrak{m}_k\}$ будет ключевым при доказательстве так называемой “прямой теоремы о следе”.

В §2.6 приведены доказательства основных результатов главы, которые дают решение проблемы следа в случае θ-котолстых множеств. Мы фиксируем параметр $\theta \in [0,p)$, непустое замкнутое множество $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ и последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(\mathrm{X})$ вместе с $\epsilon \in (0, \frac{1}{10})$.

Первый из основных результатов главы даёт несколько эквивалентных характеризаций $\mathfrak{m}_0$-пространства следов $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$.

Теорема 2.6.1. *Если* $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$, $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ *и* $\sigma \in (0, \frac{\epsilon^2}{4c})$, *то для заданного элемента* $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$;

(ii) $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) < +\infty$;

(iii) $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$;

(iv) $\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f) < +\infty$.

Кроме того, для любых $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ *и* $\sigma \in (0, \frac{\epsilon^2}{4c})$, *для любого* $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}} \approx \mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \approx \mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \approx \mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f),$$

где соответствующие константы эквивалентности не зависят от f.

Второй из основных результатов главы даёт характеризацую пространства $W_p^1(\mathrm{X})|_S$.

Теорема 2.6.3. *Борелевская функция* $f : S \to \mathbb{R}$ *принадлежит пространству* $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ *в том и только том случае, если:*

(A) $\mathfrak{m}_0$*-класс эквивалентности* $[f]_{\mathfrak{m}_0}$ *функции* f *принадлежит пространству* $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$;

(B) *существует такое множество* $\underline{S}_f \subset S$, *что* $C_p(S \setminus \underline{S}_f) = 0$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} \fint_{B_{\epsilon^k}(x)} |f(\underline{x}) - f(y)|\, d\mathfrak{m}_k(y) = 0 \quad \text{при всех} \quad \underline{x} \in \underline{S}_f.$$

Кроме того, для любых $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ *и* $\sigma \in (0, \frac{\epsilon^2}{4c})$, *для любого* $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S$

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S} \approx \mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \approx \mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \approx \mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f),$$

где соответствующие константы эквивалентности не зависят от f.

Далее, как это принято в функциональном анализе, для заданных линейных нормированных пространств $E_1 := (E_1, \|\cdot\|_1)$ и $E_2 := (E_2, \|\cdot\|_2)$ через $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ обозначим линейное пространство всех линейных ограниченных операторов из E_1 в E_2.

Третий из основных результатов главы устанавливает существование линейных ограниченных операторов продолжения, действующих из соответствующих пространств следов, а также проясняет деликатную связь между различными подходами к понятию следа пространства Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$. В частности этот результат проясняет, почему понятие p-точного пространства следов не было столь популярно в предшествующих исследованиях.

Теорема 2.6.6. *Если* $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$, *то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Существует* $\mathfrak{m}_0$*-оператор продолжения* $\mathrm{Ext} \in \mathcal{L}(W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}, W_p^1(\mathrm{X}))$;

(2) *Существует* p*-точный оператор продолжения* $\overline{\mathrm{Ext}} \in \mathcal{L}(W_p^1(\mathrm{X})|_S, W_p^1(\mathrm{X}))$;

(3) *Каноническое вложение* $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0} : W_p^1(\mathrm{X})|_S \to W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$, *ставящее каждому* $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S$ *в соответствие* $\mathfrak{m}_0$*-класс эквивалентности* $[f]_{\mathfrak{m}_0}$ *функции* f, *является изометрическим изоморфизмом;*

(4) *Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} W_p^1(\mathrm{X}) & \underset{\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightleftarrows}} & W_p^1(\mathrm{X}) \\ \Big\uparrow \overline{\mathrm{Ext}} \quad \Big\downarrow \mathrm{Tr}\,|_S & & \Big\uparrow \mathrm{Ext} \quad \Big\downarrow \mathrm{Tr}\,|_S^{\mathfrak{m}_0} \\ W_p^1(\mathrm{X})|_S & \underset{\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}^{-1}}{\overset{\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}}{\rightleftarrows}} & W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}. \end{array}$$

Целью **третьей главы** является иллюстрация абстрактных критериев на след пространства $W_p^1(\mathrm{X})$, полученных во второй главе, на конкретных интересных для приложений примерах. При этом конкретная геометрическая структура множества, на котором изучается след, позволяет существенно упростить теоремы 2.6.1, 2.6.3 и 2.6.6. Стоит отметить, что не смотря на кажущуюся простоту, подобные примеры не могли быть рассмотрены с помощью известных ранее методов.

В §3.1 результаты главы 2 применяются для получения упрощённых критериев на след пространства $W_p^1(\mathrm{X})$ на кусочно корегулярных по Альфорсу–Давиду подмножествах метрических пространств с мерой. Мы фиксируем $p \in (1, \infty)$, м.п.м. $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Фиксируем также параметры $\underline{\theta} \in [0, p)$, $\theta \in [\underline{\theta}, p)$ и множество $S \in \mathcal{PADR}_{\underline{\theta}}(\mathrm{X})$. Мы фиксируем конкретную θ-корегулярную последовательность мер, полагая $\mathfrak{m}_k := \sum_{i=1}^N 2^{k(\theta-\theta_i)} \mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}$ при $k \in \mathbb{N}_0$.

При $k \in \mathbb{Z}$, определим *весовую функцию* $\mathrm{w}_k : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty)$ равенством

$$\mathrm{w}_k(y, z) := \frac{1}{\sqrt{\mu(B_k(y))}\sqrt{\mu(B_k(z))}}, \quad (y, z) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}.$$

Отметим, что в действительности, конкретный выбор функций w_k, $k \in \mathbb{N}_0$ не столь важен. Все приводимые ниже результаты останутся в силе при замене функций w_k, $k \in \mathbb{N}_0$ на функции $\widetilde{\mathrm{w}}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, отличающиеся от них не более чем в константу раз.

При $i \in \{1, ..., N\}$ и $f \in L_1^{loc}(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$, для любого $k \in \mathbb{Z}$ введём усреднение

$$A_k^i(f)(x) := \fint\limits_{B_k(x) \cap S^i} f(x')\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(x'), \quad x \in S^i.$$

Более того, при $i,j\in\{1,...,N\}$ и $f\in L_1^{loc}(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})\cap L_1^{loc}(\mathcal{H}_{\theta_j}\lfloor_{S^j})$, для любого $k\in\mathbb{Z}$ рассмотрим двойное усреднение

$$A_k^{i,j}(f)(y,z):=\fint\limits_{B_k(y)\cap S^i}\fint\limits_{B_k(z)\cap S^j}|f(y')-f(z')|\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y')d\mathcal{H}_{\theta_j}(z'),\quad (y,z)\in S^i\times S^j.$$

Теперь определим *склеивающие функционалы.* При $f\in\cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$ положим

$$\mathcal{GL}_p^{(1)}(f):=\Big(\sum_{i\neq j}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(p-\theta_i-\theta_j)}\iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}}\mathrm{w}_k(y,z)|f(y)-f(z)|^p\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y)d\mathcal{H}_{\theta_j}(z)\Big)^{\frac{1}{p}};$$

$$\mathcal{GL}_p^{(2)}(f):=\Big(\sum_{i\neq j}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(p-\theta_i-\theta_j)}\iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}}\mathrm{w}_k(y,z)|A_k^i(f)(y)-A_k^jf(z)|^p\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y)d\mathcal{H}_{\theta_j}(z)\Big)^{\frac{1}{p}};$$

$$\mathcal{GL}_p^{(3)}(f):=\Big(\sum_{i\neq j}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(p-\theta_i-\theta_j)}\iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}}\mathrm{w}_k(y,z)(A_k^{i,j}(f)(y,z))^p\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y)d\mathcal{H}_{\theta_j}(z)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

В вышеприведённой формуле мы положили $\Sigma_k^{i,j}:=\{(y,z)\in S^i\times S^j:\mathrm{d}(y,z)\leq 2^{-k}\}$.

Отметим, что результаты §3.1 естественным образом распадаются на два принципиально разных случая. В первом случае мы предполагаем, что $\theta_1(S)>0$. Соответствующий критерий на след пространства Соболева формулируется следующим образом.

Следствие 3.1.66. *Функция $f\in\cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$ принадлежит пространству $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$ в том и только том случае, если $f\in\cap_{i=1}^N \mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$ и $\mathcal{GL}_p^{(l)}(f)<+\infty$ при некотором $l\in\{1,2,3\}$. Кроме того,*

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}}\approx\sum_{i=1}^N\|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)}+\mathcal{GL}_p^{(l)}(f),\quad l\in\{1,2,3\},$$

где соответствующие константы эквивалентности не зависят от f.

Наконец, существует $\mathfrak{m}_0$-оператор продолжения $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}\in\mathcal{L}(W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0},W_p^1(\mathrm{X}))$.

Во втором случае мы предполагаем для простоты, что $S=S^1\cup S^2$. При этом $\theta_1(S)=0$, а $\theta_2(S)>0$. В таком случае имеем следующий критерий.

Следствие 3.1.99. *Функция $f\in\cap_{i=1}^2 L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$ принадлежит пространству $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$ в том и только том случае, если $f\in\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_2}{p}}(\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2})$, $f^\sharp_{\mu\lfloor_{S^1}}\in L_p(S,\mu)$ и $\mathcal{GL}_p^{(3)}(f)<+\infty$. Кроме того,*

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}}\approx\|f\|_{L_p(S^1,\mu)}+\|f^\sharp_{\mu\lfloor_{S^1}}\|_{L_p(S^1,\mu)}+\|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_2}{p}}(S^2)}+\mathcal{GL}_p^{(3)}(f),$$

где константы эквивалентности не зависят от f.

Наконец,существует $\mathfrak{m}_0$-оператор продолжения $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}\in\mathcal{L}(W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0},W_p^1(\mathrm{X}))$.

В §3.2 мы изучаем проблему конструктивного построения примеров последовательностей $\{\mathfrak{m}_k\}\in\mathfrak{M}_1^{str}(\Gamma)$ в случае, когда Γ – простая (то есть без самопересечений) спрямляемая

кривая в $\mathbb{R}^2$ положительной длины. Заметим, что, вообще говоря, Γ не является кусочно корегулярным по Альфорсу–Давиду множеством в $\mathbb{R}^2$, что делает указанную задачу весьма нетривиальной. Действительно, абстрактная теорема 2.1.8. хотя и применима к множеству Γ (поскольку $\Gamma \in \mathcal{LCR}_1(\mathbb{R}^2)$), все же является так называемой "теоремой существования" и не даёт простых рецептов построения соответствующих последовательностей мер.

Для решения указанной проблемы мы опираемся на хорошо известную в геометрической теории меры формулу площади и факт того, что при сделанных предположениях Γ будет иметь конечное число точек пересечения с почти каждой прямой параллельной каждой координатной оси. Это позволяет редуцировать задачу построения 1-корегулярной последовательности мер к задаче построения 2-корегулярной последовательности мер, сосредоточенных на произвольном конечном числе различных точек на прямой. Эта задача решается с помощью достаточно элементарного алгоритма распределения единичной массы по последнему уровню метрического дерева.

Имея в распоряжении конкретные конструкции последовательностей мер $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_1^{str}(\Gamma)$, мы получаем упрощённое (по сравнению с теоремой 2.6.1.) внутренне описание $\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma$-пространства следов пространства Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ во всем диапазоне $p \in (1, \infty)$.

В §3.3 мы исследуем проблему описания следа пространства Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$ на любых непустых подмножествах S м.п.м. X в случае, когда параметр p достаточно велик. Тем самым мы получаем естественное обобщение одного из критериев П. Шварцмана [112].

Более подробно, фиксируем параметр $p \in (1, \infty)$, геодезическое м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_p$, которое является Q-регулярным по Альфорсу при некотором $Q \in (1, p)$. Кроме того, зафиксируем непустое замкнутое множество $S \subset \mathrm{X}$.

Мы вводим *модифицированный функционал Брудного-Шварцмана* на пространстве $C(S)$, полагая $\widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f) := \sup\Big(\sum_{i=1}^N \frac{\mu(B_{r_i}(x_i))}{r_i^p} \sup_{y,z \in B_{60r_i}(x_i)\cap S} |f(y) - f(z)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$ при $f \in C(S)$ где супремум взят по всем конечным дизъюнктным семействам замкнутых шаров $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^N$ с радиусами $r_i \in (0, 1]$.

Основной результат параграфа звучит следующим образом.

Теорема 3.3.5. *Функция $f \in C(S)$ принадлежит пространству $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ в том и только том случае, если $\widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f) < +\infty$. Кроме того, существует такое $C > 0$, что*

$$\frac{1}{C}\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S} \le \widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f) + \inf_{z\in S}|f(z)| \le C\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S} \quad \text{при всех} \quad f \in C(S).$$

Наконец, существует линейный ограниченный p-точный оператор продолжения $\mathrm{Ext}_{S,p}$, действующий из $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ в $W_p^1(\mathrm{X})$.

Четвёртая глава посвящена исследованию свойств пористости множеств в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

На протяжении главы фиксируется число $n \in \mathbb{N}$. Через Q будем обозначать замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ с ребрами параллельными координатным осям, а через $l(Q)$ – его длину ребра.

В литературе давно известны результаты, связывающие пористость множеств с их размерностью по Хуаусдорфу. Так, например, в [105, 84, 96] показано, что "достаточно сильная пористость" множества $S \subset \mathbb{R}^n$ влечёт за собой наличие соответствующего ограничения сверху на его размерность d по Хаусдорфу, которая необходимо оказывается меньше n. Однако, факт того, что размерность множества меньше чем размерность объемлющего пространства, не характеризуем пористость этого множества. Можно легко построить непористое множество $S \subset \mathbb{R}^n$, размерность по Хаусдорфу которого строго меньше n.

Мы же в наших исследованиях идём в некотором смысле в противоположном по отношению к предыдущим исследованиям направлении. А именно, для заданного множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и параметра $d \in [0, n)$ мы изучаем наличие свойства типа пористости у куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ при условии малости величины $\mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S)$.

Заметим, что пористые множества возникают в функционале типа Бесова в теореме 2.6.1. Более того, зависимость пористости кубов Q от поведения $\mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S)$ будет одним из краеугольных камней при доказательстве основных результатов главы 5.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$. При $d \in [0, n]$, $\lambda \in (0, 1]$ положим $\mathcal{F}_S(d, \lambda) := \{Q : \mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S) \geq \lambda(l(Q))^d\}$. Кроме того, определим (d, λ)-*толстое относительно* S *расстояние* от произвольной точки $y \in \mathbb{R}^n \setminus S$ до S формулой

$$\mathrm{D}_{S,d,\lambda}(y, S) := \begin{cases} \inf\{l(Q) : Q \in \mathcal{F}_S(d, \lambda),\ y \in Q\}, & \text{если} \quad \{Q \in \mathcal{F}_S(d, \lambda) : y \in Q\} \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если} \quad \{Q \in \mathcal{F}_S(d, \lambda) : y \in Q\} = \emptyset. \end{cases}$$

При $\delta \geq 0$ мы также определим (d, λ)-*толстую* δ-*окрестность* множества S формулой

$$S_\delta(d, \lambda) := \big\{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{D}_{S,d,\lambda}(y, S) \leq \delta\big\}.$$

В §4.2 мы построим псевдометрику $\rho := \rho_{S,d,\lambda}$ на $\mathbb{R}^n$ и покажем, что множество $S_\delta(d, \lambda)$ является δ-окрестностью множества S в псевдометрике ρ.

В §4.3 мы развиваем идеи Ю. Нетрусова [13], что позволяет заложить технический фундамент, необходимый для доказательства основных теорем в последующем параграфе.

В §4.4 доказываются основные результаты главы.

Если не накладывать на множество дополнительных условий регулярности, то едва ли можно ожидать от него свойства пористости, которое весьма ограничительно. Поэтому нам необходимо модифицировать определение пористости, ослабив требование на геометрию соответствующих полостей. Далее символ $\mathcal{L}^n$ – классическая n-мерная мера Лебега.

Определение 4.4.33. Для множества $S \subset \mathbb{R}^n$, куба Q и параметра $\gamma \in (0,1]$ скажем, что множество $U \subset Q$ является (S,γ)-*полостью* куба Q, если $U \subset Q \setminus S$ и $\mathcal{L}^n(U \setminus S) \geq \gamma(l(Q))^n$. Будем говорить, что куб Q является (S,γ)-*полым*, если существует (S,γ)-полость U куба Q.

Центральный результат главы 4 состоит в следующем.

Теорема 4.4.50. *Пусть $d \in [0,n)$, $\overline{\lambda} \in (0,1)$ и $\lambda \in (0,1)$. Тогда существуют константы $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(n,d,\overline{\lambda}) \in (0,1]$ и $\overline{\delta} = \overline{\delta}(n,d,\lambda,\overline{\lambda}) \in (0,1)$ такие, что для любого множества $S \subset \mathbb{R}^n$, любого куба $\overline{Q}$ с длиной ребра $l = l(\overline{Q}) \in (0,1]$, удовлетворяющего условию $\mathcal{H}^d_\infty(\overline{Q} \cap S) < \overline{\lambda} l^d$, и любого $\delta \in (0,\overline{\delta}]$ множество $W_{\delta l}(\overline{Q}) := \overline{Q} \setminus S_{\delta l}(d,\lambda)$ является $(S,\underline{\gamma})$-полостью куба Q.*

Хорошо известен следующий факт, который, по-видимому, стоит считать фольклором.

Предложение А. Пусть $d \in (0,n)$ и $S \in \mathcal{ADR}^d(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует такое число $\sigma \in (0,1)$, что $S \in \mathcal{POR}^{\mathbb{R}^n}_\sigma(S)$.

К сожалению, аналог предложения А не справедлив для d-толстых множеств. Однако, теорема 4.4.49 позволяет установить следующий результат.

Теорема 4.4.60. *Пусть $d \in [0,n)$, $\lambda \in (0,1)$. Для любого $\overline{\lambda} \in (0,1)$ существует константа $\underline{\tau} = \underline{\tau}(n,d,\lambda,\overline{\lambda}) \in (0,1)$ такая, что для любого множества $S \in \mathcal{LCR}^d(\mathbb{R}^n,\lambda)$ любой куб $\overline{Q}$ с длиной ребра $l(\overline{Q}) \in (0,1]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(\overline{Q} \cap S) < \overline{\lambda}(l(\overline{Q}))^d$ является $(S,\underline{\tau})$-пористым.*

В §4.5 приводятся примеры, демонстрирующие точность полученных в §4.4 результатов.

Пятая глава посвящена проблеме “почти точного” внутреннего описания следов пространства Соболева $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ на компактах $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в случае $p \in (1,n]$ *без каких либо дополнительных предположений регулярности относительно S.* Говоря неформально, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ мы построим некоторое банахово пространство $\mathrm{X}(\varepsilon)$, которое с одной стороны содержит пространство следов $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$, а с другой стороны содержится в пространстве $W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|_S$. При этом, норма функции в пространстве $\mathrm{X}(\varepsilon)$ задаётся внутренним образом, то есть определяется только значениями функции на множестве S и геометрическими свойствами S. Если бы мы могли положить $\varepsilon = 0$, то получилось бы точное внутреннее описание пространства следов. Однако, наши методы будут существенно использовать факт положительности числа ε. Именно это обстоятельство обусловливает выбор терминологии “почти точное описание”.

Как уже отмечалось ранее, при $p > n$ точное внутренне описание пространства $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ для любого непустого замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ было получено П. Шварцманом в работах [112, 114]. В случае $p \in (1,n]$ задача о точном внутреннем описании пространства $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ является существенно более трудной и остаётся открытой проблемой до сих пор. Более того, нам неизвестно даже о попытках рассмотрения этой задачи без дополнительных

ограничений на S. Поэтому, результаты данной главы можно рассматривать как первый шаг в направлении решения этой задачи.

В этой главе мы полагаем $\mathbb{R}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty, \mathcal{L}^n)$. Таким образом, шары в этом пространстве являются замкнутыми кубами с ребрами параллельными координатным осям.

В §5.1 собраны некоторые предварительные сведения.

Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $\mathcal{H}^d(S) > 0$ при некотором $d \in (0, n]$. Обозначим через $\mathcal{D}_+$ семейство всех двоичных кубов с длиной ребра не более единицы. При $\lambda \in (0, 1]$ положим $\mathcal{DF}_S(d, \lambda) := \{Q \in \mathcal{D}_+ : \mathcal{DH}^d_\infty(Q \cap S) \geq \lambda l(Q)^d\}$, где $\mathcal{DH}^d_\infty$ – двоичный d-обхват по Хаусдорфу (то есть соответствующие покрытия образованы замкнутыми двоичными кубами), а $l(Q)$ – длина ребра куба Q.

Важнейшей концепцией, введённой в параграфе §5.1, является некоторое обобщение определения 2.1.1. на случай произвольных замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Далее при $x \in \mathbb{R}^n$ и $l \geq 0$ мы полагаем $Q_l(x) := \prod_{i=1}^n [x_i - \frac{l}{2}, x_i + \frac{l}{2}]$, а при $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^n$ полагаем $Q_{k,m} := \prod_{i=1}^n [\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k}]$.

Определение 5.1.5. Пусть $d \in (0, n]$ и пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Будем говорить, что последовательность борелевски регулярных мер $\{\mathfrak{m}_k\} = \{\mathfrak{m}_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ является *d-последовательностью Фростмана на S*, если выполнены следующие условия:

(**FM**1) $\operatorname{supp} \mathfrak{m}_k = S$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$;

(**FM**2) существует константа $C_1 > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathfrak{m}_k(Q_l(x)) \leq C_1 l^d \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{и всех} \quad l \in (0, 2^{-k}];$$

(**FM**3) существует константа $C_2 > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{m}_k(Q_{k,m} \cap S) \geq C_2 \mathcal{H}^d_\infty(Q_{k,m} \cap S) \quad \text{при всех} \quad m \in \mathbb{Z}^n;$$

(**FM**4) $\mathfrak{m}_k = w_k \mathfrak{m}_0$ при $w_k \in L_\infty(\mathfrak{m}_0)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$, и существует такая константа $C_3 > 0$, что для всех $k, j \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{C_3} 2^{(d-n)j} w_{k+j}(x) \leq w_k(x) \leq C_3 w_{k+j}(x) \quad \text{при} \quad \mathfrak{m}_0 - \text{п.в.} \quad x \in S.$$

Класс всех d-последовательностей мер Фростмана на S обозначим символом $\mathfrak{FM}^d(S)$.

Легко видеть, что если замкнутое множество S принадлежит классу $\mathcal{LCR}^d(\mathbb{R}^n)$, то из условия $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_{n-d}(\mathbb{R}^n)$ следует $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$.

В §5.2 вводятся некоторые новые понятия и доказываются некоторые вспомогательные результаты, которые формируют технический фундамент для дальнейшего.

Первое ключевое определение звучит следующим образом.

Определение 5.2.5. Пусть $d \in (0, n]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. При $\lambda \in (0, 1]$ и $c \geq 1$ для куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ определим (d, λ, c)-*башню куба* Q равенством $T_{d,\lambda,c}(Q) := \{Q' : Q' \in \mathcal{DF}_S(d, \lambda) \text{ и } Q \subset cQ'\}$.

Второе ключевое определение звучит следующим образом.

Определение 5.2.9. Пусть число $d \in (0, n]$ такое, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0, 1]$, $c \geq 1$. Для заданного куба $Q \in \mathcal{D}_+$ будем говорить, что куб $\overline{Q} \in \mathcal{D}_+$ является (d, λ, c)-*накрывающим для* Q, если справедливы следующие условия:

(**C**1) $l(\overline{Q}) \geq l(Q)$ и $Q \subset c\overline{Q}$;

(**C**2) $\overline{Q} \in \mathcal{DF}_S(d, \lambda)$;

(**C**3) если $Q' \in \mathcal{D}_+$, $Q \subset Q'$ и $l(Q') \in (l(Q), l(\overline{Q}))$, то $Q' \notin \mathcal{DF}_S(d, \lambda)$.

Для куба $Q \in \mathcal{D}_+$ обозначим через $\mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q)$ семейство (возможно, пустое) всех (d, λ, c)-накрывающих для Q кубов.

В §5.3 строится новое банахово пространство, которое будет играть роль промежуточного функционального пространства между различными пространствами следов.

Определение 5.3.6. Пусть $d \in (0, n]$ и пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0, 1]$ и $c \geq 1$. Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$ и $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$. При $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x) := \sup \Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(\underline{Q}, \overline{Q}),$$

где супремум взят по всем таким парам кубов $\underline{Q}, \overline{Q}$, что выполнены следующие условия:

(**f**1) $x \in c\underline{Q}$ и $\underline{Q}, \overline{Q} \in \mathcal{DF}_S(d, \lambda)$;

(**f**2) $0 < l(\underline{Q}) \leq l(\overline{Q}) \leq 1$;

(**f**3) $\overline{Q} \in \mathcal{K}_{d,\lambda,c}(\underline{Q})$.

Если не существует пары кубов $\underline{Q}, \overline{Q}$, удовлетворяющей условиям (**f**1)–(**f**3), то полагаем $f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x) := 0$. Отображение $x \to f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x)$ назовём *двоичной обобщённой максимальной функцией типа Кальдерона.*

Определение 5.3.9. Пусть $d' \in (0, n]$, а $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^{d'}_\infty(S) > 0$. Для заданной борелевской функции $f : S \to \mathbb{R}$ скажем, что $x \in S$ – d'-*регулярная точка* f и будем писать $x \in S_f(d')$, если для любой последовательности $\{\mathfrak{m}'_k\} \in \mathfrak{FM}^{d'}(S)$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \max_{Q \in T_{d',\lambda',c'}(x) \cap \mathcal{D}_k} \fint_Q |f(x) - f(y)|\, d\mathfrak{m}'_k(y) = 0 \quad \text{для любого } c' \geq 1 \text{ и любого } \lambda' \in (0, 1).$$

Если при некотором $k \in \mathbb{N}_0$ множество $T_{d',\lambda',c'}(x) \cap \mathcal{D}_k$ пусто, то соответствующий максимум считается равным нулю. Через $S_f(d')$ обозначим *множество всех* d'-*регулярных точек* f.

Теперь мы готовы ввести новое функциональное пространство.

Определение 5.3.11. Пусть $d^* \in (0,n]$ и пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\lambda^* := \mathcal{H}^{d^*}_{\infty}(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1]$ и $c \geq 1$ – некоторые фиксированные константы. Пусть $d \in (0,d^*]$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$. При $p \in (1,\infty)$ будем говорить, что борелевская функция $f : S \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству $\widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$, если выполнены следующие условия:

(1) $\mathcal{H}^{d^*}(S \setminus S_f(d')) = 0$ для всех $d' \in [d,d^*]$;

(2) $\widetilde{\mathcal{N}}_{p,\lambda,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$, где мы полагаем

$$\mathcal{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f) := \|f^{\natural}_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad \widetilde{\mathcal{N}}_{p,\lambda,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) := \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} + \mathcal{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f).$$

Определим пространство $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ как фактор пространство, то есть

$$\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S) := \widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)/\{f \in \widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S) : \widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f) = 0\}.$$

Снабдим пространство $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ нормой, задаваемой функционалом $\widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}$, то есть для класса эквивалентности $[f] \in \mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ положим $\|[f]\|_{\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)} := \widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f)$.

В §5.3 показывается корректность определения 5.3.11. и устанавливаются некоторые простейшие свойства пространства $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$. Кроме того, утверждается, что $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ – банахово пространство, но доказывается сей факт далее в §5.7.

В §5.4 приведена конструкция нового оператора продолжения.

В §5.5 изучаются вопросы сходимости в $L_p(\mathbb{R}^n)$ специальной аппроксимирущей последовательности $\{f_k\}$, введённой в §5.4, а также вопросы ограниченности последовательности $\{f_k\}$ в пространстве Соболева $W^1_p(\mathbb{R}^n)$. На основе этих результатов затем устанавливается так называемая “обратная теорема о следах”, являющаяся первый краеугольным камнем для доказательства основной теоремы главы 5.

В §5.6 доказывается так называемая “прямая теорема о следах”, которая является вторым краеугольным камнем для доказательства основной теоремы главы 5.

В §5.7 формулируется и доказывается основной результат главы, который заключается в следующей теореме. Напомним определение 1.3.15. и положим $W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S := W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor_S}_S$, где $\mathcal{H}^{d^*}\lfloor_S$ – ограничение d^*-меры Хаусдорфа на S. Пусть отображение $\mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor_S}$ ставит в соответствие каждой борелевской функции $f : S \to \mathbb{R}$ её $\mathcal{H}^{d^*}\lfloor_S$-класс эквивалентности на S.

Теорема 5.7.15. *Пусть $p \in (1,n]$, $d^* \in (n-p,n]$ и $\varepsilon^* := \min\{p-(n-d^*), p-1\}$. Пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\lambda^* := \mathcal{H}^{d^*}_{\infty}(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,\lambda^*)$ и $c \geq 7$ – произвольные постоянные. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*)$ справедливы включения*

$$W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S \subset \mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S) \subset W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S \tag{0.0.0}$$

при каждом $d \in (n-p, n-p+\varepsilon)$ для любой последовательности $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$.

Кроме того, для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, $d \in (n-p, n-p+\varepsilon)$ *и* $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$ *существует константа* $C > 0$, *зависящая только от* $p, \varepsilon, n, d, \lambda, c$ *и* $\mathrm{C}_{\mathfrak{m}_k,i}$, $i = 1,2,3$, *такая, что*

$$\frac{1}{C}\| \mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor S}(f)\|_{W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S} \le \|f\|_{\mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}} \le C\|f\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S} \quad \text{для всех} \quad f \in W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S. \tag{0.0.1}$$

Оператор $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}$ *принадлежит* $\mathcal{L}(\mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S), W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n))$ *и* $\mathrm{Tr}\,|^{d^*}_S \circ \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}$ *совпадает с* $\mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor S}$ *на пространстве* $\mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$.

Целью **шестой главы** является построении теории некоторых новых пространств Бесова переменной гладкости, которые столь широки, что включают в себя как частные случаи: весовые пространства Бесова с весом из локального класса Макенхаупта [102], пространства Бесова переменной гладкости, изученные ранее в [82], и наконец пространства следов весовых пространств Соболева $W^1_p(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ при условии, что $p \in (1, \infty)$, а вес γ принадлежит локальному классу Макенхаупта $A^{loc}_p(\mathbb{R}^n)$.

На протяжении всей главы считаем фиксированным евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Под *весом* понимаем измеримую почти всюду неотрицательную функцию. Скажем, что $\{t_k\}_{k=0}^\infty$ – весовая последовательность, если t_k – вес при каждом $k \in \mathbb{N}_0$.

В §6.1 мы напоминаем некоторые факты из теории пространств S'_e, элементами которого являются распределения с не более чем экспоненциальным ростом на бесконечности.

В §6.2 мы вводим одно из ключевых понятий данной главы. А именно, мы определяем новый класс весовых последовательностей.

Определение 6.2.6. Пусть $p, \sigma_1, \sigma_2 \in (0, \infty]$. Пусть $\alpha^1 := \{\alpha^1_k\}$, $\alpha^2 := \{\alpha^2_k\}$ – последовательности положительных вещественных чисел, и $\alpha_3 \in [0, +\infty)$. Положим $\sigma := (\sigma_1, \sigma_2)$, $\alpha := (\alpha^1, \alpha^2)$. Через $\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ обозначим множество всех таких весовых последовательностей $\{t_k\} := \{t_k\}_{k=0}^\infty$, что при некоторых $C_1, C_2 > 0$ выполнены следующие условия:

1) для любых $k, j \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\left(2^{kn} \int\limits_{Q_{k,m}} t^p_k(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(2^{kn} \int\limits_{Q_{k,m}} t^{-\sigma_1}_j(x)\,dx\right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \le C_1 \frac{\alpha^1_k}{\alpha^1_j}, \quad \text{если} \quad 0 \le k \le j;$$

2) для любых $k, j \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\left(2^{kn} \int\limits_{Q_{k,m}} t^p_k(x)\,dx\right)^{-\frac{1}{p}} \left(2^{kn} \int\limits_{Q_{k,m}} t^{\sigma_2}_j(x)\,dx\right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \le C_2 \frac{\alpha^2_j}{\alpha^2_k}, \quad \text{если} \quad 0 \le k \le j.$$

(если $\sigma_1 = \infty$ или $\sigma_2 = \infty$ требуются стандартные модификации вышеприведённых формул).

3) для любого $k \in \mathbb{N}_0$ неравенство $0 < t_{k,m} \le 2^{\alpha_3} t_{k,\widetilde{m}}$ справедливо для всех таких $m, m' \in \mathbb{Z}^n$, что $\|m - \widetilde{m}'\|_\infty \le 1$.

Далее в §6.2 мы изучаем простейшие свойства введённых классов последовательностей и показываем, что они включают в себя классы $\mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, введённые в [82], как частный случай.

В §6.3 даются определения двух новых шкал пространств Бесова переменной гладкости. Первое – более классическое и использует усреднённые разности высших порядков интегрируемых в некоторой степени функций. Второе основано на теории распределений и использует свертки с гладкими функциями, имеющими достаточное число нулевых моментов.

При $r \in (0,\infty]$, $l \in \mathbb{N}$ для любого куба Q в $\mathbb{R}^n$ и элемента $f \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ положим (модификации при $r=\infty$ очевидны) $\delta_r^l(Q)f := \left(2^{2kn}\int_Q\int_{2^{-k}I}|\Delta^l(h)f(x)|^r\,dh\,dx\right)^{\frac{1}{r}}$, где $I=[-1,1]^n$, а $\Delta^l(h)f(x)$ – разность l-го порядка f, то есть $\Delta^l(h)f(x) := \sum_{i=0}^l C_l^i f(x+ih)$.

Определение 6.3.4. Пусть $p,q,r,\sigma_1,\sigma_2 \in (0,\infty]$, $\alpha_3 \geq 0$. Пусть $\alpha^1 := \{\alpha_k^1\}$, $\alpha^2 := \{\alpha_k^2\}$ – последовательности положительных вещественных чисел. Предположим, что $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Через $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ обозначим линейное пространство всех функций $f \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ с конечной квази-нормой (с очевидными модификациями при $q=\infty$)

$$\|f\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})} := \left(\sum_{k=0}^{\infty}\|t_k\delta_r^l(\cdot+2^{-k}I)f\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{q}} + \|t_0(\cdot)\|f\|_{L_r(\cdot+I^n)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Для любой функции $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ положим $g_k := 2^{kn}g(2^k\cdot)$ при $k\in\mathbb{N}$.

Определение 6.3.10. Пусть $p,q,\sigma_1,\sigma_2 \in (0,\infty]$, $\alpha_3 \geq 0$. Пусть $\alpha^1 := \{\alpha_k^1\}$, $\alpha^2 := \{\alpha_k^2\}$ – последовательности положительных вещественных чисел. Предположим, что $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Пусть $\varphi_0 \in D(\mathbb{R}^n)$ и $\int\varphi_0(x)\,dx = 1$. Положим $\varphi(x) := \varphi_0(x) - 2^{-n}\varphi_0(\frac{x}{2})$ при $x\in\mathbb{R}^n$. Через $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\}) := \mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$ обозначим линейное пространство всех распределений $f\in S_e'(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна квази-норма (с соответствующими модификациями при $q=\infty$)

$$\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})} := \left(\sum_{k=0}^{\infty}\|t_k(\varphi_k * f)\|^q_{L_p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

В §6.4 мы напоминаем формулу локального представления Рычкова [102, 103], а также модифицируем некоторые методы работы [102], чтобы сделать их применимыми для рассматриваемых нами задач.

В §6.5 мы устанавливаем один из ключевых результатов главы, а именно мы доказываем корректность определения 6.3.6., которая заключается в независимости пространства $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ от выбора функции φ_0.

Теорема 6.5.1. *Пусть $p,q\in(0,\infty]$, $\sigma_1\in(0,+\infty]$, $\sigma_2\geq p$. Пусть $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\alpha_3\geq 0$ и $\{t_k\}\in\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Предположим, что $\zeta_0,\varphi_0\in D(\mathbb{R}^n)$ таковы, что $\int\varphi_0(x)\,dx = \int\zeta_0(x)\,dx = 1$. Тогда, если $\alpha_2 < 1+L_\zeta$ при $\zeta := \zeta_0 - 2^{-n}\zeta_0(\frac{\cdot}{2})$, то существует такое $C>0$, что*

$$\|f\|_{\mathrm{B}^{\zeta_0}_{p,q}(\{t_k\})} \leq C\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})},\quad f\in S_e'(\mathbb{R}^n).$$

В §6.6 мы напоминаем некоторые элементы теории B-сплайнов, а затем с помощью этого доказываем теорему об атомарном разложении элементов из пространства $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$. Эта теорема интересна не только сама по себе, но и является важнейшим техническим инструментом для доказательства результатов последующего параграфа.

В §6.7 мы изучаем связи между шкалами пространств Бесова переменной гладкости. Зафиксируем такую функцию $\varphi_0 \in D(\mathbb{R}^n)$, что $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$ и положим $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. При любом $j \in \mathbb{N}$ положим, как обычно, $\varphi_j := 2^{jn}\varphi(2^j\cdot)$.

Основной результат §6.7 и всей шестой главы заключен в следующей теореме.

Теорема 6.7.6. *Пусть* $p, q \in (0,\infty]$, $r \in (0,p]$, $\sigma_1 \geq rp'_r$, $\sigma_2 \geq p$. *Пусть* $\alpha_1 > \max\{\frac{n}{r} - n, 0\}$, $\min\{L_\varphi + 1, l\} > \alpha_2$, $\alpha_3 \in [0,+\infty)$ *и* $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. *Тогда* $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ *и* $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ *совпадают как линейные пространства, а соответствующие квазинормы эквивалентны.*

В §6.8 приводятся некоторые приложения полученных в §6.7 результатов. А именно, мы даём новое точное внутреннее описание следа весового пространства Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)$ с весом γ из локального класса Макенхаупта $A^{loc}_p(\mathbb{R}^{n+d})$ на плоскости $\mathbb{R}^d \times \{0\}$.

Наконец, §6.9 посвящен построению теории пространств Бесова переменной гладкости на липшицевых областях.

В заключительной **седьмой главе** решена проблема точного описания следа на гиперплоскости $\mathbb{R}^n$ пространства Соболева $W^l_1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$, $l \in \mathbb{N}$ с весом γ, принадлежащим классу локальному Макенхаупта $A^{loc}_1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Результаты этой главы разделяются на два принципиально разных случая. В первом случае $l > 1$, во втором случае $l = 1$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и отождествим $\mathbb{R}^n$ с гиперплоскостью $\mathbb{R}^n \times 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим $W^l_1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)|_{\mathbb{R}^n} := W^l_1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)|^{\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}}_{\mathbb{R}^n}$ и $\mathrm{Tr}\,|_{\mathbb{R}^n} := \mathrm{Tr}^{\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}}_{\mathbb{R}^n}$.

В §7.2 мы фиксируем $l \in \mathbb{N}$, $l > 1$ и вес $\gamma \in A^{loc}_1(\mathbb{R}^{n+1})$. При $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ положим $\widetilde{Q}_{k,m} := \prod_{i=1}^n [\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k})$. Для любого $k \in \mathbb{N}_0$ определим $\gamma_k(x) := 2^{k(l+n)} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \chi_{\widetilde{Q}_{k,m}}(x) \iint_{Q_{k,m}\times[0,2^{-k}]} \gamma(x,t)\,dx\,dt$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Основной результат §7.2 состоит в следующем. Напомним определение 6.3.3.

Теорема 7.2.1. *Элемент* $f \in L^{loc}_1(\mathbb{R}^n)$ *принадлежит пространству* $W^l_1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}$ *в том и только том случае, если* f *принадлежит пространству* $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{1,1,1}(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})$. *Кроме того, существует константа* $C > 0$ *такая, что*

$$\frac{1}{C}\|f\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{1,1,1}(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})} \leq \|f\|_{W^l_1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}} \leq C\|f\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{1,1,1}(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})}.$$

Наконец, существует ограниченный линейный оператор $\mathrm{Ext} : \widetilde{\mathrm{B}}^l_{1,1,1}(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\}) \to W^l_1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ *такой, что* $\mathrm{Tr}\,|_{\mathbb{R}^n} \circ \mathrm{Ext} = \mathrm{Id}$ *на пространстве* $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{1,1,1}(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})$.

В §7.3 мы решаем задачу о следе в случае $l = 1$. Зафиксируем вес $\gamma \in A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$. При $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$ множество двоичных замкнутых кубов $T = \{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ будем называть *укладкой пространства* $\mathbb{R}^n$, если различные кубы в нём имеют непересекающиеся внутренности и при этом $\mathbb{R}^n = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} Q_\alpha$. Скажем, что укладка $T' = \{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}'}$ *следует за укладкой* $T = \{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (пишем $T' \preceq T$), если каждый куб $Q_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{A}'$ укладки T' содержится в некотором кубе Q_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ укладки T. Если для любого $s \in \mathbb{N}_0$ задана укладка $T^s = \{Q_\alpha^s\}_{\alpha\in\mathcal{A}^s}$, $\mathcal{A}^s \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что $T^{s+1} \preceq T^s$ при всех $s \in \mathbb{N}_0$, то последовательность $T = \{T^s\} = \{T^s\}_{s=0}^\infty$ назовём *системой укладок* пространства $\mathbb{R}^n$.

Далее мы вводим новое понятие, которое будет основным техническим инструментом для построения нового функционального пространства (далее $2Q$-куб с тем же центром, что и у Q, но с вдвое большей длиной ребра). Если $\alpha = (k, m) \in \mathcal{A}^s$, то полагаем $\widehat{\gamma}_\alpha^s := 2^{k(n+1)} \iint_{Q_{k,m}\times[0,2^{-k}]} \gamma(x,t)\,dxdt$.

Определение 7.3.9. Пусть $c_1, c_2 \geq 1$. Система укладок $T = \{T^s\} = \{T^s\}_{s=0}^\infty(c_1, c_2)$ пространства $\mathbb{R}^n$ ($T^s = \{Q_\alpha^s\}_{\alpha\in\mathcal{A}^s}$, где $s \in \mathbb{N}_0$), называется *допустимой для веса* γ, если при любом $s \in \mathbb{N}_0$ выполнены следующие условия:

(T1) если $2Q_\alpha^s \cap 2Q_{\alpha'}^s \neq \varnothing$, то $\widehat{\gamma}_\alpha^s \leq c_1\widehat{\gamma}_{\alpha'}^s$ при $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}^s$;

(T2) если $Q_{\alpha'}^{s+1} \subset Q_\alpha^s$, то $\widehat{\gamma}_\alpha^s \leq c_2\widehat{\gamma}_{\alpha'}^{s+1}$ и $\widehat{\gamma}_{\alpha'}^{s+1} \leq c_2\widehat{\gamma}_\alpha^s$ при $\alpha \in \mathcal{A}^s$, $\alpha' \in \mathcal{A}^{s+1}$;

(T3) $\max\{l(Q_{\alpha'}^{s+1}) : x \in 2Q_{\alpha'}^{s+1}\} \leq \frac{1}{2}\min\{l(Q_\alpha^s) : x \in 2Q_\alpha^s\}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

(T4) $l(Q_\alpha^s) \geq 2^{-l_s}$, $\alpha \in \mathcal{A}^s$, для некоторой строго возрастающей последовательности целых чисел $\{l_j\}_{j=0}^\infty$ при $l_0 = 0$.

Определение 7.3.58. Пусть $c_1, c_2 \geq 1$. Через $Z = Z(\{\gamma_{k,m}\}, c_1, c_2)$ обозначим линейное пространство всех $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\|\varphi\|_Z := \inf_T \sum_{s=1}^\infty \sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s} \widehat{\gamma}_\alpha^s \int\limits_{2Q_\alpha^s} \Big|\varphi(x) - \fint\limits_{2Q_\alpha^s} \varphi(y)\,dy\Big|\,dx + \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\gamma}_{0,m}\|\varphi\|_{L_1(Q_{0,m})} < +\infty,$$

где инфимум взят по всем допустимым для веса γ укладкам $T = \{T^s\}_{s=0}^\infty(c_1, c_2)$.

Основной результат §7.3 заключается в следующем утверждении.

Следствие 7.3.61. *Существуют такие числа $c_1, c_2 \geq 1$, что элемент $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \gamma)|_{\mathbb{R}^n}$ в том и только том случае, если f принадлежит пространству $Z = Z(\{\gamma_{k,m}\}, c_1, c_2)$. Кроме того, существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\frac{1}{C}\|f\|_Z \leq \|f\|_{W_1^1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}} \leq C\|f\|_Z.$$

Наконец, существует ограниченное (вообще говоря нелинейное) отображение Ext *из Z в $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ такое, что* $\mathrm{Tr}\,|_{\mathbb{R}^n} \circ \mathrm{Ext} = \mathrm{Id}$ *на пространстве Z.*

Глава 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе мы напомним базовые сведения из различных разделов геометрического анализа, а также геометрической теории меры, которые будут затем систематически использоваться на протяжении всей диссертации. Кроме того, мы введем ряд новых понятий и определений, принадлежащих автору, которые послужат фундаментом для дальнейшего.

1.1. Соглашение о константах

На протяжении всей работы через $C, C_1, C_2, \dots$ мы обозначаем различные положительные константы. Эти константы могут меняться даже на протяжении одной цепочки оценок. Зависимость констант от определённых параметров выражается указанием таких параметров в качестве аргументов, например $C = C(n, p, k)$. Мы пишем $A \approx B$, если существует константа $C \geq 1$ такая, что $A/C \leq B \leq CA$. Для числа $c \in \mathbb{R}$ через $[c]$ мы обозначаем его целую часть, то есть $[c] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq c\}$.

1.2. Сведения из геометрического анализа

1.2.1. **Общие сведения о функциях, множествах и мерах.** Для заданного метрического пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ и множества $E \subset \mathrm{X}$ через $\operatorname{int} E$, $\operatorname{cl} E$ и ∂E будем обозначать *внутренность* E, *замыкание* E и *границу* E в метрической топологии X, соответственно. Если не оговорено обратное, *все шары в* X *подразумеваются замкнутыми.* Более точно,

$$B_r(x) := \{y \in \mathrm{X} : \mathrm{d}(x, y) \leq r\} \quad \text{при} \quad (x, r) \in \mathrm{X} \times [0, +\infty). \tag{1.2.1}$$

Диаметр непустого множества E в метрическом пространстве (X, d) определяется равенством

$$\operatorname{diam} E := \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}.$$

Для множества $E \subset \mathrm{X}$ через χ_E будем обозначать его характеристическую функцию, то есть

$$\chi_E := \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Если $B \subset \mathrm{X}$ – шар в X, то его радиус и центр, вообще говоря, не определены однозначно. То есть, может оказаться так, что $B_{r_1}(x_1) = B_{r_2}(x_2)$ при некоторых $x_1 \neq x_2$ и $r_1 \neq r_2$. Поэтому, всюду в дальнейшем, говоря о шаре B в пространстве X, мы всегда будем подразумевать не только множество точек, но ещё и параметры $x = x_B$ – центр шара, и $r = r_B$ – радиус этого шара. Для шара $B = B_r(x)$ в X и параметра $\lambda > 0$, мы используем символ λB для обозначения растянутого в λ раз шара с тем же центром, то есть $\lambda B := B_{\lambda r}(x)$.

Если E_1, E_2 – два непустых множества в заданном метрическом пространстве $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$, то расстояние между ними определяется по формуле

$$\operatorname{dist}(E_1, E_2) := \operatorname{dist}_{\mathrm{X}}(E_1, E_2) := \inf\{\mathrm{d}(x_1, x_2) : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}. \tag{1.2.2}$$

Если хотя бы одно из множеств E_1, E_2 пусто, то расстояние между ними по определению считается равным нулю.

Определение 1.2.3. Если $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство, то семейство $\mathcal{G}$ подмножеств X будем называть *дизъюнктным*, если

$$G \cap G' = \emptyset \quad \text{для любых} \quad G, G' \in \mathcal{G} \quad \text{при} \quad G \neq G'.$$

Семейство $\mathcal{G}$ подмножеств X называется *неперекрывающимся*, если

$$\operatorname{int} G \cap \operatorname{int} G' = \emptyset \quad \text{для любых} \quad G, G' \in \mathcal{G} \quad \text{при} \quad G \neq G'.$$

Определение 1.2.4. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство. Пусть $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ – семейство подмножеств X, а $U \subset \mathrm{X}$ – произвольное множество. Определим *ограничение семейства* $\mathcal{G}$ на множество U формулой

$$\mathcal{G}|_U := \{G : G \subset U\}.$$

Для множества $E \subset \mathrm{X}$ через $\#E$ будем обозначать число точек в E. Таким образом,

$$\#E \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}.$$

Аналогично, для семейства множеств $\mathcal{G}$ подмножеств множества X через $\#\mathcal{G}$ обозначим число множеств, принадлежащих семейству $\mathcal{G}$. Таким образом, $\#\mathcal{G} \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

Напомним лемму Витали, называемую ещё $5B$-леммой Витали о покрытии. Подробности можно найти, например, в параграфе 3.3 книги [71]. В [71] соответствующая лемма приведена для семейств открытых шаров. Однако, утверждение верно и для семейств замкнутых шаров, в чем не сложно убедиться путём незначительных модификаций в доказательстве.

Лемма 1.2.5. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ *– сепарабельное метрическое пространство. Пусть* $\mathcal{F}$*– семейство шаров с ограниченным диаметром, то есть* $\sup\{\operatorname{diam} B : B \in \mathcal{F}\} < +\infty$*. Тогда существует такое не более чем счётное дизъюнктное подсемейство* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$*, что*

$$\bigcup\{B : B \in \mathcal{F}\} \subset \bigcup\{5B : B \in \mathcal{G}\}.$$

Если $\mathrm{X}_1 = (\mathrm{X}_1, \mathrm{d}_1)$ и $\mathrm{X}_2 = (\mathrm{X}_2, \mathrm{d}_2)$ – метрические пространства, то через $\mathfrak{B}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ будем обозначать множество всех борелевских отображений из X_1 в X_2. Для заданного метрического пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ и борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ через $\mathfrak{B}(E)$ будем обозначать множество всех борелевских функций $f : E \to [-\infty, +\infty]$.

Если $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство, то символами $C(\mathrm{X})$ и $C_c(\mathrm{X})$ будем обозначать линейное пространство всех непрерывных на X и непрерывных на X с компактным носителем функций, соответственно. Снабдим эти пространства стандартной "sup"-нормой. Для замкнутых множеств $S \subset \mathrm{X}$ через $C(S)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных на S функций, снабжённое стандартной "sup"-нормой.

Пусть $\mathrm{X}_1 = (\mathrm{X}_1, \mathrm{d}_1)$ и $\mathrm{X}_2 = (\mathrm{X}_2, \mathrm{d}_2)$ – метрические пространства. При $R \in (0, +\infty]$ для отображения $F : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ положим

$$L_f(R) := \sup_{0<\mathrm{d}(x,y)<R} \frac{\mathrm{d}_2(F(x), F(y))}{\mathrm{d}_1(x, y)}. \tag{1.2.6}$$

Будем говорить, что отображение F *локально липшицево* и писать $F \in \mathrm{LIP}^{loc}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ при условии, что $L_F(R) < +\infty$ для любого $R \in (0, +\infty)$. Будем говорить, что F (*глобально*) *липшицево* и писать $F \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$, если $L_F(+\infty) < +\infty$. Если $L_F(+\infty) \le L < +\infty$, то отображение F будем называть *L-липшицевым.*

При $F : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}_2$ под *локальной константой Липшица* отображения F будем понимать функцию $\operatorname{lip} F : \mathrm{X}_1 \to [0, +\infty]$, определяемую равенством

$$\operatorname{lip} F(x) := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{y \to x}} \frac{\mathrm{d}_2(F(y), F(x))}{\mathrm{d}_1(x, y)}, & x \text{ – предельная точка;} \\ 0, & x \text{ – изолированная точка.} \end{cases} \tag{1.2.7}$$

Замечание 1.2.8. Ясно, что при $F \in \mathrm{LIP}^{loc}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ локальная константа Липшица $\operatorname{lip} F$ конечна всюду на X_1 и принадлежит (как функция точки) пространству $\mathfrak{B}(\mathrm{X}_1)$.

Замечание 1.2.9. Если $F \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X})$, то в соответствии с терминологией, принятой в [21], будем зачастую обозначать локальную константу Липшица функции F (как функцию точки) символом $|\nabla F|$ и называть её *уклоном функции* F.

Ниже приведены простые свойства локальных констант Липшица для липшицевых функций. Мы опускаем элементарное доказательство.

Предложение 1.2.10. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ *– метрическое пространство. Тогда справедливы следующие свойства:*

(1) *Если* $F \equiv c$ *на* X *для некоторого* $c \in \mathbb{R}$, *то* $\operatorname{lip} F \equiv 0$ *на* X.

(2) *Если* $F_1, F_2 \in \mathrm{LIP}^{loc}(\mathrm{X})$, *то*

$$\mathrm{lip}(F_1 + F_2)(x) \le \mathrm{lip}\, F_1(x) + \mathrm{lip}\, F_2(x) \quad \textit{при всех} \quad x \in \mathrm{X}\,.$$

(3) $\mathrm{lip}(F + c) \equiv \mathrm{lip}\, F$ *для каждой функции* $F \in \mathrm{LIP}^{loc}(\mathrm{X})$ *и всех* $c \in \mathbb{R}$.

Следующий факт хорошо известен (см., например, следствие 1.6 в книге [62]).

Предложение 1.2.11. *Если* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – *компактное метрическое пространство, то пространство* $C(\mathrm{X})$ *сепарабельно.*

Для сепарабельного метрического пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ и числа $\epsilon \in (0, 1)$, при любом $k \in \mathbb{Z}$ через $Z_k(\mathrm{X}, \epsilon)$ обозначим произвольное максимальное ϵ^k-разделённое множество в X, а через $\mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$ – соответствующее не более чем счётное индексное множество. То есть,

$$Z_k(\mathrm{X}, \epsilon) = \{z_{k,\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)\}. \tag{1.2.12}$$

Кроме того, положим

$$Z(\mathrm{X}, \epsilon) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Z_k(\mathrm{X}, \epsilon) \quad \text{и} \quad Z^{\underline{k}}(\mathrm{X}, \epsilon) := \bigcup_{k \ge \underline{k}} Z_k(\mathrm{X}, \epsilon), \quad \underline{k} \in \mathbb{Z}. \tag{1.2.13}$$

Наконец, нам будут полезны специальные семейства шаров. Для любого $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\mathcal{B}_k(\mathrm{X}, \epsilon) := \{B_{\epsilon^k}(z_{k,\alpha}) : \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)\}. \tag{1.2.14}$$

Для полноты изложения напомним общепринятый в современной литературе подход к понятию "меры". Подробности можно найти, например, в главе 3 монографии [71].

Определение 1.2.15. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство. Будем говорить, что $\mathfrak{m}$ – *мера на* X, если $\mathfrak{m}$ – *внешняя борелевская мера* на X. Мера $\mathfrak{m}$ на X называется *локально конечной*, если $\mathfrak{m}(B_r(x)) < +\infty$ для всех пар $(x, r) \in \mathrm{X} \times [0, +\infty)$. Мера $\mathfrak{m}$ на X называется *борелевски регулярной*, если для любого множества $E \subset \mathrm{X}$ существует такое борелевское множество $U \supset E$, что $\mathfrak{m}(U) = \mathfrak{m}(E)$.

Напомним также понятие *носителя меры*.

Определение 1.2.16. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство, а $\mathfrak{m}$ – мера на X. Определим *носитель меры* $\mathfrak{m}$ равенством

$$\mathrm{supp}\, \mathfrak{m} := \mathrm{cl}\{x \in \mathrm{X} : \mathfrak{m}(B_r(x)) > 0 \text{ при всех } r > 0\}. \tag{1.2.17}$$

Замечание 1.2.18. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство. На протяжении всей работы мы не будем делать различий между классическим понятием меры, принятом в анализе и понятием внешней меры. Преимуществом такого подхода состоит в том, что внешняя мера определена на семействе всех подмножеств 2^{X} пространства X, принимая значения в $[0, +\infty]$.

Каждая (внешняя мера) $\mathfrak{m}$ на X имеет свою σ-алгебру измеримых множеств $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, на которой она счётно-аддитивна. Согласно определению 1.2.16, всякая такая σ-алгебра содержит борелевскую σ-алгебру подмножеств пространства X. С другой стороны, каждая счётно-аддитивная функция множества $\mathfrak{m}$, определённая на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}$, порождает естественную внешнюю меру, определяемую по формуле

$$\mathfrak{m}(E) := \inf\{\mathfrak{m}(F) : F \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{m}} \text{ и } F \supset E\}.$$

При этом, как нетрудно видеть, σ-алгебра измеримых множеств $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ для такой внешней меры содержит σ-алгебру $\mathfrak{E}_{\mathfrak{m}}$.

Напомним понятие абсолютной непрерывности одной меры относительно другой.

Определение 1.2.19. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство. Пусть $\mathfrak{m}_1$ и $\mathfrak{m}_2$ – борелевски регулярные меры на X. Будем говорить, что мера $\mathfrak{m}_1$ *абсолютно непрерывна* относительно меры $\mathfrak{m}_2$ и писать $\mathfrak{m}_1 \ll \mathfrak{m}_2$, если для любого борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ из равенства $\mathfrak{m}_2(E) = 0$ следует равенство $\mathfrak{m}_1(E) = 0$.

Напомним также стандартное определение ограничения меры на подмножество.

Определение 1.2.20. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство. Пусть $\mathfrak{m}$ – мера на X. Для борелевского множества $S \subset \mathrm{X}$ определим *ограничение* $\mathfrak{m}\lfloor_S$ *меры* $\mathfrak{m}$ *на* S формулой

$$\mathfrak{m}\lfloor_S(E) := \mathfrak{m}(S \cap E) \quad \text{для любого борелевского множества} \quad E \subset \mathrm{X}\,. \tag{1.2.21}$$

Замечание 1.2.22. Функция множества $\mathfrak{m}\lfloor_S$ является борелевски регулярной мерой на X. Доказательство можно найти, например, в параграфе 3.3 монографии [71].

Борелевское отображение позволяет в некотором смысле перетащить меру с одного метрического пространства на другое. Напомним стандартное определение.

Определение 1.2.23. Пусть $\mathrm{X}_1 = (\mathrm{X}_1, \mathrm{d}_1)$, $\mathrm{X}_2 = (\mathrm{X}_2, \mathrm{d}_2)$ – метрические пространства, а $F \in \mathfrak{B}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$. Пусть $\mathfrak{m}$ – мера на X_1. Определим F*-образ меры* $\mathfrak{m}$ равенством

$$F_\sharp\mathfrak{m}(E) := \mathfrak{m}(F^{-1}(E)) \quad \text{для любого борелевского множества} \quad E \subset \mathrm{X}_2\,. \tag{1.2.24}$$

Замечание 1.2.25. Функция множества $F_\sharp\mathfrak{m}$ является мерой на X_2. Если же $\mathfrak{m}$ – борелевски регулярная мера на X_1, а отображение F – биекция X_1 на X_2, то $F_\sharp\mathfrak{m}$ – борелевски регулярная мера на X_1. Доказательство можно найти, например, в параграфе 3.3 монографии [71].

Для заданного метрического пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$, следуя [19], скажем, что последовательность локально конечных борелевски регулярных мер $\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ на X *локально* $*$*-слабо сходится* к мере $\mathfrak{m}$ на X и писать $\mathfrak{m}_k \rightharpoonup \mathfrak{m}$, $k \to \infty$, если

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathrm{X}} \varphi(x)\, d\mathfrak{m}_k(x) = \int\limits_{\mathrm{X}} \varphi(x)\, d\mathfrak{m}(x) \quad \text{для любой} \quad \varphi \in C_c(\mathrm{X}).$$

Следующий факт известен. Подробности см., например, в следствии 1.60 книги [19].

Лемма 1.2.26. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ *– локально компактное сепарабельное метрическое пространство и пусть* $\{\mathfrak{m}_k\}$ *– такая последовательность локально конечных борелевски регулярных мер на* X*, что*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{m}_k(B) < +\infty \quad \textit{для любого шара} \quad B \subset \mathrm{X}\,. \tag{1.2.27}$$

Тогда существует локально $*$*-слабо сходящаяся подпоследовательность* $\{\mathfrak{m}_{k_l}\} := \{\mathfrak{m}_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ *последовательности* $\{\mathfrak{m}_k\}$.

Напомним также некоторые стандартные свойства $*$-слабой сходимости мер.

Предложение 1.2.28. *Пусть* (X, d) *– локально компактное сепарабельное метрическое пространство. Если последовательность локально конечных мер* $\{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ *на* X *локально* $*$*-слабо сходится к локально конечной мере* $\mathfrak{m}$ *на* X*, то, для любого открытого множества* $G \subset \mathrm{X}$ *и любого компакта* $F \subset \mathrm{X}$*,*

$$\varliminf_{k\to\infty} \mathfrak{m}_k(G) \geq \mathfrak{m}(G), \qquad \varlimsup_{k\to\infty} \mathfrak{m}_k(F) \leq \mathfrak{m}(F). \tag{1.2.29}$$

Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство, $\mathfrak{m}$ – борелевски регулярная мера на X. При $f \in \mathfrak{B}(\mathrm{X})$ положим

$$[f]_{\mathfrak{m}} := \{\widetilde{f} : \mathrm{X} \to [-\infty, +\infty] : \widetilde{f}(x) = f(x) \text{ для } \mathfrak{m}\text{-п.в. } x \in \operatorname{supp}\mathfrak{m}\}. \tag{1.2.30}$$

При этом любую функцию $\widetilde{f} \in [f]_{\mathfrak{m}}$ будем называть $\mathfrak{m}$-представителем элемента $[f]_{\mathfrak{m}}$. Наконец, положим $L_0(\mathfrak{m}) := \{[f]_{\mathfrak{m}} : f \in \mathfrak{B}(\mathrm{X})\}$ и введем следующее отображение.

Определение 1.2.31. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство. Для борелевски регулярной меры $\mathfrak{m}$ на X, определим $\mathfrak{m}$-*огрубляющее отображение* $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{B}(\mathrm{X}) \to L_0(\mathfrak{m})$, полагая

$$\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(f) := [f]_{\mathfrak{m}} \quad \text{при} \quad f \in \mathfrak{B}(\mathrm{X}). \tag{1.2.32}$$

Важные обозначения. При $p \in (0,\infty)$ через $\widetilde{L}_p(\mathfrak{m})$ ($\widetilde{L}_p^{loc}(\mathfrak{m})$) обозначим линейное пространство p-интегрируемых (локально p-интегрируемых) по мере $\mathfrak{m}$ функций $f \in \mathfrak{B}(\mathrm{X})$.

При $p \in (0,\infty)$ через $L_p(\mathfrak{m})$ ($L_p^{loc}(\mathfrak{m})$) обозначим линейное пространство $\mathfrak{m}$-классов эквивалентности $[f]_{\mathfrak{m}}$ всех p-интегрируемых (локально p-интегрируемых) по мере $\mathfrak{m}$ функций $f \in \mathfrak{B}(\mathrm{X})$. Через $L_\infty(\mathfrak{m})$ ($L_\infty^{loc}(\mathfrak{m})$) обозначим линейное пространство $\mathfrak{m}$-классов эквивалентности всех ограниченных (локально ограниченных) на $\operatorname{supp}\mathfrak{m}$ борелевских функций. Без ограничения общности будем предполагать, что при каждом $[f]_{\mathfrak{m}} \in L_p^{loc}(\mathfrak{m})$ функции $\widetilde{f} \in [f]_{\mathfrak{m}}$ *определены только на* $\operatorname{supp}\mathfrak{m}$.

Определение 1.2.33. Будем говорить, что последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ на X *допустима*, если при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ мера $\mathfrak{m}_k$ борелевски регулярная, локально конечная и абсолютно непрерывна относительно меры $\mathfrak{m}_0$.

Важные обозначения. Для $p \in [0,\infty]$ и допустимой последовательности мер $\{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ на X положим для краткости $L_p(\{\mathfrak{m}_k\}) := \cap_{k=0}^{\infty} L_p(\mathfrak{m}_k)$ и $L_p^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}) := \cap_{k=0}^{\infty} L_p^{loc}(\mathfrak{m}_k)$. Если $p \in [1,\infty]$, то через p' всегда будем обозначать *сопряжённый показатель Гёльдера*, определяемый равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. При $p = 1$ считаем $p' = \infty$, а при $p = \infty$ считаем $p' = 1$.

Замечание 1.2.34. Обычно, для заданного метрического пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$, борелевски регулярной меры $\mathfrak{m}$ на X, и параметра $p \in [0,\infty]$ нам будет удобно отождествить при каждом $[f]_{\mathfrak{m}} \in L_p(\mathfrak{m})$ различные функции $\widetilde{f}$, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности $[f]_{\mathfrak{m}}$. Мы будем придерживаться такой стратегии (не оговаривая это особо) при условии, что соответствующие утверждения оперируют только классами эквивалентности (а не отдельно взятыми функциями), если это ясно из контекста. В таком случае мы отождествляем символы f и $[f]_{\mathfrak{m}}$. Кроме того, фраза "функция $f \in L_p(\mathfrak{m})$" означает, что соответствующий $\mathfrak{m}$-класс эквивалентности $[f]_{\mathfrak{m}}$ принадлежит пространству $L_p(\mathfrak{m})$.

С другой стороны, в тех случаях, когда нас будут интересовать более деликатные поточечные свойства функций, мы не будем отождествлять функции, совпадающие $\mathfrak{m}$-п.в., и будем особо оговаривать такие случаи. В таких случаях нам будет удобнее иметь дело с пространствами $\widetilde{L}_p(\mathfrak{m})$ и $\widetilde{L}_p^{loc}(\mathfrak{m})$ вместо пространств $L_p(\mathfrak{m})$ и $L_p^{loc}(\mathfrak{m})$, соответственно.

Иногда нам будет удобно работать с так называемыми *весовыми мерами*.

Определение 1.2.35. Пусть $\mathfrak{m}$ – борелевски регулярная мера на метрическом пространстве $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$. Элемент $\gamma \in L_0(\mathfrak{m})$ называется $\mathfrak{m}$-*весом*, если $\widetilde{\gamma}(x) > 0$ при $\mathfrak{m}$-п.в. $x \in \mathrm{X}$ для любого $\mathfrak{m}$-представителя $\widetilde{\gamma}$ элемента γ (здесь и далее п.в. - сокращение для "почти всюду").

Через $\gamma\mathfrak{m}$ будем обозначать меру на X, определяемую равенством

$$\gamma\mathfrak{m}(E) := \int\limits_E \gamma(x)\, d\mathfrak{m}(x) \quad \text{для любого борелевского множества} \quad E \subset \mathrm{X}\,. \tag{1.2.36}$$

Определение 1.2.37. Для заданного метрического пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ и семейства множеств $\mathcal{G} \subset 2^{\mathrm{X}}$ через $\mathrm{MULT}(\mathcal{G})$ будем обозначать *его кратность покрытия*, то есть наименьшее среди $M' \in \mathbb{N}_0 \cup +\infty$ таких, что каждая точка $x \in \mathrm{X}$ принадлежит не более чем M' множествам из $\mathcal{G}$. Следующее предложение элементарно, и мы опустим его доказательство.

Предложение 1.2.38. *Пусть* $\mathfrak{m}$ *– борелевски регулярная мера на метрическом пространстве* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$. *Пусть* $\mathcal{G} \subset 2^{\mathrm{X}}$ *– не более чем счетное семейство множеств кратности* $\mathrm{MULT}(\mathcal{G}) < +\infty$. *Тогда*

$$\sum_{G\in\mathcal{G}} \int\limits_G |f(x)|\, d\mathfrak{m}(x) \le \mathrm{MULT}(\mathcal{G}) \int\limits_{\mathrm{G}} |f(x)|\, d\mathfrak{m}(x) \quad \textit{при} \quad f \in L_1(\mathfrak{m}\lfloor_{\mathrm{G}}), \tag{1.2.39}$$

где $\mathrm{G} = \cup\{G : G \in \mathcal{G}\}$.

Для метрического пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ и борелевски регулярной меры $\mathfrak{m}$ на X, для любого элемента $f \in L_1^{loc}(\mathfrak{m})$ и любого борелевского множества $G \subset \mathrm{X}$ с мерой $\mathfrak{m}(G) < +\infty$ положим

$$f_{G,\mathfrak{m}} := \fint\limits_G f(x)\, d\mathfrak{m}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{m}(G)} \int\limits_G f(x)\, d\mathfrak{m}(x), & \mathfrak{m}(G) > 0; \\ 0, & \mathfrak{m}(G) = 0. \end{cases} \tag{1.2.40}$$

Кроме того, положим

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, G) := \inf_{c\in\mathbb{R}} \fint\limits_G |f(x) - c|\, d\mathfrak{m}(x). \tag{1.2.41}$$

Наконец рассмотрим усреднённую по мере $\mathfrak{m}$ осцилляцию. Положим

$$\mathcal{OSC}_{\mathfrak{m}}(f, G) := \fint\limits_G \fint\limits_G |f(x) - f(y)|\, d\mathfrak{m}(x) d\mathfrak{m}(y). \tag{1.2.42}$$

В действительности, $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, G)$ и $\mathcal{OSC}_{\mathfrak{m}}(f, G)$ очень тесно взаимосвязаны. Эта связь отражена в следующем предложении.

Предложение 1.2.43. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ *– метрическое пространство, а* $\mathfrak{m}$ *– борелевски регулярная мера на* X. *Тогда справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, G) \le \mathcal{OSC}_{\mathfrak{m}}(f, G) \le 2\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, G). \tag{1.2.44}$$

Доказательство. Непосредственно, из (1.2.41) следует, что

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f,G) \le \fint\limits_{G} |f(x) - f_{G,\mathfrak{m}}|\, d\mathfrak{m}(x) \le \mathcal{OSC}_{\mathfrak{m}}(f,G).$$

С другой стороны, для любой константа $c \in \mathbb{R}$, очевидно, имеем

$$\mathcal{OSC}_{\mathfrak{m}}(f,G) \le \fint\limits_{G}\fint\limits_{G} |f(x) - c + c - f(y)|\, d\mathfrak{m}(x) d\mathfrak{m}(y) \le 2 \fint\limits_{G} |f(x) - c|\, d\mathfrak{m}(x).$$

Взяв инфимум по всем константам $c \in \mathbb{R}$, получим неравенство в правой части (1.2.44). $\square$

Иногда будем использовать грубую оценку сверху для $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f,G)$, которая является немедленным следствием замечания 1.2.50, неравенства Гельдера для сумм и неравенства Гельдера для интегралов.

Предложение 1.2.45. *Если* $p \in [1,\infty)$, *то* $\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f,G)\Big)^p \le 2^p \fint_G |f(x)|^p\, d\mathfrak{m}(x)$.

На протяжении диссертационной работы мы будем использовать следующее определение.

Определение 1.2.46. Под *метрическим пространством с мерой* (сокращённо м.п.м.) мы будем всегда понимать тройку $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$, в которой:

(**MMSI**) Пара (X, d)– *полное сепарабельное метрическое пространство.*

(**MMSII**) μ – локально конечная борелевски регулярная (внешняя) мера на X с носителем $\operatorname{supp}\mu = \mathrm{X}$.

Замечание 1.2.47. В дальнейшем, для м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$, под мерой на X мы всегда подразумеваем меру на метрическом пространстве (X, d).

Для заданного м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$, параметра $p \in [0,\infty]$, и борелевского множества $S \subset \mathrm{X}$ примем *обозначение* $L_p(S) := L_p(\mu\lfloor_S)$.

1.2.2. **Меры со свойством удвоения.** Для построения содержательной теории, нам придется наложить на используемые меры некоторые ограничения.

Определение 1.2.48. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – полное сепарабельное метрическое пространство. Будем говорить, что борелевски регулярная локально конечная мера $\mathfrak{m}$ на X обладает свойством *равномерно локального удвоения*, если для любого $R > 0$ справедливо неравенство

$$C_{\mathfrak{m}}(R) := \sup_{r(0,R]} \sup_{x\in \mathrm{X}} \frac{\mathfrak{m}(B_{2r}(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))} < +\infty. \tag{1.2.49}$$

Если $\sup_{R>0} C_{\mathfrak{m}}(R) < +\infty$, то говорят, что $\mathfrak{m}$ обладает *глобальным свойством удвоения.*

Замечание 1.2.50. Если мера $\mathfrak{m}$ на метрическом пространстве $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ обладает свойством равномерно локального удвоения, то из неравенства (1.2.44) и условия (1.2.49) легко следует, что для любых $R > 0$, $c \geq 1$ существует $C > 0$ такая, что для любых $(x, r) \in \mathrm{X} \times (0, R]$

$$|f_{B_r(x'),\mathfrak{m}} - f_{B_{cr}(x),\mathfrak{m}}| \leq C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, B_{cr}(x)) \quad \text{для всех} \quad B_r(x') \subset B_{cr}(x). \tag{1.2.51}$$

Для м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ хорошо известно, что глобальное свойство удвоения меры μ влечет глобальное свойство метрического удвоения для метрического пространства (X, d) (см., например, рассуждения на стр. 102 в [71]). Аналогично, мы имеем следующий результат.

Предложение 1.2.52. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– метрическое пространство с мерой. Если* μ *обладает свойством равномерно локально удвоения, то, для каждого* $R > 0$ *и каждого* $c \geq 1$*, любой замкнутый шар* $B = B_{cR}(x)$ *содержит не более* $N_\mu(R, c) := [(C_\mu(2cR))^{\log_2(2c)+1}] + 1$ *непересекающихся замкнутых шаров радиуса* R*.*

Доказательство. Если $B' = B_R(x') \subset B$, то $B \subset B_{2cR}(x')$. Прменяя (1.2.49) $[\log_2(2c)] + 1$ раз, имем

$$\mu(B) \leq (C_\mu(2cR))^{[\log_2(2c)]+1}\mu(B') \leq (C_\mu(2cR))^{\log_2(2c)+1}\mu(B').$$

Если $\mathcal{B}$ – дизъюнктное семейство замкнутых шаров, лежащих в B, с радиусами R, то $\sum\{\mu(B') : B' \in \mathcal{B}\} \leq \mu(B)$. Тогда

$$\#\mathcal{B}\frac{\mu(B)}{(C_\mu(2cR))^{\log_2(2c)+1}} \leq \sum\{\mu(B') : B' \in \mathcal{B}\} \leq \mu(B).$$

Следовательно, имеем $\#\mathcal{B} \leq N_\mu(R, c)$. □

Для $\epsilon \in (0, 1)$ и семейства замкнутых шаров $\mathcal{B} \subset 2^{\mathrm{X}}$, при каждом $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\mathcal{B}(k, \epsilon) := \{B \in \mathcal{B} : r_B \in (\epsilon^{k+1}, \epsilon^k]\}. \tag{1.2.53}$$

Предложение 1.2.54. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– метрическое пространство с мерой. Если* μ *обладает свойством равномерно локального удвоения, то при любых* $c \geq 1$*,* $\epsilon \in (0, 1)$ *для любого дизъюнктного семейства замкнутых шаров* $\mathcal{B}$*,*

$$\mathrm{MULT}(\{cB : B \in \mathcal{B}(k, \epsilon)\}) \leq N_\mu(\epsilon^{k+1}, \frac{2c}{\epsilon}) \quad \textit{при любом} \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $N_\mu(\epsilon^{k+1}, \frac{2c}{\epsilon})$ *то же, что и в предложении 1.2.52.*

Доказательство. Зафиксируем параметры $c \geq 1$, $\epsilon \in (0, 1)$, дизъюнктное семейство замкнутых шаров $\mathcal{B}$, а также число $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим семейство $\widetilde{\mathcal{B}}(k, \epsilon)$ состоящее из всех замкнутых шаров, центры которых те же, что и у шаров из семейства $\mathcal{B}(k, \epsilon)$, но радиусы которых

равны ϵ^{k+1}. При $x \in \mathrm{X}$, если $x \in cB$ для некоторого $B \in \mathcal{B}(k,\epsilon)$, то $B \subset B_{2c\epsilon^k}(x)$. Поскольку семейство $\widetilde{\mathcal{B}}(k,\epsilon)$ дизъюнктно, в силу предложения 1.2.52 имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{MULT}(\{cB : B \in \mathcal{B}(k,\epsilon)\}) &\leq \sup_{x\in\mathrm{X}} \sum_{B\in\mathcal{B}(k,\epsilon)} \chi_{cB}(x) \\ &\leq \sup_{x\in\mathrm{X}} \#\{B \in \widetilde{\mathcal{B}}(k,\epsilon) : B \subset B_{2c\epsilon^k}(x)\} \leq N_\mu(\epsilon^{k+1}, \frac{2c}{\epsilon}). \end{aligned} \tag{1.2.55}$$

Доказательство завершено. □

Следующее предложение является очевидным следствием (1.2.1), определения 1.2.46 и предложения 1.2.52.

Предложение 1.2.56. *Пусть* $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– метрическое пространство с мерой. Если* μ *обладает свойством равномерно локального удвоения, то каждый шар* $B = B_r(x)$ *является компактным подмножеством в* X.

1.2.3. **Двоичные кубы.** Напомним обозначения (1.2.12) и (1.2.13).

Определение 1.2.57. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – полное сепарабельное метрическое пространство, и пусть $\epsilon \in (0,1)$. Скажем, что *частичный порядок* $\preceq$ на $Z(\mathrm{X},\epsilon)$ является *допустимым*, если выполнены следующие свойства:

(PO1) Если $z_{k,\alpha} \preceq z_{l,\beta}$ при некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$, то $k \geq l$.

(PO2) Для любых $k \geq l$ и $z_{k,\alpha} \in Z_k(\mathrm{X},\epsilon)$ существует единственный $z_{l,\beta} \in Z_l(\mathrm{X},\epsilon)$, для которого $z_{k,\alpha} \preceq z_{l,\beta}$.

(PO3) Если $k \in \mathbb{Z}$ и $z_{k,\alpha} \preceq z_{k-1,\beta}$, то $\mathrm{d}(z_{k,\alpha}, z_{k-1,\beta}) < \epsilon^{k-1}$.

(PO4) Если $k \in \mathbb{Z}$ и $\mathrm{d}(z_{k,\alpha}, z_{k-1,\beta}) < \frac{\epsilon^{k-1}}{2}$, то $z_{k,\alpha} \preceq z_{k-1,\beta}$.

Следующее утверждение доказано в [37].

Предложение 1.2.58. *Для заданного полного сепарабельного метрического пространства* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ *и параметра* $\epsilon \in (0,1)$ *существует по крайней мере один допустимый частичный порядок на множестве* $Z(\mathrm{X},\epsilon)$.

Согласно замечательному результату Криста [37], для полного сепарабельного метрического пространства $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ и меры μ на X, обладающей глобальным свойством удвоения, существует естественный аналог евклидовых двоичных кубов в $\mathbb{R}^n$. Однако, анализ аргументов, использованных в [37], показывает, что свойство равномерно локального удвоения меры μ достаточно для установления следующего результата.

Предложение 1.2.59. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ *– полное сепарабельное метрическое пространство. Пусть параметр* $\epsilon \in (0, \frac{1}{10}]$*, а* $\preceq$ *– произвольный допустимый частичный порядок на множестве* $Z(\mathrm{X}, \epsilon)$*. При* $a \in (0, \frac{1}{8}]$*, для каждого* $k \in \mathbb{Z}$ *и любого* $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$ *определим обобщенный двоичный куб* $Q_{k,\alpha}$ *в пространстве* X *равенством*

$$Q_{k,\alpha} := \bigcup_{z_{j,\beta} \preceq z_{k,\alpha}} \operatorname{int} B_{a\epsilon^k}(z_{j,\beta}). \tag{1.2.60}$$

Тогда семейство $\{Q_{k,\alpha}\} := \{Q_{k,\alpha} : k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)\}$ *удовлетворяет следующим свойствам:*

(DQ1) *Для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *множество* $\mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$ *не более чем счетно и* $\mathrm{X} \setminus \cup_{\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)} \operatorname{cl} Q_{k,\alpha} = \emptyset$.

(DQ2) *Если* $j \geq k$*, то либо* $Q_{j,\beta} \subset Q_{k,\alpha}$*, либо* $Q_{j,\beta} \cap Q_{k,\alpha} = \emptyset$.

(DQ3) *Если* $l < k$ *и* $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$*, то существует единственный* $\beta \in \mathcal{A}_l(\mathrm{X}, \epsilon)$*, для которого* $Q_{k,\alpha} \subset Q_{l,\beta}$.

(DQ4) $B_{\frac{\epsilon^k}{4}}(z_{k,\alpha}) \subset Q_{k,\alpha} \subset B_{2\epsilon^k}(z_{k,\alpha})$ *для каждого* $k \in \mathbb{Z}$ *и всех* $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$.

Если, кроме того, μ *– мера на* X*, обладающая равномерно локальным свойством удвоения, и* $\operatorname{supp} \mu = \mathrm{X}$*, то*

(DQ5) $\mu(\partial Q_{k,\alpha}) = 0$ *для каждого* $k \in \mathbb{Z}$ *и всех* $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$.

Важное обозначение. В дальнейшем на протяжении этой и последующих двух глав мы будем часто использовать следующее обозначение. При $\epsilon \in (0, 1)$ и $r > 0$ положим

$$k(r) := k_\epsilon(r) := \max\{k \in \mathbb{Z} : r \leq \epsilon^k\}. \tag{1.2.61}$$

Предложение 1.2.62. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– метрическое пространство с мерой* μ*, обладающей равномерно локальным свойством удвоения. Пусть* $\epsilon \in (0, 1)$*,* $\underline{k} \in \mathbb{Z}$*, а* $\{Q_{k,\alpha}\}$ *– семейство обобщенных двоичных кубов в* X*. Для любого* $c \geq 1$ *существует константа* $C_D(c, \underline{k}) > 0$*, зависящая только от* $C_\mu((2c + \frac{8}{\epsilon})\epsilon^{\underline{k}})$*,* ϵ*,* c *и* $\underline{k}$*, такая, что для каждой точки* $x \in \mathrm{X}$ *и любого* $r \in (0, \epsilon^{\underline{k}}]$*,*

$$\#\{\alpha \in \mathcal{A}_{k(r)}(\mathrm{X}, \epsilon) : \operatorname{cl} Q_{k(r),\alpha} \cap B_{cr}(x) \neq \emptyset\} \leq C_D(c, \underline{k}). \tag{1.2.63}$$

Доказательство. Заметим, что если $\operatorname{cl} Q_{k(r),\alpha} \cap B_{cr}(x)$, то в силу (DQ 4) предложения 1.2.59 имеем включения $\operatorname{cl} Q_{k(r),\alpha} \subset (c + \frac{4\epsilon^{k(r)}}{r}) B_r(x) \subset (c + \frac{4}{\epsilon}) B_r(x)$. С другой стороны, замкнутые шары $\frac{1}{2} B_{\epsilon^{k(r)}}(z_{k(r),\alpha})$, $\alpha \in \mathcal{A}_{k(r)}(\mathrm{X}, \epsilon)$ попарно не пересекаются. В итоге, применяя предложение 1.2.52, завершаем доказательство. □

Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой. В случаях, когда мера μ обладает равномерно локальным свойством удвоения, при $q \in (1, \infty)$, $\alpha \geq 0$, мы будем рассматривать *локальную дробную максимальную функцию* $M^R_{q,\alpha}(f)$ функции $f \in L_1^{loc}(\mathrm{X})$, определяемую для каждого фиксированного $R > 0$, равенством

$$M^R_{q,\alpha}(f)(x) := \sup_{r \in (0,R]} r^\alpha \Big(\fint_{B_r(x)} |f(y)|^q \, d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{q}}, \quad x \in \mathrm{X}. \tag{1.2.64}$$

Далее полагаем $M_{q,\alpha}(f)(x) := \sup_{R>0} M^R_{q,\alpha}(f)(x)$ и $M_q(f)(x) := \sup_{R>0} M^R_{q,0}(f)(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Хорошо известно (см., например, гл. 3 в [71]), что свойство удвоения в комбинации 5B-леммой Витали о покрытии даёт следующее свойство.

Предложение 1.2.65. *Пусть $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой μ, обладающей свойством равномерно локального удвоения. Пусть $p \in (1, \infty)$ и $q \in (1, p)$. Тогда для каждого $R > 0$ существует константа $C > 0$, зависящая только от p,q и $C_\mu(R)$, такая, что*

$$\|M^R_{q,0}(f)\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C \|f\|_{L_p(\mathrm{X})} \quad \textit{для всех} \quad f \in L_p(\mathrm{X}). \tag{1.2.66}$$

1.2.4. **Допустимые метрические пространства.** Напомним, что при $q \in [1, \infty)$, метрическое пространство с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ называется *допускающим слабое локальное* $(1, q)$*-неравенство Пуанкаре*, если для любого $R > 0$, существуют константы $C = C(R) > 0$, $\lambda = \lambda(R) \geq 1$ такие, что для каждой функции $f \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X})$ справедливо неравенство (мы используем обозначение (1.2.41))

$$\mathcal{E}_\mu(f, B_r(x)) \leq Cr \Big(\fint_{B_{\lambda r}(x)} (\operatorname{lip} f(y))^q \, d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{для всех} \quad (x, r) \in \mathrm{X} \times (0, R]. \tag{1.2.67}$$

Замечание 1.2.68. Напомним, что неотрицательная функция $g \in \mathfrak{B}(\mathrm{X})$ называется верхним градиентом функции $f \in \mathfrak{B}(\mathrm{X})$, если для любой абсолютно непрерывной кривой $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{X}$ справедливо неравенство

$$|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| \leq \int_0^1 g(\gamma(s)) |\dot\gamma_s| \, ds,$$

где $|\dot\gamma_s|$ – так называемая метрическая скорость кривой γ в точке $s \in [0, 1]$, то есть

$$|\dot\gamma_s| := \varlimsup_{t \to s} \frac{\mathrm{d}(\gamma(s), \gamma(t))}{|t - s|}.$$

Отметим, что в литературе выполнение неравенства (1.2.67) обычно требуется для всех локально интегрируемых по мере μ функций $f \in \mathfrak{B}(\mathrm{X})$ и их верхних градиентов g. Однако, пользуясь результатами работы [21], нетрудно установить эквивалентность этих подходов.

Иными словами, неравенство (1.2.67) выполнено для всех функций $f \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X})$ в том и только том случае, когда для любой функции $f \in L_1^{loc}(\mathrm{X})$ и любого её верхнего градиента g справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_\mu(f, B_r(x)) \le Cr\Big(\fint\limits_{B_{\lambda r}(x)} (g(y))^q \, d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{q}} \quad \text{при всех} \quad (x,r) \in \mathrm{X}\times(0,R]. \tag{1.2.69}$$

При этом константа $C > 0$ в (1.2.69) та же, что и в (1.2.67).

Очень близкий по смыслу результат установлен в теореме 8.4.2 из [71].

Мы всегда будем иметь дело с особым классом метрических пространств с мерой. Этот класс широко применим во многих разделах геометрического анализа.

Определение 1.2.70. При $q \in [1,\infty)$ говорят, что метрическое пространство с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ является *q-допустимым* и пишут $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_q$, если μ обладает свойством равномерно локально удвоения, а X допускает слабое локальное $(1,q)$-неравенство Пуанкаре.

Иногда нам будет необходимо использовать очень мощный результат Кейта и Зонга (см. детальное доказательство и историю вопроса в главе 12 книги [71]).

Предложение 1.2.71. *Пусть $p \in (1,\infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Тогда $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_q$ при некотором $q \in [1,p)$.*

Теперь мы приведем базовые свойства p-допустимых м.п.м., которые будут использоваться в дальнейшем. Напомним полезное определение, часто встречающееся в современном геометрическом анализе (см., например, [71]).

Определение 1.2.72. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство. Будем говорить, что X *квазивыпукло*, если существует константа $L > 0$ такая, что для любых двух точек $x, y \in \mathrm{X}$ найдется спрямляемая кривая $\Gamma_{x,y}$ такая, что $l(\Gamma_{x,y}) \le L\,\mathrm{d}(x,y)$.

Скажем, что пространство X *локально квазивыпукло*, если для любого $R > 0$ существует такая константа $L(R) > 0$, что для любых двух точек $x, y \in \mathrm{X}$ с расстоянием $\mathrm{d}(x,y) \le R$ найдется спрямляемая кривая $\Gamma_{x,y}$, для которой $l(\Gamma_{x,y}) \le L(R)\,\mathrm{d}(x,y)$.

Если $\sup_{R>0} L(R) = 1$, то X называется *геодезическим* метрическим пространством.

Предложение 1.2.73. *Пусть $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$ при некотором $p \in [1,\infty)$. Тогда пространство* X *обладает следующими свойствами:*

(1) *метрическое пространство* (X, d) *локально квазивыпукло;*

(2) *для любого $R > 0$ существует такое число $Q > 0$, что мера μ имеет свойство относительного убывания объёма порядка Q, то есть существует такая константа $\overline{C}(R, Q) > 0$, что для любых шаров $\underline{B} \subset \overline{B}$ с радиусами $0 < r_{\underline{B}} \le r_{\overline{B}} \le R$ справедливо неравенство*

$$\Big(\frac{r_{\underline{B}}}{r_{\overline{B}}}\Big)^{Q} \le \overline{C}(R, Q)\frac{\mu(\underline{B})}{\mu(\overline{B})}; \tag{1.2.74}$$

(3) *для любого $R > 0$ существует такое число $q > 0$, что мера μ имеет свойство обратного относительного убывания объёма порядка q, то есть существует такая константа $\underline{C}(R, q) > 0$, что для любых шаров $\underline{B} \subset \overline{B}$ с радиусами $0 < r_{\underline{B}} \le r_{\overline{B}} \le R$ справедливо неравенство*

$$\frac{\mu(\underline{B})}{\mu(\overline{B})} \le \underline{C}(R, q)\Big(\frac{r_{\underline{B}}}{r_{\overline{B}}}\Big)^{q}. \tag{1.2.75}$$

Доказательство. Для доказательства (1) достаточно повторить с соответствующими техническими модификациями рассуждения из доказательства теоремы 8.3.2 в [71] с учётом замечания 1.2.68.

Чтобы установить (2) нужно повторить с незначительными модификациями рассуждения из доказательства леммы 8.1.13 в [71].

Для доказательства (3) достаточно повторить с незначительными модификациями рассуждениями из замечания 8.1.15 в [71]. □

Имея в нашем распоряжении предложение 1.2.73,

Определение 1.2.76. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой, а мера μ обладает равномерно локальным свойством удвоения. При $R > 0$ через $\mathrm{Q}_{\mu}(R)$ обозначим множество всех $Q > 0$, для которых справедливо (1.2.74). Кроме того, положим

$$\underline{Q}_{\mu}(R) := \inf\{Q : Q \in \mathrm{Q}_{\mu}(R)\}.$$

Аналогично, через $\mathrm{q}_{\mu}(R)$ обозначим множество всех $q > 0$, для которых справедливо (1.2.75). Положим

$$\overline{q}_{\mu}(R) := \sup\{q : q \in \mathrm{q}_{\mu}(R)\}.$$

Замечание 1.2.77. Ясно, что $\overline{q}_{\mu}(R) \le \underline{Q}_{\mu}(R)$ при любом $R > 0$. К сожалению, при заданном $R > 0$ во многих случаях существует зазор между этими параметрами, то есть $\overline{q}_{\mu}(R)$ может быть гораздо меньше чем $\underline{Q}_{\mu}(R)$. Читатель может найти интересные примеры, иллюстрирующие этот феномен в [92].

В качестве наиболее простого примера рассмотрим пространство $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2, \mu)$, в котором μ – весовая мера Лебега. Более точно, $\mu = \gamma\mathcal{L}^2$, где вес $\gamma(x) = \frac{1}{\|x\|_2}$ при $x \in \mathbb{R}^2$. Нетрудно показать, что $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_1$, при этом $\overline{q}_\mu(1) = 1$, а $\underline{Q}_\mu(1) = 2$.

1.2.5. **Меры и обхваты по Хаусдорфу.** Хорошо известно, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ так называемые d-меры Хаусдорфа являются полезным инструментом для измерения некоторых множеств $\mathcal{L}^n$-меры нуль.

Определение 1.2.78. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой и пусть $d \geq 0$. Для любого множества $E \subset \mathrm{X}$ и любого $\delta \in (0, +\infty]$ положим

$$\mathcal{H}^d_\delta(E) := \inf\{\sum (\operatorname{diam} B_{r_i}(x_i))^d : E \subset \cup_i B_{r_i}(x_i)\}, \tag{1.2.79}$$

где инфимум взят по всем не более чем счётным покрытиям E замкнутыми шарами $\{B_{r_i}(x_i)\}$ с диаметрами $\operatorname{diam} B_{r_i}(x_i) < \delta$. При $\delta > 0$ отображение $\mathcal{H}^d_\delta : 2^{\mathrm{X}} \to [0, +\infty]$ называется *d-обхватом по Хаусдорфу* на масштабе δ. Определим также *d-меру Хаусдорфа* равенством

$$\mathcal{H}^d(E) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^d_\delta(E). \tag{1.2.80}$$

Замечание 1.2.81. Для дальнейшего важно заметить, что наше определение меры Хаусдорфа слегка отличается от общепринятого в классической литературе [19, 44, 93]. Обычно инфимум в (1.2.79) берётся по всем возможным покрытиям произвольными множествами. Иными словами, следуя [44] (см. параграф 1.2 там), для любого множества $E \subset \mathrm{X}$ положим

$$\widetilde{\mathcal{H}}^d_\delta(E) := \inf\{\sum (\operatorname{diam} U_i)^d : E \subset \cup_i U_i\}, \tag{1.2.82}$$

где инфимум взят по всем не более чем счётным покрытиям $\{U_i\}$ множества E произвольными множествами $U_i \subset \mathrm{X}$ с диаметрами $\operatorname{diam} U_i < \delta$. Соответственно положим

$$\widetilde{\mathcal{H}}^d(E) := \lim_{\delta \to 0} \widetilde{\mathcal{H}}^d_\delta(E). \tag{1.2.83}$$

Нетрудно показать, что (поскольку для любого ограниченного $U \subset \mathrm{X}$ существует замкнутый шар $B \supset U$ радиуса не более $\operatorname{diam} U$)

$$2^{-d}\mathcal{H}^d(E) \leq \widetilde{\mathcal{H}}^d(E) \leq \mathcal{H}^d(E). \tag{1.2.84}$$

К сожалению, в силу замечания 1.2.77 даже в случае допустимых м.п.м. $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ мера шара $\mu(B_r(x))$ как функция от r (при фиксированном x) не является, вообще говоря, степенью r. Таким образом, естественно рассмотреть *коразмерностные аналоги* для привычных мер Хаусдорфа и обхватов по Хаусдорфу, соответственно. По-видимому, впервые такого сорта определения рассматривались в [20], а затем использовалось многими авторами. В контексте проблемы следов пространств Соболева оно применялось в [58, 57, 90, 91, 104].

Определение 1.2.85. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой и пусть $\theta \geq 0$. Для любого множества $E \subset \mathrm{X}$ и любого $\delta \in (0, +\infty]$ положим

$$\mathcal{H}_{\theta,\delta}(E) := \inf\{\sum \frac{\mu(B_{r_i}(x_i))}{(r_i)^\theta} : E \subset \cup B_{r_i}(x_i)\}, \tag{1.2.86}$$

где инфимум взят по всем не более чем счётным покрытиям E замкнутыми шарами $\{B_{r_i}(x_i)\}$ с радиусами $r_i < \delta$. При $\delta > 0$ отображение $\mathcal{H}_{\theta,\delta} : 2^{\mathrm{X}} \to [0, +\infty]$ называется *θ-коразмерностным обхватом по Хаусдорфу* на масштабе δ. Определим также *θ-коразмерностную меру Хаусдорфа* равенством

$$\mathcal{H}_\theta(E) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_{\theta,\delta}(E). \tag{1.2.87}$$

Существует специальный класс м.п.м. для которых поведение $\mu(B_r(x))$ как функции r при фиксированном x, грубо говоря, есть r^Q при некотором $Q > 0$. Детальное обсуждение таких пространств выходит за рамки нашего исследования и составляет отдельный раздел геометрической теории меры. Мы упомянем лишь статьи [36, 76, 87, 104], содержащие интересные результаты, касающихся таких пространств.

Определение 1.2.88. При $Q > 0$ метрическое пространство с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ называется *Q-регулярным по Альфорсу*, если существуют константы $c_{\mu,1}$, $c_{\mu,2} > 0$ такие, что

$$c_{\mu,1} r^Q \leq \mu(B_r(x)) \leq c_{\mu,2} r^Q \quad \text{для всех} \quad (x, r) \in \mathrm{X} \times [0, \operatorname{diam} \mathrm{X}).$$

Замечание 1.2.89. Несмотря на кажущуюся простоту определения 1.2.88, класс Q-регулярных пространств очень широк. Он включает в себя не только фракталы, но также некоторые крайне сложно устроенные связные пространства, которые даже локально не похожи на многообразия [87].

Замечание 1.2.90. Очевидно, при $\theta \in [0, \underline{Q}_\mu)$ равенство $\mathcal{H}_\theta(\emptyset) = 0$ будет выполнено при условии существования последовательности замкнутых шаров $\{B_i\} := \{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^\infty$ с радиусами $r_i \to 0$, $i \to \infty$ такими, что $\mu(B_i)/(r_i)^\theta \to 0$, $i \to \infty$. В результате, по теореме 4.2 из [93] в этом случае $\mathcal{H}_\theta : 2^{\mathrm{X}} \to [0, +\infty]$ является борелевски регулярной внешней мерой на X. Очевидно, условие $0 \leq \theta < \overline{q}_\mu$ достаточно для существования такой последовательности. К сожалению, оно весьма далеко от того, чтобы являться необходимым.

Проблема поиска диапазона параметров, для которых $\mathcal{H}_\theta$ или $\mathcal{H}^d$ являются нетривиальными внешними мерами (то есть существуют нетривиальные подмножества конечной ненулевой меры) является весьма деликатной и зависит от конкретной структуры того или иного пространства с мерой. Ситуация достаточно прозрачна в случае Q-регулярных по Альфорсу пространств. В таком случае функция множества $\mathcal{H}_\theta$ (или равносильно $\mathcal{H}^{Q-\theta}$) является

нетривиальной внешней мерой при условии $\theta \in [0, Q)$. В случае $\theta = Q$, функция множества $\mathcal{H}_Q$ (или $\mathcal{H}^0$) – так называемая считающая мера, и $\mathcal{H}_Q(E) = \mathcal{H}^0(E) = +\infty$ для любого бесконечного множества E.

В дальнейшем нам будет полезен следующий результат из работы [57] (см. лемму 3.10 там, а также обсуждение сразу после этой леммы).

Предложение 1.2.91. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – *метрическое пространство с мерой, удовлетворяющей свойству равномерно локального удвоения. Если* $f \in L_1^{loc}(\mathrm{X})$, *то* $\mathcal{H}_t(\Lambda_t(f)) = 0$ *при любом* $t > 0$, *где* $\Lambda_t(f) := \{x \in \mathrm{X} : \overline{\lim}_{r \to 0} r^t \fint\limits_{B_r(x)} |f(y)|\, d\mu(y) > 0\}$.

1.2.6. **Множества регулярные по Альфорсу–Давиду.** Следующее понятие активно использовалось в [58, 90, 91], где изучались следы пространств Соболева на границах областей.

Определение 1.2.92. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой. Пусть μ обладает свойством равномерно локального удвоения.

При $\theta \geq 0$ множество $S \subset \mathrm{X}$ называется *θ-корегулярным по Альфорсу–Давиду*, если оно замкнуто и существуют константы $c_{\theta,1}(S), c_{\theta,2}(S) > 0$ такие, что

$$c_{\theta,1}(S)\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \leq \mathcal{H}_\theta(B_r(x) \cap S) \leq c_{\theta,2}(S)\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{для всех} \quad (x, r) \in S \times (0, 1]. \tag{1.2.93}$$

Класс всех θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств обозначим символом $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$.

При $d \geq 0$ множество $S \subset \mathrm{X}$ называется *d-регулярным по Альфорсу–Давиду*, если оно замкнуто и существуют константы $c_1^d(S), c_2^d(S) > 0$ такие, что

$$c_1^d(S) r^d \leq \mathcal{H}^d(B_r(x) \cap S) \leq c_2^d(S) r^d \quad \text{для всех} \quad (x, r) \in S \times (0, 1]. \tag{1.2.94}$$

Класс всех d-регулярных по Альфорсу–Давиду множеств обозначим символом $\mathcal{ADR}^d(\mathrm{X})$.

Замечание 1.2.95. Заметим, что для любого параметра $\theta \geq 0$, для любого множества $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$, ограничение $\mathcal{H}_\theta\lfloor_S$ меры $\mathcal{H}_\theta$ на S является локально конечной борелевски регулярной мерой и обладает свойством равномерно локального удвоения на S, то есть для любого $R > 0$ имеем

$$C_\theta(R) := \sup_{r(0,R]} \sup_{x \in S} \frac{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S(B_{2r}(x))}{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S(B_r(x))} := \sup_{r(0,R]} \sup_{x \in S} \frac{\mathcal{H}_\theta(B_{2r}(x) \cap S)}{\mathcal{H}_\theta(B_r(x) \cap S)} < +\infty.$$

Аналогичное наблюдение справедливо для множеств $S \in \mathcal{ADR}^d(\mathrm{X})$, $d \geq 0$ при замене меры $\mathcal{H}_\theta\lfloor_S$ на меру $\mathcal{H}^d\lfloor_S$.

Комбинируя эти наблюдения с теоремой Лебега о дифференцировании интеграла (см., например параграф 3.4 в книге [71]), выводим, что при $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ ($S \in \mathcal{ADR}^d(\mathrm{X})$)

для любой функции $f \in L_p(\mathcal{H}_\theta \lfloor_S)$ ($f \in L_p(\mathcal{H}^d \lfloor_S)$), существует множество $E \subset S$ с мерой $\mathcal{H}_\theta(E) = 0$ ($\mathcal{H}^d(E) = 0$) такое, что каждая точка $x \in S \setminus E$ является точкой Лебега f.

Следующее предложение показывает, что характерный масштаб 1 в (1.2.93) не столь принципиален. Доказательство весьма элементарно и легко следует из предложения 1.2.52. Мы опускаем детали.

Предложение 1.2.96. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– метрическое пространство с мерой. Пусть* μ *обладает свойством равномерно локального удвоения.*

Если $\theta \geq 0$ *и* $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$, *то для любого* $R \geq 1$ *существуют такие константы* $c_{\theta,1}(S,R) > 0$ *и* $c_{\theta,2}(S,R) > 0$, *что*

(1.2.97)

$$c_{\theta,1}(S,R)\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \leq \mathcal{H}_\theta(B_r(x) \cap S) \leq c_{\theta,2}(S,R)\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{для всех} \quad (x,r) \in S \times (0,R].$$

Если $d \geq 0$ *и* $S \in \mathcal{ADR}^d(\mathrm{X})$, *то для любого* $R \geq 1$ *существуют такие константы* $c_1^d(S,R) > 0$ *и* $c_2^d(S,R) > 0$, *что*

$$c_1^d(S,R)r^d \leq \mathcal{H}^d(B_r(x) \cap S) \leq c_2^d(S,R)r^d \quad \text{для всех} \quad (x,r) \in S \times (0,R]. \tag{1.2.98}$$

Замечание 1.2.99. При $\theta = 0$ множества $S \in \mathcal{ADR}_0(\mathrm{X})$ были названы регулярными в [111].

Существует альтернативный эквивалентный подход к определению регулярных по Альфорсу–Давиду множеств. Мы не будем приводить детального доказательства соответствующего утверждения, поскольку оно не отличается от доказательства аналогичного утверждения в $\mathbb{R}^n$ (см. теорему 1 на стр.32 в книге [78]).

Теорема 1.2.100. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– метрическое пространство с мерой. Пусть* μ *обладает свойством равномерно локального удвоения.*

При $d \geq 0$ *замкнутое множество* $S \in \mathcal{ADR}^d(\mathrm{X})$ *в том и только том случае, если существует мера* ν^d *с носителем* $\operatorname{supp}\nu^d = S$ *и константы* $c_{\nu^d,1}, c_{\nu^d,2} > 0$ *такие, что*

$$c_{\nu^d,1}r^d \leq \nu^d(B_r(x) \cap S) \leq c_{\nu^d,2}r^d \quad \text{для всех} \quad (x,r) \in S \times (0,1]. \tag{1.2.101}$$

При $\theta \geq 0$ *замкнутое множество* $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ *в том и только том случае, если существует мера* ν_θ *с носителем* $\operatorname{supp}\nu_\theta = S$ *и константы* $c_{\nu_\theta,1}, c_{\nu_\theta,2} > 0$ *такие, что*

$$c_{\nu_\theta,1}\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \leq \nu_\theta(B_r(x) \cap S) \leq c_{\nu_\theta,2}\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{для всех} \quad (x,r) \in S \times (0,1]. \tag{1.2.102}$$

1.2.7. **Пористые множества.** Во многих разделах анализа так называемые пористые множества играют значительную роль. Соответствующая литература по этому вопросу столь обширна, что мы упомянем лишь основополагающие статьи [12, 84, 105, 121], замечательный обзор [110] и монографию [93]. Грубо говоря, если $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – метрическое пространство, то $S \subset \mathrm{X}$ – пористое множество, если для любой точки $x \in S$ существуют шаровые полости в $\mathrm{X} \setminus S$ сколь угодно близкие к x, диаметр которых сравним с расстоянием от них до точки x. В несколько ином виде пористость использовал еще в 1920 г. А. Данжуа [38]. Насколько нам известно, первым, кто использовал термин "пористое множество", был Е. П. Долженко [12]. Отметим, что пористые множества возникали естественным образом в [77, 72], где изучались следы пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля на d-регулярных по Альфорсу–Давиду множествах.

Напомним слегка модифицированное определение пористого множества, использующееся обычно в литературе [110].

Определение 1.2.103. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d})$ – произвольное метрическое пространство. Для множества $S \subset \mathrm{X}$ и параметра $\sigma \in (0, 1]$ будем говорить, что шар $B = B_r(x)$ является (S, σ)-*пористым*, если найдется шар $B' = B_{r'}(x') \subset B_r(x) \setminus S$ такой, что $r' \geq \sigma r$. Семейство всех (S, τ)-пористых шаров будем обозначать через $\mathcal{POR}_S(\sigma) := \mathcal{POR}_S^{\mathrm{X}}(\sigma)$. Шар $B = B_r(x)$ называется S-*пористым*, если он (S, σ)-пористый при некотором $\sigma \in (0, 1)$.

Кроме того, при $r \in (0, 1]$ положим

$$S_r(\sigma) := \{x \in S : B_r(x) \in \mathcal{POR}_S(\sigma)\}. \tag{1.2.104}$$

Будем говорить, что S является σ-*пористым*, если $S = S_r(\sigma)$ при всех $r \in (0, 1]$.

Замечание 1.2.105. Если множество S является σ-пористым, то любой шар $B = B_r(x)$ с радиусом $r \leq 1$ является $(S, \sigma/3)$-пористым.

Действительно, рассмотрим шар $B_{\frac{r}{3}}(x)$. Если он не пересекает S, то завершаем рассмотрение. В этом случае $B_r(x)$ является $\frac{1}{3}$-пористым, а значит и $\frac{\sigma}{3}$-пористым, поскольку $\sigma \in (0, 1]$.

Если же $B_{\frac{r}{3}}(x) \cap S \neq \emptyset$, то для любого $y \in B_{\frac{r}{3}}(x) \cap S$ имеем включение $B_{\frac{r}{3}}(x) \subset B_{\frac{2r}{3}}(y)$. Учитывая, что шар $B_{\frac{2r}{3}}(y)$ является (S, σ)-пористым и $B_{\frac{2r}{3}}(y) \subset B_r(x)$, получаем, что $B_r(x)$ является $\frac{2\sigma}{3}$-пористым, а значит и $\frac{\sigma}{3}$-пористым.

Покажем теперь, что множества, регулярные по Альфорсу–Давиду обладают замечательными свойствами.

Предложение 1.2.106. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– метрическое пространство с мерой. Пусть* μ *обладает свойством равномерно локального удвоения. Тогда при* $\theta > 0$ *для любого замкнутого множества* $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ *справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mu(S) = 0$.

(2) *Существует константа* $\sigma = \sigma(S) \in (0, 1]$, *зависящая только от* θ, $c_{\theta,1}(S)$, $c_{\theta,2}(S)$, $C_\mu(1)$, *такая, что* S *является* σ*-пористым.*

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $\underline{x} \in S$ и произвольное число $R > 0$. В силу предложения 1.2.96 имеем $\mathcal{H}_\theta(S \cap B_R(\underline{x})) < +\infty$. Заметим, что при $\delta > 0$ для любого не более чем счётного покрытия замкнутыми шарами $\{B_j\} := \{B_{r_j}(x_j)\}$ множества $S \cap B_R(\underline{x})$ с радиусами $r_j < \delta$, очевидно, имеем

$$\sum \mu(B_j) \leq \delta^\theta \sum \frac{\mu(B_j)}{r_j^\theta}.$$

Следовательно, $\mu(S \cap B_R(\underline{x})) \leq \delta^\theta \mathcal{H}_{\theta,\delta}(S \cap B_R(\underline{x}))$. Пользуясь тем, что параметр $\delta > 0$ может быть выбран сколь угодно малым, учитывая определение 1.2.85, получаем $\mu(S \cap B_R(\underline{x})) = 0$. В силу произвольности выбора $R > 0$, завершаем доказательство утверждения (1).

Чтобы установить (2), мы повторим стандартные рассуждения из [76], приведённые там для случая Q-регулярных по Альфорсу метрических пространств с мерой. Фиксируем $x \in S$ и $r \in (0, \frac{1}{8}]$. Напомним обозначение (1.2.12). Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющее условию $2^{-k} \leq r$, и рассмотрим индексное множество $\mathcal{C}_k := \{\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \frac{1}{2}) : z_{k,\alpha} \in B_r(x)\}$. Положим для краткости $B_{k,\alpha} := B_{2^{-k}}(z_{k,\alpha})$. Предположим, что $B_{k,\alpha} \cap S \neq \emptyset$ для всех $\alpha \in \mathcal{C}_k$ и выберем произвольную точку $x_{k,\alpha} \in B_{k,\alpha} \cap S$. Очевидно, будем иметь включения

$$B_{\frac{1}{2^k}}(x_{k,\alpha}) \subset 2B_{k,\alpha}, \qquad B_{k,\alpha} \subset B_{\frac{2}{2^k}}(x_{k,\alpha}).$$

Тогда из свойства равномерно локального удвоения меры μ и (1.2.93) следует, что при каждом $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющим условию $2^{-k} \leq r$, для любого $\alpha \in \mathcal{C}_k$ (напомним, что $r \in (0, \frac{1}{8}]$)

$$\frac{c_{\theta,1}}{C_\mu(1)} 2^{k\theta} \mu(B_{k,\alpha}) \leq c_{\theta,1} 2^{k\theta} \mu(B_{\frac{1}{2^k}}(x_{k,\alpha})) \leq \mathcal{H}_\theta(B_{\frac{1}{2^k}}(x_{k,\alpha}) \cap S) \leq \mathcal{H}_\theta(2B_{k,\alpha} \cap S).$$

Комбинируя это наблюдение с предложением 1.2.54, замечанием 1.2.95 и неравенством в правой части (1.2.93), выводим (напомним, что $r \in (0, 1/8]$)

$$\begin{aligned} 2^{k\theta}\mu(B_r(x)) &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_k} 2^{k\theta}\mu(B_{k,\alpha}) \leq C \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_k} \mathcal{H}_\theta(2B_{k,\alpha} \cap S) \\ &\leq C\mathcal{H}_\theta(B_{3r}(x) \cap S) \leq C\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}. \end{aligned} \tag{1.2.107}$$

Отметим, что $k \in \mathbb{N}_0$ можно взять сколь угодно большим, а константа $C > 0$ в вышеприведённом неравенстве, очевидно, от k не зависит. Приходим к противоречию и заключаем, что найдётся такое число $N = N(\theta, C_\mu(1), c_{\theta,1}, c_{\theta,2}) \in \mathbb{N}$, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющего условию $2^{-k} \le \frac{r}{N}$, существует шар B_{k,α^*}, центр которого содержится в шаре $B_r(x)$, но $B_{k,\alpha^*} \cap S = \emptyset$. Очевидно, что $B_{k,\alpha^*} \subset B_{2r}(x)$. Пусть $k^* \in \mathbb{N}$ – наименьшее среди k, для которых $2^{-k} \le \frac{r}{N}$. Тогда $2^{-k^*} \ge \frac{r}{2N}$, и существует шар $B_{k^*,\alpha^*} \subset B_{2r}(x) \setminus S$. Поэтому, учитывая, что $x \in S$ и $r \in (0, \frac{1}{8}]$ были выбраны произвольно, и положив $\sigma = \frac{1}{4N}$, завершаем доказательство. □

1.2.8. **Весовые классы Макенхаупта.** Напомним определение 1.2.35. Все веса в этом пункте будут определены на конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Под кубом Q в $\mathbb{R}^n$ будем понимать только замкнутый куб с ребрами параллельными координатным осям, а символом $l(Q)$ будем обозначать его длину ребра. При $k \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ символом $Q_{k,m}$ обозначим *замкнутый двоичный куб* ранга k, то есть $Q_{k,m} := \prod_{i=1}^n \left[\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k}\right]$. Следуя [102] введём следующее понятие.

Определение 1.2.108. При $p \in (1, \infty)$ будем говорить, что $\mathcal{L}^n$-вес γ принадлежит *локальному классу Макенхаупта* $A_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при условии, что

$$C_{\gamma,p} := \sup_{l(Q)\le 1} \Big(\fint_Q \gamma(y)\,dy\Big)\Big(\fint_Q \gamma^{-\frac{p'}{p}}(y)\,dy\Big)^{\frac{p}{p'}} < +\infty. \tag{1.2.109}$$

Кроме того, $\gamma \in A_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ в том и только том случае, если при каждом $\alpha \in (0,1)$ имеем

$$C_{\gamma,\infty} := \sup_{l(Q)\le 1} \sup_{\substack{F\subset Q \\ \mathcal{L}^n(F)\ge \mathcal{L}^n(Q)}} \Big(\int_Q \gamma(y)\,dy\Big)\Big(\int_F \gamma(y)\,dy\Big)^{-1} < +\infty. \tag{1.2.110}$$

Следуя работе [95] дадим следующее определение.

Определение 1.2.111. Будем говорить, что $\mathcal{L}^n$-вес γ принадлежит *локальному классу Макенхаупта* $A_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при условии, что существует константа $C_{\gamma,1} > 0$ такая, что

$$C_{\gamma,1} := \sup_{l(Q)\le 1} \Big(\fint_Q \gamma(x)\,dx\Big)\Big(\operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q} \gamma(x)\Big)^{-1} < +\infty. \tag{1.2.112}$$

Замечание 1.2.113. Если формально взять супремум в (1.2.109), (1.2.110) и (1.2.112) по всем кубам без ограничений на длину ребра, то мы получим определения соответствующих "глобальных" классов Макенхаупта $A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$ (см. главу 5 в [119]).

Замечание 1.2.114. Характерный масштаб при определении локальных классов Макенхаупта может быть выбран произвольно. Иными словами, зафиксировав произвольное число $a > 0$,

и беря супремумы в (1.2.109), (1.2.110) и (1.2.112) по всем кубам с длинами рёбер $l(Q) \le a$, мы получим те же самые весовые классы. Доказательство этого факта можно найти в замечании 1.5 статьи [102].

Классы $A_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$ обладают многими замечательными свойствами, аналогичные тем, что присущи глобальным классам Макенхаупта $A_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. Доказательства этих утверждений содержатся в работе [102].

Лемма 1.2.115. *При $1 \le p_1 < p_2 < +\infty$ справедливы включения*

$$A_{p_1}^{loc}(\mathbb{R}^n) \subset A_{p_2}^{loc}(\mathbb{R}^n) \subset A_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Крайне полезным является следующее утверждение. Напомним обозначение (1.2.64).

Лемма 1.2.116. *Пусть $p \in [1, \infty)$ и $\gamma \in A_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $M_{1,0}^a$ является ограниченным оператором из $L_p(\gamma \mathcal{L}^n)$ в $L_p(\gamma \mathcal{L}^n)$.*

Замечание 1.2.117. Пусть $\gamma \in A_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in [1, \infty]$. Положим $\gamma_Q := \fint_Q \gamma(x)\,dx$. Покажем, что величина γ_Q обладает равномерно локальным свойством удвоения. Иными словами, для любого $a > 0$ существует константа $C > 0$ такая, что если Q – куб в $\mathbb{R}^n$ с длиной ребра $l(Q) \le a$, а $Q_1 \subset Q$ – куб с вдвое меньшей длиной ребра, то $\gamma_Q \le C\gamma_{Q_1}$.

Действительно, в случае $p = \infty$ указанное свойство вытекает непосредственно из определения класса $A_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и замечания 1.2.114. В случае $p \in [1, \infty)$ нужно воспользоваться только что отмеченным фактом и учесть лемму 1.2.116.

Используя замечание 1.2.117, сразу приходим к полезному техническому утверждению.

Предложение 1.2.118. *Пусть $a \ge 1$. При $k \in \mathbb{N}_0$, $m, m' \in \mathbb{Z}^n$, $\|m - m'\|_\infty \le a$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,inf}_{x \in Q_{k,m}} \gamma(x) \le C(C_\gamma, n, a) \operatorname*{ess\,inf}_{x \in Q_{k,m'}} \gamma(x), \\ &\int\limits_{Q_{k,m}} \gamma(x)\,dx \le C(C_\gamma, n, a) \int\limits_{Q_{k,m'}} \gamma(x)\,dx. \end{aligned} \tag{1.2.119}$$

1.2.9. **Пространства последовательностей.** При $q \in (0, \infty]$ через ℓ_q обозначим линейное пространство всех последовательностей $\{a_k\}$ с конечной (квази-)нормой $\|a_k|\ell_q\| := \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (при $q = \infty$ соответствующая норма, как обычно, определяется с помощью супремума). В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

Теорема 1.2.120. *(неравенство Харди) Пусть* $1 \le s \le \infty$ *и пусть* $\{a_j\}$, $\{\beta_j\}$ *- последовательности положительных чисел. Тогда неравенство*

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^s b_j^s\Big)^{\frac{1}{s}} \le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^s a_j^s\Big)^{\frac{1}{s}} \tag{1.2.121}$$

с очевидными модификациями в случае $s = \infty$*) справедливо с константой* $C > 0$*, не зависящей от* $\{a_j\}$ *в следующих случаях:*

1)

$$b_j \le C\Big(\sum_{k=j}^{\infty} a_k\Big), \quad \textit{если} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{j=0}^{n} \beta_j^s\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j^{-s'}\Big)^{\frac{1}{s'}} < \infty, \tag{1.2.122}$$

2)

$$b_j \le C\Big(\sum_{k=0}^{j} a_k\Big), \quad \textit{если} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j^s\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\sum_{j=0}^{n} \beta_j^{-s'}\Big)^{\frac{1}{s'}} < \infty. \tag{1.2.123}$$

Доказательство. При $s \in (1, \infty)$ доказательство можно найти в [27]. Случаи $s = 1$ и $s = \infty$ элементарны и проверяются непосредственно. □

1.3. Пространства Соболева

1.3.1. **Пространства Соболева на метрических пространствах с мерой.** Для общих м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ при $p \in (1, \infty)$ существуют по меньшей мере пять различных подходов к пространствам Соболева первого порядка на X. В литературе соответствующие пространства известны под следующими наименованиями: пространства Кореваара–Шоэна–Соболева $KS_p^1(\mathrm{X})$ [61, 83], пространства Соболева–Хайлаша $M_p^1(\mathrm{X})$ [65], пространства Соболева–Чигера $Ch_p^1(\mathrm{X})$ [36], пространства Ньютона–Соболева $N_p^1(\mathrm{X})$ [109], и собственно пространства Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$, определяемые в духе Л. Амброзио, Н. Джильи и Д. Саваре [22, 21, 23]. Подробный сравнительный анализ этих пространств можно найти в главе 10 монографии [71], в недавних лекциях Н. Джильи [62], а также в конспекте лекции Л. Амброзио, прочитанной им на международном математическом конгрессе [24].

Замечание 1.3.1. Для фиксированного м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ и параметра $p \in (1, \infty)$ существуют *канонические изометрические изоморфизмы* между пространствами $Ch_p^1(\mathrm{X})$, $N_p^1(\mathrm{X})$ и $W_p^1(\mathrm{X})$ [21]. Кроме того, если $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$, то комбинируя результаты [21] с теоремой 10.5.3 из книги [71], приходим к равенствам $KS_p^1(\mathrm{X}) = M_p^1(\mathrm{X}) = Ch_p^1(\mathrm{X}) = N_p^1(\mathrm{X}) = W_p^1(\mathrm{X})$ в смысле существования *канонических линейных изоморфизмов*, а соответствующие нормы эквивалентны. Поскольку во всех основных результатах диссертации всегда будет предполагаться, что $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$ при некотором $p \in [1, \infty)$, мы будем отождествлять указанные выше пространства типа Соболева и использовать символ $W_p^1(\mathrm{X})$ для обозначения любого из них.

Имея в виду замечание 1.3.1, мы не будем здесь напоминать все возможные определения пространств Соболева, а остановим свой выбор лишь на определении, впервые предложенным Д. Чигером [36] и модифицированным в работе [21]. Как будет ясно из дальнейших построений, этот подход позволяет быстрее прийти к решению задач о следе. Следуя [21] дадим следующее определение.

Определение 1.3.2. При $p \in (1,\infty)$ пространство Соболева (Чигера) $W_p^1(\mathrm{X})$ – это линейное пространство, состоящее из всех таких $F \in L_p(\mathrm{X})$, что $\mathrm{Ch}_p(F) < +\infty$, где $\mathrm{Ch}_p(F)$ это *p-энергия Чигера F*, определяемая формулой

$$\mathrm{Ch}_p(F) := \inf\{ \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{\mathrm{X}} (\operatorname{lip} F_n)^p \, d\mu : \{F_n\} \subset \mathrm{LIP}(\mathrm{X}),\ F_n \to F \text{ в } L_p(\mathrm{X})\}.$$

Норма в пространстве $W_p^1(\mathrm{X})$ определяется равенством

$$\|F\|_{W_p^1(\mathrm{X})} := \|F\|_{L_p(\mathrm{X})} + (\mathrm{Ch}_p(F))^{\frac{1}{p}}.$$

Замечание 1.3.3. Хорошо известно, что для каждого $p \in (1,\infty)$ и любого $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ существует корректно определенный неотрицательный элемент $|\nabla F|_{*,p} \in L_p(\mathrm{X})$, называемый *минимальным p-ослабленым уклоном F*. Более того, $(\mathrm{Ch}_p(F))^{\frac{1}{p}} = \||\nabla F|_{*,p}\|_{L_p(\mathrm{X})}$ [21]. В случае, когда X – конечномерное евклидово пространство с лебеговой мерой, либо гладкое риманово многообразие с соответствующей мерой объема, $|\nabla F|_{*,p}$ совпадает μ-п.в. с модулем обобщённого по Соболеву градиента F. Однако, в отличие от классического случая, минимальный p-ослабленный уклон может зависеть от p [41] в случае общих м.п.м. X.

Следующее утверждение важно для доказательства основных результатов главы 2.

Предложение 1.3.4. *Пусть $R > 0$, $q \in (1,\infty)$, $p \geq q$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_q$. Тогда для любого $F \in W_p^1(\mathrm{X})$*

$$\mathcal{E}_\mu(F, B_r(x)) \leq Cr\Big(\fint\limits_{B_{\lambda r}(x)} (|\nabla F|_{*,p})^q \, d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{q}} \quad \textit{для всех} \quad (x,r) \in \mathrm{X}\times(0,R], \tag{1.3.5}$$

где $C = C(R)$ и $\lambda = \lambda(R)$ – те же константы, что и в (1.2.67).

Доказательство. Согласно основным результатам [21], для любого $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ существует последовательность $\{F_n\} \subset \mathrm{LIP}(\mathrm{X})$ такая, что $F_n \to F$, $n \to \infty$ в смысле $L_p(\mathrm{X})$ и, кроме того, $\operatorname{lip} F_n \to |\nabla F|_{*,p}$, $n \to \infty$ в смысле $L_p(\mathrm{X})$. Следовательно, учитывая, что $L_p(\mathrm{X}) \subset L_q^{loc}(\mathrm{X})$, используем (1.2.67) и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Мы получаем (1.3.5) и завершаем тем самым доказательство. □

В [23] показано, что при достаточно слабых предположениях на м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$, пространство Соболева $W^1_p(\mathrm{X})$ рефлексивно при любом $p \in (1, \infty)$. В частности, справедлив следующий результат.

Предложение 1.3.6. *Пусть $p \in (1, \infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Тогда пространство $W^1_p(\mathrm{X})$ рефлексивно.*

Замечание 1.3.7. В действительности в [23] предполагалось, что метрическое пространство (X, d) обладает глобальным *метрическим свойством удвоения*. Однако, тщательный анализ соответствующих доказательств показывает, что свойство равномерно локального удвоения меры μ достаточно для доказательства рефлексивности.

1.3.2. **Ёмкость C_p.** В диссертации нам понадобится понятие так называемой соболевской C_p-емкости на метрических пространствах с мерой. Исчерпывающая теория C_p-емкости изложена, например, в главах 1,2 и 6 монографии [29]. Имея в виду теорему 6.7 из [29] мы ограничимся лишь частным случаем соответствующего определения.

Определение 1.3.8. Пусть $p \in (1, \infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Пусть $K \subset \mathrm{X}$ – произвольный компакт. Определим *C_p-емкость компакта K* равенством

$$C_p(K) := \inf\{\|F\|_{W^1_p(\mathrm{X})} : F \in \mathrm{LIP}(\mathrm{X}) \text{ и } F \geq 1 \text{ на } K\}.$$

Если $\Omega \subset \mathrm{X}$ – произвольное открытое множество, то положим

$$C_p(\Omega) := \sup\{C_p(K) : K - \text{компакт и } K \subset \Omega\}.$$

Наконец, для произвольного множества $E \subset \mathrm{X}$ положим

$$C_p(E) := \inf\{C_p(\Omega) : \Omega - \text{открытое множество и } E \subset \Omega\}.$$

Определение 1.3.9. При $p \in (1, \infty)$ будем говорить, что то или иное свойство в данном м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ выполнено *p-квазивсюду*, или p-к.в. для краткости, если оно выполнено всюду за исключением множества p-емкости нуль.

Несмотря на то, что определение ёмкости выглядит весьма неконструктивно, существуют тесные связи между емкостями и мерами Хаусдорфа, которые иногда помогают сильно упростить анализ той или иной проблемы.

Предложение 1.3.10. *Пусть $p \in (1, \infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Тогда справедливы следующие свойства:*

(1) *Для любого борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ из $\mathcal{H}_p(E) = 0$ следует $C_p(E) = 0$.*

(2) *Если* $\theta \in [0, p)$, *то для любого борелевского множества* $E \subset \mathrm{X}$ *из равенства* $C_p(E) = 0$ *следует* $\mathcal{H}_\theta(E) = 0$.

Доказательство. Свойство (1) немедленно следует из леммы 9.2.3 монографии [71] и определения функции множества $\mathcal{H}_\theta$. Свойство (2) было установлено в недавней работе [57] (см. предложение 3.11 там). □

1.3.3. **Следы пространств Соболева.** Используя понятие ёмкости C_p, введённое в предыдущем параграфе, мы намереваемся дать корректное определение следа соболевской функции. Для этого нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Предложение 1.3.11. *Пусть* $p \in (1, \infty)$ *и* $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. *Тогда для любого* $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ *существует множество* E_F *емкости* $C_p(E_F) = 0$ *такое, что*

$$\overline{F}(\underline{x}) := \overline{\lim_{r \to 0}} \fint\limits_{B_r(x)} F(y)\, d\mu(y) \in \mathbb{R} \quad \textit{при всех} \quad \underline{x} \in \mathrm{X} \setminus E_F, \tag{1.3.12}$$

и, более того, каждая точка $\underline{x} \in \mathrm{X} \setminus E_F$ *является* μ*-точкой Лебега* $\overline{F}$, *то есть*

$$\lim_{r \to 0} \fint\limits_{B_r(\underline{x})} |F(\underline{x}) - F(y)|\, d\mu(y) = 0.$$

Доказательство. Для доказательства (1) нужно повторить почти дословно рассуждения из доказательства теоремы 9.2.8 книги [71] и заметить, что требование $Q \geq 1$ в той теореме было использовано только в самом конце доказательства для доказательства интегрируемости в высокой степени. □

Определение 1.3.13. Для любого элемента $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ функция $\overline{F}$, определяемая по формуле (1.3.12), называется *p-точным представителем* элемента F.

Замечание 1.3.14. Нетрудно видеть, что p-точный представитель любого элемента $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ принадлежит классу $\mathfrak{B}(S)$.

Определение 1.3.15. Пусть $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой и $p \in (1, \infty)$. Внешняя мера $\mathfrak{m}$ на X называется *абсолютно непрерывной относительно p-ёмкости C_p*, если для всякого борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$, из $C_p(E) = 0$ следует $\mathfrak{m}(E) = 0$.

Замечание 1.3.16. Напомним определение 1.2.31. Фиксируем $p \in (1, \infty)$. Если мера $\mathfrak{m}$ на X абсолютно непрерывна относительно p-ёмкости, то для любых двух функций $F_1, F_2 \in \mathfrak{B}(\operatorname{supp} \mathfrak{m})$, отличающихся друг относительно друга лишь на множестве p-ёмкости нуль, будем иметь равенство $[F_1]_{\mathfrak{m}} = [F_2]_{\mathfrak{m}}$. Поэтому, если $[F]_p$ обозначает p-емкостной класс, то есть

множество борелевских функций, совпадающих с заданной функцией $F \in \mathfrak{B}(\operatorname{supp}\mathfrak{m})$ всюду за исключением множества p-емкости нуль, то мы полагаем $[[F]_p]_{\mathfrak{m}} := [\widetilde{F}]_{\mathfrak{m}}$ для любой функции $\widetilde{F} \in [F]_p$. Аналогично, можно немного модифицировать определение отображения $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$, разрешив ему действовать не только на индивидуальные функции, но и на соответствующие p-емкостные классы.

Определение 1.3.17. Пусть $p \in (1,\infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Пусть $S \subset \mathrm{X}$ – борелевское множеств с ёмкостью $C_p(S) > 0$. Для элемента $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ определим *p-точный след $F|_S$ элемента F на множестве S* равенством $F|_S := \{f \in \mathfrak{B}(S) : f(x) = \overline{F}(x) \text{ при } p\text{-к.в. } x \in S\}$. Более того, определим *p-точное пространство следов*, полагая

$$W_p^1(\mathrm{X})|_S := \{F|_S : F \in W_p^1(\mathrm{X})\} \tag{1.3.18}$$

и снабдим это пространство стандартной фактор-нормой, то есть

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S} := \inf\{\|F\|_{W_p^1(\mathrm{X})} : f = F|_S\}, \quad f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S.$$

Наконец скажем, что $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ является *p-точным продолжением* заданной функции $f \in \mathfrak{B}(S)$ (или p-емкостного класса $[f]_p$), если $f \in F|_S$ (если $[f]_p = F|_S$).

Иногда понятие p-точного пространства следов оказывается весьма ограничительным. Действительно, согласно классическому результату Гальярдо [55] в современной интерпретации, след классического пространства $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ отождествляется с соответствующим пространством Бесова. Но элементы пространства Бесова на гиперплоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ априори определены лишь $\mathcal{H}^{n-1}$-почти всюду. В то же время, для каждого $p \in (1,\infty)$ можно построить множества $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$, имеющие положительную p-емкость и нулевую $\mathcal{H}^{n-1}$-меру. Это мотивирует нас ввести более гибкое понятие следа. Напомним замечание 1.3.16.

Определение 1.3.19. Пусть $p \in (1,\infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Пусть $S \subset \mathrm{X}$ – борелевское множество с емкостью $C_p(S) > 0$. Пусть $\mathfrak{m}$ – ненулевая мера на X такая, что $\mathfrak{m}$ абсолютно непрерывна относительно C_p и $S \subset \operatorname{supp}\mathfrak{m}$. Для элемента $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ определим *$\mathfrak{m}$-след $F|_S^{\mathfrak{m}}$ элемента F на S* как $\mathfrak{m}$-класс эквивалентности p-точного следа, то есть $F|_S^{\mathfrak{m}} := [F|_S]_{\mathfrak{m}}$. Кроме того, определим *$\mathfrak{m}$-пространство следов* как образ p-точного пространства следов в пространстве $L_0(\mathfrak{m})$ относительно отображения $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}}$, то есть $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}} := \mathrm{I}_{\mathfrak{m}}(W_p^1(\mathrm{X})|_S)$. Снабдим это пространство соответствующей фактор-нормой, то есть положим

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}}} := \inf\{\|F\|_{W_p^1(\mathrm{X})} : f = F|_S^{\mathfrak{m}}\}, \quad f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}}. \tag{1.3.20}$$

Наконец скажем, что $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ является *$\mathfrak{m}$-продолжением* заданной функции $f \in \mathfrak{B}(S)$ (или $\mathfrak{m}$-класса эквивалентности $[f]_{\mathfrak{m}}$), если $f \in F|_S^{\mathfrak{m}}$ (если $[f]_{\mathfrak{m}} = F|_S^{\mathfrak{m}}$).

Предложение 1.3.21. *Пусть* $p \in (1,\infty)$ *и* $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. *Пусть* $\mathfrak{m}$ – *борелевски регулярная ненулевая внешняя мера на* X, *которая абсолютно непрерывна относительно* C_p. *Пусть* $S \subset \operatorname{supp}\mathfrak{m}$ – *замкнутое непустое множество. Тогда пространства* $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ *и* $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}}$ *являются банаховыми пространствами.*

Доказательство. Достаточно установить полноту пространств $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ и $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}}$. Дальнейшие рассуждения проведём лишь для пространства $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}}$, поскольку для $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ они аналогичны.

Очевидно, достаточно установить, что $N^{\mathfrak{m}} := \{F \in W_p^1(\mathrm{X}) : F|_S^{\mathfrak{m}} = 0\}$ является замкнутым линейным подпространством пространства $W_p^1(\mathrm{X})$. Действительно, зафиксируем $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ и последовательность $\{F_k\} \subset N^{\mathfrak{m}}$ такую, что $\|F - F_k\|_{W_p^1(\mathrm{X})} \to 0$, $k \to \infty$. Комбинируя предложение 7.3.1 из [71] и замечание 1.3.1, заключаем, что существует p-точный представитель $\overline{F}$ элемента F и существуют p-точные представители $\overline{F}_k$ элементов F_k, $k \in \mathbb{N}$ такие, что для некоторой строго возрастающей последовательности $\{k_s\} \subset \mathbb{N}$ и некоторого множества E_1 с ёмкостью $C_p(E_1) = 0$ имеем $\overline{F}_{k_s}(x) \to \overline{F}(x)$, $s \to \infty$ для каждого $x \in S \setminus E_1$. С другой стороны, существует множество $E_2 \subset S$, для которого $\mathfrak{m}(E_2) = 0$ и $\overline{F}_k(x) = 0$ при каждом $x \in S \setminus E_2$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В итоге, учитывая определение 1.3.15, заключаем, что $\mathfrak{m}(E_1 \cup E_2) = 0$ и $\overline{F}(x) = \lim_{s\to\infty} \overline{F}_{k_s}(x) = 0$ для всех $x \in S \setminus (E_1 \cup E_2)$. Следовательно, $F \in N^{\mathfrak{m}}$. Доказательство завершено. □

Имея в нашем распоряжении различные пространства следов, естественно определить соответствующие операторы следа и продолжения. При этом снова полезно напомнить читателю о соглашениях, принятых в замечании 1.3.16.

Определение 1.3.22. Пусть $p \in (1,\infty)$ и $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Пусть $S \subset \mathrm{X}$ – борелевское множество емкости $C_p(S) > 0$. Пусть $\mathfrak{m}$ – ненулевая мера на X, абсолютно непрерывная относительно емкости C_p, и при этом $S \subset \operatorname{supp}\mathfrak{m}$. Определим *$p$-точный оператор следа* как отображение $\operatorname{Tr}|_S$ из $W_p^1(\mathrm{X})$ в $W_p^1(\mathrm{X})|_S$, определяемое формулой $\operatorname{Tr}|_S(F) = F|_S$ при $F \in W_p^1(\mathrm{X})$. Кроме того, определим *$\mathfrak{m}$-оператор следа* равенством $\operatorname{Tr}|_S^{\mathfrak{m}} := \mathrm{I}_{\mathfrak{m}} \circ \operatorname{Tr}|_S$.

Наконец, будем говорить, что отображение $\operatorname{Ext}_{S,p} : W_p^1(\mathrm{X})|_S \to W_p^1(\mathrm{X})$ – *p-точный оператор продолжения*, если оно является правым обратным к p-точному оператору следа $\operatorname{Tr}|_S$. Будем говорить также, что отображение $\operatorname{Ext}_{S,\mathfrak{m}} : W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}} \to W_p^1(\mathrm{X})$ – *$\mathfrak{m}$-оператор продолжения*, если оно является правым обратным к $\mathfrak{m}$-оператору следа $\operatorname{Tr}|_S^{\mathfrak{m}}$.

Замечание 1.3.23. Из определений 1.3.17, 1.3.19 и 1.3.22 ясно, что p-точный оператор следа и $\mathfrak{m}$-оператор следа линейны и ограничены.

1.3.4. **Точные постановки задач о следах.** Имея в нашем распоряжении корректные определения следа функции из пространства Соболева, мы можем теперь дать аккуратные постановки задач о следах.

Первая постановка звучит следующим образом.

Проблема 1.3.24 (Проблема p-точного следа). *Пусть $p \in (1,\infty)$, а $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_p$. Пусть $S \subset \mathrm{X}$ – непустое замкнутое множество.*

(**Q**1) *Для заданной функции $f \in \mathfrak{B}(S)$, найти условия на f, необходимые и достаточные для существования p-точного продолжения $F \in W^1_p(\mathrm{X})$ функции f.*

(**Q**2) *Используя только геометрию множества S и значения функции $f \in W^1_p(\mathrm{X})|_S$ вычислить $\|f\|_{W^1_p(\mathrm{X})|_S}$ с точностью до некоторых универсальных констант.*

(**Q**3) *Существует ли ограниченный линейный p-точный оператор продолжения?*

Вторая постановка представляет собой естественную релаксацию предыдущей задачи.

Проблема 1.3.25 (Проблема $\mathfrak{m}$-следа). *Пусть $p \in (1,\infty)$ и пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_p$. Пусть $\mathfrak{m}$ – положительная локально конечная борелевски регулярная мера на X, абсолютно непрерывная относительно емкости $C_{1,p}$. Пусть $S = \operatorname{supp}\mathfrak{m}$.*

(**MQ**1) *Для заданного элемента $f \in L_0(\mathfrak{m})$ найти условия на f, необходимые и достаточные для существования $\mathfrak{m}$-продолжения $F \in W^1_p(\mathrm{X})$ элемента f.*

(**MQ**2) *Используя только геометрию множества S, свойства $\mathfrak{m}$, и значения $f \in W^1_p(\mathrm{X})|^{\mathfrak{m}}_S$ вычислить $\|f\|_{W^1_p(\mathrm{X})|^{\mathfrak{m}}_S}$ с точностью до некоторых универсальных констант.*

(**MQ**3) *Существует ли ограниченный линейный $\mathfrak{m}$-оператор продолжения?*

1.4. Релаксация свойств удвоения

Для заданного метрического пространства с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ нам в дальнейших главах придется иметь дело с мерами на X, которые не удовлетворяют свойству равномерно локального удвоения. Однако, иногда нам будет достаточно знать, что аналог свойства удвоения справедлив только для определенных последовательностей шаров. Это дает мотивировки для следующего понятия.

Определение 1.4.1. Для локально конечной борелевски регулярной меры $\mathfrak{m}$ на метрическом пространстве с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ скажем, что $\mathfrak{m}$ удовлетворяет *равномерно слабому асимптотическому свойству удвоения*, если, при каждом $c > 0$,

$$\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}}(c) := \lim_{R\to+0} \sup_{x\in\operatorname{supp}\mathfrak{m}} \inf_{r\in(0,R]} \frac{\mathfrak{m}(B_{cr}(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))} < +\infty. \tag{1.4.2}$$

Замечание 1.4.3. Термин “слабое” в вышеприведённом определении использован по той причине, что в книге [71] можно найти понятие равномерно асимптотического свойства удвоения, которое означает, что

$$\overline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}}(c) := \lim_{R\to+0} \sup_{x\in\operatorname{supp}\mathfrak{m}} \sup_{r\in(0,R]} \frac{\mathfrak{m}(B_{cr}(x))}{\mathfrak{m}(B_r(x))} < +\infty.$$

Обычно мы будем работать с мерами, которые не могут вырождаться слишком сильно.

Определение 1.4.4. Будем говорить, что мера $\mathfrak{m}$ на м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ является *слабо неколлапсирующей*, если она борелевски регулярна, локально конечна и

$$C_\mu^{\mathfrak{m}} := \inf_{x\in\operatorname{supp}\mathfrak{m}} \varliminf_{r\to 0} \frac{\mathfrak{m}(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} > 0. \tag{1.4.5}$$

Хорошо известно, что произвольная локально конечная борелевски регулярная мера $\mathfrak{m}$ на евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ обладает достаточно богатым запасом шаров, на которых она обладает свойством удвоения. Этот факт упоминался в работе [120] без доказательства. Мы благодарим Д. М. Столярова, который любезно поделился основной идеей соответствующего доказательства. Используя близкую по смыслу идею, мы установим следующий простой результат, который будет играть важную роль в дальнейшем. Напомним свойство (2) предложения 1.2.73, а также напомним определение 1.2.76.

Лемма 1.4.6. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– м.п.м., в котором мера* μ *обладает равномерно локальным свойством удвоения. Если мера* $\mathfrak{m}$ *на* X *слабо неколлапсирующая, то* $\mathfrak{m}$ *удовлетворяет равномерно слабому асимптотическому свойству удвоения. Более того, для каждого* $c > 1$ *и* $Q \in \mathrm{Q}_\mu(1)$ *справедливо неравенство*

$$\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}}(c) \le 2^{([\log_2 c]+1)Q}. \tag{1.4.7}$$

Доказательство. Фиксируем $c > 1$ и положим $\underline{k} := [\log_2 c] + 1$. Чтобы доказать (1.4.7), предположим противное, то есть $\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}}(c) > 2^{\underline{k}Q}$. Зафиксируем $M \in (2^{\underline{k}Q}, \underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}}(c))$. Из (1.4.2) вытекает существование точки $\underline{x} \in \operatorname{supp}\mathfrak{m}$ и числа $\overline{r} = \overline{r}(M, c) \in (0, 1)$ таких, что

$$\frac{\mathfrak{m}(B_{cr}(\underline{x}))}{\mathfrak{m}(B_r(\underline{x}))} > M \quad \text{для всех} \quad r \in (0, \overline{r}]. \tag{1.4.8}$$

По определению 1.4.4, очевидно, имеем

$$\varlimsup_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(\underline{x}))}{\mathfrak{m}(B_r(\underline{x}))} \le \frac{1}{C_\mu^{\mathfrak{m}}}. \tag{1.4.9}$$

Следовательно, комбинируя (1.2.74) с (1.4.8) и (1.4.9), мы получим для всех достаточно больших чисел $i \in \mathbb{N}$ цепочку неравенств

$$2^{-Q\underline{k}i} \le \overline{C}(1,Q)\frac{\mu(B_{\frac{\overline{r}}{2^{i\underline{k}}}}(\underline{x}))}{\mu(B_{\overline{r}}(\underline{x}))}$$
$$= \overline{C}(1,Q)\frac{\mu(B_{\frac{\overline{r}}{2^{i\underline{k}}}}(\underline{x}))}{\mathfrak{m}(B_{\frac{\overline{r}}{2^{i\underline{k}}}}(\underline{x}))}\frac{\mathfrak{m}(B_{\overline{r}}(\underline{x}))}{\mu(B_{\overline{r}}(\underline{x}))}\frac{\mathfrak{m}(B_{\frac{\overline{r}}{2^{i\underline{k}}}}(\underline{x}))}{\mathfrak{m}(B_{\overline{r}}(\underline{x}))} \le \frac{2\overline{C}(1,Q)}{C^{\mathfrak{m}}_{\mu}}\frac{\mathfrak{m}(B_{\overline{r}}(\underline{x}))}{\mu(B_{\overline{r}}(\underline{x}))}\Big(\frac{1}{M}\Big)^{i}.$$

Но тогда, оставляя фиксированными $\underline{x}$ и $\overline{r}$, взяв i достаточно большим, мы получаем противоречие с выбором M.

Лемма полностью доказана. □

Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой. Напомним обозначение (1.2.61). Для заданной последовательности локально конечных борелевски регулярных мер $\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ на X, параметра $\epsilon \in (0,1)$ и борелевского множества $E \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{supp}\mathfrak{m}_k$, для любого $x \in E$ мы введем *нижнюю* и *верхнюю* $(\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon)$-плотности E в x, соответственно, полагая

$$\underline{D}_E^{\{\mathfrak{m}_k\}}(x,\epsilon) := \varliminf_{r\to 0}\frac{\mathfrak{m}_{k_\epsilon(r)}(B_r(x)\cap E)}{\mathfrak{m}_{k_\epsilon(r)}(B_r(x))}, \quad \overline{D}_E^{\{\mathfrak{m}_k\}}(x,\epsilon) := \varlimsup_{r\to 0}\frac{\mathfrak{m}_{k_\epsilon(r)}(B_r(x)\cap E)}{\mathfrak{m}_{k_\epsilon(r)}(B_r(x))}. \tag{1.4.10}$$

Скажем, что $x \in E$ является $(\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon)$-*точкой плотности множества* E, если

$$\underline{D}_E^{\{\mathfrak{m}_k\}}(x,\epsilon) = \overline{D}_E^{\{\mathfrak{m}_k\}}(x,\epsilon) = 1.$$

Ясно, что, если существует локально конечная борелевски регулярная мера $\mathfrak{m}$ на X, для которой $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$, то получаются определения нижней и верхней $\mathfrak{m}$-плотности E в x, соответственно. Они будут обозначаться символами $\underline{D}_E^{\mathfrak{m}}(x)$ и $\overline{D}_E^{\mathfrak{m}}(x)$, соответственно (в этом случае выбор параметра ϵ не важен, и мы будем опускать его в обозначениях).

Хорошо известно, что, если мера $\mathfrak{m}$ на X обладает равномерно локальным свойством удвоения, то $\mathfrak{m}$-почти каждая точка $x \in E$ является $\mathfrak{m}$-точкой плотности множества E. К сожавлению, это не так в общем случае. Однако, справедлив следующий результат.

Лемма 1.4.11. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ *– м.п.м., в котором* μ *обладает равномерно локальным свойством удвоения. Пусть* $\mathfrak{m}$ *– слабо неколлапсирующая мера на* X. *Пусть фиксировано борелевское множество* $E \subset \mathrm{X}$ *и параметр* $c \ge 1$. *Тогда для* $\mathfrak{m}$*-почти каждой точки* $x \in E$ *существует такая убывающая к нулю последовательность* $\{r_l(x)\}$, *что*

$$\varlimsup_{l\to\infty}\frac{\mathfrak{m}(B_{cr_l(x)}(x))}{\mathfrak{m}(B_{r_l(x)}(x))} \le N \quad \textit{и} \quad \varliminf_{l\to\infty}\frac{\mathfrak{m}(B_{r_l(x)}(x)\cap E)}{\mathfrak{m}(B_{r_l(x)}(x))} \ge \frac{1}{2N}, \tag{1.4.12}$$

где $N = \underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}}(5c)$. *В частности,* $\overline{D}_E^{\mathfrak{m}}(x) > 0$ *для* $\mathfrak{m}$*-п.в.* $x \in E$.

Доказательство. В силу леммы 1.4.6 (применим её с параметром $5c$ вместо c), для каждой точки $x \in E$ существует последовательность $r_l(x) \downarrow 0$ такая, что

$$\frac{\mathfrak{m}(B_{cr_l(x)}(x))}{\mathfrak{m}(B_{\frac{r_l(x)}{5}}(x))} \le \underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}}(5c) = N \quad \text{для всех} \quad l \in \mathbb{N}.$$

Но тогда, очевидно, что

$$\max\Big\{\frac{\mathfrak{m}(B_{cr_l(x)}(x))}{\mathfrak{m}(B_{r_l(x)}(x))}, \frac{\mathfrak{m}(B_{r_l(x)}(x))}{\mathfrak{m}(B_{\frac{r_l(x)}{5}}(x))}\Big\} \le N \quad \text{для всех} \quad l \in \mathbb{N}. \tag{1.4.13}$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$G_n := \Big\{x \in E : \varliminf_{l\to\infty} \frac{\mathfrak{m}(B_{r_l(x)}(x) \cap E)}{\mathfrak{m}(B_{r_l(x)}(x))} < \frac{1}{n}\Big\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{m}(G_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N} \cap (2N, +\infty)$. Без ограничения общности можно считать, что все множества G_n, $n \in \mathbb{N}$ ограничены (действительно, можно всегда пересечь G_n с достаточно большим шаром и показать, что полученное пересечение имеет нулевую меру). Следовательно, так как мера $\mathfrak{m}$ локально конечная, до конца доказательства мы можем считать, что $\mathfrak{m}(G_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Применяя лемму 1.2.5, и, учитывая борелевскую регулярность меры $\mathfrak{m}$ (здесь нам удобно рассматривать $\mathfrak{m}$ именно как внешнюю меру, при этом измеримость G_n не доказывается и не предполагается), получим при каждом $n \in \mathbb{N}$, существование семейства замкнутых шаров $\mathcal{B}_n = \{B_{r_{l_i}(x_i)}(x_i)\}$ такого, что:

(1) семейство $\widetilde{\mathcal{B}}_n := \{\frac{1}{5}B : B \in \mathcal{B}_n\}$ дизъюнктно;

(2) $G_n \subset \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}_n\} \subset U_{\varepsilon_n}(G_n)$ при некотором $\varepsilon_n > 0$;

(3) $|\mathfrak{m}(U_{\varepsilon_n}(G_n)) - \mathfrak{m}(G_n)| < \frac{1}{2n}$;

(4) $\mathfrak{m}(B) \le \frac{3}{2}N\mathfrak{m}(\frac{1}{5}B)$ для всех $B \in \mathcal{B}_n$;

(5) $\mathfrak{m}(B \cap E) < \frac{1}{n}\mathfrak{m}(B)$ для всех $B \in \mathcal{B}_n$.

Зафиксируем произвольное число $n > 2N$ и предположим, что $\mathfrak{m}(G_n) > 0$. Следовательно, взяв достаточно малое $\varepsilon > 0$, из свойств (1)–(5) и (1.4.13) выводим оценку

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(G_n) &\le \sum\{\mathfrak{m}(B \cap G_n) : B \in \mathcal{B}_n\} \le \sum\{\mathfrak{m}(B \cap E) : B \in \mathcal{B}_n\} \\ &\le \frac{3N}{2n}\sum\{\mathfrak{m}(\frac{1}{5}B) : B \in \mathcal{B}_n\} \le \frac{3N}{2n}\mathfrak{m}(U_{\varepsilon_n}(G_n)) \le \frac{2N}{n}\mathfrak{m}(G_n) < \mathfrak{m}(G_n).\end{aligned}$$

Это противоречит предположению $\mathfrak{m}(G_n) > 0$.

В результате мы получаем $\mathfrak{m}(G_n) = 0$ для всех $n > 2N$. Комбинируя этот факт вместе с (1.4.13), завершаем доказательство.

□

Теперь мы введем новое понятие, которое можно рассматривать как естественное обобщение понятия точки Лебега локально интегрируемой функции. Наше новое определение будет крайне полезно при анализе поточечных свойств следов функций из пространств Соболева. Напомним обозначение(1.2.61).

Определение 1.4.14. Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ – метрическое пространство с мерой. Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} = \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность локально конечных борелевски регулярных мер на X такая, что для некоторого непустого замкнутого множества $S \subset \mathrm{X}$ равенство $\operatorname{supp} \mathfrak{m}_k = S$ справедливо при всех $k \in \mathbb{N}_0$ и все меры $\mathfrak{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ абсолютно непрерывны относительно меры $\mathfrak{m}_0$. При $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ и $\epsilon \in (0,1)$ скажем, что $\underline{x} \in S$ является $(\{\mathfrak{m}_k\}, \epsilon)$-*точкой Лебега* f, если существует такой борелевский представитель $\overline{f}$ элемента f, для которого

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B_r(\underline{x})} |\overline{f}(\underline{x}) - f(y)| \, d\mathfrak{m}_{k_\epsilon(r)}(y) = 0. \tag{1.4.15}$$

Через $\mathfrak{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(f)$ обозначим множество всех $(\{\mathfrak{m}_k\}, \epsilon)$-точек Лебега f.

Если найдется локально конечная борелевски регулярная мера $\mathfrak{m}$ на X, для которой $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$, то $(\{\mathfrak{m}_k\}, \epsilon)$-точку Лебега f будем называть $\mathfrak{m}$-*точкой Лебега* f (в этом случае параметр ϵ не важен, и мы опускаем его в наших обозначениях).

1.5. d-толстые и θ-котолстые множества

На протяжении всего парграфа мы считаем фиксированным м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$, *в котором мера* μ *обладает равномерно локальным свойством удвоения.*

Напомним (1.2.79), (1.2.86) и определение 1.2.92. Введём естественные обобщения классов $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ и $\mathcal{ADR}^d(\mathrm{X})$, соответственно.

Определение 1.5.1. При $\theta \geq 0$ и $\lambda > 0$ скажем, что множество $S \subset \mathrm{X}$ является (θ, λ)-*котолстым*, если

$$\lambda \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \leq \mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x) \cap S) \quad \text{для всех} \quad (x,r) \in S \times (0,1]. \tag{1.5.2}$$

Класс всех (θ, λ)-котолстых множеств обозначим через $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X}, \lambda)$. Положим $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X}) := \cup_{\lambda>0} \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X}, \lambda)$ и скажем, что множество S является θ-*котолстым*, если $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$.

При $d \geq 0$, $\lambda > 0$ будем говорить, что множество $S \subset \mathrm{X}$ является (d, λ)-*толстым*, если

$$\lambda r^d \leq \mathcal{H}_r^d(B_r(x) \cap S) \quad \text{для всех} \quad (x,r) \in S \times (0,1]. \tag{1.5.3}$$

Класс всех (d, λ)-толстых множеств обозначим через $\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X}, \lambda)$. Положим $\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X}) := \cup_{\lambda>0} \mathcal{LCR}^d(\mathrm{X}, \lambda)$ и скажем, что множество S является d-*толстым*, если $S \in \mathcal{LCR}^d(\mathrm{X})$.

Замечание 1.5.4. Пусть $\theta \geq 0$, $r > 0$ и $c \geq 1$. Очевидно, что $\mathcal{H}_{\theta,cr}(E) \leq \mathcal{H}_r(E)$ для любого множества $E \subset \mathrm{X}$. С другой, стороны, используя свойство равномерно локального удвоения меры μ, нетрудно показать, что для некоторой константы $C > 0$, зависящей лишь от θ и $C_\mu(cr)$, имеем $\mathcal{H}_r(B_r(x) \cap E) \leq C\mathcal{H}_{\theta,cr}(B_r(x) \cap E)$ для любого $x \in \mathrm{X}$. Аналогичные наблюдения справедливы и для $\mathcal{H}^d_r$ при $d, r > 0$. Таким образом, вместо обхватов $\mathcal{H}_{\theta,r}$ и $\mathcal{H}^d_r$ в определении 1.5.1 можно было бы использовать $\mathcal{H}_{\theta,cr}$ и $\mathcal{H}^d_{cr}$, соответственно.

Замечание 1.5.5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, \mathcal{L}^n)$ и $S \subset \mathbb{R}^n$. Легко видеть, что при $\theta \in [0, n]$, $d = n - \theta$ и $\lambda > 0$ следующие условия эквивалентны:

(1) множество S принадлежит $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X}, \lambda)$;

(2) множество S принадлежит $\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X}, \lambda)$;

(3) справедливо неравенство

$$\mathcal{H}_{\theta,\infty}(B_r(x) \cap S) \geq \widetilde{\lambda}\frac{\mathcal{L}^n(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{при всех} \quad (x, r) \in S \times (0, 1]; \tag{1.5.6}$$

(4) справедливо неравенство

$$\mathcal{H}^d_\infty(B_r(x) \cap S) \geq \widetilde{\lambda} r^d \quad \text{при всех} \quad (x, r) \in S \times (0, 1]. \tag{1.5.7}$$

При этом имеем оценки $\widetilde{\lambda} \leq \lambda \leq C\widetilde{\lambda}$ с некоторой универсальной константой $C > 0$, зависящей лишь от n и d, но не зависящей от множества S.

Иными словами, в евклидовом случае можно заменить $\mathcal{H}_{\theta,r}$ и $\mathcal{H}^d_r$ на $\mathcal{H}_{\theta,\infty}$ и $\mathcal{H}^d_\infty$ соответственно. Отметим, что d-толстые множества в $\mathbb{R}^n$ при $d \in [0, n]$, по видимому, впервые рассматривались В. Рычковым [101]. Затем они активно изучались в [25, 26], где были названы d-регулярными снизу в смысле обхвата по Хаусдорфу, этим и объясняется выбор нашей аббревиатуры $\mathcal{LCR}$ от английского "lower content regular". В случае общих метрических пространств с мерой классы $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ и $\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X})$ рассматриваются нами впервые.

Важно отметить, что в случае общих метрических пространств с мерой замена $\mathcal{H}_{\theta,r}$ на $\mathcal{H}_{\theta,\infty}$ может привести к более узкому классу множеств. Таким образом, мы даём естественное обобщение определения Рычкова и не уменьшаем общность.

Замечание 1.5.8. Очевидно, при $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2$ имеем $\mathcal{LCR}_{\theta_1}(\mathrm{X}) \subset \mathcal{LCR}_{\theta_2}(\mathrm{X})$. Аналогично, при $0 \leq d_1 \leq d_2$ имеем $\mathcal{LCR}^{d_2}(\mathrm{X}) \subset \mathcal{LCR}^{d_1}(\mathrm{X})$.

Замечание 1.5.9. Легко видеть, что при $\theta \geq 0$ для произвольных множеств $S^1, S^2 \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ их объединение $S = S^1 \cup S^2$ также принадлежит классу $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$. Аналогичное утверждение справедливо при $d \geq 0$ с заменой класса $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ на класс $\mathcal{LCR}^d(\mathrm{X})$.

Прежде всего мы докажем, что запас θ-котолстых множеств не меньше чем запас θ-корегулярных по Альфорсу–Давиду множеств.

Лемма 1.5.10. *При каждом $\theta \geq 0$ справедливо включение $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X}) \subset \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ пуст, то доказательство очевидно. Иначе, фиксируем $\theta \geq 0$ и множество $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$. Предположим, что $S \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольный замкнутый шар $B_r(x)$ с центром в точке $x \in S$ и радиусом $r \in (0,1]$. Пусть $\mathcal{B}$ – не более чем счётное семейство замкнутых шаров такое, что $B_r(x) \cap S \subset \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$, радиусы $r_B < r$ для всех $B \in \mathcal{B}$ и, кроме того,

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^\theta} \leq 2\mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x)\cap S). \tag{1.5.11}$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $B \cap S \neq \emptyset$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Для каждого $B \in \mathcal{B}$ выберем произвольную точку $x_B \in B \cap S$ и рассмотрим шар $\widetilde{B}$ с центром в x_B с радиусом $2r_B$. Очевидно, $B \cap S \subset \widetilde{B} \cap S$ и $\widetilde{B} \subset 4B$ для всех $B \in \mathcal{B}$. В силу свойства равномерно локального удвоения меры μ отсюда следует, что для всех $B \in \mathcal{B}$ справедливо неравенство

$$\mu(B) \geq (C_\mu(1))^{-2}\mu(4B) \geq (C_\mu(1))^{-2}\mu(\widetilde{B}).$$

Следовательно, используя (1.5.11), свойство субаддитивности $\mathcal{H}_\theta$ и предложение 1.2.96, мы выводим требуемую оценку

$$\begin{aligned} 2\mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x)\cap S) &\geq \frac{1}{(C_\mu(2))^2}\sum_{B\in\mathcal{B}}\frac{\mu(\widetilde{B})}{(r_{\widetilde{B}})^\theta} \geq \frac{1}{c_{\theta,2}(S,2)(C_\mu(2))^2}\sum_{B\in\mathcal{B}}\mathcal{H}_\theta(\widetilde{B}\cap S) \\ &\geq \frac{1}{c_{\theta,2}(S,2)(C_\mu(2))^2}\mathcal{H}_\theta(B_r(x)\cap S) \geq \frac{c_{\theta,1}(S,1)}{c_{\theta,2}(S,2)(C_\mu(2))^2}\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}. \end{aligned}$$

Доказательство завершено. □

Следующий пример демонстрирует, что, если пространство X достаточно регулярно, то классы $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$, $\theta \geq 0$ весьма широки. Напомним определение 1.2.88.

Пример 1.5.12. Предположим, что пространство X является Q-регулярным по Альфорсу при некотором $Q > 0$. Зафиксируем $\theta \in [\max\{0, Q-1\}, Q)$ и покажем, что любое линейно-связное множество $S \subset \mathrm{X}$ принадлежит классу $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$. Действительно, фиксируем $x \in S$, $r \in (0,1]$ и рассмотрим два случая. В первом случае $S \subset B_r(x)$. Следовательно,

$$\mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x)\cap S) = \mathcal{H}_{\theta,r}(S) \geq \mathcal{H}_{\theta,1}(S)r^{Q-\theta} \geq \frac{\mathcal{H}_{\theta,1}(S)}{c_{\mu,2}}\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}. \tag{1.5.13}$$

Во втором случае существует точка $y \in S \setminus B_r(x)$. Следовательно, существует кривая $\gamma_{x,y}$, соединяющая x и y. Пусть $\mathcal{B}$ – такое не более чем счётное семейство замкнутых шаров, что $B_r(x) \cap S \subset \cup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ и $r_B < r$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Рассмотрим семейство

$$\underline{\mathcal{B}} := \{\operatorname{int}(2B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

В силу предложения 1.2.56 множество $\gamma_{x,y} \cap B_r(x)$ является компактом. Кроме того, нетрудно видеть, что существует связная замкнутая компонента $\Gamma \subset \gamma_{x,y} \cap B_r(x)$ такая, что $\operatorname{diam}\Gamma \geq r$. Следовательно, поскольку $\underline{\mathcal{B}}$ – открытое покрытие связного компакта Γ, существует конечное семейство $\{B_i\}_{i=1}^N \subset \mathcal{B}$, $N \in \mathbb{N}$, для которого

$$\Gamma \subset \cup_{i=1}^N \operatorname{int} 2B_i \text{ и } \Gamma \cap \operatorname{int} 2B_i \cap \operatorname{int} 2B_{i+1} \neq \emptyset \text{ при всех } i \in \{1, ..., N-1\}.$$

Но тогда, используя неравенство треугольника, выводим ключевую оценку

$$r \leq \operatorname{diam}(\Gamma) \leq \sum_{i=1}^N \operatorname{diam}(\Gamma \cap \operatorname{int} 2B_i) \leq \sum_{i=1}^N \operatorname{diam}(\operatorname{int} 2B_i) \leq \sum_{i=1}^N 4r_{B_i}.$$

В результате, поскольку $Q - \theta \in (0, 1]$, получаем

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^\theta} \geq c_{\mu,1} \sum_{B\in\underline{\mathcal{B}}} (r_B)^{Q-\theta} \geq c_{\mu,1} \Big(\sum_{i=1}^N r_{B_i}\Big)^{Q-\theta} \geq c_{\mu,1} \Big(\frac{r}{4}\Big)^{Q-\theta}. \tag{1.5.14}$$

Взяв инфимум в (1.5.14) по всем семействам $\mathcal{B}$, получим

$$\mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x) \cap S) \geq c_{\mu,1} \Big(\frac{r}{4}\Big)^{Q-\theta} \geq \frac{c_{\mu,1}}{4^{Q-\theta} c_{\mu,2}} \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}. \tag{1.5.15}$$

Наконец, комбинируя (1.5.13) и (1.5.15), завершаем доказательство требуемого утверждения.

Замечание 1.5.16. Даже в случае $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|, \mathcal{L}^2)$, очевидно, что существуют линейно связные множества $S \subset \mathrm{X}$, которые не могут быть d-регулярными по Альфорсу–Давиду ни при каком $d \in [0, n]$. Простейший пример можно получить на двумерной евклидовой плоскости, где в качестве S выступает множество, полученное приклеиванием единичного отрезка к единичному диску в одной граничной точке диска.

Наиболее простой пример множества $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X}) \setminus \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ можно построить, объединив регулярные по Альфорсу–Давиду множества разной размерности. Формализуем это в следующем определении.

Определение 1.5.17. Будем говорить, что замкнутое множество $S \subset \mathrm{X}$ является *кусочно регулярным по Альфорсу–Давиду*, если существуют числа $0 \leq \theta_1(S) < ... < \theta_N(S) < \underline{Q}_\mu$, $N \in \mathbb{N}$ и множества $S^i \in \mathcal{ADR}_{\theta_i(S)}(\mathrm{X})$ такие, что $S = \cup_{i=1}^N S^i$. Положим $\theta(S) := \theta_N(S)$.

Через $\mathcal{PADR}(\mathrm{X})$ будем обозначать класс всех кусочно регулярных по Альфорсу–Давиду замкнутых множеств. При $\theta \geq 0$ положим $\mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X}) := \{S \in \mathcal{PADR}(\mathrm{X}) : \theta(S) = \theta\}$.

Замечание 1.5.18. Из определения следует, что $\mathcal{PADR}(\mathrm{X}) = \cup_{\theta\geq 0}\mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X})$.

Замечание 1.5.19. Из замечаний 1.5.8,1.5.9 и леммы 1.5.10 ясно, что при $\theta \geq 0$ будем иметь включение $\mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X}) \subset \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$.

Замечание 1.5.20. При $S \in \mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X})$ в силу предложения 1.2.106 имеем $\mu(S) = 0$ при условии, что $\theta_1(S) > 0$.

Кроме того, если множество $S = \cup_{i=1}^N S^i$ таково, что $S^i \in \mathcal{ADR}_{\theta_i(S)}(\mathrm{X})$ при $\theta_i(S) > 0$, $i \in \{1, ..., N\}$, то S является σ-пористым при некотором $\sigma = \sigma(S) \in (0, 1)$. В самом деле, в силу предложения 1.2.106, для любого $i \in \{1, ..., N\}$ множество S^i является $\sigma_i := \sigma_i(S^i)$-пористым при некотором $\sigma_i \in (0, 1)$. Следовательно, применяя второе утверждение предложения 1.2.106 и замечание 1.2.105 N раз, легко видеть, что S является σ-пористым при $\sigma = \prod_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{3}$.

Пример 1.5.21. Предположим, что X является Q-регулярным по Альфорсу при некотором $Q > 0$. Тогда, каждое непустое множество $S \subset \mathrm{X}$ принадлежит классу $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ при каждом $\theta \geq Q$. В самом деле, фиксируем $x \in S$, $r \in (0, 1]$, и не более чем счетное семейство замкнутых шаров $\{B_i\}$ с радиусами $r_i < r$, которое покрывает множество $B_r(x) \cap S$. Тогда

$$\sum \frac{\mu(B_i)}{(r_i)^\theta} \geq c_{\mu,1} \sum (r_i)^{Q-\theta} \geq c_{\mu,1} r^{Q-\theta} \geq \frac{c_{\mu,1}}{c_{\mu,2}} \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}.$$

Взяв инфимум по всем таким покрытиям, получаем требуемое утверждение.

Следующий пример крайне важен по следующим причинам. Во-первых, он проясняет различие между регулярными и корегулярными по Альфорсу–Давиду множествами. Во-вторых, мы получаем простейший пример м.п.м. $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu)$ и его подмножества S, для которых методы работ [56, 57, 58, 90, 109] оказываются неприменимы и не позволяют описать след пространства Соболева $W_p^1(\mathrm{X})$ на S.

Пример 1.5.22. Пусть $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2, \mu)$, где $\mu = \gamma\mathcal{L}^2$, а $\mathcal{L}^2$-вес γ определяется по формуле

$$\gamma(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|x\|_2}, & x \in B_1(0); \\ 1, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0). \end{cases} \tag{1.5.23}$$

Заметим, что $\gamma \in A_1^{loc}(\mathrm{X})$.

Рассмотрим множество $S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$. Очевидно, что $S \in \mathcal{ADR}^1(\mathrm{X})$. Далее мы покажем, что $S \notin \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ при любом $\theta \geq 0$, но при этом $S \in \mathcal{LCR}_1(\mathrm{X})$.

Заметим, что при $r \in (0, 2]$ и $x \in B_1(0)$, непосредственное вычисление в полярных координатах даёт

$$c_1 \frac{r}{\|x\|_2 + r} \leq \frac{\mu(B_r(x))}{r} \leq c_2 \frac{r}{\|x\|_2 + r}, \tag{1.5.24}$$

где константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят ни от x, ни от r.

Если $r > 0$ достаточно мало, а точка $x \in S$ такова, что $\|x\|_2$ существенно больше чем r, то из (1.5.24) нетрудно получить, что $\mathcal{H}_1(B_r(x) \cap S) \approx \mu(B_r(x))/r$. По этой причине, если бы $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ при каком-то $\theta \geq 0$, то это могло бы быть только при $\theta = 1$. Но как раз это не имеет места. Действительно, фиксируем $r \in (0, 1]$ и $\delta \in (0, r]$. Пусть $\{B_{r_i}(x_i)\}$ – произвольное не более чем счётное покрытие множества $B_r(0) \cap S$ шарами радиуса $r_i < \delta$. Пользуясь (1.5.24), заключаем, что

$$\sum \frac{\mu(B_{r_i}(x_i))}{r_i} \geq c_1 \sum \frac{r_i}{\|x_i\|_2 + r_i}.$$

Если $\delta > 0$ достаточно мало, то при любом $h \in (0, r)$ правая часть вышеприведённого неравенства, очевидно не меньше некоторой интегральной суммы Римана для функции $g(t) = 1/t$ на отрезке $[h, r]$. Отсюда в силу произвольности выбора семейства шаров $\{B_{r_i}(x_i)\}$ и произвола в выборе параметра h, заключаем, что $\mathcal{H}_1(B_r(0) \cap S) = +\infty$. Следовательно, $S \notin \mathcal{ADR}_1(\mathrm{X})$.

Фиксируем $x \in S \cap B_1(0)$ и число $r \in (0, 1]$. Пусть $\{B_{r_i}(x_i)\}$ – произвольное не более чем счётное покрытие множества $B_r(x) \cap S$ шарами радиуса $r_i < r$. Очевидно, что при всех i выполнено неравенство $\|x_i\|_2 + r_i \leq 2(\|x\|_2 + r)$. Кроме того, $\sum_i r_i \geq r$. Поэтому, учитывая (1.5.24), получаем

$$\sum_i \frac{\mu(B_{r_i}(x_i))}{r_i} \geq c_1 \sum \frac{r_i}{\|x_i\|_2 + r_i} \geq \frac{c_1}{2(\|x\|_2 + r)} \sum r_i \geq \frac{c_1}{2} \frac{r}{\|x\|_2 + r} \geq \frac{c_1}{2c_2} \frac{\mu(B_r(x))}{r}.$$

В силу произвольности выбора покрытия $\{B_{r_i}(x_i)\}$, получаем оценку

$$\mathcal{H}_{1,r}(B_r(x) \cap S) \geq \frac{c_1}{2c_2} \frac{\mu(B_r(x))}{r}.$$

Если же точка $x \in S \setminus B_1(0)$, то найдется шар $B_{\frac{r}{2}}(x') \subset \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ с центром $x' \in S$. Поэтому, принимая во внимание (1.5.23) и свойство удвоения меры $\gamma\mathcal{L}^2$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1,r}(B_r(x) \cap S) &\geq \mathcal{H}_{1,r}(B_{\frac{r}{2}}(x') \cap S) = \frac{\mu(B_{\frac{r}{2}}(x'))}{r/2} = \pi \frac{r}{2} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\mu(B_{r/2}(x) \cap S)}{r/2} \geq \frac{1}{C_\mu(1)} \frac{\mu(B_r(x) \cap S)}{r}. \end{aligned}$$

Собирая вместе вышеприведённые оценки, заключаем, что $S \in \mathcal{LCR}_1(\mathrm{X})$.

Глава 2. СЛЕДЫ ПРОСТРАНСТВ $W_p^1(\mathrm{X})$ НА θ-КОТОЛСТЫХ МНОЖЕСТВАХ

В этой главе мы изучаем проблему следов пространств Соболева в двух постановках.

2.1. θ-корегулярные последовательности мер

На протяжении всего параграфа будем считать фиксированным параметр $p \in (1,\infty)$ *и метрическое пространство с мерой* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_p$.

Напомним обозначение замкнутого шара $B_r(x)$, данное в начале предыдущей главы.

Определение 2.1.1. Последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ мер на м.п.м. X называется *θ-корегулярной*, если при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ мера $\mathfrak{m}_k$ борелевски регулярная локально конечная и существует $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) \in (0,1)$ такое, что выполнены следующие свойства:

(**M**1) существует непустое замкнутое множество $S \subset \mathrm{X}$, для которого

$$\operatorname{supp} \mathfrak{m}_k = S \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}_0; \tag{2.1.2}$$

(**M**2) существует константа $C_1 > 0$ такая, что при каждом $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{m}_k(B_r(x)) \le C_1 \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathrm{X} \quad \text{и всех} \quad r \in (0, \epsilon^k]; \tag{2.1.3}$$

(**M**3) существует константа $C_2 > 0$ такая, что при каждом $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{m}_k(B_r(x)) \ge C_2 \frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta} \quad \text{для всех} \quad x \in S \quad \text{и всех} \quad r \in [\epsilon^k, 1]; \tag{2.1.4}$$

(**M**4) $\mathfrak{m}_k = w_k \mathfrak{m}_0$ при $w_k \in L_\infty(\mathfrak{m}_0)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$, и существует такая константа $C_3 > 0$, что для любых $k, j \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства

$$\frac{\epsilon^{\theta j}}{C_3} \le \frac{w_k(x)}{w_{k+j}(x)} \le C_3 \quad \text{для} \quad \mathfrak{m}_0 - \text{п.в. } x \in S. \tag{2.1.5}$$

Класс всех θ-корегулярных последовательностей мер $\{\mathfrak{m}_k\}$, удовлетворяющих условию (2.1.2) будем обозначать через $\mathfrak{M}_\theta(S)$. Кроме того, скажем, что последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ является *сильно θ-корегулярной*, если

(**M**5) для каждого борелевского множества $E \subset S$,

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\mathfrak{m}_k(B_{\epsilon^k}(\underline{x}) \cap E)}{\mathfrak{m}_k(B_{\epsilon^k}(\underline{x}))} > 0 \quad \text{при} \quad \mathfrak{m}_0 - \text{п.в. } \underline{x} \in E. \tag{2.1.6}$$

Класс всех сильно θ-корегулярных последовательностей мер $\{\mathfrak{m}_k\}$, удовлетворяющих (2.1.2) будем обозначать через $\mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$.

Условие (**M**5) можно рассматривать как мультивесовое обобщение известного A_∞-условия (см. секцию 5.7 в [119]). Ясно, что существуют наименьшие константы, для которых выполнены условия (**M**2) и (**M**4). Мы будем в дальнейшем обозначать их через $C_{\{\mathfrak{m}_k\},1}$ и $C_{\{\mathfrak{m}_k\},3}$, соответственно. Аналогично, существует наибольшая константа, для которой выполнено (**M**3). Будем обозначать её символом $C_{\{\mathfrak{m}_k\},2}$. Нам будет удобно зарезервировать символ $\mathcal{C}_{\{\mathfrak{m}_k\}}$ для обозначения всей тройки этих констант, то есть $\mathcal{C}_{\{\mathfrak{m}_k\}} := \{C_{\{\mathfrak{m}_k\},1}, C_{\{\mathfrak{m}_k\},2}, C_{\{\mathfrak{m}_k\},3}\}$.

Замечание 2.1.7. В случае, когда пространство X является Q-регулярным по Альфорсу при некотором $Q > 1$, $S \subset \mathrm{X}$ – непустое замкнутое множество, а параметр $d \in [0, Q]$, будем говорить, что последовательность $\{\mathfrak{m}_k\}$ борелевски регулярных локально конечных мер на X является *d-регулярной (сильно d-регулярной)* и писать $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}^d(S)$ ($\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}^{d,str}(S)$), если $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_{Q-d}(S)$ ($\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}^{str}_{Q-d}(S)$).

Главным результатом этого параграфа является следующая теорема, дающая по сути двойственную характеризацию θ-котолстых множеств в терминах θ-корегулярных последовательностей мер.

Теорема 2.1.8. *Пусть $\theta \geq 0$ и пусть $S \subset \mathrm{X}$ – замкнутое непустое множество. Если $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$, то $\mathfrak{M}^{str}_\theta(S) \neq \emptyset$. Если $\mathfrak{M}_\theta(S) \neq \emptyset$, то $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$.*

2.1.1. **Некоторые примеры.** Одна из импликаций в теореме 2.1.8 является так называемой теоремой существования, дающей абстрактный алгоритм построения сильно регулярной последовательности мер. Поэтому, для общих множеств $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ при $\theta > 0$, построение конкретных примеров последовательностей $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ – весьма тонкая и сложная задача. В следующей главе мы приведем некоторые нетривиальные примеры.

В данном пункте мы покажем, что для некоторых множеств $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$, $\theta > 0$, можно легко построить конкретные наглядные примеры последовательностей $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$.

Пример 2.1.9. Напомним замечание 1.2.90. Пусть $\underline{\theta} \in [0, \underline{Q}_\mu(R))$ при некотором $R > 0$ и пусть $S \in \mathcal{ADR}_{\underline{\theta}}(\mathrm{X})$. В этом случае при $\theta \geq \underline{\theta}$ положим $\epsilon = \frac{1}{2}$ и определим

$$\mathfrak{m}_k := 2^{k(\theta-\underline{\theta})} \mathcal{H}_{\underline{\theta}} \lfloor_S, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Легко проверить, что последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^\infty$ принадлежит классу $\mathfrak{M}^{str}_\theta(S)$. Действительно, условия (**M**1)–(**M**4) немедленно следуют из построения. Для проверки (**M**5) в определении 2.1.1, мы покажем, что в действительности выполнено даже более сильное условие. А именно, для любого борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{H}_\theta \lfloor_S (B_{2^{-k}}(\underline{x}) \cap E)}{\mathcal{H}_\theta \lfloor_S (B_{2^{-k}}(\underline{x}))} = 1 \quad \text{for} \quad \mathcal{H}_\theta - \text{п.в.} \quad \underline{x} \in E. \tag{2.1.10}$$

Для проверки (2.1.10) достаточно воспользоваться замечанием 1.2.95 и применить классические рассуждения приведённые, например, в секции 3.4 in [71].

Пример 2.1.11. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $\{\underline{\theta}_1, ..., \underline{\theta}_N\} \subset [0, \underline{Q}_\mu(R))$. При $i \in \{1, ..., N\}$ пусть $S_i \in \mathcal{ADR}_{\underline{\theta}_i}(\mathrm{X})$. Положим $\overline{\theta} := \max\{\underline{\theta}_1, ..., \underline{\theta}_N\}$. Теперь положим $\epsilon = \frac{1}{2}$ и при $\theta \geq \overline{\theta}$ определим

$$\mathfrak{m}_k := \sum_{i=1}^{N} 2^{k(\theta-\underline{\theta}_i)} \mathcal{H}_{\underline{\theta}_i} \lfloor_{S_i}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1.12}$$

Основываясь на предыдущем примере, легко получаем $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$. Действительно, свойства $(\mathbf{M}1)$–$(\mathbf{M}4)$ проверяются достаточно очевидно. Самое деликатное условие $(\mathbf{M}5)$ проверяется следующим образом. Мы рассмотрим случай $N = 2$, общий случай немного технически сложнее, но идеологически не отличается. Для любого множества $E \subset S_1 \setminus S_2 \cup S_2 \setminus S_1$ условие (2.1.6) очевидно выполнено в силу замкнутости множеств S_1, S_2 и конструкции (2.1.12). Пусть теперь $E \subset S_1 \cap S_2$ и $\theta_1 \geq \theta_2$. При $\underline{x} \in E$ в силу проверенного свойства $(\mathbf{M}3)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{m}_k(B_{2^{-k}}(\underline{x}) \cap E)}{\mathfrak{m}_k(B_{2^{-k}}(\underline{x}))} &\geq \frac{2^{k(\theta-\underline{\theta}_1)} \mathcal{H}_{\underline{\theta}_1} \lfloor_{S_1}(B_{2^{-k}}(\underline{x}) \cap E)}{\mathfrak{m}_k(B_{2^{-k}}(\underline{x}))} \\ &\geq \frac{2^{k\theta_1}}{C_2 \mu(B_{2^{-k}})} \mathcal{H}_{\underline{\theta}_1} \lfloor_{S_1}(B_{2^{-k}}(\underline{x}) \cap E). \end{aligned}$$

Следовательно, используя предыдущий пример при $\underline{\theta} = \underline{\theta}_1$, получим искомое.

2.1.2. **Элементарные свойства.** Напомним обозначение (1.4.10).

Следующий факт является очевидным следствием (2.1.3) и определения 1.2.85. Мы опускаем элементарное доказательство.

Предложение 2.1.13. *Пусть $\theta \geq 0$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ для некоторого замкнутого множества $S \subset \mathrm{X}$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ мера $\mathfrak{m}_k$ абсолютно непрерывна относительно $\mathcal{H}_\theta$. Более того, для любого борелевского множества $E \subset S$, для каждого $k \in \mathbb{N}_0$, имеем $\mathfrak{m}_k(E) \leq C_{\{\mathfrak{m}_k\},1} \mathcal{H}_\theta(E)$.*

Рассмотрим последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$. К сожалению, меры $\mathfrak{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ вообще говоря не обладают свойством равномерно локального удвоения. Тем не менее,справедлив следующий результат (мы полагаем $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$ при $x \in \mathrm{X}$ и $k \in \mathbb{Z}$).

Теорема 2.1.14. *Пусть $\theta \geq 0$, $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$. Тогда для любого $c \geq 1$ существует константа $C > 0$, зависящая от c, $\mathcal{C}_{\{\mathfrak{m}_k\}}$ и $C_\mu(2c)$ такая, что для всех $k \in \mathbb{N}_0$,*

$$\frac{1}{C}\mathfrak{m}_k(B_k(y)) \leq \mathfrak{m}_k(\frac{1}{c}B_k(y)) \leq \mathfrak{m}_k(cB_k(y)) \leq C\mathfrak{m}_k(B_k(y)) \quad \textit{при} \quad y \in S. \tag{2.1.15}$$

Доказательство. Положим $\underline{k} := \min\{k \in \mathbb{Z} : \epsilon^k < \frac{1}{c}\}$ и рассмотрим оценки сверху и снизу в (2.1.15) по отдельности.

Чтобы установить оценку сверху, рассмотрим два случая. В случае $k \in \{0, ..., \underline{k}\}$, комбинируя (2.1.3), (2.1.5) и свойство равномерного локального удвоения меры μ, получаем существование константы $C > 0$ такой, что (напомним (1.2.14) и учтем предложение 1.2.54)

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_k(cB_k(y)) &\leq C\mathfrak{m}_0(cB_k(y)) \leq C \sum_{B \in \mathcal{B}_k(\mathrm{X},\epsilon)} \mathfrak{m}_0(B \cap cB_k(y)) \\ &\leq C \sum_{\substack{B \in \mathcal{B}_k(\mathrm{X},\epsilon) \\ B \cap cB_k(y) \neq \emptyset}} \mu(B) \leq C\mu((c+2)B_k(y)) \leq C\mu(B_k(y)). \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

В случае $k > \underline{k}$, используя (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5), и свойство равномерного локального удвоения меры μ, мы получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_k(cB_k(y)) &\leq C\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}(cB_k(y)) \leq C\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}(B_{k-\underline{k}}(y)) \\ &\leq C\frac{\mu(B_{k-\underline{k}}(y))}{\epsilon^{k-\underline{k}}} \leq C\frac{\mu(B_k(y))}{\epsilon^k} \leq C\mathfrak{m}_k(B_k(y)). \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Комбинируя (2.1.16) и (2.1.17), выводим требуемую верхнюю оценку в (2.1.15).

Теперь зафиксируем $k \in \mathbb{N}_0$. Для доказательства оценки снизу в (2.1.15) воспользуемся свойствами (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5), а также свойством равномерного локального удвоения меры μ. Это дает требуемую оценку

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_k(\frac{1}{c}B_k(y)) &\geq C\mathfrak{m}_{k+\underline{k}}(\frac{1}{c}B_k(y)) \geq C\mathfrak{m}_{k+\underline{k}}(B_{k+\underline{k}}(y)) \\ &\geq C\frac{\mu(B_{k+\underline{k}}(y))}{\epsilon^{k+\underline{k}}} \geq C\frac{\mu(B_k(y))}{\epsilon^k} \geq C\mathfrak{m}_k(B_k(y)). \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Доказательство завершено. □

Доказанная выше теорема имеет полезное следствие (мы полагаем $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$).

Предложение 2.1.19. *Пусть $\theta \geq 0$, $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(\mathrm{X})$. Тогда для любого $c \geq 1$ существует такая константа $C > 0$, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\int\limits_{cB_k(z)} \frac{1}{\mathfrak{m}_k(cB_k(y))}\, d\mathfrak{m}_k(y) \leq C \quad \textit{при} \quad z \in S. \tag{2.1.20}$$

Доказательство. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$ и $z \in S$. Заметим, что $2cB_k(y) \supset cB_k(z)$ при всех $y \in cB_k(z)$. Следовательно, по теореме 2.1.14

$$\sup_{y \in cB_k(z)} \frac{1}{\mathfrak{m}_k(cB_k(y))} \leq \sup_{y \in cB_k(z)} \frac{C}{\mathfrak{m}_k(2cB_k(y))} \leq \frac{C}{\mathfrak{m}_k(cB_k(z))}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{cB_k(z)} \frac{1}{\mathfrak{m}_k(cB_k(y))}\, d\mathfrak{m}_k(y) \leq C \int\limits_{cB_k(z)} \frac{1}{\mathfrak{m}_k(cB_k(z))}\, d\mathfrak{m}_k(y) = C. \tag{2.1.21}$$

Доказательство завершено. □

Замечание 2.1.22. В частности, имея в виду пример 2.1.9 ниже, мы получим, что при $\theta \geq 0$ для множества $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ и параметра $c \geq 1$ существует такая константа $C > 0$, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{B_{\frac{c}{2^k}}(z)\cap S} \frac{1}{\mathcal{H}_\theta(B_{\frac{c}{2^k}}(y)\cap S)} d\mathcal{H}_\theta(y) \leq C. \tag{2.1.23}$$

2.1.3. **Сравнение различных классов мер.** Теперь мы сформулируем для заданного замкнутого множества $S \subset \mathrm{X}$ простое достаточное условие совпадения классов $\mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$ и $\mathfrak{M}_\theta(S)$. Напомним определение 1.2.76 и замечание 1.2.90. Также напомним обозначение (1.2.61) и положим $k(r) := k_\epsilon(r)$.

Теорема 2.1.24. *Пусть $\theta \in [0, \underline{Q}_\mu(1))$ и пусть дано замкнутое множество $S \subset \mathrm{X}$ такое, что $\mathcal{H}_\theta(S) \in (0, +\infty)$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathfrak{M}_\theta^{str}(S) = \mathfrak{M}_\theta(S).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно установить включение $\mathfrak{M}_\theta(S) \subset \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$. Предположим, что $\mathfrak{M}_\theta(S) \neq \emptyset$ и фиксируем произвольную последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$. Фиксируем также борелевское множество $E \subset S$ и проверим (2.1.6). Положим

$$N := \{x \in E : \overline{D}_E^{\{\mathfrak{m}_k\}}(x, \epsilon) = 0\}.$$

В силу предположений теоремы получаем, что функция множества $\mathcal{H}_\theta\lfloor_S$ является конечной мерой на X. Кроме того, в силу предложения 2.1.13 имеем $\mathfrak{m}_0(S) < +\infty$. Если $\mathfrak{m}_0(N) > 0$, то используя теорему Егорова и теорему 2.1.14 заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K_\varepsilon \subset N$ и число $\delta(\varepsilon) > 0$ такие, что $\mathfrak{m}_0(N \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ и

$$\sup_{x\in K_\varepsilon}\sup_{r<\delta(\varepsilon)} \frac{\mathfrak{m}_{k(r)}(E\cap B_r(x))}{\mathfrak{m}_{k(r)}(B_r(x))} \leq \sup_{x\in K_\varepsilon}\sup_{\epsilon^k<\delta(\varepsilon)} \frac{\mathfrak{m}_k(E\cap B_k(x))}{\mathfrak{m}_k(B_k(x))} < \varepsilon. \tag{2.1.25}$$

Из условия $\mathcal{H}_\theta(S) < +\infty$ следует существование не более чем счётного покрытия множества K_ε шарами $\{B_j\}_{j=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ с радиусами $r_j \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{4}$ такого, что

$$\sum_j \frac{\mu(B_j)}{(r_j)^\theta} \leq 2\mathcal{H}_{\theta,\delta(\varepsilon)}(K_\varepsilon). \tag{2.1.26}$$

Без ограничения общности можно считать, что для каждого B_j имеем $K_\varepsilon \cap B_j \neq \emptyset$. Для каждого j зафиксируем точку $x_j \in B_j \cap K_\varepsilon$. Очевидно, имеем $B_j \subset B_{2r_j}(x_j) \subset 3B_j$. Следовательно, комбинируя (2.1.3), (2.1.5) с (2.1.25), (2.1.26), и, учитывая свойство равномерно локального удвоения меры, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{m}_0(K_\varepsilon) \leq \sum_j \mathfrak{m}_0(E\cap B_j) \leq C\sum_j \mathfrak{m}_{k(r_j)}(E\cap B_{2r_j}(x_j)) < \varepsilon C\sum_j \mathfrak{m}_{k(r_j)}(B_{2r_j}(x_j)) \\
&< \varepsilon C\sum_j \frac{\mu(B_{2r_j}(x_j))}{(r_j)^\theta} < \varepsilon C\sum_j \frac{\mu(3B_j)}{(r_j)^\theta} \leq \varepsilon C\mathcal{H}_{\theta,\delta(\varepsilon)}(K_\varepsilon) \leq \varepsilon C\mathcal{H}_\theta(S).
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Кроме того, очевидно, что $K_{\varepsilon_1} \subset K_{\varepsilon_2}$ при $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Следовательно, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $\mathfrak{m}_0(K_\varepsilon) = 0$. Поскольку $\mathfrak{m}_0(N \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно, получаем равенство $\mathfrak{m}_0(N) = 0$, завершая доказательство. $\square$

При доказательстве следующей леммы мы построим простой пример, проясняющий тонкое отличие между классами $\mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$ и $\mathfrak{M}_\theta(S)$. Несмотря на свою простоту, соответствующая конструкция довольно типична и отражает суть дела. Можно легко построить аналогичные примеры в евклидовых пространствах высших размерностей и даже в некоторых классах метрических пространств с мерой. Однако соответствующая техника будет более громоздкой и менее прозрачной. По этой причине мы ограничиваемся построением примера на евклидовой плоскости.

Теорема 2.1.28. *Пусть* $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2, \mathcal{L}^2)$ *и* $S := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0,1], x_2 = 0\}$. *Тогда для каждого* $\theta \in (1,2)$ *существует последовательность мер* $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S) \setminus \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\theta \in (1,2)$ и положим

$$c_1(\theta) := 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\theta}, \quad c_2(\theta) := \min_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{2^j}{(1+j)^{\theta-1}}.$$

Нам будет удобно разбить остаток доказательства на несколько шагов.

Шаг 1. Через E обозначим замкнутое множество типа Кантора, которое строится индуктивно следующим образом. На первом шаге положим

$$E_1 := [0,1] \setminus (\frac{1}{2} - \frac{1}{2c_1(\theta)}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2c_1(\theta)}), \quad U_1 := (\frac{1}{2} - (2c_1(\theta))^{-1}, \frac{1}{2} + (2c_1(\theta))^{-1}).$$

Предположим, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ мы уже построили замкнутые множества $E_1 \supset ... \supset E_k$ и открытые множества $U_1, ..., U_k$ такие, что $E_i \cup (\cup_{j=1}^i U_j) = [0,1]$ и $\mathcal{L}^1(U_i) = \frac{1}{c_1(\theta) i^\theta}$ при всех $i \in \{1, ..., k\}$. Более того, при $i \in \{1, ..., k\}$ каждое множество E_i является дизъюнктным объединением 2^i отрезков $I_{i,l}$, а каждое U_i – дизъюнктное объединение 2^{i-1} интервалов $J_{i,l}$. Удалим из каждого отрезка $I_{k,l}$ интервал с центром в центре отрезка и длиной $\frac{1}{c_1(\theta) 2^k k^\theta}$. Рассмотрим объединение оставшихся отрезков. Мы получим множество E_{k+1} и положим $U_{k+1} := E_k \setminus E_{k+1}$. В итоге мы получим последовательность замкнутых множеств $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ и последовательность открытых множеств $\{U_k\}_{k=1}^\infty$. Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$, обозначим через $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{J}_k$ соответствующие семейства отрезков и интервалов соответственно. Более точно, $E_k = \cup\{I : I \in \mathcal{I}_k\}$ и $U_k = \cup\{J : J \in \mathcal{J}_k\}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Положим теперь $E := \cap_{n=0}^\infty E_n$ и определим весовые функции $\omega_k \in L_1([0,1])$, $k \in \mathbb{N}_0$ равенством (мы полагаем $U_0 := \emptyset$)

$$\omega_k(x) := \chi_E(x) + \sum_{i=0}^{k} 2^{(\theta-1)i} i^{\theta-1} \chi_{U_i}(x) + 2^{(\theta-1)k}(k+1)^{\theta-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \chi_{U_i}(x), \quad x \in [0,1]. \tag{2.1.29}$$

Наконец, напомним (1.2.36) и положим $\mathfrak{m}_k := \omega_k \mathcal{H}^1\lfloor_S$, $k \in \mathbb{N}_0$. Положим $\epsilon = \frac{1}{2}$ и покажем, что $\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathfrak{M}_\theta(S) \setminus \mathfrak{M}^{str}_\theta(S)$. Это будет сделано в последующих шагах.

Шаг 2. Заметим, что $\operatorname{supp}\mathfrak{m}_k = S$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Этим проверяется (**M1**).

Шаг 3. Из (2.1.29) легко видеть, что при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ и любом $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\frac{c_2(\theta)}{2^{\theta j}} \le \frac{1}{2^{(\theta-1)j}(1+j)^{\theta-1}} \le \frac{(k+1)^{\theta-1}}{2^{(\theta-1)j}(k+1+j)^{\theta-1}} \le \frac{w_k(x)}{w_{k+j}(x)} \le 1, \quad x \in [0,1]. \tag{2.1.30}$$

Это доказывает, что условие (**M4**) выполнено с константой $C_3 = \max\{1, (c_2(\theta))^{-1}\}$.

Шаг 4. Для проверки (**M2**) будем рассуждать следующим образом. В течение этого шага считаем фиксированными произвольные $k \in \mathbb{N}_0$, $j \ge k$ и на время фиксируем отрезок (одномерный куб) $Q \in \mathcal{D}_j$ (через $\mathcal{D}_j$ здесь и до конца доказательства обозначается семейство одномерных двоичных отрезков длины 2^{-j}). При $i \in \mathbb{N}$ необходимо рассмотреть два случая.

В первом случае, $(c_1(\theta))^{-1}2^{-i}i^{-\theta} < 2^{-j}$. То есть размер интервала из семейства $\mathcal{J}_i$ меньше размера куба из семейства $\mathcal{D}_j$. Поскольку $\theta > 1$, очевидно, имеем

$$\frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{2^i i^\theta} = \frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{2^{(\theta-1+2-\theta)i}i^{\theta(\theta-1+2-\theta)}} \le \frac{1}{2^{(2-\theta)i}}\frac{1}{i^{\theta(2-\theta)}} \le \frac{(c_1(\theta))^{2-\theta}}{2^{(2-\theta)j}}. \tag{2.1.31}$$

Следовательно, при $J \in \mathcal{J}_i$, используя (2.1.29) и (2.1.31), получим (так как $(c_1(\theta))^{1-\theta} \le 1$)

$$\frac{1}{2}\mathfrak{m}_k(Q\cap J) \le \frac{1}{2}\mathfrak{m}_k(J) \le \begin{cases} \frac{2^{(\theta-1)k}(k+1)^{\theta-1}}{c_1(\theta)2^i i^\theta} \le \frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{c_1(\theta)2^i i^\theta} \le \frac{1}{2^{(2-\theta)j}}, & i > k; \\ \frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{c_1(\theta)2^i i^\theta} \le \frac{1}{2^{(2-\theta)j}}, & i \le k. \end{cases} \tag{2.1.32}$$

Во втором случае, $(c_1(\theta))^{-1}2^{-i}i^{-\theta} \ge 2^{-j}$. То есть размер интервала из семейства $\mathcal{J}_i$ не меньше размера куба из семейства $\mathcal{D}_j$. Поскольку $\theta > 1$, очевидно, имеем

$$\frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{2^j} \le \frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{2^{(2-\theta)j}2^{(\theta-1)j}} \le \frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{(c_1(\theta))^{\theta-1}2^{(2-\theta)j}2^{(\theta-1)i}i^{\theta(\theta-1)}} \le \frac{(c_1(\theta))^{1-\theta}}{2^{(2-\theta)j}}. \tag{2.1.33}$$

Следовательно, при $J \in \mathcal{J}_i$, используя (2.1.29) и (2.1.33), мы получим (так как $(c_1(\theta))^{1-\theta} \le 1$)

$$\frac{1}{2}\mathfrak{m}_k(Q\cap J) \le \begin{cases} \frac{2^{(\theta-1)k}(k+1)^{\theta-1}}{2^j} \le \frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{2^j} \le \frac{1}{2^{(2-\theta)j}}, & i > k; \\ \frac{2^{(\theta-1)i}i^{\theta-1}}{2^j} \le \frac{1}{2^{(2-\theta)j}}, & i \le k. \end{cases} \tag{2.1.34}$$

В итоге, комбинируя (2.1.32) и (2.1.34), имеем

$$\mathfrak{m}_k(Q\cap J) \le \frac{1}{2^{(2-\theta)j}} \quad \text{при каждом} \quad i \in \mathbb{N}, \quad \text{для всех} \quad Q \in \mathcal{D}_j \text{ и } J \in \mathcal{J}_i. \tag{2.1.35}$$

Фиксируем отрезок $I \in \mathcal{I}_j$ и заметим, что $I \cap U_i = \emptyset$ при всех $i \in \{1, ..., j\}$. Но тогда, учитывая, что при каждом $i \ge j+1$ множество $U_i \cap I$ составлено из не более чем 2^{i-j} равных интервалов длины $(c_1(\theta))^{-1}2^{-i}i^{-\theta}$, имеем

$$c_1(\theta)\sum_{i=j+1}^{\infty}\mathcal{L}^1(U_i\cap I) \le 2^{-j}\sum_{i=j+1}^{\infty} i^{-\theta} \le \frac{2}{\theta-1}2^{-j}j^{1-\theta}.$$

Используя это наблюдение, и, принимая во внимание, что $j \geq k$, $\theta \in (1,2)$ и $c_1(\theta) \geq 2$, из (2.1.29) выводим

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{m}_k(Q \cap I) \leq \mathfrak{m}_k(I) \leq 2^{-j} + 2^{(\theta-1)k}(k+1)^{\theta-1} \sum_{i=j+1}^{\infty} \mathcal{L}^1(U_i \cap I) \\
&\leq \frac{1}{2^{(2-\theta)j}} + 2\frac{(c_1(\theta))^{-1}}{\theta-1}\frac{2^{(\theta-1)k}(k+1)^{\theta-1}}{2^j j^{\theta-1}} \leq \frac{1}{2^{(2-\theta)j}} + \frac{1}{\theta-1}\frac{(j+1)^{\theta-1}}{j^{\theta-1}}\frac{1}{2^{(2-\theta)j}} \\
&\leq \frac{2^\theta}{\theta-1}\frac{1}{2^{(2-\theta)j}} \quad \text{при любом} \quad Q \in \mathcal{D}_j.
\end{aligned} \tag{2.1.36}
$$

По построению множеств U_i, $i \in \mathbb{N}$ имеем $\sum_{i=1}^{l} \mathcal{L}^1(U_i) < 1/2$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, легко видеть, что каждый отрезок $I \in \mathcal{I}_j$ имеет длину более чем 2^{-j-1}. Поэтому, куб $Q \in \mathcal{D}_j$ может пересекать не более 3 различных отрезков из семейства $\mathcal{I}_j$ и не более 2 различных интервалов из $\cup_{i=1}^{j}\mathcal{J}_i$. Следовательно, при $x \in \mathbb{R}^2$ и $r \in (2^{-j-1}, 2^{-j}]$, комбинируя вышеприведенные наблюдения с (2.1.35) и (2.1.36), получим

$$
\mathfrak{m}_k(B_r(x)) \leq \sum_{Q \in \mathcal{D}_j} \mathfrak{m}_k(Q \cap B_r(x)) \leq \frac{2^\theta}{\theta-1}\frac{15}{2^{(2-\theta)j}}. \tag{2.1.37}
$$

Следовательно, последовательность $\{\mathfrak{m}_k\}$ удовлетворяет условию (**M2**).

Шаг 5. Фиксируем $\underline{x} \in E$ и $k \in \mathbb{N}_0$. По построению E найдется $I_k(\underline{x}) \in \mathcal{I}_k$ такой, что $\underline{x} \in I_k(\underline{x})$. Следовательно, учитывая, что при каждом $i \geq k+1$ множество $U_i \cap I_k(\underline{x})$ состоит из 2^{i-k} непересекающихся равных интервалов длины $(c_1(\theta))^{-1}2^{-i}i^{-\theta}$, мы получим

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{m}_k(B_{2^{-k}}(\underline{x})) \geq \mathfrak{m}_k(I_k(\underline{x})) \geq 2^{(\theta-1)k}(k+1)^{\theta-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{L}^1(U_i \cap I_k(\underline{x})) \\
&\geq \frac{2^{(\theta-1)k}(k+1)^{\theta-1}}{c_1(\theta)2^k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^\theta} \geq \frac{1}{c_1(\theta)(\theta-1)}\frac{1}{2^{k(2-\theta)}}.
\end{aligned} \tag{2.1.38}
$$

Это наблюдение в комбинации с (2.1.30) позволяет заключить, что справедливо (**M3**).

Шаг 6. В силу (2.1.29) легко видеть, что $\mathfrak{m}_k(E \cap B_{2^{-k}}(x)) \leq 2^{-k+1}$ для всех $x \in E$ и всех $k \in \mathbb{N}_0$. Поскольку $\theta > 1$, вышеприведенное наблюдение в комбинации с (2.1.38) дает

$$
\frac{\mathfrak{m}_k(B_{2^{-k}}(x) \cap E)}{\mathfrak{m}_k(B_{2^{-k}}(x))} \leq \frac{2c_1(\theta)(\theta-1)}{2^{k(\theta-1)}} \to 0, \quad k \to \infty \quad \text{для всех} \quad x \in E. \tag{2.1.39}
$$

Это доказывает, что $\{\mathfrak{m}_k\} \notin \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$.

Доказательство завершено. □

2.1.4. **Доказательство теоремы 2.1.8.** Начнём с необходимого условия существования θ-регулярных последовательностей мер.

Теорема 2.1.40. *Пусть $S \subset \mathrm{X}$ – произвольное замкнутое множество. Если $\theta \geq 0$ таково, что $\mathfrak{M}_\theta(S) \neq \emptyset$, то $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ и $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) \in (0,1)$. При $r \in (0,1]$ и $x \in S$ пусть $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{B_{r_j}(x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ – не более чем счётное семейство замкнутых шаров такое, что $r_j < r$ для всех j, $B_j \cap S \neq \emptyset$ при всех j, $B_r(x) \cap S \subset \cup_j B_j$ и

$$\sum_j \frac{\mu(B_j)}{(r_j)^\theta} \le 2\mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x)\cap S). \tag{2.1.41}$$

Напомним обозначение (1.2.61), положим $k_j := k(r_j)$, и фиксируем для каждого j шар $\widetilde{B}_j$ с центром в некоторой точке $x_j \in S \cap B_j$ и радиуса $2r_j$. Очевидно, $B_j \subset \widetilde{B}_j \subset 4B_j$ при всех j. Следовательно, используя свойство равномерно локального удвоения меры μ, применяя (2.1.3), и, учитывая теорему 2.1.14, мы получим

$$\sum_j \frac{\mu(B_j)}{(r_j)^\theta} \ge C\sum_j \frac{\mu(4B_j)}{(4r_j)^\theta} \ge C\sum_j \frac{\mu(\frac{1}{2}\widetilde{B}_j)}{(\frac{r_j}{2})^\theta} \ge C\sum_j \mathfrak{m}_{k_j}(\frac{1}{2}\widetilde{B}_j) \ge C\sum_j \mathfrak{m}_{k_j}(\widetilde{B}_j). \tag{2.1.42}$$

Скомбинируем теперь (2.1.41) и (2.1.42), учтем, что $k(r) \le k_j$ при всех j, и используем (2.1.5). Это приводит к оценке

$$\mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x)\cap S) \ge C\sum_j \mathfrak{m}_{k(r)}(\widetilde{B}_j) \ge C\mathfrak{m}_{k(r)}(B_r(x)\cap S).$$

Поскольку $r \in (\epsilon^{k(r)+1}, \epsilon^{k(r)}]$, с учетом теоремы 2.1.14 и (2.1.4) мы продолжаем предыдущую оценку и получаем

$$\mathcal{H}_{\theta,r}(B_r(x)\cap S) \ge C\mathfrak{m}_{k(r)}(B_{\epsilon^{k(r)}}(x)\cap S) \ge C\frac{\mu(B_{\epsilon^{k(r)}}(x))}{\epsilon^{k(r)\theta}} \ge C\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}. \tag{2.1.43}$$

Так как $x \in S$ и $r \in (0,1]$ были выбраны произвольно, утверждение теоремы следует из определения 1.5.1. □

Следующий результат даёт условия на множество $S \subset \mathrm{X}$, достаточные для существования сильно θ-регулярной последовательности мер, носители которых совпадают с S.

Теорема 2.1.44. *Пусть $\theta \ge 0$. Если множество $S \subset \mathrm{X}$ замкнуто и принадлежит классу $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$, то $\mathfrak{M}^{str}_\theta(S) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\epsilon \in (0, \frac{1}{10}]$ и напомним обозначения (1.2.12)–(1.2.13). Поскольку S – замкнутое подмножество полного сепарабельного метрического пространства (X, d), метрическое пространство $\mathrm{S} := (S, \mathrm{d}\,|_S)$ само является полным сепарабельным метрическим пространством (здесь $\mathrm{d}\,|_S$ – сужение метрики d на S).

Шаг 1. Напомним определение 1.2.57, предложение 1.2.58 и фиксируем допустимый частичный порядок на $Z(\mathrm{S},\epsilon)$. При $k \in \mathbb{N}_0$ и $z_{k,\alpha} \in Z_k(\mathrm{S},\epsilon)$ положим

$$\widetilde{Q}_{k,\alpha} := \cup\{\operatorname{int} B_{\frac{\epsilon^j}{8}}(z_{j,\beta}) : z_{j,\beta} \preceq z_{k,\alpha}\}. \tag{2.1.45}$$

Отметим, что множества $\widetilde{Q}_{k,\alpha}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{S}, \epsilon)$ являются открытыми в X. Однако, они не являются ни обобщёнными двоичными кубами в X, ни обобщёнными двоичными кубами в S. В то же время, в силу (1.2.60), множество $\widetilde{Q}_{k,\alpha} \cap S$ – обобщённый двоичный куб в пространстве S при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ и всех $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{S}, \epsilon)$.

Причины для введения таких "странных множеств" $\widetilde{Q}_{k,\alpha}$ суть следующие. Во-первых, нам будем неудобно работать с обобщёнными двоичными кубами в X, поскольку их "центры" могут не принадлежать S. Во-вторых, мы не используем обобщённые двоичные кубы в S, чтобы избежать топологии подпространства, то есть не работать с открытыми относительно S и замкнутыми относительно S подмножествами пространства X. Наконец, в-третьих, множества $\widetilde{Q}_{k,\alpha}$ помогают достаточно наглядно распределить массу по соответствующему дереву.

Поскольку $\epsilon \in (0, \frac{1}{10}]$, легко видеть из (PO3) определения 1.2.57 и (2.1.45), что

$$\widetilde{Q}_{k,\alpha} \subset B_{2\epsilon^k}(z_{k,\alpha}) \quad \text{при каждом} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и всех} \quad \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{S}, \epsilon). \tag{2.1.46}$$

Повторяя почти дословно доказательство леммы 15 из статьи [37], будем иметь

$$\text{если} \quad l \geq k, \quad \text{то либо} \quad \widetilde{Q}_{l,\beta} \subset \widetilde{Q}_{k,\alpha}, \quad \text{либо} \quad \widetilde{Q}_{l,\beta} \cap \widetilde{Q}_{k,\alpha} = \emptyset. \tag{2.1.47}$$

Объединяя этот факт с тем, что $\{\widetilde{Q}_{k,\alpha} \cap S\}$ образует семейство обобщённых двоичных кубов в пространстве S, получаем, что для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $j \geq k$ справедливо равенство

$$\mathrm{cl}(\widetilde{Q}_{k,\alpha} \cap S) = \bigcup_{z_{j,\beta} \preceq z_{k,\alpha}} \mathrm{cl}(\widetilde{Q}_{j,\beta} \cap S). \tag{2.1.48}$$

Более того, в силу (2.1.45) и (2.1.47) мы, очевидно, имеем

$$\sum_{z_{k+1,\beta} \preceq z_{k,\alpha}} \mu(\widetilde{Q}_{k+1,\beta}) \leq \mu(\widetilde{Q}_{k,\alpha}) \quad \text{при каждом} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и всех} \quad \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{S}, \epsilon). \tag{2.1.49}$$

Наконец, пусть $B = B_r(x)$ – произвольный замкнутый шар с центром $x \in \mathrm{X}$ и радиусом $r \in (0, 1]$. Пусть фиксировано число $c \geq 1$ такое, что $B_{cr}(x) \cap S \neq \emptyset$. Повторяя почти дословно рассуждения из доказательства предложения 1.2.62, получаем

$$\#\{\alpha \in \mathcal{A}_{k(r)}(\mathrm{S}, \epsilon) : \mathrm{cl}(\widetilde{Q}_{k(r),\alpha} \cap S) \cap B_{cr}(x) \neq \emptyset\} \leq C_D(c, 0). \tag{2.1.50}$$

Шаг 2. Для каждого $j \in \mathbb{N}_0$ и любого $\beta \in \mathcal{A}_j(\mathrm{S}, \epsilon)$ положим $h_{j,\beta} := \frac{\mu(\widetilde{Q}_{j,\beta})}{\epsilon^{j\theta}}$. Теперь, при любом $j \in \mathbb{N}_0$ мы определим меру $\mathfrak{m}^{j,j}$ на S по формуле (символом δ_x будем обозначать меру Дирака с носителем в точке $x \in S$)

$$\mathfrak{m}^{j,j} := \sum_{z_{j,\beta} \in Z_j(\mathrm{S}, \epsilon)} h_{j,\beta} \delta_{z_{j,\beta}}. \tag{2.1.51}$$

При $j \in \mathbb{N}$ модифицируем меру $\mathfrak{m}^{j,j}$ следующим образом. Если индекс $\alpha \in \mathcal{A}_{j-1}(\mathrm{S},\epsilon)$ таков, что $\mathfrak{m}^{j,j}(\widetilde{Q}_{j-1,\alpha} \cap S) = \mathfrak{m}^{j,j}(\{z_{j,\beta} : z_{j,\beta} \preceq z_{j-1,\alpha}\}) > h_{j-1,\alpha}$, то мы уменьшим меру $\mathfrak{m}^{j,j}$ равномерно на $\{z_{j,\beta} : z_{j,\beta} \preceq z_{j-1,\alpha}\}$ так (то есть помножим на соответствующий коэффициент), чтобы она стала равна $h_{j-1,\alpha}$. С другой стороны, если $\alpha \in \mathcal{A}_{j-1}(\mathrm{S},\epsilon)$ таков, что $\mathfrak{m}^{j,j}(\widetilde{Q}_{j-1,\alpha} \cap S) \le h_{j-1,\alpha}$, то мы оставим $\mathfrak{m}^{j,j}$ на $\{z_{j,\beta} : z_{j,\beta} \preceq z_{j-1,\alpha}\}$ без изменений. В результате такой процедуры мы получим новую меру $\mathfrak{m}^{j,j-1}$. Повторим указанную процедуру с мерой $\mathfrak{m}^{j,j-1}$, получая $\mathfrak{m}^{j,j-2}$. После j шагов мы получим меру $\mathfrak{m}^{j,0}$. При $j \in \mathbb{N}_0$ и $k \le j$ из построения следует, что

$$\mathfrak{m}^{j,k}(\widetilde{Q}_{i,\beta} \cap S) \le h_{i,\beta} \quad \text{для любого} \quad i \in \{k,...,j\}, \quad \text{для всех} \quad \beta \in \mathcal{A}_i(\mathrm{S},\epsilon). \tag{2.1.52}$$

В силу (2.1.49) ясно, что

$$\underline{M} := \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \inf_{z_{k,\alpha}\in Z_k(\mathrm{S},\epsilon)} \Big(\sum_{z_{k+1,\beta}\preceq z_{k,\alpha}} h_{k+1,\beta} \Big)^{-1} h_{k,\alpha} \ge \epsilon^{\theta}. \tag{2.1.53}$$

По построению при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ и любом $j \ge k$, существует семейство *положительных констант* $\{c_{j,k}(\widetilde{Q}_{j,\beta}) : \beta \in \mathcal{A}_j(\mathrm{S},\epsilon)\}$ такое, что

$$\mathfrak{m}^{j,k}(\widetilde{Q}_{j,\beta} \cap S) = c_{j,k}(\widetilde{Q}_{j,\beta})\mathfrak{m}^{j,j}(\widetilde{Q}_{j,\beta} \cap S) \quad \text{для всех} \quad \beta \in \mathcal{A}_j(\mathrm{S},\epsilon). \tag{2.1.54}$$

Более того, в силу (2.1.53) для любых $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{0,...,k\}$ и любых $j \ge k$

$$\epsilon^i c_{j,k}(\widetilde{Q}_{j,\beta}) \le c_{j,k-i}(\widetilde{Q}_{j,\beta}) \le c_{j,k}(\widetilde{Q}_{j,\beta}) \quad \text{для всех} \quad \beta \in \mathcal{A}_j(\mathrm{S},\epsilon). \tag{2.1.55}$$

Шаг 3. Используя правую часть (2.1.52), а также (2.1.50), можно получить $\sup_{j\ge k} \mathfrak{m}^{j,k}(B) < \infty$ для любого замкнутого шара $B \subset \mathrm{X}$. Следовательно, в силу леммы 1.2.26 и предложения 1.2.56, при $k \in \mathbb{N}_0$ существует подпоследовательность $\{\mathfrak{m}^{j_r,k}\}$ и борелевски регулярная локально конечная мера $\mathfrak{m}_k$ на X такая, что $\mathfrak{m}^{j_r,k} \rightharpoonup \mathfrak{m}_k$, $r \to \infty$. Используя стандартный диагональный процесс, заключаем, что существует такая строго возрастающая последовательность чисел $\{j_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, что $\mathfrak{m}^{j_s,k} \rightharpoonup \mathfrak{m}_k$, $s \to \infty$ при любом $k \in \mathbb{N}_0$ (в случае $j_s < k$ мы формально полагаем $\mathfrak{m}^{j_s,k} := \mathfrak{m}^{k,k}$).

В течение следующих шагов мы покажем, что последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{M}1) - (\mathbf{M}5)$.

Шаг 4. При $k \in \mathbb{N}_0$ из (2.1.51) следует, что $\operatorname{supp}\mathfrak{m}^{j_s,k}$ – максимальное ϵ^{j_s}-разделенное подмножество в S для всех достаточно больших $s \in \mathbb{N}$. Следовательно, по построению $\mathfrak{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, заключаем что $\operatorname{supp}\mathfrak{m}_k = S$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$. Поэтому, $(\mathbf{M}1)$ выполнено.

Шаг 5. Зафиксируем произвольные $k, i \in \mathbb{N}_0$. Из (2.1.54), (2.1.55) получим для любой функции $\varphi \in C_c(\mathrm{X})$ и всех достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\epsilon^{i\theta} \int_{\mathrm{X}} \varphi(x)\, d\mathfrak{m}^{j_s,k+i}(x) \le \int_{\mathrm{X}} \varphi(x)\, d\mathfrak{m}^{j_s,k}(x) \le \int_{\mathrm{X}} \varphi(x)\, d\mathfrak{m}^{j_s,k+i}(x).$$

Следовательно, переходя к пределу при $s \to \infty$, получим

$$\epsilon^{i\theta} \int\limits_{\mathrm{X}} \varphi(x)\, d\mathfrak{m}_{k+i}(x) \le \int\limits_{\mathrm{X}} \varphi(x)\, d\mathfrak{m}_k(x) \le \int\limits_{\mathrm{X}} \varphi(x)\, d\mathfrak{m}_{k+i}(x) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_c(\mathrm{X}).$$

В итоге, используя борелевскую регулярность мер $\mathfrak{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ и теорему Радона–Никодима, получим, что (**M**4) справедливо при $C_3 = 1$.

Шаг 6. При $k \in \mathbb{N}_0$ зафиксируем произвольный шар $B_r(x)$ с центром $x \in \mathrm{X}$ и радиусом $r \in (0, \epsilon^k]$. Если $\widetilde{Q}_{k(r),\alpha} \cap B_{2r}(x) \neq \emptyset$ для некоторого индекса $\alpha \in \mathcal{A}_{k(r)}(\mathrm{S}, \epsilon)$, то из (2.1.46) имеем $\widetilde{Q}_{k(r),\alpha} \subset B_{cr}(x)$ при $c = 4\epsilon^{k(r)}/r + 2$. Кроме того, поскольку $k(r) \ge k$, из (2.1.52) имеем $\mathfrak{m}^{j_s,k}(\widetilde{Q}_{k(r),\alpha}) \le h_{k(r),\alpha}$ при каждом $\alpha \in \mathcal{A}_{k(r)}(\mathrm{S}, \epsilon)$ и всех достаточно больших $s \in \mathbb{N}$. Наконец, если $\partial\widetilde{Q}_{k(r),\alpha} \neq \emptyset$, то по построению имеем $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \mathfrak{m}^{j_s,k}, \partial\widetilde{Q}_{k(r),\alpha}) \ge \frac{\epsilon^{j_s}}{8}$ для любого $\alpha \in \mathcal{A}_{k(r)}(\mathrm{S}, \epsilon)$ и всех достаточно больших $s \in \mathbb{N}$, а значит для таких α и s будем иметь $\mathfrak{m}^{j_s,k}(\partial\widetilde{Q}_{k(r),\alpha}) = 0$ (если же $\partial\widetilde{Q}_{k(r),\alpha} = \emptyset$, то равенство $\mathfrak{m}^{j_s,k}(\partial\widetilde{Q}_{k(r),\alpha}) = 0$ при всех $s \in \mathbb{N}$ выполнено тривиальным образом). Применим предложение 1.2.28 при $G = \operatorname{int} B_{2r}(x)$, затем учтем наблюдения, сделанные выше, и, наконец, воспользуемся равномерно локальным свойством удвоения меры μ. Имеем

$$\begin{aligned} &\mathfrak{m}_k(B_r(x)) \le \mathfrak{m}_k(\operatorname{int} B_{2r}(x)) \le \varliminf_{s\to\infty} \mathfrak{m}^{j_s,k}(\operatorname{int} B_{2r}(x)) \\ &\le \varliminf_{s\to\infty} \sum \{\mathfrak{m}^{j_s,k}(\widetilde{Q}_{k(r),\alpha}) : \widetilde{Q}_{k(r),\alpha} \cap B_{2r}(x) \neq \emptyset\} \le C\frac{\mu(B_{cr}(x))}{r^\theta} \le C\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}. \end{aligned} \tag{2.1.56}$$

Следовательно, условие (**M**2) выполнено.

Шаг 7. Для проверки условия (**M**3) достаточно показать существование константы $C > 0$ такой, что (положим $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$ для краткости)

$$\mathfrak{m}_k(B_k(x)) \ge C\frac{\mu(B_k(x))}{\epsilon^{k\theta}} \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и всех} \quad x \in S. \tag{2.1.57}$$

В самом деле, предположим, что мы уже доказали (2.1.57). Тогда, при $k \in \mathbb{N}_0$ и $r \in [\epsilon^k, 1]$, заметим, что $k(r) \le k$ в соответствии с обозначением (1.2.61). Следовательно, используя (**M.4**) и, учитывая свойство равномерно локального удвоения меры μ, мы получим при каждом $x \in S$, требуемую оценку

$$\mathfrak{m}_k(B_r(x)) \ge \mathfrak{m}_{k(r)}(B_{k(r)+1}(x)) \ge \epsilon\mathfrak{m}_{k(r)+1}(B_{k(r)+1}(x)) \ge C\frac{\mu(B_{k(r)+1}(x))}{\epsilon^{(k(r)+1)\theta}} \ge C\frac{\mu(B_r(x))}{r^\theta}.$$

Для доказательства (2.1.57) зафиксируем произвольное число $k \in \mathbb{N}_0$ и точку $x \in S$. Используя субаддитивность функции множества $\mathcal{H}_{\theta,\epsilon^{k+1}}$, а также (2.1.50), найдем такое множество $\widetilde{Q}_{k+1,\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{A}_{k+1}(\mathrm{S}, \epsilon)$, что

$$B_{k+1}(x) \cap \widetilde{Q}_{k+1,\alpha} \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \mathcal{H}_{\theta,\epsilon^{k+1}}(\widetilde{Q}_{k+1,\alpha} \cap S) \ge \frac{1}{C_D(1,0)}\mathcal{H}_{\theta,\epsilon^{k+1}}(B_{\epsilon^{k+1}}(x) \cap S). \tag{2.1.58}$$

Заметим, что для каждого $j \geq k+1$ и всех $z_{j,\beta} \preceq z_{k+1,\alpha}$, $\beta \in \mathcal{A}_j(\mathrm{S},\epsilon)$, существует *максимальное* среди всех чисел $s \in \{k+1,...,j\}$, для каждого из которых найдется такой $\gamma \in \mathcal{A}_s(\mathrm{S},\epsilon)$, что $z_{j,\beta} \preceq z_{s,\gamma} \preceq z_{k+1,\alpha}$ и $\mathfrak{m}^{j,k+1}(\widetilde{Q}_{s,\gamma} \cap S) = h_{s,\gamma}$. Следовательно, найдется дизъюнктное конечное семейство $\{\widetilde{Q}_{s_i,\gamma_i}\}_{i=1}^N$ с условием $k+1 \leq s_i \leq j$, $i \in \{1,...,N\}$, для которого

$$\{z_{j,\beta} : z_{j,\beta} \preceq z_{k+1,\alpha}\} = \bigcup_{i=1}^N \{z_{j,\beta} : z_{j,\beta} \preceq z_{s_i,\gamma_i}\}.$$

Поэтому имеем

$$\mathfrak{m}^{j,k+1}(\widetilde{Q}_{k+1,\alpha} \cap S) \geq \sum_{i=1}^N \mathfrak{m}^{j,k+1}(\widetilde{Q}_{s_i,\gamma_i} \cap S) = \sum_{i=1}^N h_{s_i,\gamma_i}.$$

С другой стороны, используя (2.1.45), (2.1.46) и (2.1.48), нетрудно видеть, что

$$\widetilde{Q}_{k+1,\alpha} \cap S \subset \cup_{i=1}^N \operatorname{cl} \widetilde{Q}_{s_i,\gamma_i} \subset \cup_{i=1}^N B_{2\epsilon^{s_i}}(z_{s_i,\gamma_i})$$

и, кроме того,

$$\frac{1}{8} B_{\epsilon^{s_i}}(z_{s_i,\gamma_i}) \subset \widetilde{Q}_{s_i,\gamma_i} \quad \text{для всех} \quad i \in \{1,...,N\}.$$

Следовательно, используя свойство равномерно локального удвоения меры μ в комбинации с предложением 1.2.54, получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^{j,k+1}(\widetilde{Q}_{k+1,\alpha}) = \mathfrak{m}^{j,k+1}(\widetilde{Q}_{k+1,\alpha} \cap S) &\geq \sum_{i=1}^N \frac{\mu(\frac{1}{8} B_{\epsilon^{s_i}}(z_{s_i,\gamma_i}))}{\epsilon^{s_i\theta}} \geq C \sum_{i=1}^N \frac{\mu(4B_{\epsilon^{s_i}}(z_{s_i,\gamma_i}))}{\epsilon^{s_i\theta}} \\ &\geq C \sum_{i=1}^N \epsilon^{-s_i\theta} \sum_{B \in \mathcal{B}_{s_i}(\mathrm{X},\epsilon)} \{\mu(B) : B \cap B_{2\epsilon^{s_i}}(z_{s_i,\gamma_i}) \neq \emptyset\} \geq C\mathcal{H}_{\theta,\epsilon^{k+1}}(\widetilde{Q}_{k+1,\alpha} \cap S). \end{aligned} \tag{2.1.59}$$

Так как замкнутый шар $B_{5\epsilon^{k+1}}(x) \subset B_{\epsilon^k}(x)$ – компактное множество и $\widetilde{Q}_{k+1,\alpha} \subset B_{5\epsilon^{k+1}}(x)$, применим предложение 1.2.28 при $F = B_{5\epsilon^{k+1}}(x)$, затем скомбинируем (2.1.58), (2.1.59), воспользуемся уже доказанным свойством (**M**4) и, наконец, учтем определение 1.5.1. Имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_k(B_{\epsilon^k}(x)) \geq \mathfrak{m}_k(B_{5\epsilon^{k+1}}(x)) &\geq \epsilon \mathfrak{m}_{k+1}(B_{5\epsilon^{k+1}}(x)) \geq \epsilon \varlimsup_{s\to\infty} \mathfrak{m}^{j_s,k+1}(B_{5\epsilon^{k+1}}(x)) \\ &\geq \varlimsup_{s\to\infty} \mathfrak{m}^{j_s,k+1}(\widetilde{Q}_{k+1,\alpha}) \geq C\frac{\mu(B_{\epsilon^{k+1}}(x))}{\epsilon^{(k+1)\theta}}. \end{aligned} \tag{2.1.60}$$

В итоге, используя (2.1.60) и свойство равномерно локального удвоения μ, приходим к (2.1.57), завершая проверку (**M**3).

Шаг 8. В силу (**M**4) и (**M**3), которые были проверены на 5 и 7 шаге, соответственно, имеем $\mathfrak{m}_0(B_k(x)) \geq \epsilon^{k\theta}\mathfrak{m}_k(B_k(x)) \geq C\mu(B_k(x))$ для всех $x \in S$. По определению 1.4.4 это означает, что мера $\mathfrak{m}_0$ является слабо неколлапсирующей. Зафиксируем произвольное борелевское множество $E \subset S$ и напомним обозначение (1.4.10). На протяжении этого шага положим $c = 4/\epsilon + 2$ и применим лемму 1.4.11. Получим существование множества $E' \subset E$ с

мерой $\mathfrak{m}_0(E\setminus E')=0$ такого, что для каждой точки $x\in E'$ можно найти строго убывающую к нулю последовательность $\{r_l(x)\}$, для которой (напомним (1.4.2))

$$\overline{D}_E^{\mathfrak{m}_0}(x)\ge \underline{\mathrm{D}}(x):=\varliminf_{l\to\infty}\frac{\mathfrak{m}_0(B_{r_l(x)}(x)\cap E)}{\mathfrak{m}_0(B_{r_l(x)}(x))}\ge\frac{1}{2\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}_0}(5c)}\quad\text{и}\quad\varlimsup_{l\to\infty}\frac{\mathfrak{m}_0(B_{cr_l(x)}(x))}{\mathfrak{m}_0(B_{r_l(x)}(x))}\le\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}_0}(5c).$$

Зафиксируем $\underline{x}\in E'$ и $\varepsilon\in(0,1)$. Напомним обозначение (1.2.61) и положим $r_l:=r_l(\underline{x})$, $k_l:=k_\epsilon(r_l)$ при всех $l\in\mathbb{N}_0$. Ясно, что существует $L=L(\underline{x},\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что для всех чисел $l\ge L$ справедливы неравенства

$$\frac{\mathfrak{m}_0(B_{r_l}(\underline{x})\cap E)}{\mathfrak{m}_0(B_{r_l}(\underline{x}))}>(1-\frac{\varepsilon}{8})\underline{\mathrm{D}}(\underline{x})\quad\text{и}\quad\frac{\mathfrak{m}_0(B_{cr_l}(\underline{x}))}{\mathfrak{m}_0(B_{r_l}(\underline{x}))}\le 2\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}_0}(5c).\tag{2.1.61}$$

Используя борелевскую регулярность меры $\mathfrak{m}_0$, при $l\in\mathbb{N}$ найдем открытое множество $\Omega_l\subset B_{2r_l}(\underline{x})$, содержащее $B_{r_l}(\underline{x})\cap E$, а также компактное множество $K_l\subset B_{r_l}(\underline{x})\cap E$, для которых

$$|\mathfrak{m}_0(\Omega_l)-\mathfrak{m}_0(K_l)|\le\frac{\varepsilon}{8}\underline{\mathrm{D}}(\underline{x})\mathfrak{m}_0(B_{r_l}(\underline{x})).\tag{2.1.62}$$

Поскольку $\sigma_l:=\operatorname{dist}(K_l,\mathrm{X}\setminus\Omega_l)>0$ для $\frac{\sigma_l}{2}$-окрестности $U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)$ множества K_l, мы получаем

$$K_l\subset U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)\subset\operatorname{cl}U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)\subset\Omega_l\subset B_{2r_l}(\underline{x}).\tag{2.1.63}$$

Так как точка $\underline{x}\in E'$ была зафиксирована нами произвольно, то для завершения проверки $(\mathbf{M}5)$ достаточно установить существование числа $C(\underline{x})>0$, не зависящего от ε и l, такого, что для каждого $l\ge L$ найдется $N=N(\underline{x},l,\varepsilon)\ge k_l$, для которого при всех $s\ge N$ (здесь и далее последовательность $\{j_s\}$ та же, что и на шаге 3)

$$\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)}\cap U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l))\ge C(\underline{x})\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)})\quad\text{при некотором}\quad\beta(j_s)\in\mathcal{A}_{k_l}(\mathrm{S},\epsilon).\tag{2.1.64}$$

Действительно, предположим, что (2.1.64) уже доказано. Тогда для $l\ge L$ используем (2.1.45), (2.1.63) и применим предложение 1.2.28 при $F=\operatorname{cl}(U_{\frac{\sigma}{2}}(K_l))$, $G=\operatorname{int}B_{\frac{r_l}{8}}(z_{k_l,\beta})$. Это дает

$$\begin{aligned}&\mathfrak{m}_{k_l}(\Omega_l)\ge\mathfrak{m}_{k_l}(\operatorname{cl}U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l))\ge\varlimsup_{s\to\infty}\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\operatorname{cl}U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l))\ge\varliminf_{s\to\infty}\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l))\\&\ge\varliminf_{s\to\infty}\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)}\cap U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l))\ge C(\underline{x})\varliminf_{s\to\infty}\mathfrak{m}^{j,k_l}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)})\\&\ge C(\underline{x})\varliminf_{s\to\infty}\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\operatorname{int}\frac{1}{8}B_{k_l}(z_{k_l,\beta(j_s)}))\ge C(\underline{x})\mathfrak{m}_{k_l}(\operatorname{int}\frac{1}{8}B_{k_l}(z_{k_l,\beta(j_s)})).\end{aligned}\tag{2.1.65}$$

Поскольку $\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)}\cap B_{2r_l}(\underline{x})\ne\emptyset$, из (2.1.46) имеем включение $B_{r_l}(\underline{x})\subset 6B_{k_l}(z_{k_l,\beta(j_s)})$. Решающим является то, что $z_{k_l,\beta(j_s)}\in S$ и мы можем применить теорему 2.1.14 при $c=6$ и $y=z_{k_l,\beta(j_s)}$ (ведь на предыдущих шагах мы уже проверили, что $\{\mathfrak{m}_k\}\in\mathfrak{M}_\theta(S)$). В итоге

$$\mathfrak{m}_{k_l}(\Omega_l)\ge C(\underline{x})\mathfrak{m}_{k_l}(\operatorname{int}B_{\frac{r_l}{8}}(z_{k_l,\beta(j_s)}))\ge C\mathfrak{m}_{k_l}(6B_{k_l}(z_{k_l,\beta(j_s)}))\ge C\mathfrak{m}_{k_l}(B_{r_l}(\underline{x})),\tag{2.1.66}$$

где константа $C > 0$ в правой части (2.1.66) не зависит ни от l, ни от ε. Наконец, поскольку $\Omega_l \supset E \cap B_{r_l}(\underline{x})$ было выбрано произвольно, а мера $\mathfrak{m}_{k_l}$ является борелевски регулярной, мы получаем желаемую оценку $\mathfrak{m}_{k_l}(E \cap B_{r_l}(\underline{x})) \geq C\mathfrak{m}_{k_l}(B_{r_l}(\underline{x}))$ с константой $C > 0$, не зависящей от $l \in \mathbb{N}$. Так как $l \geq L$ было выбрано произвольно, этим (**M**5) доказано.

Для доказательства (2.1.64) рассуждаем следующим образом. Фиксируем $l \geq L$, применим предложение 1.2.28 при $G = U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)$, $F = B_{2r_l}(\underline{x})$, и используем (2.1.61)–(2.1.63). Имеем (напомним, что $\varepsilon \in (0,1)$)

$$\begin{aligned}&\varliminf_{s\to\infty} \mathfrak{m}^{j_s,0}(U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)) \geq \mathfrak{m}_0(U_{\frac{\sigma}{2}}(K_l)) \geq (1-\frac{\varepsilon}{2})\underline{\mathrm{D}}(\underline{x})\mathfrak{m}_0(B_{r_l}(\underline{x}))\\ &\geq C\mathfrak{m}_0(B_{cr_l}(\underline{x})) \geq C\,\overline{\varlimsup_{s\to\infty}}\,\mathfrak{m}^{j_s,0}(B_{cr_l}(\underline{x})),\end{aligned}$$

где $C = \underline{\mathrm{D}}(\underline{x})/4\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}_0}(5c)$. Следовательно, существует $N = N(\underline{x}, l, \varepsilon) \geq k_l$ такое, что при $s \geq N$

$$\mathfrak{m}^{j_s,0}(U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)) \geq \frac{\overline{\mathrm{D}}(\underline{x})}{5\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}_0}(5c)}\mathfrak{m}^{j_s,0}(B_{cr_l}(\underline{x})). \tag{2.1.67}$$

Из (2.1.50) и (2.1.63) заключаем, что существует не более $C_D(2,0)$ обощенный двоичных кубов $\widetilde{Q}_{k_l,\beta} \cap S$ в S, замыкания которых имеют непустые пересечения $U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)$. Кроме того, любой такой куб содержится вместе со своим замыканием в $B_{cr_l}(\underline{x})$. Следовательно, используя (2.1.67), заключаем, что для каждого $s \geq N$ существует такой индекс $\beta(j_s) \in \mathcal{A}_{k_l}(\mathrm{S}, \epsilon)$, что следующее неравенство

$$\mathfrak{m}^{j_s,0}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)} \cap U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)) \geq C(\underline{x})\mathfrak{m}^{j_s,0}(B_{cr_l}(\underline{x})) \geq C(\underline{x})\mathfrak{m}^{j_s,0}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)}) \tag{2.1.68}$$

справедливо с константой $C(\underline{x}) := (5C_D(2,0)\underline{\mathrm{C}}_{\mathfrak{m}_0}(5c))^{-1}\overline{\mathrm{D}}(\underline{x})$. В итоге, принимая во внимание (2.1.54), выводим из (2.1.68) требуемую оценку

$$\begin{aligned}&\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)} \cap U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l)) = \frac{\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)})}{\mathfrak{m}^{j_s,0}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)})}\mathfrak{m}^{j_s,0}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)} \cap U_{\frac{\sigma_l}{2}}(K_l))\\ &\geq C(\underline{x})\frac{\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)})}{\mathfrak{m}^{j_s,0}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)})}\mathfrak{m}^{j_s,0}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)}) = C(\underline{x})\mathfrak{m}^{j_s,k_l}(\widetilde{Q}_{k_l,\beta(j_s)}).\end{aligned}$$

Доказательство завершено. □

Доказательство теоремы 2.1.8. Требуемый результат является комбинацией теорем 2.1.40 и 2.1.44. □

2.2. Точки Лебега функций

На протяжениии всего параграфа фиксируем следующие данные:

(**D.2.2.1**) параметр $p \in (1,\infty)$ и метрическое пространство с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_p$;

(**D.2.2.2**) параметр $\theta \in [0,p)$ и замкнутое множество $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$;

(**D.2.2.3**) последовательность мер$\{\mathfrak{m}_k\} := \{\mathfrak{m}_k\}_{k=0}^\infty \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$ и параметр $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) \in (0, \frac{1}{10}]$.

В этом параграфе при $x \in \mathrm{X}$ и $k \in \mathbb{Z}$ используется *обозначение* $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$.

Определение 2.2.1. При $c > 0$ и $\delta > 0$ будем говорить, что семейство замкнутых шаров $\mathcal{B} := \{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^N$, $N \in \mathbb{N}$ является (S,c,δ)-*хорошим*, если выполнены следующие условия:

(**B1**) $B_{r_i}(x_i) \cap B_{r_j}(x_j) = \emptyset$, если $i,j \in \{1,...,N\}$ и $i \neq j$;

(**B2**) $\sup\{r_i : i = 1,...,N\} \leq \delta$;

(**B3**) $B_{cr_i}(x_i) \cap S \neq \emptyset$ при всех $i \in \{0,...,N\}$.

Скажем, что $\mathcal{B}$ является (S,c,δ)-*семейством Уитни*, если оно удовлетворяет (**B1**)-(**B3**) и

(**B4**) $B \subset \mathrm{X} \setminus S$ для всех $B \in \mathcal{B}$.

Будем называть $(S,c,1)$-хорошие семейства и $(S,c,1)$-семейства Уитни просто (S,c)-хорошими семействами и (S,c)-семействами Уитни, соответственно.

Замечание 2.2.2. При $\delta \in (0,1]$, $c \geq 1$ каждое (S,c,δ)-семейство Уитни является (S,c',δ')-семейством Уитни м каждое (S,c,δ)-хорошее семейство является (S,c',δ')-хорошим семейством при всех $\delta' \in [\delta,1]$ и $c' \geq c$.

Напомним обозначение (1.2.61) и, для заданного шара $B = B_r(x)$, положим $k(B) := k(r_B)$. Кроме того, напомним обозначения данные в начале предыдущего параграфа после определения 2.1.1.

Предложение 2.2.3. *Пусть $c \geq 1$ и $c' \geq c+1$. Если замкнутый шар $B = B_r(x)$ в X таков, что $r \in (0,1]$ и $cB \cap S \neq \emptyset$, то*

$$\frac{\mu(B)}{\mathfrak{m}_{k(r)}(c'B)} \leq (C_\mu(c'))^{\log_2 2c'+1}\Big(\frac{r}{\epsilon}\Big)^\theta \frac{C_{\{\mathfrak{m}_k\},3}}{C_{\{\mathfrak{m}_k\},2}}. \tag{2.2.4}$$

Доказательство. Заметим, что существует шар $\underline{B} = B_r(\underline{x}) \subset c'B$ такой, что $\underline{x} \in S$. В таком случае $B \subset 2c'\underline{B}$. Кроме того, в соответствии с нашими обозначениями $\epsilon^{k(r)+1} < r \leq \epsilon^{k(r)}$. Следовательно, из (2.1.4), (2.1.5) и равномерно локального свойства удвоения меры μ выводим (мы полагаем $[c] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq c\}$)

$$\begin{aligned}\frac{\mu(B)}{\mathfrak{m}_{k(r)}(2cB)} &\leq \frac{\mu(2c'\underline{B})}{\mathfrak{m}_{k(r)}(\underline{B})} \leq \frac{C_{\{\mathfrak{m}_k\},3}}{\epsilon^\theta \mathfrak{m}_{k(r)+1}(\underline{B})}(C_\mu(c'))^{[\log_2 2c']+1}\mu(\underline{B}) \\ &\leq (C_\mu(c'))^{\log_2 2c'+1}\Big(\frac{r}{\epsilon}\Big)^\theta \frac{C_{\{\mathfrak{m}_k\},3}}{C_{\{\mathfrak{m}_k\},2}}.\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Этим доказательство заверешено. □

2.2.1. **Ключевые функционалы.** Напомним, что в начале параграфа нами был фиксирован параметр $p \in (1,\infty)$ и м.п.м. $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$. Зафиксируем также параметр $\theta \geq 0$ и произвольную последовательность $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(\mathrm{X})$. Мы введём функционалы, которые будут играть ключевую роль при построении эквивалентных норм в пространствах следов.

Прежде всего при $r > 0$ положим

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}}(f, B_r(x)) := \begin{cases} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}}(f, B_{2r}(x)), & \text{если} \quad B_r(x) \cap \operatorname{supp}\mathfrak{m} \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если} \quad B_r(x) \cap \operatorname{supp}\mathfrak{m} = \emptyset. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Начнём с функционала типа Брудного–Шварцмана. Более точно, напомним (2.2.6) и дадим следующее определение.

Определение 2.2.7. При $\delta \in (0,1]$ и $c > 1$ введем *функционал Брудного–Шварцмана на масштабе* δ, действие которого на пространстве $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ (функционал принимает значения в $[0,+\infty]$) задаётся формулой

$$\mathcal{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) := \sup\Big(\sum_{B\in\mathcal{B}^\delta} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB)\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}), \tag{2.2.8}$$

где супремум взят по всем конечным (S, c, δ)-хорошим семействам замкнутых шаров $\mathcal{B}^\delta$. Положим также

$$\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) := \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} + \mathcal{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f), \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.2.9}$$

В случае $\delta = 1$ будем писать $\mathcal{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$ и $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$ вместо $\mathcal{BSN}^{1}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$ и $\mathrm{BSN}^{1}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$, соответственно.

Замечание 2.2.10. Отметим, что, если $\mathrm{X} = S = \mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{m}_k := \mathcal{L}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$, то функционал $\mathcal{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}$ очень близок по смыслу функционалу, введённому Брудным [7] для характеризации пространств Соболева на $\mathbb{R}^n$. В случае, если $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$, $p > n$, а $S \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное замкнутое непустое множество, наш функционал очень близок соответствующему функционалу, введённому Шварцманом в [112, 114]. Эти наблюдения оправдывают выбор названия, в котором B и S – первые буквы в английском написании фамилий Брудного и Шварцмана, соответственно, а N – первая буква английского написания слова “норма”.

При $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ определим $\{\mathfrak{m}_k\}$-*максимальную функцию Кальдерона* по формуле

$$f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}(x) := \sup_{r\in(0,1]} \frac{1}{r}\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(r)}}(f, B_r(x)), \quad x \in \mathrm{X}\,. \tag{2.2.11}$$

Определение 2.2.12. Определим *функционал Кальдерона* на пространстве $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ со значениями в $[0,+\infty]$, полагая

$$\mathcal{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) := \|f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(\mu)}, \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.2.13}$$

Кроме того, положим также

$$\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) := \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} + \|f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(\mu)}, \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.2.14}$$

Замечание 2.2.15. Заметим, что, если $\mathrm{X} = S = \mathbb{R}^n$ и $\mathfrak{m}_k := \mathcal{L}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$, то отображение $f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}$ совпадает с классической максимальной функцией $f^\sharp$, введённой Кальдероном [33]. Кроме того, в [33] Кальдерон показал, что функция f принадлежит пространству $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ в том и только том случае, если f и $f^\sharp$ обе принадлежат $L_p(\mathbb{R}^n)$. Это оправдывает выбор названия нашего функционала $\mathcal{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}$. Символ C в названии есть первая буква в английском написании фамилии Кальдерона, а N – первая буква в английского написании слова “норма”.

Определим естественный аналог полунормы Бесова. Напомним определение 1.2.103.

Определение 2.2.16. При $\sigma \in (0,1]$ введём *функционал Бесова* на $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ со значениями в $[0,+\infty]$, полагая при каждом $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$,

$$\mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f) := \|f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(S,\mu)} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{k(\theta-p)} \int\limits_{S_{\epsilon^k}(\sigma)} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_{\epsilon^k}(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x)\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.17}$$

Кроме того, положим

$$\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f) := \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} + \mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f), \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.2.18}$$

Замечание 2.2.19. Если пространство X является Q-регулярным по Альфорсу при некотором $Q > 0$, а $S \subset \mathrm{X}$–замкнутое θ-корегулярное по Альфорсу–Давиду множество при некотором $\theta \in (0, Q)$, и $\mathfrak{m}_k = \mathcal{H}_{Q-\theta}\lfloor_S$, $k \in \mathbb{N}_0$, то функционал $\mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}$ совпадает с соответствующей полунормой Бесова [104]. Этим оправдан выбор названия функционала, в котором B – первая буква в английском написании фамилии Бесова, а N – первая буква английского написания слова “норма”.

Напомним определения 2.2.1 и 2.2.7. Напомним также (2.2.6) и будем писать $k(B)$ вместо $k(r_B)$ для краткости. Определим новый полезный функционал.

Определение 2.2.20. При $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ положим

$$\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) := \varliminf_{\delta\to 0} \mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) + \sup\Big(\sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB)\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.2.21}$$

где супремум во втором слагаемом взят по всем (S,c)-семействам Уитни $\mathcal{B}$.

Лемма 2.2.22. *Пусть $\delta \in (0,1]$ и $c \geq 1$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от δ, $\mathcal{C}_{\{\mathfrak{m}_k\}}$, c, ϵ, θ и $C_\mu(2c)$ такая, что, если $\mathcal{B}_\delta$ – произвольное (S,c)-хорошее семейство шаров, для которого $r_B \geq \delta$ при всех $B \in \mathcal{B}_\delta$, то*

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_\delta} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,2cB)\Big)^p \leq C\int\limits_S |f(x)|^p\,d\mathfrak{m}_0(x) \quad \textit{при всех} \quad f\in L_p(\mathfrak{m}_0). \tag{2.2.23}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную функцию $f \in L_p(\mathfrak{m}_0)$ и произвольное (S,c)-хорошее семейство $\mathcal{B}_\delta$ такое, что $r_B \geq \delta$ для всех $B \in \mathcal{B}_\delta$. Пусть $\underline{k}$ – наибольшее среди $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих неравенству $\epsilon^k \geq \delta$. Ниже мы будем подробно прописывать все промежуточные константы, чтобы отследить в явной форме их зависимость от $\underline{k}$ (следовательно и от δ). Из предложения 1.2.54 получаем (учтем, что $N_\mu(\epsilon^k, C) \leq N_\mu(1,C)$ для любого $k \in \{0,...,\underline{k}\}$ и любого $C > 0$, напомним также обозначение (1.2.53))

$$\mathrm{MULT}(\{2cB : B\in\mathcal{B}_\delta\}) \leq \sum_{k=0}^{\underline{k}} \mathrm{MULT}(\{2cB : B\in\mathcal{B}_\delta(k,\epsilon)\}) \leq (\underline{k}+1)N_\mu(1,\frac{4c}{\epsilon}). \tag{2.2.24}$$

При $k \in \{0,...,\underline{k}\}$ применение предложения 1.2.45 с мерой $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_k$ даёт

$$\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,2cB)\Big)^p \leq 2^p \fint\limits_{2cB} |f(z)|^p\,d\mathfrak{m}_k(z) \quad \text{при всех} \quad B\in\mathcal{B}_\delta(k,\epsilon). \tag{2.2.25}$$

Следовательно, применяя предложение 2.2.3 при $c' = 2c$ и (2.1.5), получим для любого $k \in \{0,...,\underline{k}\}$ и любого $B \in \mathcal{B}_\delta(k,\epsilon)$,

$$\begin{aligned}\mu(B)\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,2cB)\Big)^p &\leq 2^p \frac{C_{\{\mathfrak{m}_k\},3}}{\epsilon^{\underline{k}\theta}}\frac{\mu(B)}{\mathfrak{m}_k(2cB)}\int\limits_{2cB}|f(z)|^p\,d\mathfrak{m}_0(z)\\ &\leq 2^p\frac{(C_\mu(2c))^{\log_2 4c+1}}{\epsilon^{(\underline{k}+1)\theta}}\frac{(C_{\{\mathfrak{m}_k\},3})^2}{C_{\{\mathfrak{m}_k\},2}}(r_B)^\theta\int\limits_{2cB}|f(z)|^p\,d\mathfrak{m}_0(z).\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Заметим, что правая часть неравенства (2.2.26) зависит от $\underline{k}$, но не зависит от $k \in \{0,...,\underline{k}\}$. Следовательно, используя предложение 1.2.38 и оценки (2.2.24), (2.2.26), получим (напомним, что $\theta \in [0,p)$)

$$\begin{aligned}&\sum_{B\in\mathcal{B}_\delta}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,2cB)\Big)^p \leq \sum_{B\in\mathcal{B}_\delta}\frac{2^p}{\delta^{p-\theta}}\frac{(C_\mu(2c))^{\log_2 4c+1}}{\epsilon^{(\underline{k}+1)\theta}}\frac{(C_{\{\mathfrak{m}_k\},3})^2}{C_{\{\mathfrak{m}_k\},2}}\int\limits_{2cB}|f(z)|^p\,d\mathfrak{m}_0(z)\\ &\leq (\underline{k}+1)N_\mu(1,\frac{4c}{\epsilon})\frac{2^p}{\delta^p}\frac{(C_\mu(2c))^{\log_2 4c+1}}{\epsilon^\theta}\frac{(C_{\{\mathfrak{m}_k\},3})^2}{C_{\{\mathfrak{m}_k\},2}}\int\limits_S|f(x)|^p\,d\mathfrak{m}_0(x).\end{aligned}$$

Доказательство завершено. □

Также докажем очень близкое по смыслу утверждение.

Лемма 2.2.27. *Для любого числа $L \in \mathbb{N}_0$ существует константа $C > 0$ (зависящая от L) такая, что*

$$\sum_{k=0}^{L} \int\limits_S \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_{\epsilon^k}(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \le C\|f\|^p_{L_p(\mathfrak{m}_0)}. \tag{2.2.28}$$

Доказательство. Используя оценку (2.2.25), меняя порядок интегрирования, и, учитывая предложение 2.1.19, получим для любого $k \in \{0, ..., L\}$ оценку

$$\begin{aligned}&\int\limits_S \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_{\epsilon^k}(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x)\\ &\le C \int\limits_S \Big(\fint\limits_{B_{\epsilon^k}(x)} |f(y)|^p \, d\mathfrak{m}_k(y)\Big) \, d\mathfrak{m}_k(x) \le C \int\limits_S |f(y)|^p \, d\mathfrak{m}_k(y).\end{aligned}$$

Просуммировав эту оценку по всем $k \in \{0, ..., L\}$, получим требуемое неравенство. □

Естественно поставить вопрос, следует ли из конечности $\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$ при малых $\delta > 0$ конечность $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$. К счастью, ответ на этот вопрос утвердительный.

Лемма 2.2.29. $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$ *в том и только том случае, если* $\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$ *при некотором* $\delta \in (0, 1]$.

Доказательство. Необходимость следует из замечания 2.2.2. Для доказательства достаточности разобьем заданное (S, c)-хорошее семейство $\mathcal{B}$ на два подсемейства. Более точно, положим $\mathcal{B}^{\delta} := \{B \in \mathcal{B} : r(B) \le \delta\}$ и $\mathcal{B}_{\delta} := \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}^{\delta}$. Требуемое утверждение вытекает теперь из леммы 2.2.22. □

Докажем *ключевую лемму* (используем обозначение $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathrm{X}$).

Лемма 2.2.30. *Пусть элемент $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ таков, что $\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$ при некоторых $c > 1$ и $\delta \in (0, 1]$. Тогда существуют борелевская функция $\overline{f} : S \to \mathbb{R}$ и борелевское множество $\underline{S} \subset S$ такие, что $\mathcal{H}_{\theta}(S \setminus \underline{S}) = 0$ и*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \fint\limits_{B_k(x)} |\overline{f}(x) - f(y)| \, d\mathfrak{m}_k(y) = 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in S. \tag{2.2.31}$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \frac{p-\theta}{2p})$ и разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Рассмотрим функцию

$$R(x) := \overline{\lim_{r\to 0}} \sum_{\epsilon^k < r} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x)), \quad x \in \mathrm{X}\,. \tag{2.2.32}$$

Ясно, что при любом $\delta' \in (0,\delta]$ имеем (мы полагаем ниже $\underline{C} := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^{k\varepsilon}\Big)^p$)

$$R^p(x) \le \Big(\varlimsup_{r\to 0} \sum_{\epsilon^k<r} \frac{\epsilon^{k\varepsilon}}{\epsilon^{k\varepsilon}} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \le \underline{C}\delta'^{\varepsilon p} \sup_{\epsilon^k<\delta'} \frac{1}{\epsilon^{k\varepsilon p}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p. \tag{2.2.33}$$

При $t>0$ введем t-надуровни функции R^p, полагая $E_t := \{x \in S : R^p(x) \ge t\}$. Наша цель – показать, что

$$\mathcal{H}_\theta(E_t) = 0 \quad \text{при всех} \quad t>0. \tag{2.2.34}$$

Фиксируем теперь $t>0$ и $\delta' \in (0,\delta]$. Для каждой точки $x \in E_t$ найдем число $k_x \in \mathbb{N}_0$ такое, что $\epsilon^{k_x} < \delta'$ и при этом

$$t < \underline{C} \frac{\delta'^{\varepsilon p}}{\epsilon^{k_x \varepsilon p}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k_x}}(f, B_{k_x}(x))\Big)^p.$$

Очевидно, семейство шаров $\mathcal{B} := \{B_{k_x}(x) : x \in E_t\}$ является покрытием множества E_t. Используя $5B$-лемму Витали о покрытии, найдем дизъюнктное не более чем счётное семейство $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ такое, что $E_t \subset \bigcup\{5B : B \in \widetilde{\mathcal{B}}\}$. Следовательно, в силу свойства равномерно локального удвоения меры μ получим

$$\sum\Big\{\frac{\mu(B)}{(r_B)^\theta} : B \in \widetilde{\mathcal{B}}\Big\} \ge C \sum\Big\{\frac{\mu(5B)}{(r_{5B})^\theta} : B \in \widetilde{\mathcal{B}}\Big\} \ge C\mathcal{H}_{\theta,5\delta'}(E_t). \tag{2.2.35}$$

В силу теоремы 2.1.14 и замечания 1.2.50, легко видеть, что

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,B) \le C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB) \quad \text{для всех} \quad B \in \widetilde{\mathcal{B}}.$$

В итоге, учитывая, что (S,c,δ')-хорошее семейство является (S,c,δ)-хорошим семейством, будем иметь

$$\begin{aligned} t\mathcal{H}_{\theta,5\delta'}(E_t) &\le C \sum_{B\in\widetilde{\mathcal{B}}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^\theta} \frac{\delta'^{\varepsilon p}}{(r_B)^{\varepsilon p}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,B)\Big)^p \\ &\le C\delta'^{\varepsilon p} \sum_{B\in\widetilde{\mathcal{B}}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,cB)\Big)^p \le C\delta'^{\varepsilon p} \Big(\mathrm{BSN}^\delta_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)\Big)^p. \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Переходя к пределу при $\delta' \to 0$, и, учитывая произвольность выбора $t>0$, получаем (2.2.34).

Шаг 2. Фиксируем $\delta' \in (0,\delta]$. Если $l,k \in \mathbb{N}_0$ таковы, что $l>k$ и $2^{-k} < \delta$, то из замечания 1.2.50, теоремы 2.1.14 и свойства (M4) следует, что

$$\begin{aligned} &\fint_{B_l(x)} \fint_{B_k(x)} |f(y)-f(z)|\, d\mathfrak{m}_l(y)\, d\mathfrak{m}_k(z) \\ &\le \sum_{i=k}^{l-1} \fint_{B_i(x)} \fint_{B_{i+1}(x)} |f(y)-f(z)|\, d\mathfrak{m}_i(z)\, d\mathfrak{m}_{i+1}(y) \le C \sum_{i=k}^{l} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}_i}(f, B_i(x)). \end{aligned} \tag{2.2.37}$$

Рассмотрим множество $\underline{S} := S \setminus \cup_{t>0} E_t$. Поскольку $R(x) = 0$ для всех $x \in \underline{S}$, из (2.2.32), (2.2.37) следует, что, если $x \in \underline{S}$, то $\{⨍_{B_k(x)} f(y)\, d\mathfrak{m}_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши. Следовательно, для любой точки $x \in \underline{S}$ существует конечный предел

$$\overline{f}(x) := \lim_{l\to\infty} ⨍_{B_l(x)} f(z)\, d\mathfrak{m}_l(z).$$

Применение леммы Фату приводит к желаемой оценке

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{k\to\infty} ⨍_{B_k(x)} |\overline{f}(x) - f(y)|\, d\mathfrak{m}_k(y) \le \varlimsup_{k\to\infty} \varliminf_{l\to\infty} ⨍_{B_k(x)} \Big| ⨍_{B_l(x)} f(z)\, d\mathfrak{m}_l(z) - f(y)\Big|\, d\mathfrak{m}_k(y) \\
&\le \varlimsup_{k\to\infty} \varliminf_{l\to\infty} ⨍_{B_l(x)} ⨍_{B_k(x)} |f(y) - f(z)|\, d\mathfrak{m}_k(y)\, d\mathfrak{m}_k(z) \qquad (2.2.38) \\
&\le \varlimsup_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}_i}(f, B_i(x)) \le R(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \underline{S}.
\end{aligned}$$

Из (2.2.34) и монотонности множеств E_t по t, очевидно, выводим $\mathcal{H}_\theta(S \setminus \underline{S}) = 0$, завершая тем самым доказательство. □

Напомним следующий классический результат (см., например, следствие 3.3.51 в [71]).

Предложение 2.2.39. *Пусть $\mathfrak{m}$ – локально конечная мера на X. При $p \in [1, \infty)$ для любого элемента $f \in L_p(\mathfrak{m})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $O \subset \mathrm{X}$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{m}(O) < \varepsilon$, и непрерывная функция f_ε такая, что $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для $\mathfrak{m}$-п.в. точек $x \in \mathrm{X} \setminus O$.*

Теперь мы готовы сформулировать основной результат настоящего параграфа. Напомним определение 1.4.14.

Теорема 2.2.40. *Если $\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$ при некоторых $c > 1$ и $\delta \in (0, 1]$, то*

$$\mathfrak{m}_0(S \setminus (\mathfrak{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(f)) = 0. \qquad (2.2.41)$$

Доказательство. Пусть $\overline{f}$ и $\underline{S}$ те же, что и в лемме 2.2.30. Из предложения 2.1.13 имеем $\mathfrak{m}_0(S \setminus \underline{S}) = \mathcal{H}_\theta(S \setminus \underline{S}) = 0$. Следовательно, чтобы установить (2.2.41), достаточно показать, что

$$f(x) = \overline{f}(x) \quad \text{для } \mathfrak{m}_0\text{–п.в.} \quad x \in \underline{S}. \qquad (2.2.42)$$

Применим предложение 2.2.39 для меры $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0$. Это дает при каждом $\varepsilon > 0$ существование функции $f_\varepsilon \in C(\mathrm{X})$ и открытого множества $O_\varepsilon \subset \mathrm{X}$ такого, что $\mathfrak{m}_0(O_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для $\mathfrak{m}_0$–п.в. точек $x \in S \setminus O_\varepsilon$. Напомним (1.4.10) и положим

$$S_\varepsilon := \{x \in S \setminus O_\varepsilon : f(x) = f_\varepsilon(x) \quad \text{и} \quad \overline{D}^{\{\mathfrak{m}_k\}}_{S\setminus O_\varepsilon}(x, \epsilon) > 0\}.$$

Учитывая (**D.2.2.3**) и (2.1.6), для любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$, $n \to \infty$ имеем равенство

$$\mathfrak{m}_0\Big(S \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{\varepsilon_n} \cap \underline{S}\Big)\Big) = 0. \tag{2.2.43}$$

Фиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и точку $\underline{x} \in S_\varepsilon \cap \underline{S}$. В силу неравенства Чебышева при любом фиксированном $\sigma > 0$ имеем

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{m}_k(B_k(\underline{x})))^{-1}\mathfrak{m}_k(\{y \in B_k(x) : |f(y) - \overline{f}(\underline{x})| \geq \sigma\})\\ &\leq \frac{1}{\sigma} \fint\limits_{B_k(x)} |f(y) - \overline{f}(\underline{x})|\, d\mathfrak{m}_k(y) \to 0, \quad k \to \infty.\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Положим $c(\underline{x}) := \overline{D}^{\{\mathfrak{m}_k\}}_{S\setminus O_\varepsilon}(x, \epsilon)$ для краткости. Следовательно, при каждом $\sigma > 0$ существует достаточно большое число $k = k(\underline{x}, \sigma) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathfrak{m}_k(\{y \in B_k(x) : |f(y) - \overline{f}(\underline{x})| < \frac{\sigma}{2} \text{ и } |f(y) - f(\underline{x})| < \frac{\sigma}{2}\}) \geq \frac{c(\underline{x})}{2}\mathfrak{m}_k(B_k(\underline{x})).$$

В итоге, по неравенству треугольника получим $|\overline{f}(\underline{x}) - f(\underline{x})| < \sigma$. Так как $\sigma > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, мы получаем $\overline{f}(\underline{x}) = f(\underline{x})$. Поскольку точка $\underline{x} \in \underline{S} \cap S_\varepsilon$ была выбрана произвольно, получаем

$$f(x) = \overline{f}(x) \quad \text{при всех} \quad x \in S_\varepsilon \cap \underline{S}. \tag{2.2.45}$$

В итоге, комбинируя (2.2.43), (2.2.45), выводим (2.2.42) и завершаем доказательство. $\square$

2.3. Оператор продолжения

В течение всего параграфа будем считать фиксированными следующие данные:

(**D.2.3.1**) параметр $p \in (1, \infty)$ и метрическое пространство с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_p$;

(**D.2.3.2**) параметр $\theta \in [0, p)$ и замкнутое множество $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$;

(**D.2.3.3**) последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ с параметром $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) \in (0, \frac{1}{10}]$.

Положим, как обычно, $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$ и всех $x \in \mathrm{X}$. Напомним также обозначение (1.2.12) и фиксируем последовательность $\{Z_k(\mathrm{X}, \epsilon)\} := \{Z_k(\mathrm{X}, \epsilon)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Мы начнём с простой оценки, которая будет крайне полезна при доказательстве основных утверждений данного параграфа.

Предложение 2.3.1. *Для любых $c_1, c_2 \geq 1$ существует константа $C > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ следующее неравенство*

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, c_1 B_k(x)) \leq C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, c_2 B_k(y)) \tag{2.3.2}$$

справедливо для любых таких шаров $B_k(x)$ *и* $B_k(y)$, *что* $c_1B_k(x) \subset c_2B_k(y)$ *и при это* $c_1B_k(x) \supset B_k(\underline{x})$ *при некотором* $\underline{x} \in S$.

Доказательство. Фиксируем число $k \in \mathbb{N}_0$ и замкнутые шары $B_k(x)$, $B_k(y)$, удовлетворяющие условиям предложения. Имеем включения

$$c_2B_k(y) \subset 2c_2B_k(x) \subset (c_1 + 2c_2)B_k(\underline{x}).$$

Тогда, из теоремы 2.1.14 заключаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_k(c_1B_k(x)) &\le \mathfrak{m}_k(c_2B_k(y)) \le \mathfrak{m}_k(2c_2B_k(x))\\ &\le \mathfrak{m}_k((c_1 + 2c_2)B_k(\underline{x})) \le C\mathfrak{m}_k(B_k(\underline{x})) \le C\mathfrak{m}_k(c_1B_k(x)).\end{aligned}$$

Комбинируя эту оценку с (1.2.42), получим

$$\mathcal{OSC}_{\mathfrak{m}_k}(f, c_1B_k(x)) \le C\mathcal{OSC}_{\mathfrak{m}_k}(f, c_2B_k(y)).$$

Следовательно, учитывая (1.2.44), выводим требуемую оценку и завершаем доказательство. □

Напомним (1.2.14) и положим

$$\widetilde{B}_{k,\alpha} := B_{2\epsilon^k}(z_{k,\alpha}) \quad \text{для каждого} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{для любого} \quad \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon). \tag{2.3.3}$$

При $k \in \mathbb{Z}$, *k-ая окрестность* S и *k-ый слой* S, соответственно, определим равенствами

$$U_k(S) := \{x \in \mathrm{X} : \mathrm{dist}(x, S) < 5\epsilon^k\}, \quad V_k(S) := U_{k-1}(S) \setminus U_k(S). \tag{2.3.4}$$

Преимущество введения таких слоев видно на примере следующего предложения.

Предложение 2.3.5. *Пусть* $k, k' \in \mathbb{Z}$ *такие, что* $|k - k'| \ge 2$. *Тогда, для любого шара* $B = \widetilde{B}_{k,\alpha}$, *удовлетворяющего условию* $B \cap V_k(S) \ne \emptyset$, *и любого шара* $B' = \widetilde{B}_{k',\alpha'}$, *удовлетворяющего условию* $B' \cap V_{k'}(S) \ne \emptyset$, *выполнено* $B \cap B' = \emptyset$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные шары B, B', удовлетворяющие предположениям леммы. Если $B \cap B' \ne \emptyset$, то по неравенству треугольника получим

$$\mathrm{dist}(V_k(S), V_{k'}(S)) \le 4(\epsilon^k + \epsilon^{k'}).$$

С другой стороны, поскольку $\epsilon \le \frac{1}{10}$, имеем

$$\mathrm{dist}(V_k(S), V_{k'}(S)) \ge 4\epsilon^{\min\{k,k'\}} + 5\epsilon^{\max\{k,k'\}}.$$

Это противоречие доказывает утверждение. □

Полезное свойство пространства X заключено в следующем хорошо известном результате о разбиении единицы (подробности можно найти, например, в лемме 2.4 работы [61]):

Лемма 2.3.6. *Существует константа $C > 0$, зависящая только от $C_\mu(10)$, такая, что*

$$0 \le \varphi_{k,\alpha} \le \chi_{\widetilde{B}_{k,\alpha}} \quad \text{и} \quad \operatorname{lip}\varphi_{k,\alpha} \le \frac{C}{\epsilon^k}\chi_{\widetilde{B}_{k,\alpha}} \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и всех} \quad \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon), \tag{2.3.7}$$

и, кроме того,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)} \varphi_{k,\alpha} = 1 \quad \text{при каждом} \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3.8}$$

Теперь мы установим простой комбинаторный результат, который относится к фольклору. Тем не менее, мы приводим подробное доказательство для полноты картины.

Лемма 2.3.9. *Существует константа $\underline{N} \in \mathbb{N}$, зависящая только от $C_\mu(10)$, такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ семейство $\widetilde{\mathcal{B}}_k := \{\widetilde{B}_{k,\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)\}$ может быть разбито на не более чем $N \le \underline{N}$ дизъюнктных подсемейств $\{\widetilde{\mathcal{B}}_k^i\}_{i=1}^N$.*

Доказательство. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$ и положим $E(0) = Z_k(\mathrm{X},\epsilon)$. Через $Z(1)$ обозначим максимальное $5\epsilon^k$-разделенное подмножество $Z_k(\mathrm{X},\epsilon)$ и положим $E(1) := Z_k(\mathrm{X},\epsilon) \setminus Z(1)$. Рассуждая по индукции, предположим, что при некотором $i \in \mathbb{N}$ мы уже построили множества $Z(1),...,Z(i)$ и $E(1),...,E(i)$ таким образом, что $E(i') = Z_k(\mathrm{X},\epsilon)\setminus\cup_{l=1}^{i'} Z(l)$, $i' \in \{1,...,i\}$. Пусть $Z(i+1)$ – максимальное $5\epsilon^k$-разделенное подмножество $E(i)$ и $E(i+1) := E(i) \setminus Z(i+1)$. Положим $\underline{N} := \lceil N_\mu(1,24)\rceil$ (где $N_\mu(R,c)$ – то же, что и в предложении 1.2.52). Покажем, что $E(i) = \emptyset$ при любом $i > \underline{N}$. В самом деле, предположим, что найдется номер $i > \underline{N}$, для которого $E(i) \ne \emptyset$ и фиксируем $\underline{x}(i) \in E(i)$. При $i' \in \{1,...,i\}$ в силу максимальности $Z(i')$, и очевидного включения $E_i \subset E_{i'-1}$ существует точка $\underline{x}(i') \in Z(i')$, для которой $\mathrm{d}(\underline{x}(i'),\underline{x}(i)) < 5\epsilon^k$. Следовательно, имеем $B_{\epsilon^k/4}(\underline{x}(i')) \subset B_{6\epsilon^k}(\underline{x}(i))$. В итоге, поскольку число i' может быть выбрано произвольно, существует семейство $\mathcal{F} := \{B_{\epsilon^k/4}(\underline{x}(i')) : i' \in \{1,...,i\}\}$ попарно непересекающихся шаров, содержащихся в шаре $B_{6\epsilon^k}(\underline{x}(i))$, такое, что $\#\mathcal{F} = i$. Комбинируя это наблюдение с предложением 1.2.52, приходим к противоречию. Следовательно, $\#\{i \in \mathbb{N} : E(i) \ne \emptyset\} \le \underline{N}$. Остается заметить, что, при каждом $i \in \{1,...,\underline{N}\}$, для любых $z, z' \in Z(i)$ имеем $B_{2\epsilon^k}(z) \cap B_{2\epsilon^k}(z') = \emptyset$. □

При $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\mathcal{A}_k(S) := \{\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon) : \widetilde{B}_{k,\alpha} \cap U_{k-1}(S) \ne \emptyset\}. \tag{2.3.10}$$

Замечание 2.3.11. Так как $\epsilon \in (0, \frac{1}{10}]$, из (2.3.4) и (2.3.10) легко вывести, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ и любых $\alpha \in \mathcal{A}_k(S)$ существует точка $\underline{x} \in S$ такая, что $B_{\epsilon^k}(\underline{x}) \subset \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha} = B_{\frac{6}{\epsilon}}(z_{k,\alpha})$.

Следующий результат является немедленным следствием (2.3.4)–(2.3.10).

Предложение 2.3.12. *При каждом* $k \in \mathbb{N}_0$

$$\chi_{U_{k-1}(S)}(x) \le \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k(S)} \varphi_{k,\alpha}(x) \le \chi_{U_{k-2}(S)}(x), \quad x \in \mathrm{X}\,.$$

Теперь, используя замечание 2.3.11, для элемента $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ определим при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ специальное семейство чисел. Более точно, положим

$$f_{k,\alpha} := \begin{cases} \fint\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha}} f(x)\, d\mathfrak{m}_k(x), & \text{если} \quad \alpha \in \mathcal{A}_k(S); \\ 0, & \text{если} \quad \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon) \setminus \mathcal{A}_k(S). \end{cases} \tag{2.3.13}$$

Следующее простое утверждение будет полезно в дальнейшем. Напомним (2.2.6).

Предложение 2.3.14. *Существует константа* $C > 0$ *такая, что для любого элемента* $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ *и любого числа* $k \in \mathbb{N}_0$ *неравенство*

$$|f_{k,\alpha} - f_{k',\beta}| \le C\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_k}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha}) \tag{2.3.15}$$

справедливо при всех таких $k' \in \{k, k+1\}$ *и* $\alpha \in \mathcal{A}_k(S)$, $\beta \in \mathcal{A}_{k'}(S)$, *что* $\widetilde{B}_{k,\alpha} \cap \widetilde{B}_{k',\beta} \neq \emptyset$.

Доказательство. Фиксируем $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$, числа $k \in \mathbb{N}_0$, $k' \in \{k, k+1\}$, и индексы $\alpha \in \mathcal{A}_k(S)$, $\beta \in \mathcal{A}_{k'}(S)$, для которых $\widetilde{B}_{k,\alpha} \cap \widetilde{B}_{k',\beta} \neq \emptyset$. В силу (2.3.3) имеем

$$\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k',\beta} \subset (\frac{3}{\epsilon} + 4)\widetilde{B}_{k,\alpha} \subset \frac{6}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha}.$$

Следовательно, используя (2.3.13), (2.1.5), теорему 2.1.14 и замечание 1.2.50, получаем требуемую оценку

$$\begin{aligned} |f_{k,\alpha} - f_{k',\beta}| &\le \fint\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha}} \fint\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k',\beta}} |f(y) - f(y')|\, d\mathfrak{m}_k(y) d\mathfrak{m}_{k'}(y') \\ &\le C \fint\limits_{\frac{6}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha}} \fint\limits_{\frac{6}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha}} |f(y) - f(y')|\, d\mathfrak{m}_k(y) d\mathfrak{m}_k(y') \le C\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_k}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha}). \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Доказательство завершено. □

Для элемента $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ положим

$$f_k(x) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)} \varphi_{k,\alpha}(x) f_{k,\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k(S)} \varphi_{k,\alpha}(x) f_{k,\alpha}, \quad x \in \mathrm{X}\,. \tag{2.3.17}$$

Имея в распоряжении предложения 2.3.12, 2.3.14, мы получим хорошие поточечные оценки локальных констант Липшица функций f_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Напомним (1.2.7).

Предложение 2.3.18. *Существует константа $C > 0$ такая, что для любого элемента $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$, для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ и любой точки $\underline{x} \in U_{k-1}(S)$, следующее неравенство*

$$\operatorname{lip} f_k(\underline{x}) \le \frac{C}{\epsilon^k}\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_k}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\underline{\alpha}}) \tag{2.3.19}$$

справедливо для всех таких индексов $\underline{\alpha} \in \mathcal{A}_k(S)$, что $\widetilde{B}_{k,\underline{\alpha}} \ni \underline{x}$.

Доказательство. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$ и $\underline{x} \in U_{k-1}(S)$. Фиксируем также произвольный индекс $\underline{\alpha} \in \mathcal{A}_k(S)$, для которого $\underline{x} \in \widetilde{B}_{k,\underline{\alpha}}$. Из (3) предложения 1.2.10 и (2.3.8) получаем

$$\operatorname{lip} f_k(\underline{x}) = \operatorname{lip}\Big(f_k - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)} \varphi_{k,\alpha} f_{k,\underline{\alpha}}\Big)(\underline{x}).$$

Из (2.3.10) следует, что при $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)$, неравенство $\varphi_{k,\alpha}(\underline{x}) \neq 0$ влечет $\alpha \in \mathcal{A}_k(S)$. Следовательно, используя (2.3.17) вместе с (2.3.7) и, наконец, учитывая предложения 1.2.54, 2.3.14, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}\operatorname{lip} f_k(\underline{x}) &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)} \operatorname{lip}\varphi_{k,\alpha}(\underline{x})|f_{k,\underline{\alpha}} - f_{k,\alpha}| = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(S)} \operatorname{lip}\varphi_{k,\alpha}(\underline{x})|f_{k,\underline{\alpha}} - f_{k,\alpha}| \\ &\le C\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(S)} \chi_{\widetilde{B}_{k,\alpha}}(\underline{x})\frac{1}{\epsilon^k}|f_{k,\underline{\alpha}} - f_{k,\alpha}| \le \frac{C}{\epsilon^k}\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_k}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\underline{\alpha}}).\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Доказательство завершено. □

Эта поточечная оценка приводит к хорошей оценке локальных констант Липшица в L_p-норме. Напомним, что для борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ и элемента $f \in L_p^{loc}(\mathrm{X})$ мы полагаем $\|f\|_{L_p(E)} := \|f\|_{L_p(E,\mu)}$.

Лемма 2.3.21. *Существует константа $C > 0$ такая, что для любого элемента $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$, любого числа $k \in \mathbb{N}_0$ и любого борелевского множества $E \subset U_{k-1}(S)$,*

$$\|\operatorname{lip} f_k\|^p_{L_p(E)} \le C\sum_{E\cap\widetilde{B}_{k,\alpha}\neq\emptyset} \frac{\mu(\widetilde{B}_{k,\alpha})}{\epsilon^{kp}}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_k}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha})\Big)^p. \tag{2.3.22}$$

Доказательство. В силу предложения 2.3.18 для любого шара $\widetilde{B}_{k,\alpha}$, удовлетворяющего условию $E \cap \widetilde{B}_{k,\alpha} \neq \emptyset$, очевидно, имеем

$$\int\limits_{E\cap\widetilde{B}_{k,\alpha}} \Big(\operatorname{lip} f_k(x)\Big)^p d\mu(x) \le C\frac{\mu(E\cap\widetilde{B}_{k,\alpha})}{\epsilon^{kp}}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_k}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha})\Big)^p.$$

Это наблюдение вместе с предложением 2.3.12 и первым неравенством в (2.3.7) даёт

$$\begin{aligned}\int\limits_{E} \Big(\operatorname{lip} f_k(x)\Big)^p d\mu(x) &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(S)} \int\limits_{E\cap\widetilde{B}_{k,\alpha}} \Big(\operatorname{lip} f_k(x)\Big)^p d\mu(x) \\ &\le C\sum_{E\cap\widetilde{B}_{k,\alpha}\neq\emptyset} \frac{\mu(\widetilde{B}_{k,\alpha})}{\epsilon^{kp}}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_k}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{k,\alpha})\Big)^p.\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Этим доказательство завершено. □

Для построения нашего оператора продолжения для любого элемента $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ сконструируем некоторую специальную последовательность функций $\{f^j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Неформально говоря, график каждой такой функции f^j выглядит как лестница состоящая из элементарных ступеней $\mathrm{St}_i[f]$, $i = 1, ..., j$. Более точно, для $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ положим $f_0 := 0$. Далее, рассуждая по индукции, при каждом $i \in \mathbb{N}$ определим *i-ую элементарную ступень* f через

$$\mathrm{St}_i[f](x) := \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_i(S)} \varphi_{i,\alpha}(x)(f_{i,\alpha} - f_{i-1}(x)), \quad x \in \mathrm{X}\,. \tag{2.3.24}$$

Замечание 2.3.25. Из предложения 2.3.12 следует, что $\operatorname{supp}\mathrm{St}_i[f] \subset U_{i-2}(S)$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Наконец, определим *специальную аппроксимирующую последовательность*, полагая при каждом $j \in \mathbb{N}$

$$f^j(x) := \sum_{i=1}^{j} \mathrm{St}_i[f](x), \qquad x \in \mathrm{X}\,. \tag{2.3.26}$$

Предложение 2.3.27. *Для любой точки $x \in \mathrm{X}\setminus S$ существует $j(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $f^j(x) = f^{j(x)}(x)$ для всех $j \geq j(x)$.*

Доказательство. Для любой точки $x \in \mathrm{X}\setminus S$, из замечания 2.3.25 и (2.3.26) имеем $f^j(x) = f^{j+1}(x)$ при условии, что $x \in \mathrm{X}\setminus U_{j-1}(S)$. Поскольку $U_{j+1}(S) \subset U_j(S)$ при всех $j \in \mathbb{N}$ получаем требуемое. □

Теперь мы готовы предъявить конструкцию оператора продолжения.

Определение 2.3.28. При $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ положим

$$\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) := \chi_S f + \chi_{\mathrm{X}\setminus S} \lim_{j\to\infty} f^j, \tag{2.3.29}$$

где под $\chi_S f$ понимается $\mathfrak{m}_0$-класс эквивалентности соответствующей функции, а $\chi_{\mathrm{X}\setminus S}\lim_{j\to\infty} f^j$ обозначает поточечный предел последовательности $\{f^j\}$ на множестве $\mathrm{X}\setminus S$.

Замечание 2.3.30. Пусть $N_{\mathfrak{m}_0}$ – линейное пространство всех таких функций $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, что $f(x) = 0$ при $\mathfrak{m}_0$-п.в. $x \in S$ и $f(x) = 0$ при всех $x \in \mathrm{X}\setminus S$. Положим

$$L_0(\mathfrak{m}_0) \oplus \mathfrak{B}(\mathrm{X}\setminus S) := \mathfrak{B}(\mathrm{X})/N_{\mathfrak{m}_0}.$$

Тогда, в силу предложения 2.3.27 формула (2.3.29) задаёт отображение $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}} : L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}) \to L_0(\mathfrak{m}_0) \oplus \mathfrak{B}(\mathrm{X}\setminus S)$, которое корректно определено и линейно.

Главная причина для введения последовательности $\{f^j\}$ именно таким образом – наличие замечательных поточечных свойств "функций шагов" $\mathrm{St}_i[f]$, $i \in \mathbb{N}$. Более точно, справедлив следующий результат.

Предложение 2.3.31. *Пусть $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$. Пусть $i \in \mathbb{N}$, $\underline{x} \in U_{i-2}(S)$ и $\underline{\alpha} \in \mathcal{A}_{i-1}(S)$ таковы, что $\underline{x} \in \widetilde{B}_{i-1,\underline{\alpha}}$. Тогда*

$$\widetilde{\mathrm{St}}_i[f](\underline{x}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i(S)} \chi_{\widetilde{B}_{i,\alpha}}(\underline{x}) |f_{i,\alpha} - f_{i-1}(\underline{x})| \leq C \widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i-1,\underline{\alpha}}), \tag{2.3.32}$$

где константа $C > 0$ не зависит ни от f, ни от $i, \underline{x}$, ни от $\underline{\alpha}$.

Доказательство. Из (2.3.8) и (2.3.17) следует, что

$$\widetilde{\mathrm{St}}_i[f](\underline{x}) \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i(S)} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}_{i-1}(\mathrm{X},\epsilon)} \chi_{\widetilde{B}_{i,\alpha}}(\underline{x}) \varphi_{i-1,\alpha'}(\underline{x}) |f_{i,\alpha} - f_{i-1,\alpha'}|.$$

Из неравенства треугольника имеем $|f_{i,\alpha} - f_{i-1,\alpha'}| \leq |f_{i,\alpha} - f_{i-1,\underline{\alpha}}| + |f_{i-1,\underline{\alpha}} - f_{i-1,\alpha'}|$. Следовательно, используя (2.3.7), предложение 2.3.14, и, учитывая предложение 1.2.54, получим

$$\widetilde{\mathrm{St}}_i[f](\underline{x}) \leq \sum_{i'=i-1}^{i} \sum_{\alpha' \in \mathcal{A}_{i'}(\mathrm{X},\epsilon)} \chi_{\widetilde{B}_{i',\alpha'}}(\underline{x}) |f_{i',\alpha'} - f_{i-1,\underline{\alpha}}| \leq C \widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i-1,\underline{\alpha}}).$$

Доказательство завершено. □

Доказанное предложение приводит к полезным оценка L_p-норм шагов и их локальных констант Липшица.

Лемма 2.3.33. *Существует константа $C > 0$ такая, что при любом $i \in \mathbb{N}$, справедливы следующие свойства:*

1) *для каждого борелевского множества $E \subset U_{i-2}(S)$ и любой меры ν на* X

$$\| \mathrm{St}_i[f] \|^p_{L_p(E,\nu)} \leq C \sum_{\widetilde{B}_{i-1,\alpha} \cap E \neq \emptyset} \nu(\widetilde{B}_{i-1,\alpha}) \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i-1,\alpha}) \Big)^p;$$

2) *для каждого борелевского множества $E \subset U_{i-2}(S)$*

$$\| \operatorname{lip}(\mathrm{St}_i[f]) \|^p_{L_p(E)} \leq C \sum_{\widetilde{B}_{i-1,\alpha} \cap E \neq \emptyset} \frac{\mu(\widetilde{B}_{i-1,\alpha})}{\epsilon^{(i-1)p}} \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i-1,\alpha}) \Big)^p.$$

Доказательство. Фиксируем $i \in \mathbb{N}$ и борелевское множество $E \subset U_{i-2}(S)$.

Для доказательства первого утверждения заметим, что из (2.3.7) вытекает оценка $|\mathrm{St}_i[f](x)| \leq \widetilde{\mathrm{St}}_i[f](x)$ для всех $x \in \mathrm{X}$. Следовательно, применение предложений 2.3.12 и 2.3.31 приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \| \mathrm{St}_i[f] \|^p_{L_p(E,\nu)} &\leq \| \widetilde{\mathrm{St}}_i[f] \|^p_{L_p(E,\nu)} \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{i-1}(S)} \int_{\widetilde{B}_{i-1,\alpha} \cap E} \Big(\widetilde{\mathrm{St}}_i[f](x) \Big)^p \, d\nu(x) \\ &\leq C \sum_{\widetilde{B}_{i-1,\alpha} \cap E \neq \emptyset} \nu(\widetilde{B}_{i-1,\alpha}) \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i-1,\alpha}) \Big)^p. \end{aligned} \tag{2.3.34}$$

Для доказательства второго утверждения, заметим, что из (2.3.24), предложения 1.2.10 и формул (2.3.7), (2.3.8) имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{lip}(\mathrm{St}_i[f])(x) &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_i(S)} \operatorname{lip}\varphi_{i,\alpha}(x)|f_{i,\alpha}-f_{i-1}(x)| + \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_i(S)}\varphi_{i,\alpha}(x)\operatorname{lip} f_{i-1}(x)\\ &\le \frac{C}{\epsilon^i}\widetilde{\mathrm{St}}_i[f](x)+\operatorname{lip} f_{i-1}(x) \quad \text{при всех} \quad x\in \mathrm{X}\,.\end{aligned}$$

Следовательно, используя лемму 2.3.21 при $k=i-1$, а также (2.3.34) при $\nu=\mu$, получаем требуемую оценку

$$\|\operatorname{lip}(\mathrm{St}_i[f])\|^p_{L_p(E)} \le C\sum_{\widetilde{B}_{i-1,\alpha}\cap E\neq\emptyset}\frac{\mu(\widetilde{B}_{i-1,\alpha})}{\epsilon^{(i-1)p}}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f,\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i-1,\alpha})\Big)^p. \tag{2.3.35}$$

Доказательство завершено. □

Ключевое наблюдение содержится в следующей лемме.

Лемма 2.3.36. *Существует константа $C>0$ такая, что для любого элемента $f\in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ и любого числа $j\in\mathbb{N}$*

$$\|\operatorname{lip} f^j\|^p_{L_p(U_0(S))} \le C\sum_{i=1}^{j}\sum_{\widetilde{B}_{i,\alpha}\cap\widehat{V}_i(S)\neq\emptyset}\frac{\mu(\widetilde{B}_{i,\alpha})}{\epsilon^{ip}}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_i}(f,\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i,\alpha})\Big)^p, \tag{2.3.37}$$

где $\widehat{V}_i(S):=V_i(S)$ при $j\ge 2$, $i\in\{1,...,j-1\}$ и $\widehat{V}_j(S):=U_{j-1}(S)$.

Доказательство. Зафиксируем на время $j\in\mathbb{N}$, $j\ge 2$ и $i\in\{1,...,j-1\}$. При $\underline{x}\in\widehat{V}_i(S)$ из (2.3.4) и замечания 2.3.25 ясно, что $\mathrm{St}_{i'}[f](\underline{x})=0$ для всех $i'\ge i+2$. Следовательно, используя (2.3.26) и предложение 1.2.10, мы получим $\operatorname{lip} f^j(\underline{x})\le \operatorname{lip} f_i(\underline{x})+\operatorname{lip}\mathrm{St}_{i+1}[f](\underline{x})$. Следовательно, применяя лемму 2.3.21 и лемму 2.3.33 при $E=\widehat{V}_i(S)$, выводим

$$\begin{aligned}\|\operatorname{lip} f^j\|^p_{L_p(\widehat{V}_i(S))} &\le \|\operatorname{lip} f_i\|^p_{L_p(\widehat{V}_i(S))} + \|\operatorname{lip}\mathrm{St}_{i+1}[f]\|^p_{L_p(\widehat{V}_i(S))}\\ &\le C\sum_{\widetilde{B}_{i,\alpha}\cap\widehat{V}_i(S)\neq\emptyset}\frac{\mu(\widetilde{B}_{i,\alpha})}{\epsilon^{ip}}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_i}(f,\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i,\alpha})\Big)^p.\end{aligned} \tag{2.3.38}$$

С другой стороны, для каждого $j\in\mathbb{N}$ применение леммы 2.3.21 при $E=U_{j-1}(S)$ дает

$$\begin{aligned}\|\operatorname{lip} f^j\|^p_{L_p(U_{j-1}(S))} &= \|\operatorname{lip} f_j\|^p_{L_p(U_{j-1}(S))}\\ &\le C\sum_{\widetilde{B}_{j,\alpha}\cap U_{j-1}(S)\neq\emptyset}\frac{\mu(\widetilde{B}_{j,\alpha})}{\epsilon^{jp}}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_j}(f,\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{j,\alpha})\Big)^p.\end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Суммируя (2.3.38) по всем $i\in\{1,...,j-1\}$, и, принимая во внимание (2.3.39), мы приходим к (2.3.37), завершая тем самым доказательство.

□

Лемма 2.3.40. *Существует такое число $C > 0$, что для любого элемента $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$*

$$\|f_1\|_{L_p(\mathrm{X})}^p + \|\operatorname{lip} f_1\|_{L_p(\mathrm{X})}^p \le C\|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)}^p. \tag{2.3.41}$$

Доказательство. Комбинируя первое неравенство в (2.3.7) с (2.3.13), (2.3.17), и, используя неравенство Гёльдера, получим

$$|f_1(x)|^p \le C \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1(S)} \chi_{\widetilde{B}_{1,\alpha}}(x)\Big(\fint\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{1,\alpha}} |f(y)|\, d\mathfrak{m}_1(y)\Big)^p, \quad x \in \mathrm{X}. \tag{2.3.42}$$

Аналогично, учитывая второе неравенство в (2.3.7), имеем

$$(\operatorname{lip} f_1(x))^p \le C \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1(S)} \chi_{\widetilde{B}_{1,\alpha}}(x)\Big(\fint\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{1,\alpha}} |f(y)|\, d\mathfrak{m}_1(y)\Big)^p, \quad x \in \mathrm{X}. \tag{2.3.43}$$

Комбинируя (2.3.42), (2.3.43), и используя неравенство Гёльдера, получим

$$\|f_1\|_{L_p(\mu)}^p + \|\operatorname{lip} f_1\|_{L_p(\mu)}^p \le C \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1(S)} \mu(\widetilde{B}_{1,\alpha}) \fint\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{1,\alpha}} |f(y)|^p\, d\mathfrak{m}_1(y). \tag{2.3.44}$$

Из (2.3.10) следует, что $(\frac{6}{\epsilon}-1)B_{1,\alpha} \cap S \neq \emptyset$ при всех $\alpha \in \mathcal{A}_1(S)$. Следовательно, применяя предложение 2.2.3 при $c = \frac{6}{\epsilon} - 1$, $c' = \frac{6}{\epsilon}$, и, принимая во внимание свойство равномерного локального удвоения меры μ, получим $\mu(\widetilde{B}_{1,\alpha})/\mathfrak{m}_1(\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{1,\alpha}) \le C$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}_1(S)$. В результате, используя это наблюдение, предложения 1.2.38, 1.2.54, и, учитывая (2.1.5), выводим

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1(S)} \mu(\widetilde{B}_{1,\alpha}) \fint\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{1,\alpha}} |f(y)|^p\, d\mathfrak{m}_1(y) \le C \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_1(S)} \int\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{1,\alpha}} |f(y)|^p\, d\mathfrak{m}_1(y) \\ &\le C\|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_1)}^p \le C\|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)}^p. \end{aligned} \tag{2.3.45}$$

Комбинируя (2.3.44) и (2.3.45), получаем требуемую оценку и завершаем доказательство. □

Установим краеугольную оценку для локальных констант Липшица функций f^j, $j \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.3.46. *Для любого $c \ge \frac{3}{\epsilon}$ существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\varlimsup_{j\to\infty} \|\operatorname{lip} f^j\|_{L_p(\mathrm{X})}^p \le C\,\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \quad \textit{для всех} \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.3.47}$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$, поскольку в противном случае неравенство очевидно. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Мы утверждаем, что при каждом $j \in \mathbb{N}$, $j \ge 2$ найдется (S,c)-семейство Уитни $\mathcal{B}_1^j(S)$, для которого (положим $k(B) := k(r_B)$, как обычно, и напомним (2.2.6))

$$\sum_{B\in\mathcal{B}_1^j(S)} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB)\Big)^p \ge \frac{1}{2\underline{N}} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{\widetilde{B}_{i,\alpha}\cap V_i(S)\neq\emptyset} \frac{\mu(\widetilde{B}_{i,\alpha})}{\epsilon^{ip}}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_i}(f, c\widetilde{B}_{i,\alpha})\Big)^p, \tag{2.3.48}$$

где константа $\underline{N}$ та же, что и в лемме 2.3.9. В самом деле, разобьем сумму в правой части (2.3.48) на суммы по четным и нечетным $i \in \{1, ..., j-1\}$, соответственно. Без ограничения общности можно считать, что сумма по нечетным индексам не меньше чем по четным. Далее, при каждом нечетном $i \in \{1, ..., j-1\}$ применим лемму 2.3.9 и разобьем семейство шаров $\{\widetilde{B}_{i,\alpha} : \widetilde{B}_{i,\alpha} \cap V_i \neq \emptyset\}$ на не более чем $\underline{N}$ дизъюнктных подсемейств. При каждом нечетном $i \in \{1, ..., j-1\}$ выберем подсемейство максимизирующее соответствующую сумму и обозначим его через $\mathcal{G}_i$. Из предложения 2.3.5 вытекает, что $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_{i'} = \emptyset$ при $i \neq i'$. Наконец, положим $\mathcal{B}_1^j(S) := \cup\{\mathcal{G}_i\}$, где объединение взято по всем нечетным $i \in \{1, ..., j-1\}$. Это, очевидно, дает (2.3.48). С другой стороны, ясно, что

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_1^j(S)} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p} \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB) \Big)^p \leq \sup \sum_{B \in \mathcal{B}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p} \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB) \Big)^p, \tag{2.3.49}$$

где супремум в правой части (2.3.49) взят по всем (S, c)-семействам Уитни $\mathcal{B}$.

Шаг 2. При $j \in \mathbb{N}$ из леммы 2.3.9 следует существование $(S, c, 2\epsilon^j)$-хорошего семейства $\mathcal{B}_2^j(S)$ такого, что

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_2^j(S)} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p} \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB) \Big)^p \geq \frac{1}{\underline{N}} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j(S)} \frac{\mu(B_{j,\alpha})}{\epsilon^{jp}} \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_j}(f, c\widetilde{B}_{j,\alpha}) \Big)^p. \tag{2.3.50}$$

В силу определений 2.2.1 и 2.2.7 имеем

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_2^j(S)} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p} \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB) \Big)^p \leq \mathrm{BSN}^{2\epsilon^j}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f). \tag{2.3.51}$$

Шаг 3. Используя лемму 2.3.36, оценки (2.3.48), (2.3.50) и предложение 2.3.1, получим для всех достаточно больших $j \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\int\limits_{U_0(S)} \Big(\operatorname{lip} f^j(x) \Big)^p \, d\mu(x) \leq C \sum_{B \in \mathcal{B}_1^j(S) \cup \mathcal{B}_2^j(S)} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p} \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, cB) \Big)^p.$$

Комбинируя это неравенство с (2.3.49), (2.3.51) и (2.2.21), выводим

$$\varliminf_{j \to \infty} \| \operatorname{lip} f^j \|^p_{L_p(U_0(S))} \leq C \, \mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f). \tag{2.3.52}$$

Шаг 4. Из замечания 2.3.25 и (2.3.26) следует, что $f_1(x) = f^j(x)$ при каждом $j \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathrm{X} \setminus U_0(S)$. Следовательно, используя лемму 2.3.40, получим

$$\varliminf_{j \to \infty} \| \operatorname{lip} f^j \|^p_{L_p(\mathrm{X} \setminus U_0(S))} = \| \operatorname{lip} f_1 \|^p_{L_p(\mathrm{X} \setminus U_0(S))} \leq C \| f \|^p_{L_p(\mathfrak{m}_0)}. \tag{2.3.53}$$

Шаг 5. Комбинируя (2.3.52), (2.3.53), и, принимая во внимание (2.2.9), (2.2.21), выводим требуемое неравенство (2.3.47), завершая доказательство. $\square$

Конечность $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$ позволяет установить интересные свойства сходимости последовательности $\{f^j\}$. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3.54. *Пусть* $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$ *и* $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$. *Если* $\mathrm{BSN}^\delta_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$ *при некоторых* $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ *и* $\delta \in (0,1]$, *то:*

(i) $\{f^j\}$ *сходится* $\mathfrak{m}_0$*-п.в. к* f *и сходится всюду к* $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)$ *на множестве* $\mathrm{X}\setminus S$;

(ii) $\|f^j - \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)\|_{L_p(\mathrm{X})} \to 0$, $j \to \infty$;

(iii) *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *выполнено* $\|f^j - f\|_{L_p(\mathfrak{m}_k)} \to 0$, $j \to \infty$.

Доказательство. Из предложения 2.3.27 и определения 2.3.28 следует сходимость последовательности $\{f^j\}$ всюду на $\mathrm{X}\setminus S$ к функции $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)$. Напомним теперь определение 1.4.14 и фиксируем произвольную точку $\underline{x} \in \mathfrak{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(f)$. Поскольку $\mathfrak{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(f) \subset S$, из (2.3.17), (2.3.26) следует, что $f^j(\underline{x}) = f_j(\underline{x})$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, из (2.3.7), (2.3.13) и теоремы 2.1.14 выводим при каждом $j \geq 2$ оценку

$$
\begin{aligned}
|f(\underline{x}) - f^j(\underline{x})| &\leq \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_j(S)} \varphi_{j,\alpha}(\underline{x})|f(\underline{x}) - f_{j,\alpha}| \\
&\leq \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_j(S)} \chi_{\widetilde{B}_{j,\alpha}}(\underline{x}) \fint\limits_{\frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{j,\alpha}} |f(\underline{x}) - f(y)|\,d\mathfrak{m}_j(y) \leq C \fint\limits_{B_{j-2}(\underline{x})} |f(\underline{x}) - f(y)|\,d\mathfrak{m}_j(y).
\end{aligned} \tag{2.3.55}
$$

Следовательно, используя (2.1.5), получим

$$
|f(\underline{x}) - f^j(\underline{x})| \leq C \fint\limits_{B_{j-2}(\underline{x})} |f(\underline{x}) - f(y)|\,d\mathfrak{m}_{j-2}(y) \to 0, \quad j \to \infty.
$$

Комбинируя это наблюдение с теоремой 2.2.40, устанавливаем справедливость (i).

Установим теперь (ii). При $i \geq 2$ в силу леммы 2.3.9 найдется $(S, \frac{3}{\epsilon}, 2\epsilon^{i-1})$-хорошее семейство $\mathcal{B}$ такое, что

$$
\sum_{\widetilde{B}_{i-1,\alpha}\cap U_{i-2}(S)\neq\emptyset} \mu(\widetilde{B}_{i-1,\alpha})\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon}\widetilde{B}_{i-1,\alpha})\Big)^p \leq C \sum_{B\in\mathcal{B}} \mu(B)\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon}B)\Big)^p. \tag{2.3.56}
$$

При $i \geq 2$, в силу замечания 2.3.25 имеем $\|\mathrm{St}_i[f]\|_{L_p(\mathrm{X})} = \|\mathrm{St}_i[f]\|_{L_p(U_{i-2}(S))}$. Следовательно, применим лемму 2.3.33 при $\nu = \mu$, $E = U_{i-2}(S)$, используем (2.3.56), а также учтем определение 2.2.7 и замечание 2.2.2. В итоге для $i \geq 2$ получаем

$$
\|\mathrm{St}_i[f]\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C\epsilon^i\,\mathrm{BSN}^{2\epsilon^{i-1}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f).
$$

Следовательно, в силу неравенства треугольника, для любого $l \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего неравенству $\epsilon^{l-1} \leq \delta$, и любого $m > l$ имеем

$$
\|f^l - f^m\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq \sum_{i=l+1}^{m} \|\mathrm{St}_i[f]\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C\epsilon^l\,\mathrm{BSN}^\delta_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f).
$$

Но тогда $\|f^l - f^m\|_{L_p(\mathrm{X})} \to 0$, $l, m \to \infty$. Так как $L_p(\mathrm{X})$ полно, существует $F \in L_p(\mathrm{X})$ такая, что $\|F - f^j\|_{L_p(\mathrm{X})} \to 0$, $j \to \infty$. Классические рассуждения дают существование подпоследовательности $\{f^{j_s}\}$, сходящейся μ-п.в. к F. С другой стороны, мера μ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathfrak{m}_0$, и, как следствие, по только что доказанному утверждению (i) получаем $F = \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)$ в смысле μ-почти всюду. Этим утверждение доказано.

Чтобы установить (iii), зафиксируем $k \in \mathbb{N}_0$. При $i \geq 2$ в силу леммы 2.3.9 существует $(S, \frac{3}{\epsilon}, 2\epsilon^{i-1})$-хорошее семейство $\mathcal{B}$ такое, что

$$\sum_{\widetilde{B}_{i-1,\alpha} \cap U_{i-2}(S) \neq \emptyset} \mathfrak{m}_k(\widetilde{B}_{i-1,\alpha}) \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon} \widetilde{B}_{i-1,\alpha}) \Big)^p \leq C \sum_{B \in \mathcal{B}} \mathfrak{m}_k(B) \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon} B) \Big)^p. \tag{2.3.57}$$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$ применим лемму 2.3.33 при $\nu = \mathfrak{m}_k$, $E = U_{i-2}(S)$, используем (2.3.57)и учтем замечание 2.3.25. Имеем неравенство

$$\| \mathrm{St}_i[f] \|^p_{L_p(\mathfrak{m}_k)} \leq C \sum_{B \in \mathcal{B}} \mathfrak{m}_k(B) \Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{i-1}}(f, \frac{3}{\epsilon} B) \Big)^p.$$

Поэтому, используя (2.1.3), определение 2.2.7, замечание 2.2.2 и предложение 2.3.1, получим при всех $i > k$ оценку

$$\| \mathrm{St}_i[f] \|^p_{L_p(\mathfrak{m}_k)} \leq C \epsilon^{(p-\theta)i} \Big(\mathrm{BSN}^{2\epsilon^{i-1}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \Big)^p.$$

Так как $\theta \in [0, p)$, применяя неравенство треугольника, выводим для всех достаточно больших $l \in \mathbb{N}$ и всех $m > l$,

$$\|f^l - f^m\|_{L_p(\mathfrak{m}_k)} \leq \sum_{i=l+1}^{m} \| \mathrm{St}_i(f) \|_{L_p(\mathfrak{m}_k)} \leq C \epsilon^{\frac{(p-\theta)l}{p}} \mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f).$$

Поскольку $L_p(\mathfrak{m}_k)$ полно, существует $h \in L_p(\mathfrak{m}_k)$ такое, что $\|h - f^j\|_{L_p(\mathfrak{m}_k)} \to 0$, $j \to \infty$. Следовательно, найдется подпоследовательность $\{f^{j_s}\}$, сходящаяся $\mathfrak{m}_k$-п.в. к h. Комбинируя этот факт с доказанным выше утверждением (i), а затем и с (2.1.5), получаем равенство $h = f$ в смысле $\mathfrak{m}_k$-п.в. и завершаем доказательство (iii).

Доказательство завершено. □

Хотя факт конечности $\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$ для малых $\delta > 0$ достаточен для контроля сходимости последовательности $\{f^j\}$ в смысле $L_p(\mathrm{X})$, он все же не достаточен для получения подходящей оценки $L_p(\mathrm{X})$-нормы соответствующего предела.

Теорема 2.3.58. *Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}^{str}_{\theta}(\mathrm{X})$. Для любого $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\| \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C \, \mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \quad \textit{для всех} \quad f \in L^{loc}_1(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.3.59}$$

Доказательство. Рассуждения, использованные при доказательстве утверждения (ii) теоремы 2.3.54, дают для всех $m \geq 2$ неравенство

$$\|f^m - f^1\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C \operatorname{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f).$$

С другой стороны, из леммы 2.3.40 следует, что

$$\|f^1\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C\|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)}.$$

В итоге в силу неравенства треугольника и утверждения (ii) теоремы 2.3.54 получаем

$$\|\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)\|_{L_p(\mathrm{X})} = \lim_{l\to\infty} \|f^l\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C \operatorname{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f).$$

Доказательство завершено. □

К сожалению, сложно оценить $\|\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)\|_{L_p(\mathrm{X})}$ сверху в терминах $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$ с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от f. С другой стороны, мы имеем более слабый результат, который, однако, достаточен для наших целей.

Следствие 2.3.60. *Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$. При $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ для каждого элемента $f \in L_p(\mathfrak{m}_0)$ существует константа $C_f > 0$ такая, что*

$$\|\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C_f \,\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f). \tag{2.3.61}$$

Доказательство. Если $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) = +\infty$, то достаточно положить $C_f = 1$. Если $f \in L_p(\mathfrak{m}_0)$ и $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$, то в сиду (2.2.21) найдется $\delta = \delta(f) \in (0,1)$, для которого $\operatorname{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$. Следовательно, из леммы 2.2.29 получаем $\operatorname{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$. Этот факт в комбинации с теоремой 2.3.58 завершает доказательство. □

Теперь мы готовы доказать ключевой результат данного параграфа. Напомним определение 1.3.2.

Теорема 2.3.62. *Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$ и $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$. Если $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$ при некотором $c \geq \frac{3}{\epsilon}$, то $\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \in W_p^1(\mathrm{X})$. Кроме того, существует такая константа $C > 0$, что*

$$\operatorname{Ch}_p(\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)) \leq C \,\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \quad \textit{для всех} \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.3.63}$$

Доказательство. Если $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k,c\}}(f) = +\infty$, то неравенство (2.3.63) очевидно. Если $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$, то по теореме 2.3.54 и следствию 2.3.60 имеем $\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \in L_p(\mathrm{X})$ и $f^j \to \operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)$, $j \to \infty$ в смысле $L_p(\mathrm{X})$. Кроме того, по теореме 2.3.46

$$\operatorname{Ch}_p(\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)) \leq \varliminf_{j\to\infty} \|\operatorname{lip} f^j\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C \,\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f).$$

По определению 1.3.2 это означает, что $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ и выполнено (2.3.63).

Доказательство завершено.

□

2.4. Оценки для функционалов на пространстве следов

Цель данного параграфа – сравнить функционалы $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}$, $\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}$, $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}$ и $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}$, соответственно. Напомним, что изначально эти функционалы были заданы на пространстве $L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ и принимают свои значения, вообще говоря, в $[0,+\infty]$. На протяжении всего параграфа следующие данные *предполагаются фиксированными*:

(**D.2.4.1**) параметр $p \in (1,\infty)$ и метрическое пространство с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X},\mathrm{d},\mu) \in \mathfrak{A}_p$;

(**D.2.4.2**) параметр $\theta \in [0,p)$и замкнутое множество $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$;

(**D.2.4.3**) последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ с параметром $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) \in (0, \frac{1}{10}]$.

Первый ключевой результат данного параграфа достаточно очевиден. Напомним определения 2.2.7, 2.2.20.

Теорема 2.4.1. *При каждом $c \geq 1$ неравенство $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \leq 2\,\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$ справедливо при всех $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$.*

Доказательство. Если $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) = +\infty$, то неравенство тривиально выполнено. Фиксируем $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ такое, что $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$. Поскольку каждое (S,c)-семейство Уитни является (S,c)-хорошим семейством, имеем

$$\sup\Bigl(\sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Bigl(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,cB)\Bigr)^p\Bigr)^{\frac{1}{p}} \leq \mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f),$$

где супремум в левой части взят по всем (S,c)-семействам Уитни $\mathcal{B}$. С другой стороны, из замечания 2.2.2 имеем $\varliminf_{\delta\to 0}\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \leq \mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)$. Комбинируя эти наблюдения, получаем требуемую оценку и завершаем доказательство. □

Для дальнейшего напомним обозначения, принятые в параграфе 2.1 после определения 2.1.1. Кроме того, положим $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$ при $k \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathrm{X}$.

Предложение 2.4.2. *Пусть $c \geq 1$ и пусть $\underline{k} \in \mathbb{N}_0$ – наименьшее среди всех $k' \in \mathbb{N}_0$, для которых $\epsilon^{k'} \leq \frac{1}{2c}$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая от p, θ, $\underline{k}$, c и $\mathcal{C}_{\{\mathfrak{m}_k\}}$ такая, что, если $k \geq \underline{k}$, $r \in (\epsilon^{k+1},\epsilon^k]$ и $B_r(y)$ – замкнутый шар, удовлетворяющий условию $S \cap B_{cr}(y) \neq \emptyset$ и $B_r(x) \subset B_{cr}(y)$ при некотором $x \in S \cap B_{cr}(y)$, то*

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_{cr}(y)) \leq C \inf_{z\in B_{cr}(y)} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}}(f, B_{k-\underline{k}}(z)) \quad \textit{для всех} \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.4.3}$$

Доказательство. Фиксируем шар $B_r(x) \subset B_{cr}(y)$ с центром в $x \in S \cap cB_r(y)$. Поскольку $\frac{r}{\epsilon} \geq \epsilon^k$, имеем включения

$$B_{k-\underline{k}}(z) \subset (2c + \frac{1}{\epsilon^{\underline{k}+1}})B_r(x) \quad \text{и} \quad cB_r(y) \subset B_{k-\underline{k}}(z) \quad \text{при всех } z \in cB_r(y). \tag{2.4.4}$$

Так как $x \in S$, пользуясь предложением 2.3.1, получим

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k+1}}(f, B_{cr}(y)) \leq C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k+1}}(f, B_{k-\underline{k}}(z)) \quad \text{при всех } z \in cB_r(y).$$

Отсюда, принимая во внимание (2.1.5), получаем требуемое утверждение. □

Напомним, что в теореме 2.6.1 мы определили $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) := \mathcal{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) + \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)}$ при $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$. Следующее утверждение – *второй ключевой результат* этого параграфа.

Теорема 2.4.5. *При $c \geq 1$ существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \leq C\,\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \quad \textit{для всех} \quad f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.4.6}$$

Более того, при каждом $\delta \in (0, \frac{1}{4c}]$ существует $C > 0$ (зависящая от δ) такая, что

$$\left|\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) - \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)}\right| \leq C\|f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(U_{(c+1)\delta}(S))}. \tag{2.4.7}$$

Доказательство. Положим $\overline{\delta} := \frac{1}{4c}$. Пусть $\underline{k}$ – наименьшее среди всех $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющих неравенству $\epsilon^k \leq \overline{\delta}$.

Начнём с доказательства второго утверждения. Фиксируем $\delta \in (0, \overline{\delta}]$. Без ограничения общности можем считать, что $f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}} \in L_p(U_{(c+1)\delta}(S))$, поскольку в противном случае неравенство (2.4.7) очевидно. Пусть $\mathcal{B}^{\delta}$ – произвольное (S, c, δ)-хорошее семейство замкнутых шаров. Поскольку $cB \cap S \neq \emptyset$ для всех $B \in \mathcal{B}^{\delta}$, мы получаем

$$B \subset U_{(c+1)\delta}(S) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathcal{B}^{\delta}. \tag{2.4.8}$$

Напомним обозначение (1.2.53). При $k \geq \underline{k}$ и $B \in \mathcal{B}^{\delta}(k, \epsilon)$ применим предложение 2.4.2 при $2c$ вместо c. Будем иметь оценку $\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, 2cB) \leq C \inf\limits_{z \in B} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}}(f, B_{k-\underline{k}}(z))$. Следовательно, получаем

$$\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, 2cB)\Big)^p \leq C \int\limits_B (f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}(y))^p \, d\mu(y). \tag{2.4.9}$$

Комбинируя (2.4.8), (2.4.9), и, принимая во внимание, что $\mathcal{B}^{\delta}$ является дизъюнктным семейством замкнутых шаров, мы получим

$$\sum_{B \in \mathcal{B}^{\delta}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f, 2cB)\Big)^p \leq C \sum_{k \geq \underline{k}} \sum_{B \in \mathcal{B}^{\delta}(k,\epsilon)} \int\limits_B (f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}(y))^p \, d\mu(y)$$
$$\leq C \int\limits_{U_{(c+1)\delta}(S)} (f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}(x))^p \, d\mu(x).$$

Так как $\mathcal{B}^\delta$ было выбрано произвольно, утверждение следует из (2.2.8) и (2.2.9).

Для доказательства (2.4.6),разобьем заданное (S,c)-хорошее семейство замкнутых шаров $\mathcal{B}$ на два подсемейства. Первое $\mathcal{B}^1$ состоит из шаров радиуса не менее $\overline{\delta}$, а второе $\mathcal{B}^2 := \mathcal{B}\setminus\mathcal{B}^1$. Применяя лемму 2.2.22 получим

$$\sum_{B\in\mathcal{B}^1}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,2cB)\Big)^p \le C\int\limits_S |f(y)|^p\,d\mathfrak{m}_0(y). \tag{2.4.10}$$

С другой стороны, используя (2.4.7), доказанное ранее, и, учитывая (2.2.13), будем иметь

$$\sum_{B\in\mathcal{B}^2}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,2cB)\Big)^p \le C\Big(\mathcal{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)\Big)^p. \tag{2.4.11}$$

Комбинируя (2.4.10), (2.4.11), и принимая во внимание, что $\mathcal{B}$ было выбрано произвольно, с учётом (2.2.8) и (2.2.9) выводим (2.4.6).

Теорема полностью доказана. □

Напомним определение 2.2.16. Следующая лемма – важный ингредиент, необходимый для сравнения функционалов $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}$ и $\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}$.

Лемма 2.4.12. *При каждом $c\ge 1$, для любого $\sigma\in(0,\frac{\epsilon^2}{4c})$ существует константа $C>0$ (зависящая от σ) такое, что для любого (S,c)-семейства Уитни $\mathcal{B}$ справедливо неравенство*

$$\Sigma := \sum_{B\in\mathcal{B}}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,2cB)\Big)^p \le C\Big(\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)\Big)^p \quad \textit{при всех} \quad f\in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{2.4.13}$$

Доказательство. Положим $\overline{\sigma} := \frac{\epsilon^2}{4c}$ и пусть $\underline{k}$ – наименьшее среди всех $k\in\mathbb{N}_0$, для которых $\epsilon^k \le \frac{1}{4c}$. Так как $\mathcal{B}$ является (S,c)-семейством Уитни, имеем $cB\cap S\ne\emptyset$ для всех $B\in\mathcal{B}$. Напомним обозначение (1.2.53). При $k\ge\underline{k}$ и $B\in\mathcal{B}(k,\epsilon)$ легко видеть, что

$$B\subset B_{(2c+1)r_B}(x)\subset B_{\epsilon^{k-\underline{k}}}(x) \quad \text{для всех} \quad x\in 2cB\cap S. \tag{2.4.14}$$

Если $B\in\mathcal{B}(k,\epsilon)$ при некотором $k\ge\underline{k}$, то $r_B\ge\frac{\epsilon^2}{4c}\epsilon^{k-\underline{k}}$. Следовательно, так как $B\cap S=\emptyset$ по определению семейства $\mathcal{B}$, при каждом $k\ge\underline{k}$ для любого $\sigma\in(0,\overline{\sigma}]$ имеем

$$2cB\cap S\subset S_{k-\underline{k}}(\sigma) \quad \text{для всех} \quad B\in\mathcal{B}(k,\epsilon). \tag{2.4.15}$$

При $k\ge\underline{k}$ и $B\in\mathcal{B}(k,\epsilon)$ из предложения 2.4.2 (применённого при $2c$ вместо c) получаем

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,2cB)\le C\inf_{y\in 2cB}\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}}(f,B_{k-\underline{k}}(y)). \tag{2.4.16}$$

Из (2.1.4) и (2.1.5) имеем $\mu(B)/(r_B)^p\le C\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}(B)\le C\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}(2cB\cap S)$. Эта оценка в комбинации с (2.4.16) приводит к оценке

$$\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,2cB)\Big)^p \le C\int\limits_{2cB\cap S}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}}(f,B_{k-\underline{k}}(y))\Big)^p\,d\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}(y).$$

Наконец, используем (2.4.15) и учтем предложения 1.2.38, 1.2.54. В итоге получаем

$$\begin{aligned}&\sum_{k=\underline{k}+1}^{\infty}\sum_{B\in\mathcal{B}(k,\epsilon)}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,2cB)\Big)^p\\&\leq C\sum_{k=\underline{k}+1}^{\infty}\int\limits_{S_{k-\underline{k}}(\sigma)}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}}(f,B_{k-\underline{k}}(y))\Big)^p\,d\mathfrak{m}_{k-\underline{k}}(y)\leq C\Big(\mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)\Big)^p.\end{aligned}\tag{2.4.17}$$

С другой стороны, в силу леммы 2.2.22, очевидно, имеем

$$\sum_{k=0}^{\underline{k}}\sum_{B\in\mathcal{B}(k,\epsilon)}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,2cB))\Big)^p\leq C\int\limits_S|f(z)|^p\,d\mathfrak{m}_0(z).\tag{2.4.18}$$

Комбинируя (2.4.17) и (2.4.18), получаем (2.4.13) и завершаем доказательство. □

Теперь мы готовы сформулировать и доказать *третий ключевой результат этого параграфа.*

Теорема 2.4.19. *Для любого $c\geq 1$ существует константа $C>0$ такая, что для любого $\sigma\in(0,\frac{\epsilon^2}{4c})$ следующее неравенство*

$$\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)\leq C\,\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)\tag{2.4.20}$$

справедливо для любой такой функции $f\in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$, что $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)<+\infty$.

Доказательство. Фиксируем произвольное число $\sigma\in(0,\frac{\epsilon^2}{4c})$. Если $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)<+\infty$, то по теореме 2.4.5 имеем

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{\delta\to 0}\mathrm{BSN}^{\delta}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)\leq C\Big(\varlimsup_{\delta\to 0}\|f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(U_{(c+1)\delta}(S))}+\|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)}\Big)\\&=C\Big(\|f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}\|_{L_p(S)}+\|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)}\Big).\end{aligned}\tag{2.4.21}$$

С другой стороны, из леммы 2.4.12 следует, что

$$\sup\sum_{B\in\mathcal{B}}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,2cB)\Big)^p\leq C\Big(\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)\Big)^p,\tag{2.4.22}$$

где супремум взят по всем (S,c)-семействам Уитни $\mathcal{B}$. Собирая оценки (2.4.21) и (2.4.22), получаем (2.4.20) и завершаем доказательство. □

Наконец, *четвертый ключевой результат* этого параграфа выглядит следующим образом. Напомним (2.2.13) и (2.2.17).

Теорема 2.4.23. *Для любого $\sigma\in(0,1)$ существует константа $C>0$ такая, что*

$$\mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)\leq C\mathcal{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)\quad\text{для всех}\quad f\in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\}).\tag{2.4.24}$$

Доказательство. Напомним обозначения (1.2.104) и (1.2.14). Положим $S_k(\sigma) := S_{\epsilon^k}(\sigma)$ и $\mathcal{B}_k := \mathcal{B}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$, $k \in \mathbb{N}_0$ для краткости. Положим $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathrm{X}$, как обычно. Для любого $k \in \mathbb{N}_0$, для любого шара $B \in \mathcal{B}_k$, имеющего непустое пересечение с $S_k(\sigma)$, зафиксируем точку $x_B \in B \cap S_k(\sigma)$ и шар $B' = B'(B) \subset B_k(x_B) \setminus S$ радиуса $r_{B'} \geq \sigma\epsilon^k$.

Поскольку $\epsilon^{-1} \geq 10$, при $k \in \mathbb{N}$ и $B \in \mathcal{B}_k$, для каждой точки $z \in B'(B)$ имеем

$$2B_k(y) \subset B_{k-1}(z) \quad \text{и} \quad B \subset 2B_k(y) \quad \text{для всех} \quad y \in B \cap S_k(\sigma).$$

Следовательно, в силу предложения 2.4.2 (применённого при $x = y$, $c = 2$ и $\underline{k} = 1$) получим

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, 2B_k(y)) \leq C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k-1}}(f, B_{k-1}(z)) \quad \text{для всех} \quad y \in B \cap S_k(\sigma) \quad \text{и всех} \quad z \in B'.$$

С другой стороны, в силу предложения 2.3.1 имеем

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(y)) \leq C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, 2B_k(y)).$$

Эти наблюдения в комбинации со свойством равномерно локального удвоения меры μ и (2.1.3) приводят к неравенству

$$\begin{aligned} &\epsilon^{k(\theta-p)} \int\limits_{B\cap S_k(\sigma)} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(y))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(y) \leq \epsilon^{k(\theta-p)}\mathfrak{m}_k(B) \inf_{z\in\frac{1}{2}B'} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k-1}}(f, B_{k-1}(z))\Big)^p \\ &\leq C\mu(B') \inf_{z\in\frac{1}{2}B'} \Big(f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}(z)\Big)^p \leq C \int\limits_{\frac{1}{2}B'} \Big(f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}(z)\Big)^p \, d\mu(z). \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

При $k \in \mathbb{N}$ ключевое свойство шаров $B'(B)$, $B \in \mathcal{B}_k$ состоит в том, что (так как $\epsilon \in (0, \frac{1}{10}]$) при некотором $\underline{l} = \underline{l}(\sigma) \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\frac{1}{2}B'(B) \subset U_{2\epsilon^k}(S) \setminus U_{\epsilon^{k+\underline{l}}}(S) \quad \text{для любых таких} \quad B \in \mathcal{B}_k, \quad \text{что} \quad B \cap S_k(\sigma) \neq \emptyset. \tag{2.4.26}$$

Кроме того, поскольку $\frac{1}{2}B'(B) \subset 3B$ при всех $B \in \mathcal{B}_k$, а семейство $\{\frac{1}{2}B : B \in \mathcal{B}_k\}$ является дизъюнктным, из предложения 1.2.54 будем иметь

$$\mathrm{MULT}(\{\frac{1}{2}B'(B) : B \in \mathcal{B}_k \text{ и } B \cap S_k(\sigma) \neq \emptyset\}) \leq C. \tag{2.4.27}$$

Следовательно, используя (2.4.25)–(2.4.27) и предложение 1.2.38, при каждом $k \in \mathbb{N}$ получим

$$\begin{aligned} &\epsilon^{k(\theta-p)} \int\limits_{S_k(\sigma)} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \leq \epsilon^{k(\theta-p)} \sum_{B\in\mathcal{B}_k} \int\limits_{B\cap S_k(\sigma)} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \\ &\leq C \sum_{\substack{B\in\mathcal{B}_k \\ B\cap S_k(\sigma)\neq\emptyset}} \int\limits_{\frac{1}{2}B'(B)} \Big(f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}(y)\Big)^p \, d\mu(y) \leq C \int\limits_{U_{k-1}(S)\setminus U_{k+\underline{l}}(S)} \Big(f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}(y)\Big)^p \, d\mu(y). \end{aligned}$$

В итоге имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{k(\theta-p)} \int\limits_{S_k(\sigma)} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \leq C \int\limits_{U_0(S)} \Big(f^\sharp_{\{\mathfrak{m}_k\}}(y)\Big)^p \, d\mu(y). \tag{2.4.28}$$

Комбинируя (2.4.28), (2.2.13) и (2.2.17), получим (2.4.24), завершая доказательство. □

2.5. Неравенства для следов потенциалов Рисса

Цель данного параграфа – установить неравенство типа Вольфа–Хедберга. Безусловно, результаты этого параграфа ожидаемы для экспертов, и, вероятно, даже не являются новыми. Однако, нам не удалось найти их в литературе. По этой причине мы приводим детальные доказательства всех утверждений.

На протяжении всего параграфа мы считаем *фиксированными следующие данные*:

(**D.2.5.1**) параметр $q \in [1, \infty)$ и метрическое пространство с мерой $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_q$;

(**D.2.5.2**) борелевски регулярную локально конечную меру $\mathfrak{m}$ на X;

(**D.2.5.3**) параметр $\epsilon \in (0, \frac{1}{10}]$ и число $\underline{k} \in \mathbb{Z}$.

Имея в нашем распоряжении предложение 1.2.59, мы зафиксируем семейство $\{Q_{k,\alpha}\}$ обобщённых двоичных кубов в X и введём *существенную часть* X полагая

$$\underline{\mathrm{X}} := \bigcap_{k=\underline{k}}^{\infty} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)} Q_{k,\alpha}.$$

Из (DQ5) предложения 1.2.59 следует, что

$$\mu(\mathrm{X} \setminus \underline{\mathrm{X}}) = 0. \tag{2.5.1}$$

Для обобщённого двоичного куба $Q_{k,\alpha}$ в X положим

$$\widehat{Q}_{k,\alpha} := \bigcup \{\mathrm{cl}\, Q_{k,\alpha'} : \mathrm{cl}\, Q_{k,\alpha'} \cap 5B_{\epsilon^k}(z_{k,\alpha}) \neq \emptyset\}. \tag{2.5.2}$$

Из предложений 1.2.54, 1.2.59 мы легко получаем следующее утверждение.

Предложение 2.5.3. *Существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\mathrm{MULT}(\{\widehat{Q}_{k,\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)\}) \leq C \quad \textit{при всех} \quad k \geq \underline{k}.$$

Из (2.5.2) и предложения 1.2.59 мы получаем следующий результат.

Предложение 2.5.4. *При каждом $k \geq \underline{k}$ и любом $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$*

$$\bigcup \{\widehat{Q}_{j,\beta} : Q_{j,\beta} \subset Q_{k,\alpha}\} \subset \widehat{Q}_{k,\alpha} \quad \textit{для всех} \quad j \geq k.$$

Для точки $x \in \underline{\mathrm{X}}$ и числа $k \geq \underline{k}$, найдется единственный индекс $\alpha(x) \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$, для которого $x \in Q_{k,\alpha(x)}$. В дальнейшем будем полагать

$$Q_{k,\alpha}(x) := Q_{k,\alpha(x)}, \qquad \widehat{Q}_{k,\alpha}(x) := \widehat{Q}_{k,\alpha(x)}. \tag{2.5.5}$$

Для борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ с мерой $\mu(E) > 0$ положим

$$a_{\mathfrak{m}}(E) := \frac{\mathfrak{m}(E)}{\mu(E)} \operatorname{diam} E. \tag{2.5.6}$$

При $R \in (0, \epsilon^{\underline{k}}]$ под *усечённым потенциалом Рисса* меры $\mathfrak{m}$ будем понимать отображение $I^R[\mathfrak{m}] : \mathrm{X} \to [0, +\infty]$, определяемое равенством

$$I^R[\mathfrak{m}](x) := \sum_{\epsilon^k \le R} a_{\mathfrak{m}}(B_{\epsilon^k}(x)), \quad x \in \mathrm{X}\,. \tag{2.5.7}$$

Мы также введем *усечённый двоичный потенциал Рисса* меры $\mathfrak{m}$ по формуле

$$\widehat{I}^R[\mathfrak{m}](x) := \begin{cases} \sum_{\epsilon^k \le R} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k,\alpha}(x)), & x \in \underline{\mathrm{X}}; \\ 0, & x \in \mathrm{X} \setminus \underline{\mathrm{X}}. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

При $p \in (1, \infty)$, как обычно, положим $p' := \frac{p}{p-1}$. Для борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ и числа $R \in (0, \epsilon^{\underline{k}}]$ *усечённая энергия* и *усечённая двоичная энергия* меры $\mathfrak{m}$ определяются через

$$\mathfrak{E}_p^R[\mathfrak{m}](E) := \int\limits_E \Big(I^R[\mathfrak{m}](x)\Big)^{p'} d\mu(x), \quad \widehat{\mathfrak{E}}_p^R[\mathfrak{m}](E) := \int\limits_E \Big(\widehat{I}^R[\mathfrak{m}](x)\Big)^{p'} d\mu(x). \tag{2.5.9}$$

Из (DQ4) предложения 1.2.59 ясно, что

$$\widehat{Q}_{k,\alpha} \subset 9B_{\epsilon^k}(z_{k,\alpha}). \tag{2.5.10}$$

Следовательно, в силу равномерно локального свойства удвоения меры μ, существует константа $C > 0$ такая, что при каждом $R \in (0, \epsilon^{\underline{k}}]$,

$$I^R[\mathfrak{m}](x) \le C\widehat{I}^R[\mathfrak{m}](x) \quad \text{для всех} \quad x \in \underline{\mathrm{X}}. \tag{2.5.11}$$

Следующее наблюдение будет важно при доказательстве теоремы 2.5.20 ниже.

Предложение 2.5.12. *Пусть $j \ge \underline{k}$ и $\beta \in \mathcal{A}_j(\mathrm{X}, \epsilon)$. Тогда*

$$\sum_{k'=k}^{j} \sum_{Q_{k',\alpha} \supset Q_{j,\beta}} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k',\alpha}) \le \inf_{x \in Q_{j,\beta} \cap \underline{\mathrm{X}}} \widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x), \quad k \in \{\underline{k}, ..., j\}.$$

Доказательство. Действительно, из (2.5.5) следует, что

$$\sum_{k'=k}^{j} \sum_{Q_{k',\alpha} \supset Q_{j,\beta}} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k',\alpha}) = \sum_{k'=k}^{j} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k',\alpha}(x)) \quad \text{при всех} \quad x \in Q_{j,\beta}. \tag{2.5.13}$$

Комбинируя это наблюдение с (2.5.8), получаем требуемую оценку. □

Следующие три утверждения будут ключевыми. В действительности, соответствующие доказательства основаны на идеях, аналогичных тем, что использованы в доказательстве предложения 2.2 из [35]. Однако, необходимы некоторые модификации, связанные с отсутствием евклидовой структуры. Мы приведем детальные доказательства.

Лемма 2.5.14. *Пусть $\mathfrak{m}$ – борелевская мера. Пусть $p \in (1,\infty)$. Тогда существует константа $C>0$ такая, что при каждом $R \in (0,\underline{\epsilon^k}]$,*

$$\widehat{\mathfrak{E}}_p^R[\mathfrak{m}](E) \le p' \sum_{\epsilon^k \le R} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X},\epsilon)} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k,\alpha}) \int\limits_{Q_{k,\alpha}\cap E} \Big(\widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x)\Big)^{p'-1} d\mu(x) \tag{2.5.15}$$

для любого борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$.

Доказательство. Прежде всего, мы утверждаем, что

$$\Big(\widehat{I}^R[\mathfrak{m}](x)\Big)^{p'} \le p' \sum_{\epsilon^k \le R} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k,\alpha}(x)) \Big(\widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x)\Big)^{p'-1}, \quad x \in \underline{\mathrm{X}}. \tag{2.5.16}$$

Действительно, в случае $\widehat{I}^R[\mathfrak{m}](x) = +\infty$ неравенство очевидно. Предположим, что $\widehat{I}^R[\mathfrak{m}](x) < +\infty$. Напомним, что при любом $s \ge 1$ элементарное неравенство $\beta^s - \alpha^s \le s(\beta-\alpha)\beta^{s-1}$ справедливо для любых чисел $0 \le \alpha \le \beta$. Следовательно, для заданного $x \in \underline{\mathrm{X}}$, если $k \in \mathbb{Z}$ таково, что $\epsilon^k \le R$, то

$$\Big(\sum_{j\ge k} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\alpha}(x))\Big)^{p'} - \Big(\sum_{j\ge k+1} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\alpha}(x))\Big)^{p'} \le p'(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k,\alpha}(x)))\Big(\sum_{j\ge k} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\alpha}(x))\Big)^{p'-1}.$$

Очевидно, если $\widehat{I}^R[\mathfrak{m}](x) < +\infty$, то имеем $\widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x) \to 0$, $k \to \infty$. Таким образом, применяя стандартные "телескопические аргументы" вместе с вышеприведённым неравенством, приходим к (2.5.16). Наконец, комбинируя (2.5.8), (2.5.9), (2.5.16), и, учитывая (DQ5) предложения 1.2.59, получаем требуемую оценку и завершаем доказательство. □

Теперь мы можем оценить сверху усеченную двоичную энергию в случае $p \ge 2$.

Лемма 2.5.17. *Пусть $p \in [2,\infty)$. Тогда существует константа $C>0$ такая, что при каждом $R \in (0,\underline{\epsilon^k}]$ для любого борелевского множества $E \subset \mathrm{X}$ выполнено неравенство*

$$\widehat{\mathfrak{E}}_p^R[\mathfrak{m}](E) \le C \sum_{\epsilon^k \le R} \sum_{Q_{k,\alpha}\cap E \neq \emptyset} \epsilon^k \mathfrak{m}(\widehat{Q}_{k,\alpha}) \Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k,\alpha})\Big)^{p'-1}. \tag{2.5.18}$$

Доказательство. Фиксируем $R \in (0,\underline{\epsilon^k}]$ и борелевское множество $E \subset \mathrm{X}$. Очевидно, $p' \in (1,2]$ и $p'-1 \le 1$. Поменяем местами сумму и интеграл, воспользуемся (DQ1), (DQ2), (DQ5)

предложения 1.2.59, и примем во внимание (2.5.6), (2.5.8), (2.5.10). Следовательно, при $k \geq \underline{k}$ и $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$ получим

$$\frac{1}{\mu(Q_{k,\alpha})} \int\limits_{Q_{k,\alpha} \cap E} \Big(\widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x)\Big)^{p'-1} d\mu(x) \leq \Big(\fint\limits_{Q_{k,\alpha}} \sum_{j \geq k} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}(x))\, d\mu(x)\Big)^{p'-1}$$
$$\leq 9^{p'-1}\Big(\frac{1}{\mu(Q_{k,\alpha})} \sum_{j \geq k} \epsilon^j \sum_{Q_{j,\beta} \subset Q_{k,\alpha}} \mathfrak{m}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big)^{p'-1}.$$

При $j \geq k$, используя предложения 2.5.3 и 2.5.4, имеем

$$\sum_{Q_{j,\beta} \subset Q_{k,\alpha}} \mathfrak{m}(\widehat{Q}_{j,\beta}) \leq C\mathfrak{m}(\widehat{Q}_{k,\alpha}).$$

Следовательно, в силу вышеприведённого неравенства, (DQ4) предложения 1.2.59, и свойства равномерно локального удвоения меры μ, выводим

$$\frac{1}{\mu(Q_{k,\alpha})} \int\limits_{Q_{k,\alpha} \cap E} \Big(\widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x)\Big)^{p'-1} d\mu(x) \leq C\Big(\epsilon^k \frac{\mathfrak{m}(\widehat{Q}_{k,\alpha})}{\mu(Q_{k,\alpha})}\Big)^{p'-1} \leq C\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k,\alpha})\Big)^{p'-1}. \tag{2.5.19}$$

Наконец, используя лемму 2.5.14 и (2.5.19), получаем (2.5.18) и завершаем доказательство. □

Теперь мы готовы установить ключевую оценку.

Теорема 2.5.20. *Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что при каждом $k \geq \underline{k}$*

$$\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}) \leq C \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{Q_{j,\beta} \subset Q_{k,\alpha}} \epsilon^j \mathfrak{m}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big)^{p'-1} \quad \textit{для всех} \quad \alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon). \tag{2.5.21}$$

Доказательство. При $p \in [2, \infty)$ утверждение теоремы совпадает с леммой 2.5.17.

Рассмотрим теперь случай $p \in (1, 2)$. Фиксируем $k \geq \underline{k}$, $\alpha \in \mathcal{A}_k(\mathrm{X}, \epsilon)$ и рассуждаем по индукции. Более точно, *базой индукции* является то, что (2.5.21) выполнено для всех $p' \in (1, l]$ при $l = 2$. Мы покажем, что (2.5.21) справедливо при всех $p' > 1$. Предположим, что (2.5.21) доказано для всех $p' \in (1, l]$ при некотором $l \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$ и покажем, что (2.5.21) справедливо для всех $p' \in (1, l+1]$. Используем лемму 2.5.14, а затем примем во внимание, что $p'-1 \in (1, l]$ (поэтому оценку (2.5.21) можно применить при $p'-1$ вместо p'). В итоге получаем

$$\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}) \leq p' \sum_{k'=k}^{\infty} \sum_{Q_{k',\alpha'} \subset Q_{k,\alpha}} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k',\alpha'}) \int\limits_{Q_{k',\alpha'}} \Big(\widehat{I}^{\epsilon^{k'}}[\mathfrak{m}](x)\Big)^{p'-1} d\mu(x)$$
$$\leq C \sum_{k'=k}^{\infty} \sum_{Q_{k',\alpha'} \subset Q_{k,\alpha}} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k',\alpha'}) \sum_{j=k'}^{\infty} \sum_{Q_{j,\beta} \subset Q_{k',\alpha'}} \epsilon^j \mathfrak{m}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big)^{p'-2}.$$

Меняя порядок суммирования, будем иметь

$$\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}) \le C\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{Q_{j,\beta}\subset Q_{k,\alpha}} \epsilon^j \mathfrak{m}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big)^{p'-2}\sum_{k'=k}^{j}\sum_{Q_{k',\alpha'}\supset Q_{j,\beta}} a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{k',\alpha'}). \tag{2.5.22}$$

Следовательно, в силу предложения 2.5.12, а также (2.5.6), (2.5.10) и свойства равномерно локального удвоения меры μ, выводим

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}) &\le C\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{Q_{j,\beta}\subset Q_{k,\alpha}}\int\limits_{Q_{j,\beta}} \frac{\epsilon^j\mathfrak{m}(\widehat{Q}_{j,\beta})}{\mu(Q_{j,\beta})}(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}))^{p'-2}\widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x)\,d\mu(x)\\ &\le C\int\limits_{Q_{k,\alpha}}\sum_{j=k}^{\infty}\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}(x))\Big)^{p'-1}\Big(\widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x)\Big)\,d\mu(x).\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

Применение неравенства Гёльдера для сумм с показателями $q=\frac{p'-1}{p'-2}$ и $q'=p'-1$ даёт

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{\infty}\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}(x))\Big)^{p'-1} &= \sum_{j=k}^{\infty}\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}(x))\Big)^{\frac{1}{p'-1}}\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}(x))\Big)^{p'-2+\frac{p'-2}{p'-1}}\\ &\le C\Big(\widehat{I}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](x)\Big)^{\frac{1}{p'-1}}\Big(\sum_{j=k}^{\infty}\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}(x))\Big)^{p'}\Big)^{\frac{p'-2}{p'-1}}.\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Теперь подставим (2.5.24) в (2.5.23) и применим неравенство Гёльдера для интегралов с показателями $p'-1$ и $\frac{p'-1}{p'-2}$. Приходим к оценке

$$\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}) \le C\Big(\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha})\Big)^{\frac{1}{p'-1}}\Big(\int\limits_{Q_{k,\alpha}}\sum_{j=k}^{\infty}\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}(x))\Big)^{p'}\,d\mu(x)\Big)^{\frac{p'-2}{p'-1}}.$$

В итоге, если $\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}) < +\infty$, то мы получаем требуемое неравенство

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}) &\le C\int\limits_{Q_{k,\alpha}}\sum_{j=k}^{\infty}\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}(x))\Big)^{p'}\,d\mu(x)\\ &\le C\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{Q_{j,\beta}\subset Q_{k,\alpha}}\epsilon^j\mathfrak{m}(\widehat{Q}_{j,\beta})(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta}))^{p'-1}.\end{aligned} \tag{2.5.25}$$

Чтобы устранить предположение $\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}) < +\infty$, будем рассуждать следующим образом. При $l\in\mathbb{N}$ мы рассмотрим l-ую срезку усеченного потенциала Рисса $\widehat{I}^{\epsilon^l,\epsilon^k}[\mathfrak{m}]$, полученного суммированием в (2.5.8) только по всем k', удовлетворяющим $l\le k'\le k$ (отметим, что в этом случае мы используем индекс k' вместо k в формуле (2.5.8)). Очевидно, соответствующие срезки усечённых двоичных энергий $\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^l,\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha})$ конечны при всех $l\in\mathbb{N}$. Повторяя с минимальными изменениями вышеприведённые аргументы, мы получим при каждом фиксированном $l\in\mathbb{N}$ аналог (2.5.25), в котором $\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha})$ заменено на $\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^l,\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha})$. Переходя к пределу при $l\to\infty$, завершаем доказательство. □

При $R>0$ *усечённым потенциалом Вольфа* назовем отображение $\mathcal{W}_p^R[\mathfrak{m}]:\mathrm{X}\to[0,+\infty]$, определяемое по формуле

$$\mathcal{W}_p^R[\mathfrak{m}](x):=\sum_{\epsilon^k\le R}\Big(\epsilon^{kp}\frac{\mathfrak{m}(B_{\epsilon^k}(x))}{\mu(B_{\epsilon^k}(x))}\Big)^{p'-1},\quad x\in\mathrm{X}\,. \tag{2.5.26}$$

Теперь мы готовы установить аналог неравенства Вольфа–Хедберга.

Следствие 2.5.27. *Существуют константы $c_1,c_2>1$, зависящие только от ϵ, такие что выполнено следующее. Для любого $p\in(1,\infty)$ существует константа $C>0$ такая, что при каждом $R\in(0,\epsilon^{\underline{k}}]$, для любого борелевского множества $E\subset\mathrm{X}$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{E}_p^R[\mathfrak{m}](E)\le C\int\limits_{U_{c_2R}(E)}\mathcal{W}_p^{c_1R}[\mathfrak{m}](y)\,d\mathfrak{m}(y), \tag{2.5.28}$$

где $U_{c_2R}(E):=\{y\in\mathrm{X}:\inf_{x\in E}\mathrm{d}(y,x)<c_2R\}$.

Доказательство. Фиксируем $R\in(0,\epsilon^{\underline{k}}]$, напомним обозначение (1.2.61), и положим $k:=k_\epsilon(R)$. Из (2.5.9), (2.5.11) и (DQ5) предложения 1.2.59 следует, что

$$\mathfrak{E}_p^R[\mathfrak{m}](E)\le C\sum_{Q_{k,\alpha}\cap E\neq\varnothing}\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha}). \tag{2.5.29}$$

Из (DQ4) предложения 1.2.59 и (2.5.10) имеем

$$B_{\frac{\epsilon^j}{2}}(z_{j,\beta})\subset\widehat{Q}_{j,\beta}\subset B_{18\epsilon^j}(y)\subset B_{27\epsilon^j}(z_{j,\beta})\quad\text{при всех}\quad y\in\widehat{Q}_{j,\beta}.$$

Следовательно, используя свойство равномерного локального удвоения меры μ, получим

$$\epsilon^j\mathfrak{m}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big(a_{\mathfrak{m}}(\widehat{Q}_{j,\beta})\Big)^{p'-1}\le C\int\limits_{\widehat{Q}_{j,\beta}}\Big(\epsilon^{jp}\frac{\mathfrak{m}(B_{18\epsilon^j}(y))}{\mu(B_{18\epsilon^j}(y))}\Big)^{p'-1}d\mathfrak{m}(y).$$

Комбинируя эту оценку с теоремой 2.5.20, выводим

$$\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha})\le C\int\limits_{\mathrm{X}}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{Q_{j,\beta}\subset Q_{k,\alpha}}\chi_{\widehat{Q}_{j,\beta}}(y)\Big(\epsilon^{jp}\frac{\mathfrak{m}(B_{18\epsilon^j}(y))}{\mu(B_{18\epsilon^j}(y))}\Big)^{p'-1}d\mathfrak{m}(y). \tag{2.5.30}$$

При каждом $j\ge k$ положим $k(j):=k_\epsilon(18\epsilon^j)$. В силу свойства равномерно локального удвоения меры μ легко видеть, что

$$\epsilon^j\frac{\mathfrak{m}(B_{18\epsilon^j}(y))}{\mu(B_{18\epsilon^j}(y))}\le C\epsilon^{k(j)}\frac{\mathfrak{m}(B_{\epsilon^{k(j)}}(y))}{\mu(B_{\epsilon^{k(j)}}(y))}.$$

Следовательно, полагая $c_1=\frac{18\epsilon^k}{R}$, и, учитывая (2.5.26), а также предложение 2.5.3, мы продолжаем оценку (2.5.30) и приходим к неравенству

$$\widehat{\mathfrak{E}}_p^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}](Q_{k,\alpha})\le C\int\limits_{\widehat{Q}_{k,\alpha}}\mathcal{W}_p^{c_1R}[\mathfrak{m}](y)\,d\mathfrak{m}(y). \tag{2.5.31}$$

Положим $c_2=\frac{11\epsilon^k}{R}$. Из (2.5.10) и (DQ4) предложения 1.2.59 имеем $\widehat{Q}_{k,\alpha}\subset U_{c_2R}(E)$ при условии, что $Q_{k,\alpha}\cap E\neq\varnothing$. Следовательно, комбинируя (2.5.29), (2.5.31), и учитывая предложение 1.2.38, получаем (2.5.28), завершая доказательство. $\square$

2.6. Доказательства основных результатов

На протяжении всего параграфа будем считать следующие *данные фиксированными*:

(**D.2.6.1**) параметр $p \in (1,\infty)$, м.п.м. $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mu) \in \mathfrak{A}_p$, и параметр $q \in (1,p)$, для которого $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_q$ (напомним предложение 1.2.71);

(**D.2.6.2**) параметр $\theta \in [0,q)$ и множество $S \in \mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$;

(**D.2.6.3**) последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(S)$ с параметром $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) \in (0, \frac{1}{10}]$.

Первый основной результат данной главы даёт ответы на вопросы (**MQ**1) и (**MQ**2) проблемы 1.3.25. А именно, он содержит несколько эквивалентных характеризаций $\mathfrak{m}_0$-пространства следов пространства $W^1_p(\mathrm{X})$. Важно напомнить, что условие (2.1.5) подразумевает равенство $W^1_p(\mathrm{X})|^{\mathfrak{m}_0}_S = W^1_p(\mathrm{X})|^{\mathfrak{m}_k}_S$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 2.6.1. *Если* $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}^{str}_\theta(\mathrm{X})$, $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ *и* $\sigma \in (0, \frac{\epsilon^2}{4c})$, *то для заданного элемента* $f \in L^{loc}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ *следующие условия эквивалентны:*

(*i*) $f \in W^1_p(\mathrm{X})|^{\mathfrak{m}_0}_S$;

(*ii*) $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) < +\infty$;

(*iii*) $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$;

(*iv*) $\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f) < +\infty$.

Кроме того, для любых $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ *и* $\sigma \in (0, \frac{\epsilon^2}{4c})$, *для любого* $f \in L^{loc}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$

$$\|f\|_{W^1_p(\mathrm{X})|^{\mathfrak{m}_0}_S} \approx \mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \approx \mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \approx \mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f), \tag{2.6.2}$$

где соответствующее константы эквивалентности не зависят от f.

Второй основной результат дает ответы на вопросы (**Q**1) и (**Q**2) проблемы 1.3.24.

Теорема 2.6.3. *Борелевская функция* $f : S \to \mathbb{R}$ *принадлежит пространству* $W^1_p(\mathrm{X})|_S$ *в том и только том случае, если:*

(*A*) $\mathfrak{m}_0$*-класс эквивалентности* $[f]_{\mathfrak{m}_0}$ *функции* f *принадлежит пространству* $W^1_p(\mathrm{X})|^{\mathfrak{m}_0}_S$;

(*B*) *существует такое множество* $\underline{S}_f \subset S$, *что* $C_p(S \setminus \underline{S}_f) = 0$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} \fint\limits_{B_{\epsilon^k}(x)} |f(\underline{x}) - f(y)|\, d\mathfrak{m}_k(y) = 0 \quad \textit{при всех} \quad \underline{x} \in \underline{S}_f. \tag{2.6.4}$$

Кроме того, для любых $c \geq \frac{3}{\epsilon}$ *и* $\sigma \in (0, \frac{\epsilon^2}{4c})$ *для любого* $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S$

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S} \approx \mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \approx \mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \approx \mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f), \tag{2.6.5}$$

где соответствующее константы эквивалентности не зависят от f*.*

Заметим, что теорема 2.6.3 в сущности отличается от теоремы 2.6.1 наличием важного и деликатного условия (B). Грубо говоря при $f \in L_p(\mathfrak{m}_0)$ конечность функционалов (2.2.14), (2.2.9) или (2.2.18) не гарантирует существования p-точного продолжения функции f. С другой стороны, дополнительное условие (B) позволяет ослабить ограничения на последовательность мер. Действительно, мы не требуем $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$ в теореме2.6.3. Мы покажем в следующей главе, что, если X является геодезическим и Q-регулярным по Альфорсу при некотором $Q \geq 1$, то теорема 2.6.3 даёт точное внутреннее описание p-точного пространства следов $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ на *любом непустом* множестве $S \subset \mathrm{X}$.

Третий основной результат данной главы отвечает на вопросы (**Q**3) и (**MQ**3) проблем 1.3.24 и 1.3.25, соответственно. Кроме того, он проясняет глубокие взаимосвязи между проблемой 1.3.24 и проблемой 1.3.25. Такая связь выражается в наличии канонического изоморфизма между априори различными пространствами $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ и $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$. Этот факт проливает свет на причину того, почему концепция p-точного следа не была популярна в литературе. Как обычно, для двух линейных нормированных пространств $E_1 = (E_1, \|\cdot\|_1)$ и $E_2 = (E_2, \|\cdot\|_2)$, через $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ будем обозначать линейное пространство всех ограниченных линейных отображений из E_1 в E_2.

Теорема 2.6.6. *Если* $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$*, то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Существует* $\mathfrak{m}_0$*-оператор продолжения* $\mathrm{Ext} \in \mathcal{L}(W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}, W_p^1(\mathrm{X}))$*;*

(2) *Существует* p*-точный оператор продолжения* $\overline{\mathrm{Ext}} \in \mathcal{L}(W_p^1(\mathrm{X})|_S, W_p^1(\mathrm{X}))$*;*

(3) *Каноническое вложение* $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0} : W_p^1(\mathrm{X})|_S \to W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$*, ставящее каждому* $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S$ *в соответствие* $\mathfrak{m}_0$*-класс эквивалентности* $[f]_{\mathfrak{m}_0}$ *функции* f *является изометрическим изоморфизмом;*

(4) *Следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccc} W_p^1(\mathrm{X}) & \underset{\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightleftarrows}} & W_p^1(\mathrm{X}) \\ \overline{\mathrm{Ext}} \uparrow \downarrow \mathrm{Tr}|_S & & \mathrm{Ext} \uparrow \downarrow \mathrm{Tr}|_S^{\mathfrak{m}_0} \\ W_p^1(\mathrm{X})|_S & \underset{\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}^{-1}}{\overset{\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}}{\rightleftarrows}} & W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}. \end{array}$$

Кроме того, существует константа $\overline{C} > 0$ такая, что операторные нормы Ext *и* $\overline{\text{Ext}}$ *ограничены сверху числом* $\overline{C}$.

Прежде всего мы начнём с достаточно простого результата об ограниченности дробного максимального оператора. Ещё раз напомним обозначения (1.2.61) и (1.2.64).

Лемма 2.6.7. *Пусть $\alpha > \frac{\theta}{p}$. Тогда, для любого $R > 0$ существует такое $C > 0$, что*

$$\|M^R_{q,\alpha}(g)\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} \le C\|g\|_{L_p(\mathrm{X})} \quad \textit{для всех} \quad g \in L_p(\mathrm{X}). \tag{2.6.8}$$

Доказательство. При $g \in L_p(\mathrm{X})$ пусть

$$\mathrm{X}_0(g) := \{x \in \mathrm{X} : \lim_{\widetilde{R}\to 0} M^{\widetilde{R}}_{p,\alpha}(g) = 0\}.$$

Из предложения 1.2.91 и неравенства Гёльдера заключаем, что $\mathcal{H}_{\alpha p}(\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}_0(g)) = 0$. Поскольку $\alpha p > \theta$, из (1.2.87) получаем $\mathcal{H}_\theta(\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}_0(g)) = 0$. В силу предложения 2.1.13 имеем

$$\mathfrak{m}_0(\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}_0(g)) = 0. \tag{2.6.9}$$

Используя неравенство Гёльдера, видим, что $M^R_{q,\alpha}(g)(x) \le M^R_{p,\alpha}(g)(x) < +\infty$ для всех точек $x \in \mathrm{X}_0(g)$. Поэтому при $x \in \mathrm{X}_0(g)$ фиксируем $r_x \in (0, R]$ так, что

$$(r_x)^\alpha \Big(\fint_{B_{r_x}(x)} |g(y)|^q \, d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{q}} > \frac{1}{2} M^R_{q,\alpha}(g)(x).$$

Положим $\mathcal{G} := \{B_{r_x}(x) : x \in \mathrm{X}_0(g)\}$. При $k \in \mathbb{N}_0$ положим

$$E_k := \Big\{ x \in \mathrm{X}_0(g) : r_x \in \Big(\frac{R}{2^{k+1}}, \frac{R}{2^k} \Big] \Big\} \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_k := \{B_{r_x}(x) : x \in E_k\}.$$

Очевидно, $E_k \cap E_j = \emptyset$ при $k \ne j$, и, кроме того, $\cup_{k\in\mathbb{N}_0} E_k = \mathrm{X}_0(g)$. Следовательно, имея в виду (2.6.9), получаем

$$\int_{\mathrm{X}} (M^R_{q,\alpha}(g)(x))^p \, d\mathfrak{m}_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_k} (M^R_{q,\alpha}(g)(x))^p \, d\mathfrak{m}_0(x). \tag{2.6.10}$$

При $k \in \mathbb{N}_0$, используя лемму 1.2.5, найдем дизъюнктное семейство замкнутых шаров $\widetilde{\mathcal{G}}_k \subset \mathcal{G}_k$ такое, что $E_k \subset \cup\{5B : B \in \widetilde{\mathcal{G}}_k\}$. Используя свойство равномерно локального удвоения меры μ, будем иметь неравенство

$$\begin{aligned}
&\int_{E_k} (M^R_{q,\alpha}(g)(x))^p \, d\mathfrak{m}_0(x) \le 2^p \sum_{B\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} \int_{5B\cap E_k} (r_x)^{\alpha p} \Big(\fint_{B_{r_x}(x)} |g(y)|^q \, d\mu(y) \Big)^{\frac{p}{q}} d\mathfrak{m}_0(x) \\
&\le C \sum_{B\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} \mathfrak{m}_0(5B) \Big(\frac{R}{2^k} \Big)^{\alpha p} \Big(\fint_{7B} |g(y)|^q \, d\mu(y) \Big)^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Из теоремы 2.1.14 и (2.1.3) вытекает, что $\mathfrak{m}_0(5B) \le C2^{k\theta}\mu(B)$ для всех $B \in \widetilde{\mathcal{G}}_k$. Следовательно, используя неравенство Гёльдера и предложения 1.2.38, 1.2.54, выводим

$$\begin{aligned}\int\limits_{E_k} (M^R_{q,\alpha}(g)(x))^p \, d\mathfrak{m}_0(x) &\le C2^{k(\theta-\alpha p)} \sum_{B\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} \mu(5B) \fint\limits_{7B} |g(y)|^p \, d\mu(y) \\ &\le C2^{k(\theta-\alpha p)} \sum_{B\in\widetilde{\mathcal{G}}_k} \int\limits_{7B} |g(y)|^p \, d\mu(y) \le C2^{k(\theta-\alpha p)} \int\limits_{\mathrm{X}} |g(y)|^p \, d\mu(y).\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

Так как $\alpha p > \theta$, комбинируя (2.6.10) и (2.6.11), получаем (2.6.8).

□

Следующий результат будет играть решающую роль. Напомним (1.2.40), и *на протяжении всего параграфа*, будем использовать обозначение $F_G := F_{G,\mu}$. Кроме того, положим $B_k(x) := B_{\epsilon^k}(x)$, как обычно. Наконец, напомним замечание 1.3.3.

Теорема 2.6.12. *Пусть $\widetilde{p} \in (q, p]$. Тогда для любого $c \ge 1$ существуют константы $C > 0$ и $\widetilde{c} := \widetilde{c}(c) \ge c$ такие, что, если $B_k(x') \subset cB_k(x)$ при некоторых $k \in \mathbb{N}_0$, $x' \in S$ и $x \in \mathrm{X}$, то*

$$\fint\limits_{cB_k(x)} |F|^{\mathfrak{m}_0}_S(y) - F_{cB_k(x)}| \, d\mathfrak{m}_k(y) \le C\epsilon^k \Big(\fint\limits_{\widetilde{c}B_k(x)} (|\nabla F|_{*,p}(y))^{\widetilde{p}} \, d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{\widetilde{p}}} \quad \text{для всех} \quad F \in W^1_p(\mathrm{X}). \tag{2.6.13}$$

Доказательство. Фиксируем $c \ge 1$ и число $k \in \mathbb{N}_0$. Фиксируем также точки $x' \in S$, $x \in \mathrm{X}$ такие, что $B_k(x') \subset cB_k(x)$. До конца доказательства положим $B := B_k(x)$.

Шаг 1. По определению 1.3.19 при $\mathfrak{m}_0$-п.в. $y \in cB \cap S$ имеем

$$|F|^{\mathfrak{m}_0}_S(y) - F_{cB}| = \lim_{i\to\infty} |F_{B_i(y)} - F_{cB}| \le |F_{B_k(y)} - F_{cB}| + \sum_{i=k}^{\infty} |F_{B_i(y)} - F_{B_{i+1}(y)}|. \tag{2.6.14}$$

Комбинируя (**D.2.6.1**) замечание 1.2.50 и предложение 1.3.4, получим при $\mathfrak{m}_0$-п.в. $y \in cB \cap S$

$$\sum_{i=k}^{\infty} |F_{B_i(y)} - F_{B_{i+1}(y)}| \le C \sum_{i=k}^{\infty} \epsilon^i \Big(\fint\limits_{\lambda B_i(y)} (|\nabla F|_{*,p}(v))^q \, d\mu(v)\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.6.15}$$

Используя свойство равномерно локального удвоения меры μ, при каждом $i \ge k$ имеем

$$\begin{aligned}\Big(\fint\limits_{\lambda B_i(y)} (|\nabla F|_{*,p}(v))^q \, d\mu(v)\Big)^{\frac{1}{q}} &\le C \inf_{z\in B_i(y)} \Big(\fint\limits_{(\lambda+1)B_i(z)} (|\nabla F|_{*,p}(v))^q \, d\mu(v)\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\le C \fint\limits_{B_i(y)} M^{(\lambda+1)\epsilon^k}_{q,0}(|\nabla F|_{*,p})(z) \, d\mu(z) \quad \text{для всех} \quad y \in cB.\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

В результате, используя оценки (2.6.15), (2.6.16), и учитывая (1.2.36), (2.5.7), получим

$$\fint\limits_{cB} \sum_{i=k}^{\infty} |F_{B_i(y)} - F_{B_{i+1}(y)}| \, d\mathfrak{m}_k(y) \le C\Big(\fint\limits_{cB} I^{\epsilon^k}[M^{(\lambda+1)\epsilon^k}_{q,0}(|\nabla F|_{*,p})\mu](y) \, d\mathfrak{m}_k(y)\Big). \tag{2.6.17}$$

С другой стороны, $B_k(y) \subset (c+1)B$ для всех $y \in cB$. Следовательно, используя замечание 1.2.50, предложение 1.3.4 и неравенство Гёльдера, получим

$$|F_{B_k(y)} - F_{cB}| \le C\epsilon^k \Big(\fint\limits_{\lambda(c+1)B} (|\nabla F|_{*,p}(z))^{\widetilde{p}}\, d\mu(z)\Big)^{\frac{1}{\widetilde{p}}} \quad \text{при всех} \quad y \in cB. \tag{2.6.18}$$

Шаг 2. Используя стандартные аргументы двойственности, легко видеть что для заданной константы $\underline{C} > 0$, параметра $R > 0$, и мер ν, σ на X справедливо неравенство

$$\|I^R[g\nu]\|_{L_1(\sigma)} \le \underline{C}\|g\|_{L_{\widetilde{p}}(\nu)} \quad \text{для всех} \quad g \in L_{\widetilde{p}}(\nu)$$

в том и только том случае, если справедливо неравенство (мы полагаем $\widetilde{p}' := \frac{\widetilde{p}}{\widetilde{p}-1}$, как обычно)

$$\|I^R[h\sigma]\|_{L_{\widetilde{p}'}(\nu)} \le \underline{C}\|h\|_{L_\infty(\sigma)} \quad \text{для всех} \quad h \in L_\infty(\sigma).$$

Заметим, что в (2.6.17) мы в действительности работаем только с частью меры μ, сосредоточенной в шаре $(c+2+\lambda)B$. Положим теперь

$$\widetilde{c} := \max\{c+2+\lambda, \lambda(c+1)\}.$$

и применим вышеприведённые аргументы двойственности для мер $\sigma = \mathfrak{m}_k\lfloor_{cB}$, $\nu = \mu\lfloor_{\widetilde{c}B}$ и функции $g = M_q^{(\lambda+1)\epsilon^k}(|\nabla F|_{*,p}\chi_{\widetilde{c}B})$. Имеем неравенство

$$\int\limits_{cB} I^{\epsilon^k}[M_{q,0}^{(\lambda+1)\epsilon^k}(|\nabla F|_{*,p}\chi_{\widetilde{c}B})\mu](y)\, d\mathfrak{m}_k(y) \le \underline{C}\Big(\int\limits_{\widetilde{c}B} (M_{q,0}^{(\lambda+1)\epsilon^k}(|\nabla F|_{*,p}\chi_{\widetilde{c}B}))^{\widetilde{p}}\, d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{\widetilde{p}}} \tag{2.6.19}$$

в котором

$$\underline{C} := \Big(\mathfrak{E}_{\widetilde{p}}^{\epsilon^k}[\mathfrak{m}_k](\widetilde{c}B)\Big)^{\frac{1}{\widetilde{p}'}}.$$

Шаг 3. В силу следствия 2.5.27, имеем

$$\Big(\underline{C}\Big)^{\widetilde{p}'} \le C \int\limits_{(c_2+\widetilde{c})B} \mathcal{W}_{\widetilde{p}}^{c_1\epsilon^k}[\mathfrak{m}_k](y) d\mathfrak{m}_k(y).$$

Следовательно, используя (2.5.26), (2.1.3) и теорему 2.1.14, получаем

$$\Big(\underline{C}\Big)^{\widetilde{p}'} \le C \int\limits_{(c_2+\widetilde{c})B} \sum_{\epsilon^i \le c_1\epsilon^k} (\epsilon^{i(\widetilde{p}-\theta)})^{\widetilde{p}'-1}\, d\mathfrak{m}_k(y) \le C\mu(B)\epsilon^{k(\widetilde{p}-\theta)\frac{\widetilde{p}'}{\widetilde{p}}-k\theta}. \tag{2.6.20}$$

Шаг 4. Поскольку $B_k(x') \subset cB$, имеем $B \subset (c+1)B_k(x')$. Следовательно, используя (2.1.4) и свойство равномерно локального удвоения меры μ, получаем

$$\frac{1}{\mathfrak{m}_k(cB)} \le \frac{1}{\mathfrak{m}_k(B_k(x'))} \le C\frac{\epsilon^{k\theta}}{\mu(B_k(x'))} \le C\frac{\epsilon^{k\theta}}{\mu((c+1)B_k(x'))} \le C\frac{\epsilon^{k\theta}}{\mu(B)}. \tag{2.6.21}$$

Шаг 5. Комбинируя (2.6.14) с (2.6.17)–(2.6.21), и, учитывая предложение 1.2.65, приходим к (2.6.13), завершая доказательство. □

Теперь напомним (2.2.13) и установим следующую мощную оценку.

Следствие 2.6.22. *Существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\mathcal{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(F|_S^{\mathfrak{m}_0}) \le C\||\nabla F|_{*,p}\|_{L_p(\mathrm{X})} \quad \textit{для всех} \quad F \in W_p^1(\mathrm{X}) \tag{2.6.23}$$

и, кроме того,

$$\|F|_S^{\mathfrak{m}_0}\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} \le C\|F\|_{W_p^1(\mathrm{X})} \quad \textit{для всех} \quad F \in W_p^1(\mathrm{X}). \tag{2.6.24}$$

Доказательство. Фиксируем $\widetilde{p} \in (q, p)$ и положим $f := F|_S^{\mathfrak{m}_0}$ для краткости. Используя (1.2.41), и, применяя теорему 2.6.12 при $c = 2$ получим, для каждого шара $B_k(x)$ при $k \in \mathbb{N}_0$ и $B_k(x) \cap S \neq \emptyset$ неравенство

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, 2B_k(x)) \le \fint\limits_{2B_k(x)} |f(y) - F_{2B_k(x)}|\, d\mathfrak{m}_k(y) \le C\epsilon^k \Big(\fint\limits_{\widetilde{c}B_k(x)} (|\nabla F|_{*,p})^{\widetilde{p}}\, d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{\widetilde{p}}}. \tag{2.6.25}$$

По теореме 2.1.14 легко видеть, что

$$f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}(x) \le C \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \epsilon^{-k} \mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, 2B_k(x)) \quad \text{при всех} \quad x \in \mathrm{X}\,.$$

Следовательно, используя (2.6.25), получим

$$f^{\sharp}_{\{\mathfrak{m}_k\}}(x) \le C M^{\widetilde{c}}_{\widetilde{p},0}(|\nabla F|_{*,p})(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathrm{X}\,.$$

В результате, применение предложения 1.2.65 приводит к (2.6.23).

Напомним обозначение (1.2.14) и фиксируем семейство $\mathcal{B} := \mathcal{B}_0(\mathrm{X}, \epsilon)$. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_S |f(x)|^p\, d\mathfrak{m}_0(x) &\le C \sum_{\substack{B\in\mathcal{B}\\ B\cap S\neq\emptyset}} \int\limits_B |f(x)|^p\, d\mathfrak{m}_0(x) \\ &\le C \sum_{\substack{B\in\mathcal{B}\\ B\cap S\neq\emptyset}} \Big(\int\limits_B |f(x) - F_{2B}|^p\, d\mathfrak{m}_0(x) + \frac{\mathfrak{m}_0(B)}{\mu(2B)} \int\limits_{2B} |F(x)|^p\, d\mu(x)\Big). \end{aligned} \tag{2.6.26}$$

Для шара $B \in \mathcal{B}$, удовлетворяющего условию $B \cap S \neq \emptyset$, имеем

$$\int\limits_B |f(x) - F_{2B}|^p\, d\mathfrak{m}_0(x) \le C \int\limits_B |F_{B_0(x)} - F_{2B}|^p\, d\mathfrak{m}_0(x) + C \int\limits_B |f(x) - F_{B_0(x)}|^p\, d\mathfrak{m}_0(x). \tag{2.6.27}$$

Из замечания 1.2.50 следует, что

$$|F_{B_0(x)} - F_{2B}| \le C\mathcal{E}_\mu(F, 2B) \quad \text{при всех} \quad x \in B \cap S.$$

Следовательно, в силу предложения 1.3.4,

$$\int\limits_B |F_{B_0(x)} - F_{2B}|^p\, d\mathfrak{m}_0(x) \le C\mathfrak{m}_0(B) \fint\limits_{2\lambda B} \Big((|\nabla F|_{*,p})(y)\Big)^p\, d\mu(y). \tag{2.6.28}$$

По определению 1.3.19 при $\delta \in (0, 1/2)$ имеем

$$|f(x) - F_{B_0(x)}| \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{i\delta}}{\epsilon^{i\delta}} |F_{B_i(x)} - F_{B_{i+1}(x)}| \quad \text{при} \quad \mathfrak{m}_0 - \text{п.в.} \quad x \in S.$$

Используя неравенство Гёльдера для сумм, замечание 1.2.50, предложение 1.3.4, и наконец, принимая во внимание (1.2.64), для $\mathfrak{m}_0$-п.в. $x \in S$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} |f(x) - F_{B_0(x)}|^p &\le C \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{-ip\delta} |F_{B_i(x)} - F_{B_{i+1}(x)}|^p \\ &\le C \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{i(p-p\delta)} \Big(\fint\limits_{\lambda B_i(x)} (|\nabla F|_{*,p}(y))^q \, d\mu(y) \Big)^{\frac{p}{q}} \le C \Big(M^{\lambda}_{q,1-2\delta}(|\nabla F|_{*,p})(x) \Big)^p. \end{aligned} \tag{2.6.29}$$

В силу (2.1.3), очевидно, имеем

$$\mathfrak{m}_0(B) \le C\mu(B) \le C\mu(2B) \quad \text{при всех} \quad B \in \mathcal{B}.$$

Скомбинируем оценки (2.6.26)–(2.6.29), и учтём предложения 1.2.38, 1.2.54. Наконец, выбрав $\delta > 0$ так, что $p - 2p\delta > \theta$, применим лемму 2.6.7 при $\alpha = 1 - 2\delta$. В итоге приходим к (2.6.24) и завершаем доказательство. □

Мы должны предупредить читателя, что следующий результат ни в коем случае не является следствием теоремы 2.6.12. В самом деле, к настоящему моменту мы ещё не доказали, что $\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}$ является правым обратным отображением для $\operatorname{Tr}|_S^{\mathfrak{m}_0}$.

Теорема 2.6.30. *Предположим, что $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}^{str}_{\theta}(S)$. Тогда, для любого $c \ge \frac{3}{\epsilon}$ существует такая константа $C > 0$, что для любого элемента $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$, удовлетворяющего условию $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$, для любого $k \in \mathbb{N}_0$ и любого шара $B = B_{\epsilon^k}(x)$ с центром в $x \in S$ справедливо неравенство*

$$\fint\limits_B |f(y) - F_B| \, d\mathfrak{m}_k(y) \le C\epsilon^k \Big(\fint\limits_{\widetilde{c}B} (|\nabla F|_{*,p}(y))^p \, d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.6.31}$$

в котором $F := \operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)$, а $\widetilde{c} = \widetilde{c}(1)$ – та же, что и в теореме 2.6.12.

Доказательство. Фиксируем $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$ такой, что $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$. По теореме 2.3.62 имеем $F = \operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \in W_p^1(\mathrm{X})$. Следовательно, правая часть неравенства (2.6.31) имеет смысл. Напомним понятие специальной аппроксимирующей последовательности, введённое в (2.3.26). По теореме 2.3.46 найдется константа $C > 0$, не зависящая от f, и подпоследовательность $\{f^{j_s}\}$ последовательности $\{f^j\}$ такая, что при всех достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\| \operatorname{lip} f^{j_s} \|_{L_p(\mathrm{X})} \le C \, \mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f).$$

В то же самое время, из теоремы 2.3.54 и следствия 2.3.60 имеем

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\|f^j\|_{L_p(\mathrm{X})}\le C_f\,\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)<+\infty.$$

По определению 1.3.2 имеем

$$\mathrm{Ch}_p(f^{j_s})\le C\,\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)\quad\text{для всех достаточно больших}\quad s\in\mathbb{N}.$$

Действительно, нетрудно показать, что при любом $j\in\mathbb{N}$ функция f^j принадлежит $\mathrm{LIP}^{loc}(\mathrm{X})$, поэтому, используя последовательность липшицевых срезок и учитывая, что $f^{j_s},\mathrm{lip}\,f^{j_s}\in L_p(\mathrm{X})$ и при всех достаточно больших $s\in\mathbb{N}$, легко получаем искомое. Более того, в силу замечания 1.3.3

$$\||\nabla f^{j_s}|_{*,p}\|_{L_p(\mathrm{X})}\le C\,\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)\quad\text{для всех достаточно больших}\quad s\in\mathbb{N},$$

а константа $C>0$, не зависит ни от f, ни и s. Следовательно, последовательность $\{f^{j_s}\}$ ограничена в $W^1_p(\mathrm{X})$. Но тогда из предложения 1.3.6 вытекает существование подпоследовательности $\{f^{j_s}\}$, слабо сходящейся к некоторому элементу $\widetilde{F}\in W^1_p(\mathrm{X})$. По лемме Мазура найдется строго возрастающая последовательность $\{N_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ и последовательность выпуклых комбинаций $\widetilde{f}^{N_l}:=\sum_{i=0}^{M_l}\lambda^i_{N_l}f^{N_l+i}$ при $\lambda^i_{N_l}\ge 0$ и $\sum_{i=0}^{M_l}\lambda^i_{N_l}=1$ таких, что $\|\widetilde{F}-\widetilde{f}^{N_l}\|_{W^1_p(\mathrm{X})}\to 0$ при $l\to\infty$. Поскольку при каждом $l\in\mathbb{N}$ функция $\widetilde{f}^{N_l}$ непрерывна на X, её $\mathfrak{m}_0$-след на S суть $\mathfrak{m}_0$-класс эквивалентности поточечного ограничения $\widetilde{f}^{N_l}$ на S. Следовательно, по теореме 2.6.12 получаем

$$\fint_B|\widetilde{f}^{N_l}|^{\mathfrak{m}_0}_S(y)-\widetilde{f}^{N_l}_B|\,d\mathfrak{m}_k(y)\le\epsilon^k\Big(\fint_B(|\nabla\widetilde{f}^{N_l}|_{*,p}(y))^p\,d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{p}}.\tag{2.6.32}$$

По теореме 2.3.54 последовательность $\{f^j\}$ сходится в $L_p(\mathrm{X})$ и в $L_p(\mathfrak{m}_k)$ к F и f, соответственно. Очевидно, то же справедливо и для последовательности $\{\widetilde{f}^{N_l}\}$. Но тогда $\widetilde{F}$ и F равны как элементы пространства $L_p(\mathrm{X})$, а значит и как элементы пространства $W^1_p(\mathrm{X})$. В итоге, переходя к пределу в (2.6.32), получаем требуемую оценку. □

Теперь мы готовы доказать, что наш оператор продолжения $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}$ является правым обратным для оператора $\mathfrak{m}_0$-следа $\mathrm{Tr}\,|^{\mathfrak{m}_0}_S$. Напомним определение 1.4.14.

Следствие 2.6.33. *Пусть* $\{\mathfrak{m}_k\}\in\mathfrak{M}^{str}_\theta(S)$ *и* $f\in L^{loc}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$. *Если* $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f)<+\infty$ *при некотором* $c\ge\frac{3}{\epsilon}$, *то*

$$\lim_{k\to\infty}\fint_{B_k(x)}|f(x)-\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)(y)|\,d\mu(y)=0\quad\textit{для}\quad\mathcal{H}_p-\textit{п.в.}\quad x\in\mathcal{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(f).\tag{2.6.34}$$

В частности, $\mathrm{Tr}\,|^{\mathfrak{m}_0}_S\circ\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)=f$.

Доказательство. Положим $F := \operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f)$. Очевидно, что при $k \in \mathbb{N}_0$ и $x \in S$ будем иметь

$$\begin{aligned} \fint\limits_{B_k(x)} |f(x) - F(y)|\, d\mu(y) &\le \Big| f(x) - \fint\limits_{B_k(x)} f(y)\, d\mathfrak{m}_k(y) \Big| \\ &+ \fint\limits_{B_k(x)} \fint\limits_{B_k(x)} |f(y) - F(y)|\, d\mathfrak{m}_k(y)\, d\mu(y) =: \sum_{i=1}^{2} R_k^i(x). \end{aligned} \tag{2.6.35}$$

По определению 1.4.14 имеем $\lim_{k\to\infty} R_k^1(x) = 0$ при всех $x \in \mathcal{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(f)$. С другой стороны, комбинируя замечание 1.2.50, предложения 1.2.91 и теорему 2.6.30, получим

$$\Big(R_k^2(x)\Big)^p \le C\epsilon^{kp} \fint\limits_{B_k(x)} (|\nabla F|_{*,p}(y))^p\, d\mu(y) \to 0, \quad k \to \infty \quad \text{для} \quad \mathcal{H}_p - \text{п.в.} \quad x \in S. \tag{2.6.36}$$

Комбинируя (2.6.35) и (2.6.36), выводим (2.6.34). Наконец, для доказательства второго утверждения достаточно воспользоваться теоремой 2.2.40, предложением 2.1.13 и учесть, что неравенство $p > \theta$ означает абсолютную непрерывность $\mathcal{H}_\theta\lfloor_S$ относительно $\mathcal{H}_p\lfloor_S$. □

Напомним предложение 1.3.11 и понятие p-точного представителя элемента $F \in W_p^1(\mathrm{X})$.

Предложение 2.6.37. *Пусть $F \in W_p^1(\mathrm{X})$, а $\overline{F}$ – произвольный p-точный представитель элемента F. Тогда $C_p(S \setminus \mathcal{R}_{\{\mathfrak{m}_k\},\epsilon}(\overline{F})) = 0$.*

Доказательство. Пусть S_1 – пересечение S с множеством всех μ-точек Лебега функции $\overline{F}$. В силу неравенства треугольника получаем

$$\begin{aligned} \fint\limits_{B_k(x)} |\overline{F}(x) - F(y)|\, d\mathfrak{m}_k(y) &\le \Big| \overline{F}(x) - \fint\limits_{B_k(x)} F(z)\ d\mu(z) \Big| \\ &+ \fint\limits_{B_k(x)} \Big| F(y) - \fint\limits_{B_k(x)} F(z)\ d\mu(z) \Big|\, d\mathfrak{m}_k(y) =: R_{k,1}(x) + R_{k,2}(x). \end{aligned} \tag{2.6.38}$$

По определению p-точного представителя имеем $C_p(S \setminus S_1) = 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} R_{k,1}(x) = 0 \quad \text{при всех} \quad x \in S_1.$$

С другой стороны, применяя теорему 2.6.12 при $c = 1$, имеем (здесь $\widetilde{c} = \widetilde{c}(1)$)

$$R_{k,2}(x) \le C\epsilon^k \Big(\fint\limits_{\widetilde{c}B_x(x)} (|\nabla F|_{*,p}(y))^p\, d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $S_2 := \{x \in S : \lim_{k\to\infty} R_{k,2}(x) = 0\}$. В силу предложения 1.2.91 получаем $\mathcal{H}_p(S \setminus S_2) = 0$. Но тогда, пользуясь предложением 1.3.10, выводим равенство $C_p(S \setminus S_2) = 0$.

Таким образом, имеем равенство $C_p(S \setminus (S_1 \cap S_2)) = 0$. Комбинируя это наблюдение с (2.6.38), завершаем доказательство. □

Теперь мы переходим к доказательствам основных теорем данной главы. Поскольку эти теоремы очень тесно связаны, нам будет удобно вести их доказательство одновременно.

Доказательство теорем 2.6.1, 2.6.3 и 2.6.6. Фиксируем $c \geq \frac{3}{\epsilon}$, $\sigma \in (0, \frac{\epsilon^2}{4c})$. Напомним (2.3.29) и положим $\mathrm{Ext} := \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}$. Разобьём доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Предположим, что $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$. Напомним определение 2.2.20 и зафиксируем такой элемент $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$, что $\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$. По теореме 2.3.62 имеем $F := \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \in W_p^1(\mathrm{X})$. Из следствия 2.6.33 выводим, что $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$ и $f = \mathrm{Tr}\,|_S^{\mathfrak{m}_0}(F)$. Но тогда из следствия 2.6.22 получаем $\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) < +\infty$. В силу теоремы 2.4.5 это означает,что $\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$. Комбинируя эти наблюдения с теоремой 2.4.1, устанавливаем эквивалентность условий (i), (ii) и (iii) в теореме 2.6.1. Применение теорем 2.4.19, 2.4.23 завершает проверку эквивалентности условий $(i) - (iv)$ в теореме 2.6.1.

Шаг 2. Предположим, что $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$ и фиксируем $f \in L_1^{loc}(\{\mathfrak{m}_k\})$. Из теорем 2.3.58, 2.3.62, 2.4.1 и 2.4.5 имеем (мы полагаем $F = \mathrm{Ext}(f)$)

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}} \leq \|F\|_{W_p^1(\mathrm{X})} \leq C\,\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \leq C\,\mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f). \tag{2.6.39}$$

Из замечания 1.3.3, теоремы 2.3.62 и следствия 2.6.22 получаем

$$\frac{1}{C}\mathcal{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f) \leq \||\nabla F|_{*,p}\|_{L_p(\mathrm{X})} \leq C\,\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f). \tag{2.6.40}$$

Из (2.6.39), (2.6.40) и теоремы 2.4.1 следует, что

$$\mathrm{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \approx \mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \approx \mathrm{CN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\}}(f).$$

Наконец, комбинируя этот факт с (2.6.39) и теоремами 2.4.19, 2.4.23, приходим к (2.6.2). В результате, мы завершаем доказательство теоремы 2.6.1, и, кроме того доказываем утверждение (1) теоремы 2.6.6.

Шаг 3. На этом шаге мы не предполагаем, что $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$. Докажем теперь первое утверждение теоремы 2.6.3. Если $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S$, то из определений 1.3.17 и 1.3.19 ясно, что $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}(f) \in W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$. Следовательно, условие (A) в теореме 2.6.3 выполнено. Кроме того, в силу предложения 2.6.37 выполнено условие (B) теоремы 2.6.3.

Для доказательства обратного утверждения заметим прежде всего, что теоремы 2.3.54, 2.3.58, 2.3.62, 2.6.30, следствия 2.3.60, 2.6.33, а значит и только что доказанные на шагах 1 и 2 утверждения останутся в силе, если в них вместо условия $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(\mathrm{X})$ потребовать $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta(\mathrm{X})$ и $C_p(S \setminus \mathfrak{R}_{\{\mathfrak{m}_k\}}) = 0$. Поэтому, если функция $f \in \mathfrak{B}(S)$ такова, что справедливы условия (A), (B) теоремы 2.6.3, то, используя теорему 2.6.1, определение 1.4.14 и следствие 2.6.33, получаем $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S$.

Шаг 4. Из определений 1.3.17 и 1.3.19 ясно, что отображение $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0} : W_p^1(\mathrm{X})|_S \to W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$ – непрерывное вложение. Из теоремы 2.6.1, определения 1.4.14, следствия 2.6.33 и предложения 2.6.37 заключаем, что каждый элемент $[f] \in W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$ имеет представитель $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S$. Следовательно, отображение $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}$ сюръективно. Покажем теперь, что отображение $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}$ инъективно на $W_p^1(\mathrm{X})|_S$. Предположим, что для $f \in W_p^1(\mathrm{X})|_S$ имеем $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}(f)(x) = 0$ при $\mathfrak{m}_0$-п.в. $x \in \mathrm{X}$. Следовательно, по условию (B) теоремы 2.6.3 имеем $f(x) = 0$ всюду на S за исключением множества p-нулевой емкости, то есть $f = 0$ в смысле $W_p^1(\mathrm{X})|_S$. В результате из определений 1.3.17 и 1.3.19 легко следует, что $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}$ – изометрический изоморфизм. Этим проверяется (3) в теореме 2.6.6.

Шаг 5. Положим $\overline{\mathrm{Ext}} := \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}} \circ \mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0}$. Тем самым мы получаем корректно определённый линейный оператор $\overline{\mathrm{Ext}} : W_p^1(\mathrm{X})|_S \to W_p^1(\mathrm{X})$. Более того, в силу следствия 2.6.33 и предложения 2.6.37 заключаем, что $\mathrm{Tr}\,|_S = (\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0})^{-1} \circ \mathrm{Tr}\,|_S^{\mathfrak{m}_0}$ и устанавливаем коммутативность диаграммы в теореме 2.6.6. Так как $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_0} : W_p^1(\mathrm{X})|_S \to W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$ является изометрическим изоморфизмом, имеем $\|\overline{\mathrm{Ext}}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},p}\| = \|\,\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}\,\|$. Комбинируя этот факт с (2.6.2), получаем (2.6.5) и завершаем доказательство теорем 2.6.3, 2.6.6.

Глава 3. КОНКРЕТНЫЕ ПРИМЕРЫ θ-КОТОЛСТЫХ МНОЖЕСТВ И УПРОЩЁННЫЕ КРИТЕРИИ НА СЛЕД

Результаты предыдущей главы являются чрезвычайно общими. Помимо всего прочего, мы покажем в этой главе, что все известные к настоящему моменту в мировой литературе результаты о следах пространств Соболева первого порядка являются частными случаями общей теории, развитой в предыдущей главе. Платой за столь большую общность является сложность соответствующих критериев на след пространства Соболева. Главная техническая трудность при использовании результатов предыдущей главы на практике заключается в сложности конструктивного построения θ-регулярных последовательностей мер.

Основная цель данной главы – рассмотреть интересные для приложений примеры замкнутых подмножеств метрических пространств с мерой, которые, с одной стороны не могут быть охвачены никакими из известных ранее в мировой литературе методов, а с другой стороны позволяют относительно несложно найти явные формулы для соответствующих θ-регулярных последовательностей мер $\{\mathfrak{m}_k\}$. Соответствующие примеры заведомо следует искать среди тех множеств, которые принадлежат при некотором $\theta \geq 0$ классу $\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$, но не принадлежат классу $\mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$. Здесь можно избрать два наиболее естественных пути. На первом пути следует искать множества "постоянной локальной размерности", которые состоят из большого числа складок. Наиболее простой кандидат на эту роль – достаточно сильно осциллирующая кривая в $\mathbb{R}^n$. На втором пути следует рассмотреть кусочно регулярные по Альфорсу–Давиду множества S, то есть $S = \cup_{i=1}^N S^i$, при $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, где при каждом $i \in \{1, ..., N\}$ множество $S^i \in \mathcal{ADR}_{\theta_i}(\mathrm{X})$. Оба этих пути будут подробно рассмотрены в настоящей главе. Кроме того, мы увидим, что наличие априорной информации о конкретной геометрической структуре множества S позволяет зачастую получить в некотором смысле более простое и наглядное описание следа пространства Соболева.

3.1. Следы пространств $W_p^1(\mathrm{X})$ на кусочно регулярных множествах

На протяжении всего раздела *фиксируем* параметр $p \in (1, \infty)$ и м.п.м. $\mathrm{X} \in \mathfrak{A}_p$

3.1.1. **Пространства Бесова на метрических пространствах с мерой.** Теория пространств Бесова на метрических пространствах с мерой привлекает большое внимание в последние годы [18, 31, 56, 63]. В диссертации мы будем иметь дело с пространствами Бесова на регулярных по Альфорсу–Давиду подмножествах пространства X. Мы не будем в данном параграфе определять пространства Бесова во всей шкале параметров, а ограничимся лишь частным случаем, достаточным для доказательства основных результатов.

На протяжении этого параграфа полагаем $B_k(x) := B_{2^{-k}}(x)$ при всех $x \in \mathrm{X}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Следующее предложение является немедленным следствием (1.2.44) и замечания 1.2.95.

Предложение 3.1.1. *Пусть $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ при некотором $\theta \in [0, \underline{Q}_\mu)$. Для любого $c \geq 1$ существует константа $C > 0$ такая, что для любого элемента $f \in L_1^{loc}(\mathcal{H}_\theta\lfloor_S)$, для любого $k \in \mathbb{N}_0$ и всех x, y, удволетворяющих $\mathrm{d}(x,y) \leq \frac{c}{2^k}$, справедливо нераенство*

$$\Big| \fint\limits_{B_k(x)\cap S} f(x')\, d\mathcal{H}_\theta(x') - \fint\limits_{B_k(y)\cap S} f(y')\, d\mathcal{H}_\theta(y') \Big| \leq C\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_{\frac{1}{2^k}+\mathrm{d}(x,y)}(x)). \tag{3.1.2}$$

Мы определим пространства Бесова по аналогии с тем, как это сделано в [104].

Определение 3.1.3. Пусть $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ при некотором $\theta \in [0, \underline{Q}_\mu)$. Пусть $s \in (0,1)$ и $p \in (1, \infty)$. Элемент $f \in L_p(\mathcal{H}_\theta\lfloor_S)$ принадлежит *пространству Бесова* $\mathrm{B}_p^s(S) := \mathrm{B}_{p,p}^s(S)$, если

$$\mathcal{BN}_p^s(f) := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} \int\limits_S \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_k(x))\Big)^p d\mathcal{H}_\theta(x)\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{3.1.4}$$

Кроме того, положим

$$\|f\|_{\mathrm{B}_p^s(S)} := \|f\|_{L_p(\mathcal{H}_\theta\lfloor_S)} + \mathcal{BN}_p^s(f). \tag{3.1.5}$$

Нам также понадобится альтернативное определение пространств Бесова. Соответствующая характеризация будет дана в теореме 3.1.6 ниже. Заметим, что близкий по смыслу результат был установлен для однородных пространств Бесова [63] во всей шкале параметров. В действительности, повторяя основные идеи работы [63], можно получить "неоднородные аналоги" соответствующих результатов. Однако, в нашем частном случае работают более прямые классические методы. Мы дадим детальное доказательство для полноты картины.

Теорема 3.1.6. *Пусть $S \in \mathcal{ADR}_\theta(\mathrm{X})$ при некотором $\theta \in (0, \underline{Q}_\mu)$. При $s > 0$ и $p \in (1, \infty)$ элемент $f \in L_p(\mathcal{H}_\theta\lfloor_S)$ принадлежжит пространству Бесова $\mathrm{B}_p^s(S)$ в том и только том случае, если*

$$\widetilde{\mathcal{BN}}_p^s(f) := \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} \int\limits_S \fint\limits_{B_k(x)\cap S} |f(x) - f(y)|^p\, d\mathcal{H}_\theta(y)\, d\mathcal{H}_\theta(x)\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{3.1.7}$$

Кроме того, существует константа $C > 0$ такая, что

$$\frac{1}{C}\|f\|_{\mathrm{B}_p^s(S)} \leq \widetilde{\mathcal{BN}}_p^s(f) + \|f\|_{L_p(\mathcal{H}_\theta\lfloor_S)} \leq C\|f\|_{\mathrm{B}_p^s(S)} \quad \textit{при} \quad f \in L_p(\mathcal{H}_\theta\lfloor_S). \tag{3.1.8}$$

Доказательство. Фиксируем $f \in L_p(\mathcal{H}_\theta\lfloor_S)$ и разобьем доказательство на несколько естественных шагов.

Шаг 1. Заметим, что при $k \in \mathbb{Z}$ имеем $B_k(x) \subset B_{k-1}(y)$ для всех $y \in B_k(x)$. Следовательно, используя (1.2.44), неравенство Гёльдера, и замечание 1.2.95, легко видеть, что

$$\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta \lfloor S}(f, B_k(x))\Big)^p \le C \fint\limits_{B_k(x)\cap S} \fint\limits_{B_{k-1}(y)\cap S} |f(y) - f(z)|^p \, d\mathcal{H}_\theta(y) d\mathcal{H}_\theta(z). \tag{3.1.9}$$

Используя (3.1.9), поменяем порядок интегрирования и учтём замечание 2.1.22. Имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{\infty} 2^{ksp} \int\limits_S \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta \lfloor S}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(x) \\ &\le \sum_{k=2}^{\infty} 2^{ksp} \int\limits_S \Big(\fint\limits_{B_{k-1}(y)\cap S} |f(y) - f(z)|^p \, d\mathcal{H}_\theta(z)\Big) d\mathcal{H}_\theta(y) \le C(\widetilde{\mathcal{BN}}^s_p(f))^p. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Кроме того, из леммы 2.2.27, применённой при $L = 1$ и $\mathfrak{m}_k = \mathcal{H}_\theta \lfloor_S$, $k \in \mathbb{N}_0$, вытекает оценка

$$\int\limits_S \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta \lfloor S}(f, B_1(x))\Big)^p d\mathcal{H}_\theta(x) \le C\|f\|^p_{L_p(\mathcal{H}_\theta \lfloor S)}. \tag{3.1.11}$$

В результате, комбинируя (3.1.10) и (3.1.11), устанавливаем неравенство в левой части (3.1.8).

Шаг 2. Установим неравенство в правой части (3.1.8). Положим

$$f_{B_i(x)} := \fint\limits_{B_i(x)\cap S} f(y) \, d\mathcal{H}_\theta(y) \quad \text{при} \quad x \in S \text{ и } i \in \mathbb{Z}.$$

Имея в нашем распоряжении замечание 1.2.95, мы можем использовать стандартные рассуждения о точках Лебега локально интегрируемых функций (см., например, параграф 3.4 в монографии [71]). Это даёт существование борелевского множества $E \subset S$ с мерой $\mathcal{H}_\theta(E) = 0$ такого, что $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{B_i(x)}$ для всех $x \in S \setminus E$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le \sum_{i=k}^{\infty} |f_{B_i(x)} - f_{B_{i+1}(x)}| + |f_{B_k(x)} - f_{B_k(y)}| \\ &+ \sum_{i=k}^{\infty} |f_{B_i(y)} - f_{B_{i+1}(y)}| \quad \text{для всех пар} \quad (x, y) \in (S \setminus E) \times (S \setminus E). \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Поэтому, из предложения 3.1.1 вытекает оценка

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le C \sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta \lfloor S}(f, B_i(x)) + C\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta \lfloor S}(f, 3B_k(x)) \\ &+ C \sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta \lfloor S}(f, B_i(y)) \quad \text{для всех пар} \quad (x, y) \in (S \setminus E) \times (S \setminus E). \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Подставим (3.1.13) в (3.1.7). В итоге получим

$$\begin{aligned} \Big(\widetilde{\mathcal{BN}}^s_p(f)\Big)^p &= \int\limits_S \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} \fint\limits_{B_k(x)} |f(x) - f(y)|^p \, d\mathcal{H}_\theta(y) \, d\mathcal{H}_\theta(x) \\ &\le C(R_1 + R_2 + R_3 + R_4). \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Для оценки R_1 воспользуемся теоремой 1.2.120 при $p = s$ и $\beta_j = 2^{js}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
R_1 &:= \int\limits_S \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} \fint\limits_{B_k(x)} \Big(\sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_i(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(y)\, d\mathcal{H}_\theta(x) \\
&= \int\limits_S \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} \Big(\sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_i(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(x) \qquad (3.1.15) \\
&\le C \int\limits_S \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} (\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_k(x)))^p \, d\mathcal{H}_\theta(x) \le C\|f\|^p_{\mathrm{B}^s_p(S)}.
\end{aligned}
$$

Для оценки R_2 поменяем порядок интегрирования, воспользуемся замечанием 2.1.22, и, наконец, воспользуемся теоремой 1.2.120 при $p = s$ и $\beta_j = 2^{js}$. В результате получаем

$$
\begin{aligned}
R_2 &:= \int\limits_S \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} \fint\limits_{B_k(x)} \Big(\sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_i(y))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(y)\, d\mathcal{H}_\theta(x) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_S 2^{ksp} \fint\limits_{B_k(x)} \Big(\sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_i(y))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(y)\, d\mathcal{H}_\theta(x) \qquad (3.1.16) \\
&\le C \int\limits_S \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} \Big(\sum_{i=k}^{\infty} \mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_i(y))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(y) \\
&\le C \int\limits_S \sum_{k=1}^{\infty} 2^{ksp} (\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_k(y)))^p \, d\mathcal{H}_\theta(y) \le C\|f\|^p_{\mathrm{B}^s_p(S)}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $3B_k(x) \subset B_{k-2}(x)$, напомним пример 2.1.9 и воспользуемся предложением 2.4.2 при $\theta = \underline{\theta}$ и $\mathfrak{m}_k = \mathcal{H}_\theta\lfloor_S$, $k \in \mathbb{N}_0$. Имеем

$$
\begin{aligned}
R_3 &:= \int\limits_S \sum_{k=3}^{\infty} 2^{ksp} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, 3B_k(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(x) \le \sum_{k=3}^{\infty} \int\limits_S 2^{ksp} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_{k-2}(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(x) \qquad (3.1.17) \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_S 2^{ksp} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_\theta\lfloor_S}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_\theta(x).
\end{aligned}
$$

Наконец, меняя порядок интегрирования и, используя замечание 2.1.22, легко выводим

$$
R_4 := \int\limits_S \sum_{k=1}^{2} 2^{ksp} \fint\limits_{B_k(x)\cap S} |f(x) - f(y)|^p \, d\mathcal{H}_\theta(y)\, d\mathcal{H}_\theta(x) \le C \int\limits_S |f(x)|^p \, d\mathcal{H}_\theta(x). \qquad (3.1.18)
$$

Комбинируя (3.1.14)–(3.1.18), получим неравенство в правой части (3.1.8).

Теорема полностью доказана. □

3.1.2. **Склеивающие функционалы.** Напомним определение 1.5.17. До конца параграфа *зафиксируем* параметры $\underline{\theta} \in [0, \min\{p, \underline{Q}_\mu\})$, $\theta \in [\underline{\theta}, p)$ и множество $S \in \mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X})$ такое, что $S = \cup_{i=1}^N S^i$ при некотором $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 2$ и $S^i \in \mathcal{ADR}_{\theta_i}(\mathrm{X})$, при этом $0 \le \theta_1 < \ldots < \theta_N = \underline{\theta} < p$. Кроме того, в течение всего параграфа полагаем

$$
\mathfrak{m}_k := \sum_{i=1}^{N} 2^{k(\theta-\theta_i)} \mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \qquad (3.1.19)
$$

Замечание 3.1.20. В силу примера 2.1.11 имеем $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$ и $\epsilon = \epsilon(\{\mathfrak{m}_k\}) = \frac{1}{2}$.

Прежде всего сделаем элементарное наблюдение, следующее непосредственно из (3.1.19) (мы также используем элементарное неравенство $(\sum_{i=1}^N a_i)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^N a_i^{\frac{1}{p}}$ для любого набора неотрицательных чисел $\{a_i\}_{i=1}^N$) и неравенства Гёльдера для конечных сумм.

Предложение 3.1.21. *Класс эквивалентности функции $f : S \to \mathbb{R}$ принадлежит $L_p^{loc}(\mathfrak{m}_0)$ в том и только том случае, если $f \in \cap_{i=1}^N L_1^{loc}(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$, и, кроме того (мы полагаем $p' := \frac{p}{p-1}$),*

$$\|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} \leq \sum_{i=1}^N \|f\|_{L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})} \leq N^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)}. \tag{3.1.22}$$

При каждом $k \in \mathbb{N}_0$ нам будет необходимо сравнивать меры $\mathfrak{m}_k\lfloor_{S^i}$ и $2^{k(\theta-\theta_i)}\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}$.

Предложение 3.1.23. *Для любого $c \geq 1$ существует константа $C > 0$ такая, что при каждом $i \in \{1, ..., N\}$ справедливо следующее утверждение. Если $\underline{x} \in \mathrm{X}$ и $x \in S^i$ таковы, что $B_k(x) \subset cB_k(\underline{x})$, то*

$$\begin{aligned} &2^{k(\theta-\theta_i)}\mathcal{H}_{\theta_i}(B_k(x) \cap S^i) \leq 2^{k(\theta-\theta_i)}\mathcal{H}_{\theta_i}(cB_k(\underline{x}) \cap S^i) \\ &\leq \mathfrak{m}_k(cB_k(\underline{x})) \leq C2^{k(\theta-\theta_i)}\mathcal{H}_{\theta_i}(B_k(x) \cap S^i). \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Доказательство. Неравенство в левой части (3.1.24) немедленно следует из (3.1.19). Чтобы доказать неравенство в правой части (3.1.24), заметим, что $cB_k(\underline{x}) \subset 2cB_k(x)$. Следовательно, используя теорему 2.1.14, условие (**M**2) определения 2.1.1 и определение 1.2.92, получим

$$\mathfrak{m}_k(cB_k(\underline{x})) \leq \mathfrak{m}_k(2cB_k(x)) \leq C\mathfrak{m}_k(B_k(x)) \leq C2^{k\theta}\mu(B_k(x)) \leq C2^{k(\theta-\theta_i)}\mathcal{H}_{\theta_i}(B_k(x) \cap S^i).$$

Доказательство завершено. □

При $k \in \mathbb{Z}$ будем использовать обозначение $B_k(x) := B_{2^{-k}}(x)$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ зафиксируем максимальное 2^{-k}-разделённое подмножество $Z_k(S) := \{z_{k,\alpha} : \alpha \in \mathcal{A}_k(S)\}$ множества S. Кроме того, для любого $k \in \mathbb{Z}$ и любого $\alpha \in \mathcal{A}_k(S)$ положим $B_{k,\alpha} := B_k(z_{k,\alpha})$. При $k \in \mathbb{Z}$ и $i, j \in \{1, ..., N\}$ положим

$$S_k^{i,j} := \{x \in S^i : B_{2^{-k}}(x) \cap S^j \neq \emptyset\}. \tag{3.1.25}$$

Легко видеть, что $S_{k+1}^{i,j} \subset S_k^{i,j}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Наконец, определим множество

$$\Sigma_k^{i,j} := \{(y, z) \in S^i \times S^j : \mathrm{d}(y, z) \leq 2^{-k}\}. \tag{3.1.26}$$

При $i \in \{1, ..., N\}$ и $f \in L_1^{loc}(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$, для любого $k \in \mathbb{Z}$ введём усреднение

$$A_k^i(f)(x) := \fint_{B_k(x)\cap S^i} f(x')\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(x'), \quad x \in S^i. \tag{3.1.27}$$

Более того, при $i,j\in\{1,...,N\}$ и $f\in L_1^{loc}(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})\cap L_1^{loc}(\mathcal{H}_{\theta_j}\lfloor_{S^j})$, для любого $k\in\mathbb{Z}$ рассмотрим двойное усреднение

$$A_k^{i,j}(f)(y,z):=\fint\limits_{B_k(y)\cap S^i}\fint\limits_{B_k(z)\cap S^j}|f(y')-f(z')|\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y')d\mathcal{H}_{\theta_j}(z'),\quad (y,z)\in S^i\times S^j. \tag{3.1.28}$$

Следующие две леммы будут краеугольными инструментами для дальнейшего.

Лемма 3.1.29. *Для любого $c\geq 1$ существует константа $C>0$ такая, что при любых $i,j\in\{1,...,N\}$ для каждого $k\in\mathbb{N}_0$ и любой пары $(y,z)\in\Sigma_k^{i,j}$ неравенство*

$$A_k^{i,j}(f)(y,z)\leq C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,B). \tag{3.1.30}$$

справедливо для всякого шара $B=cB_k(\underline{x})$, $\underline{x}\in \mathrm{X}$, удовлетворяющего условиям

$$B\supset B_k(y)\quad и\quad B\supset B_k(z).$$

Доказательство. Из (3.1.19) имеем

$$\begin{aligned}&2^{k(2\theta-\theta_i-\theta_j)}\int\limits_{B_k(y)\cap S^i}\int\limits_{B_k(z)\cap S^j}|f(y')-f(z')|\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y')d\mathcal{H}_{\theta_j}(z')\\&\leq\int\limits_B\int\limits_B|f(y')-f(z')|\,d\mathfrak{m}_k(y')d\mathfrak{m}_k(z').\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

Остаётся применить предложение 3.1.23 и учесть (1.2.44). □

Имея в распоряжении вышеприведённую лемму, мы можем установить полезную оценку. Напомним определение 2.2.16. Напомним также замечание 1.5.20.

Предложение 3.1.32. *Если $\theta_i(S)>0$, то, для каждого параметра $\sigma\in(0,\sigma(S)]$ существует константа $C>0$ такая, что*

$$\|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)}\leq C\,\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)\quad для\ всех\quad f\in L_1^{loc}(\mathfrak{m}_0). \tag{3.1.33}$$

Доказательство. Применим лемму 3.1.29 при $i=j$, $c=1$ и $y=z=x$. Это даст существование константы $C>0$ такой, что для любого $f\in L_1^{loc}(\mathfrak{m}_0)$ имеем

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}}(f,B_k(x))\leq C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,B_k(x))\quad \text{при любом}\quad k\in\mathbb{N}_0\quad \text{для всех}\quad x\in S^i.$$

Из этого неравенства в сочетании с (3.1.19) немедленно вытекает существование константы $C>0$ такой, что неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^{kp(1-\frac{\theta_i}{p})}\int\limits_{S^i}(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}}(f,B_k(x)))^p\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(x)\leq C\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(p-\theta)}\int\limits_{S^i}(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,B_k(x)))^p\,d\mathfrak{m}_k(x) \tag{3.1.34}$$

справедливо для всех $f \in L_1^{loc}(\mathfrak{m}_0)$. Поскольку S^i является σ-пористым множеством (это легко вытекает из предложения 1.2.106 и замечания 1.5.20), существует $C > 0$ такая, что для любого элемента $f \in L_1^{loc}(\mathfrak{m}_0)$ правая часть (3.1.34) может быть оценена сверху через $C\mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)$. Комбинируя это наблюдение с предложением 3.1.21 и определением 3.1.3, получаем требуемую оценку и завершаем доказательство. □

Для следующих результатов нам необходимо следующее комбинаторное рассуждение.

Предложение 3.1.35. *Пусть $k \in \mathbb{N}_0$, $\underline{x} \in \mathrm{X}$ и $c \geq 1$ такие, что $cB_k(\underline{x}) \cap S \neq \emptyset$. Тогда существуют индексное множество $\mathcal{I} \subset \{1, ..., N\}$ и число $\bar{i} \in \{1, ..., N+1\}$, для которых справедливо следующее. При каждом $i \in \mathcal{I}$ существует точка $x_i \in S^i$ такая, что $B_k(x_i) \subset (c + \bar{i})B_k(\underline{x})$ и, кроме того, $(c + \bar{i})B_k(\underline{x}) \cap S^j = \emptyset$ для всех $j \in \{1, ..., N\} \setminus \mathcal{I}$.*

Доказательство. При $l \in \{0, ..., N\}$ пусть $\mathcal{I}^l \subset \{1, ..., N\}$ таково, что $S^i \cap (c + l)B_k(\underline{x}) \neq \emptyset$ для всех $i \in \mathcal{I}^l$. Рассмотрим шар $(c + l + 1)B_k(\underline{x})$. Очевидно, для каждого $i \in \mathcal{I}^l$ существует точка $x_i \in S^i$ такая, что $B_k(x_i) \subset (c + l + 1)B_k(\underline{x})$. Если $(c + l + 1)B_k(\underline{x}) \cap S^j = \emptyset$ при всех $j \in \{1, ..., N\} \setminus \mathcal{I}^l$, то мы останавливаемся, полагая $\mathcal{I} := \mathcal{I}^l$ и $\bar{i} := l + 1$. В противном случае, мы повторяем процедуру с заменой l на $l + 1$.

Поскольку $N < +\infty$, стартуя с $l = 0$, мы найдем $i^* \in \{0, ..., N\}$ такой, что вышеприведённая процедура остановится после i^* шагов. Полагая $\bar{i} := i^* + 1$ и $\mathcal{I} := \mathcal{I}^{i^*}$, завершаем доказательство. □

Лемма 3.1.36. *При $c \geq 1$ существует константа $C > 0$ такая, что, если шар $B = cB_k(\underline{x})$ и индексное множество $\mathcal{I} \subset \{1, ..., N\}$ обладают свойством: $cB_k(x) \supset B_k(x_i)$ при $x_i \in S^i$ для всех $i \in \mathcal{I}$ и $cB_k(x) \cap S^j = \emptyset$ для всех $j \in \{1, ..., N\} \setminus \mathcal{I}$, то*

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B) \leq C\Big(\sum_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_i}\llcorner_{S^i}}(f, B) + \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{I} \\ i \neq j}} \fint_{B \cap S^i} \fint_{B \cap S^j} |f(y') - f(z')| \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y') d\mathcal{H}_{\theta_j}(z')\Big). \tag{3.1.37}$$

Доказательство. Используя (3.1.19) и элементарные комбинаторные наблюдения, имеем

$$\begin{aligned} &\int_B \int_B |f(y) - f(z)| \, d\mathfrak{m}_k(y) d\mathfrak{m}_k(z) \\ &= \sum_{i,j \in \mathcal{I}} 2^{k(\theta - \theta_i)} 2^{k(\theta - \theta_j)} \int_{B \cap S^i} \int_{B \cap S^j} |f(y) - f(z)| \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) d\mathcal{H}_{\theta_j}(z). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая предложение 3.1.23 и формулу (1.2.42), получаем

$$\mathcal{OSC}_{\mathfrak{m}_k}(f, B) \leq C\Big(\sum_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{OSC}_{\mathcal{H}_{\theta_i}\llcorner_{S^i}}(f, B) + \sum_{\substack{i,j \in \mathcal{I} \\ i \neq j}} \fint_{B \cap S^i} \fint_{B \cap S^j} |f(y') - f(z')| \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y') d\mathcal{H}_{\theta_j}(z')\Big).$$

Наконец, принимая во внимание (1.2.44), завершаем доказательство. □

При $k \in \mathbb{Z}$, определим *весовую функцию* $\mathrm{w}_k : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty)$ равенством

$$\mathrm{w}_k(y,z) := \frac{1}{\sqrt{\mu(B_k(y))}\sqrt{\mu(B_k(z))}}, \quad (y,z) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}\,. \tag{3.1.38}$$

Немедленным следствием свойства равномерно локального удвоения меры μ является тот факт, что при каждом $\underline{k} \in \mathbb{Z}$, найдется константа $C > 0$, для которой при любом $k \geq \underline{k}$ выполнено неравенство

$$\mathrm{w}_k(y,z) \leq C\,\mathrm{w}_{k-1}(y,z) \quad \text{для всех} \quad (y,z) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}\,. \tag{3.1.39}$$

Следующее наблюдение показывает, что веса w_k, $k \in \mathbb{N}_0$ не могут сильно осциллировать.

Предложение 3.1.40. *Для любого $c > 0$ существует константа $C > 0$ такая, что при каждом $k \in \mathbb{N}_0$, для любой пары $(y,z) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}$,*

$$\frac{1}{C}\,\mathrm{w}_k(y',z') \leq \mathrm{w}_k(y,z) \leq C\,\mathrm{w}_k(y',z') \quad \textit{для всех} \quad (y',z') \in cB_k(y) \times cB_k(z). \tag{3.1.41}$$

Доказательство. Заметим, что $B_k(y) \subset 2cB_k(y')$ при всех $y' \in cB_k(y)$. Следовательно, используя свойство равномерно локального удвоения μ, легко получаем неравенство в левой части (3.1.41). Меняя роль (y,z) и (y',z'), получим неравенство в правой части (3.1.41). □

Предложение 3.1.42. *Для любых $i,j \in \{1,...,N\}$ существует константа $C > 0$ такая, что при каждом $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\int\limits_{B_k(y)\cap S^j} \mathrm{w}_k(y,z)\,d\mathcal{H}_{\theta_j}(z) \leq C2^{k\theta_j} \quad \textit{для всех} \quad y \in S_k^{i,j}.$$

Доказательство. Используя предложение 3.1.40 при $y' = z' = z$, замечание 2.1.22 (при $\theta = \theta_j$ и $c = 1$) и определение 1.2.92, имеем

$$\int\limits_{B_k(y)\cap S^j} \mathrm{w}_k(y,z)\,d\mathcal{H}_{\theta_j}(z) \leq C2^{k\theta_j} \int\limits_{B_k(y)\cap S^j} \frac{1}{\mathcal{H}_{\theta_j}(B_k(z)\cap S^j)}\,d\mathcal{H}_{\theta_j}(z) \leq C2^{k\theta_j}.$$

Доказательство завершено. □

Теперь мы готовы ввести следующие *склеивающие функционалы.* При $f \in \cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$

$$\mathcal{GL}_p^{(1)}(f) := \Big(\sum_{i\neq j}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-\theta_i-\theta_j)} \iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)|f(y)-f(z)|^p\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y)d\mathcal{H}_{\theta_j}(z)\Big)^{\frac{1}{p}};$$

$$\mathcal{GL}_p^{(2)}(f) := \Big(\sum_{i\neq j}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-\theta_i-\theta_j)} \iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)|A_k^i(f)(y)-A_k^j f(z)|^p\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y)d\mathcal{H}_{\theta_j}(z)\Big)^{\frac{1}{p}}; \tag{3.1.43}$$

$$\mathcal{GL}_p^{(3)}(f) := \Big(\sum_{i\neq j}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-\theta_i-\theta_j)} \iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)(A_k^{i,j}(f)(y,z))^p\,d\mathcal{H}_{\theta_i}(y)d\mathcal{H}_{\theta_j}(z)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Замечание 3.1.44. Если $f \in \cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$, то, очевидно, $|A_k^i(f)(y) - A_k^j(f)(z)| \le A_k^{i,j}(f)(y,z)$ при любых $i,j \in \{1,...,N\}$, для любой пары $(y,z) \in S^i \times S^j$. Следовательно,

$$\mathcal{GL}_p^{(2)}(f) \le \mathcal{GL}_p^{(3)}(f).$$

3.1.3. **Простой случай.** В этом параграфе мы рассмотрим "простой случай". То есть *фиксируем* параметр $\underline{\theta} \in (0, \min\{p, \underline{Q}_\mu\})$, $\theta \in [\underline{\theta}, p)$, и множество $S \in \mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X})$ такое, что $S = \cup_{i=1}^N S^i$ при некотором $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 2$ и, кроме того,

$$S^i \in \mathcal{ADR}_{\theta_i}(\mathrm{X}) \quad \text{при} \quad 0 < \theta_1 < ... < \theta_N = \underline{\theta} < p.$$

Под "простотой" мы понимаем то, что поскольку $\theta_1 > 0$, пространство следов в этом случае будет своего рода комбинацией *"функциональных пространств одной природы"*, то есть пространств Бесова с различными показателями гладкости. Кроме того, соответствующая норма в пространстве следов будет состоять из полунорм Бесова и специальных условий склейки для кусков разной коразмерности.

Поскольку в данной секции $\theta_i > 0$ для всех $i \in \{1,...,N\}$, мы можем вывести следующие интересные неравенства для различных функционалов склейки.

Лемма 3.1.45. *Существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\mathcal{GL}_p^{(3)}(f) \le C\Big(\mathcal{GL}_p^{(1)}(f) + \sum_{i=1}^N \|f\|_{L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})}\Big) \quad \textit{для всех} \quad f \in \cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}). \tag{3.1.46}$$

Доказательство. Фиксируем $f \in \cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$. При $i,j \in \{1,...,N\}$, пользуясь предложением 3.1.40 и неравенством Гёльдера, при каждом $k \in \mathbb{N}$ получаем оценку

$$\mathrm{w}_k(y,z)(A_k^{i,j}(f)(y,z))^p \le C \fint\limits_{B_k(y)\cap S^i} \fint\limits_{B_k(z)\cap S^j} \mathrm{w}_k(y',z')|f(y') - f(z')|^p \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y') d\mathcal{H}_{\theta_j}(z').$$

Очевидно, $(y',z') \in \Sigma_{k-2}^{i,j}$ при условии, что $(y,z) \in \Sigma_k^{i,j}$ и $y' \in B_k(y)\cap S^i$, $z' \in B_k(z)\cap S^j$. Меняя порядок интегрирования, используя замечание 2.1.22 и оценку (3.1.39), получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^\infty \sum_{i\ne j} \iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)(A_k^{i,j}(f)(y,z))^p \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) d\mathcal{H}_{\theta_j}(z) \\
&\le C \sum_{k=3}^\infty \sum_{i\ne j} \iint\limits_{\Sigma_{k-2}^{i,j}} \mathrm{w}_{k-2}(y',z')|f(y') - f(z')|^p \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y') d\mathcal{H}_{\theta_j}(z') \le C\Big(\mathcal{GL}_p^{(1)}(f)\Big)^p.
\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что из предложений 3.1.40, 3.1.42, неравенства Гёльдера и замечания 2.1.22 легко заключаем

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{N}\iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)(A_1^{i,j}(f)(y,z))^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) d\mathcal{H}_{\theta_j}(z)$$
$$\leq C\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{S^i}\fint\limits_{B_k(y)\cap S^i} |f(y')|^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y')\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) \leq C\sum_{i=1}^{N}\|f\|^p_{L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})}.$$

Собирая вышеприведённые оценки, завершаем доказательство. □

Лемма 3.1.47. *Существует константа $C>0$ такая, что*

$$\mathcal{GL}_p^{(1)}(f) \leq C\Big(\mathcal{GL}_p^{(2)}(f) + \sum_{i=1}^{N}\|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)}\Big) \quad \textit{для всех} \quad f\in \cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}). \tag{3.1.48}$$

Доказательство. В силу неравенства треугольника и неравенства Гёльдера для сумм при $k\in\mathbb{N}_0$ для любой пары $(y,z)\in\Sigma_k^{i,j}$ имеем

$$\mathrm{w}_k(y,z)|f(y)-f(z)|^p \leq 3^{p-1}\,\mathrm{w}_k(y,z)\Big(|f(y)-A_k^i(f)(y)|^p$$
$$+|f(z)-A_k^j(f)(z)|^p + |A_k^i(f)(y)-A_k^j(f)(z)|^p\Big).$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)|f(y)-f(z)|^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) d\mathcal{H}_{\theta_j}(z) \leq C\Big(J_k^{i,j}(1)+J_k^{i,j}(2)+J_k^{i,j}(3)\Big), \tag{3.1.49}$$

где мы полагаем

$$J_k^{i,j}(1) := \iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)|f(y)-A_k^i(f)(y)|^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) d\mathcal{H}_{\theta_j}(z),$$
$$J_k^{i,j}(2) := \iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)|f(z)-A_k^j(f)(z)|^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) d\mathcal{H}_{\theta_j}(z), \tag{3.1.50}$$
$$J_k^{i,j}(3) := \iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z)|A_k^i(f)(y)-A_k^j(f)(z)|^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) d\mathcal{H}_{\theta_j}(z).$$

Следовательно, используя предложение 3.1.42, неравенство Гёльдера и, учитывая (3.1.27), выводим

$$J_k^{i,j}(1) \leq C2^{k\theta_j}\int\limits_{S_k^{i,j}} |f(y)-A_k^i(f)(y)|^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y)$$
$$\leq C2^{k\theta_j}\int\limits_{S_k^{i,j}}\fint\limits_{B_k(y)\cap S^i} |f(y)-f(y')|^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y')\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) \tag{3.1.51}$$
$$\leq C2^{k\theta_j}\int\limits_{S^i}\fint\limits_{B_k(y)\cap S^i} |f(y)-f(y')|^p\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y')\, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y).$$

Аналогичные рассуждения приводят к оценке

$$J_k^{i,j}(2) \le C2^{k\theta_i} \int\limits_{S^j} \fint\limits_{B_k(z)\cap S^j} |f(z)-f(z')|^p \, d\mathcal{H}_{\theta_j}(z') \, d\mathcal{H}_{\theta_j}(z). \tag{3.1.52}$$

В результате, комбинируя оценки (3.1.51), (3.1.52) и, учитывая теорему 3.1.6, будем иметь

$$\sum_{i\ne j}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-\theta_i-\theta_j)}(J_k^{i,j}(1)+J_k^{i,j}(2)) \le C\sum_{i=1}^{N} \|f\|^p_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)}. \tag{3.1.53}$$

Наконец, собирая вместе оценки (3.1.49), (3.1.50), (3.1.53) и, учитывая (3.1.43), приходим к требуемой оценке (3.1.48), завершая доказательство.

□

Теперь установим *первый ключевой результат* этой секции. Напомним замечание 1.5.20.

Теорема 3.1.54. *Для любого $\sigma \in (0, \sigma(S)]$ существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f) \le C\Big(\sum_{i=1}^{N} \|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)} + \mathcal{GL}_p^{(1)}(f)\Big) \quad \textit{для всех} \quad f \in \cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}). \tag{3.1.55}$$

Доказательство. В силу замечания 1.5.20 множество S является σ-пористым и, кроме того, $\mu(S) = 0$. Поэтому из(2.2.17) имеем

$$\Big(\mathcal{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)\Big)^p = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\theta-p)} \int\limits_S \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x). \tag{3.1.56}$$

Нам будет удобно разбить остаток доказательства на несколько шагов.

Шаг 1. Для любых $i, j \in \{1, ..., N\}$ при $i \ne j$, для любого $k \in \mathbb{N}_0$ имеем $B_k(x) \cap S^j = \emptyset$ для всех $x \in S^i \setminus S_k^{i,j}$. Следовательно из (3.1.19) выводим

$$\int\limits_{S^i\setminus\cup_{j\ne i}S_k^{i,j}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) = 2^{k(\theta-\theta_i)} \int\limits_{S^i\setminus\cup_{j\ne i}S_k^{i,j}} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i}}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(x).$$

Отсюда с учётом (3.1.5) получаем

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-\theta)} \int\limits_{S^i\setminus\cup_{j\ne i}S_k^{i,j}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \le \sum_{i=1}^{N} \|f\|^p_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)}. \tag{3.1.57}$$

Шаг 2. Зафиксируем временно $i, j \in \{1, ..., N\}$ при $i \ne j$. Напомним обозначения, данные сразу после доказательства предложения 3.1.23. При $k \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_k(S)$, удовлетворяющих условию $B_{k,\alpha} \cap S_k^{i,j} \ne \emptyset$, применим предложение 3.1.35. Получаем множество $\mathcal{I}_{k,\alpha} \subset \{1, ..., N\}$ и константу $c_{k,\alpha} \in \{1, ..., N+1\}$, для которых $c_{k,\alpha}B_{k,\alpha} \cap S^{i'} = \emptyset$ при всех $i' \in \{1, ..., N\} \setminus \mathcal{I}_{k,\alpha}$. Кроме того, для любого $i' \in \mathcal{I}_{k,\alpha}$ существует точка $x_{k,\alpha}(i') \in S^{i'}$ такая, что $B_k(x_{k,\alpha}(i')) \subset$

$c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}$. Без ограничения общности мы можем считать (в случае необходимости достаточно лишь увеличить константу $c_{k,\alpha}$ на 1), что $B_k(x) \subset c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}$ при всех $x \in S_k^{i,j} \cap B_{k,\alpha}$.

В силу замечания 3.1.20 и (2.1.3) имеем неравенство

$$\mathfrak{m}_k(S_k^{i,j} \cap B_{k,\alpha}) \leq C2^{k\theta}\mu(B_{k,\alpha}),$$

в котором константа $C > 0$ не зависит ни от k, ни α. Поэтому, используя предложение 2.3.1 и формулу (1.2.44) в комбинации с леммой 3.1.36 и неравенством Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{S_k^{i,j}\cap B_{k,\alpha}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \leq C2^{k\theta}\mu(B_{k,\alpha})\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, c_{k,\alpha}B_{k,\alpha})\Big)^p \\
&\leq C2^{k\theta}\mu(B_{k,\alpha})\Big[\sum_{i'\in\mathcal{I}_{k,\alpha}} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_{i'}}\lfloor_{S^{i'}}}(f, c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{i'})\Big)^p \\
&+ \sum_{\substack{i',j'\in\mathcal{I}_{k,\alpha}\\ i'\neq j'}} \fint\limits_{c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{i'}} \fint\limits_{c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{j'}} |f(y') - f(z')|^p \, d\mathcal{H}_{\theta_{i'}}(y') d\mathcal{H}_{\theta_{j'}}(z')\Big].
\end{aligned} \tag{3.1.58}$$

Шаг 3. Очевидно, что при $i' \in \mathcal{I}_{k,\alpha}$, $c_{k,\alpha}B_{k,\alpha} \subset B_{k-N-2}(x)$ для всех $x \in c_{k,\alpha}B_{k,\alpha} \cap S^{i'}$. Следовательно, из свойства равномерно локального удвоения μ и определения 1.2.92 (напомним, что $B_k(x) \subset c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}$ для всех $x \in B_{k,\alpha} \cap S^{i'}$) имеем

$$\begin{aligned}
&2^{k\theta}\mu(B_{k,\alpha}) \leq 2^{k\theta}\mu(B_{k-N-1}(x)) \leq C2^{k\theta}\mu(B_k(x)) \\
&\leq C2^{k(\theta-\theta_{i'})}\mathcal{H}_{\theta_{i'}}(B_k(x)\cap S^{i'}) \leq C2^{k(\theta-\theta_{i'})}\mathcal{H}_{\theta_{i'}}(c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{i'}).
\end{aligned}$$

Комбинируя вышеприведённые наблюдения с предложением 2.4.2 (мы применяем это предложение, заменяя $\mathfrak{m}_k$ на $2^{k(\theta-\theta_{i'})}\mathcal{H}_{\theta_{i'}}\lfloor_{S^{i'}}$), выводим для любого $k \geq N+2$ и любого индекса $i' \in \mathcal{I}_{k,\alpha}$ оценку

$$\begin{aligned}
&2^{k\theta}\mu(B_{k,\alpha})\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_{i'}}\lfloor_{S^{i'}}}(f, c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{i'})\Big)^p \\
&\leq C2^{k(\theta-\theta_{i'})} \int\limits_{c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{i'}} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_{i'}}\lfloor_{S^{i'}}}(f, B_{k-N-2}(x)\cap S^{i'})\Big)^p \, d\mathcal{H}_{\theta_{i'}}(x).
\end{aligned} \tag{3.1.59}$$

Из предложения 3.1.40 и формулы (3.1.39) следует, что при $i', j' \in \mathcal{I}_{k,\alpha}$ имеем

$$\frac{1}{\mu(B_{k,\alpha})} \leq C\,\mathrm{w}_{k-N-2}(y,z)$$

для любых $y \in c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{i'}$ и любых $z \in c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{j'}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&2^{k\theta}\mu(B_{k,\alpha}) \fint\limits_{c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{i'}} \fint\limits_{c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{j'}} |f(y) - f(z)|^p \, d\mathcal{H}_{\theta_{i'}}(y) d\mathcal{H}_{\theta_{j'}}(z) \\
&\leq C2^{k(\theta-\theta_{i'}-\theta_{j'})} \int\limits_{c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{i'}} \int\limits_{c_{k,\alpha}B_{k,\alpha}\cap S^{j'}} \mathrm{w}_{k-N-2}(y,z)|f(y) - f(z)|^p \, d\mathcal{H}_{\theta_{i'}}(y) d\mathcal{H}_{\theta_{j'}}(z).
\end{aligned} \tag{3.1.60}$$

Шаг 4. Если $k \geq N+3$, $\alpha \in \mathcal{A}_k(S)$ и $i', j' \in \mathcal{I}_{k,\alpha}$ таковы, что $B_{k,\alpha} \cap S_k^{i,j}$, то

$$c_{k,\alpha} B_{k,\alpha} \cap S^{i'} \times c_{k,\alpha} B_{k,\alpha} \cap S^{j'} \subset \Sigma_{k-N-2}^{i',j'}.$$

Держа в уме это наблюдение, скомбинируем (1.2.44), (3.1.59), (3.1.60) и учтём предложение 1.2.54. Для любого $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющего условию $k \geq N+3$, имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{S_k^{i,j}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k(S)} \int\limits_{S_k^{i,j} \cap B_{k,\alpha}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \\
&\leq C \sum_{i'=1}^{N} 2^{k(\theta - \theta_{i'})} \int\limits_{S^{i'}} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_{i'}} \lfloor_{S^{i'}}}(f, B_{k-N-2}(y))\Big)^p \, d\mathcal{H}_{\theta_{i'}}(y) \\
&+ C \sum_{i' \neq j'} 2^{k(\theta - \theta_{i'} - \theta_{j'})} \iint\limits_{\Sigma_{k-N-2}^{i',j'}} \mathrm{w}_{k-N-2}(y,z) |f(y) - f(z)|^p \, d\mathcal{H}_{\theta_{i'}}(y) d\mathcal{H}_{\theta_{j'}}(z).
\end{aligned}$$

В результате, используя (3.1.5) и (3.1.43), получим

$$\sum_{i \neq j} \sum_{k=N+3}^{\infty} 2^{k(p-\theta)} \int\limits_{S_k^{i,j}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \leq C\Big(\sum_{i=1}^{N} \|f\|^p_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)} + (\mathcal{GL}_p^{(1)}(f))^p\Big). \tag{3.1.61}$$

Шаг 5. Остаётся заметить, что в силу предложения 3.1.21 и леммы 2.2.27, имеем

$$\sum_{k=1}^{N+2} 2^{k(\theta-p)} \int\limits_{S} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_k(x))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(x) \leq C \sum_{i=1}^{N} \|f\|^p_{L_p(\mathcal{H}_{\theta_i} \lfloor_{S^i})}. \tag{3.1.62}$$

Шаг 6. Собирая (3.1.57), (3.1.61) и (3.1.62), выводим (3.1.55), завершая доказательство. □

Напомним снова определение функционала $\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}$, данное (2.2.18).

Теорема 3.1.63. *Для любого $\sigma \in (0, \sigma(S)]$ существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} \|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)} + \mathcal{GL}_p^{(3)}(f)\Big) \leq C \, \mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f) \quad \textit{при} \quad f \in L_p(\mathfrak{m}_0). \tag{3.1.64}$$

Доказательство. При $i, j \in \{1, ..., N\}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ скомбинируем лемму 3.1.29 (применяем её при $c = 2$ и $B = B_{k-1}(y)$) с предложением 3.1.42. Учитывая (3.1.19), получаем

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma_k^{i,j}} \mathrm{w}_k(y,z) (A_k^{i,j}(f)(y,z))^p \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) d\mathcal{H}_{\theta_j}(z) \leq C 2^{k\theta_j} \int\limits_{S_k^{i,j}} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_{k-1}(y))\Big)^p \, d\mathcal{H}_{\theta_i}(y) \\
&\leq C 2^{k(\theta_i + \theta_j - \theta)} \int\limits_{S^i} \Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f, B_{k-1}(y))\Big)^p \, d\mathfrak{m}_k(y).
\end{aligned}$$

Следовательно, используя (**M**4) из определения 2.1.1 и лемму 2.2.27 (при $L=0$), получим

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{GL}_p^{(3)}(f)\Big)^p &\le C\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(p-\theta)}\int\limits_S\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k-1}}(f,B_{k-1}(y))\Big)^p\,d\mathfrak{m}_{k-1}(y)\\ &\le C\Big(\mathrm{BN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\sigma}(f)\Big)^p.\end{aligned}\tag{3.1.65}$$

Наконец, комбинируя вышеприведённое неравенство с предложением 3.1.32, завершаем доказательство теоремы. □

Комбинируя теоремы 2.6.1, 2.6.6, 3.1.54, 3.1.63 с леммами 3.1.45, 3.1.47 и замечанием 3.1.44, мы немедленно получаем основной результат данного параграфа.

Следствие 3.1.66. *Функция $f\in\cap_{i=1}^N L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$ принадлежит пространству $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$ в том и только том случае, если $f\in\cap_{i=1}^N \mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$ и $\mathcal{GL}_p^{(l)}(f)<+\infty$ при некотором $l\in\{1,2,3\}$. Кроме того,*

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}}\approx\sum_{i=1}^N\|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_i}{p}}(S^i)}+\mathcal{GL}_p^{(l)}(f),\quad l\in\{1,2,3\},\tag{3.1.67}$$

где соответствующие константы эквивалентности не зависят от f.

Наконец, существует $\mathfrak{m}_0$-оператор продолжения

$$\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}}\in\mathcal{L}(W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0},W_p^1(\mathrm{X})).$$

3.1.4. **Сложный случай.** В этом параграфе мы рассмотрим более сложный случай. То есть *фиксируем* параметр $\underline{\theta}\in[0,\min\{p,\underline{Q}_\mu\})$, $\theta\in[\underline{\theta},p)$, и множество $S\in\mathcal{PADR}_\theta(\mathrm{X})$ такое, что $S=\cup_{i=1}^N S^i$ при некотором $N\in\mathbb{N}$, $N\ge 2$ и, кроме того,

$$S^i\in\mathcal{ADR}_{\theta_i}(\mathrm{X}),\quad 0=\theta_1<\ldots<\theta_N=\underline{\theta}<p.$$

Для простоты будем предполагать, что $N=2$ и, следовательно, $\theta_1=0$, а $\theta_2>0$. Случай $N>2$ не отличается по смыслу, но потребовал бы гораздо больших технических деталей, не относящихся к сути дела. В отличие от предыдущего параграфа в данном случае пространство следов будет комбинацией *"функциональных пространств различной природы"*. А именно, норма в пространстве следов будет составлена из слагаемого типа полунормы Соболева, слагаемого типа полунормы Бесова и соответствующего условия склейки. Помимо идеологического отличия от предыдущего параграфа, в этом случае мы должны преодолеть также и *техническую трудность*. Более точно, поскольку $\theta_1=0$, множество $S=S^1\cup S^2$ не обязано быть пористым.

При сделанных предположениях, очевидно, имеем

$$\mathfrak{m}_k=2^{k\theta}\mu\lfloor_{S^1}+2^{k(\theta-\theta_2)}\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2},\quad k\in\mathbb{N}_0.\tag{3.1.68}$$

Учитывая определение 1.2.92 и формулу (2.2.6), положим

$$f^{\sharp}_{\mu\lfloor_{S^1}}(x) := \sup_{r\in(0,2]} \mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f, B_r(x)), \quad x \in S^1. \tag{3.1.69}$$

Приведём без доказательства один комбинаторный результат, который является простой модификацией теоремы 2.6 из [111].

Предложение 3.1.70. *Пусть $c \geq 1$ и пусть $\mathcal{B}$ – (S^1, c)-семейство Уитни. Тогда существуют такие константы $C > 0$, $\tau \in (0,1)$ и такое семейство $\mathcal{U} := \{U(B) : B \in \mathcal{B}\}$ борелевских подмножеств S^1, что $U(B) \subset 2cB$, $\mu(U(B)) \geq \tau\mu(B)$ при всех $B \in \mathcal{B}$ и кратность покрытия семейства $\{U(B) : B \in \mathcal{B}\}$ ограничена сверху C.*

Первое полезное наблюдение даётся следующей леммой.

Лемма 3.1.71. *Для любого $c \geq 1$ существует константа $C > 0$ такая, что, если $\mathcal{F} := \{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^{\overline{N}}$ – (S^1, c)-хорошее семейство с условием $\max\{4cr_i : 1 \leq i \leq \overline{N}\} \leq 1$, то*

$$\sum_{i=1}^{\overline{N}} \frac{\mu(B_{r_i}(x_i))}{r_i^p} \Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f, B_{2cr_i}(x_i))\Big)^p \leq C \int\limits_{S^1} (f^{\sharp}_{\mu\lfloor_{S^1}})^p \, d\mu(x). \tag{3.1.72}$$

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}_1 := \{B \in \mathcal{F} : \frac{1}{2}B \cap S^1 \neq \emptyset\}$. Для заданного шара $B = B_r(\underline{x}) \in \mathcal{F}_1$ зафиксируем точку $x_B \in \frac{1}{2}B \cap S^1$. Очевидно, имеем следующие включения

$$B_{\frac{r}{2}}(x_B) \subset B \subset 2cB \subset B_{(2c+1)r}(x) \quad \text{при всех} \quad x \in B \cap S^1.$$

Используя эти включения, свойство равномерно локального удвоения меры μ и определение (1.2.92) (при $\theta = 0$), получаем

$$\mu(B \cap S^1) \leq \mu(B) \leq C\mu(B_{\frac{r}{2}}(x_B)) \leq C\mu(B_{\frac{r}{2}}(x_B) \cap S^1) \leq C\mu(B \cap S^1).$$

Следовательно, применяя предложение 2.3.1 при $\mathfrak{m}_k = 2^{k\theta}\mu\lfloor_{S^1}$, $k \in \mathbb{N}_0$, получим

$$\mu(B)\Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f, 2cB)\Big)^p \leq C\mu(B \cap S^1)\Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f, (2c+1)B_r(x))\Big)^p \quad \text{для всех} \quad x \in B \cap S^1.$$

В итоге, поскольку семейство $\mathcal{F}_1$ является дизъюнктным, получаем (мы учитываем (3.1.69))

$$\sum_{B\in\mathcal{F}_1} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f, 2cB)\Big)^p \leq C \sum_{B\in\mathcal{F}_1} \int\limits_{B\cap S^1} (f^{\sharp}_{\mu\lfloor_{S^1}}(x))^p \, d\mu(x) \leq C \int\limits_{S^1} (f^{\sharp}_{\mu\lfloor_{S^1}})^p \, d\mu(x). \tag{3.1.73}$$

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}_2 := \{\frac{1}{2}B : B \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{F}_1\}$. Очевидно, $\mathcal{F}_2$ является $(S^1, 2c)$-семейством Уитни. Используя предложение 2.3.1 при $\mathfrak{m}_k = 2^{k\theta}\mu\lfloor_{S^1}$ и, учитывая предложение 3.1.70, получим при каждом $B \in \mathcal{F}_2$,

$$\mu(B)\Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f, 4cB)\Big)^p \leq C\mu(U(2B))\Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f, 8cB_{r_B}(x))\Big)^p \quad \text{для всех} \quad x \in U(2B).$$

В силу предложения 3.1.70 для некоторой константы $C > 0$ имеем

$$\mathrm{MULT}(\{U(2B) : B \in \mathcal{F}_2\}) \le C.$$

Следовательно, используя предложение 1.2.38, будем иметь (мы учитываем (3.1.69))

$$\sum_{B\in\mathcal{F}_2} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f,4cB)\Big)^p \le C \sum_{B\in\mathcal{F}_2} \int\limits_{U(2B)} (f^\sharp_{\mu\lfloor_{S^1}})^p \, d\mu(x) \le C \int\limits_{S^1} (f^\sharp_{\mu\lfloor_{S^1}})^p \, d\mu(x). \tag{3.1.74}$$

Комбинируя (3.1.73) и (3.1.74), получаем требуемую оценку и завершаем доказательство. □

Второе полезное наблюдение заключено в следующей лемме.

Лемма 3.1.75. *Для любого $c \ge 1$ существует константа $C > 0$ такая, что, если $\mathcal{B} := \{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^{\overline{N}}$ – (S^2, c)-хорошее семейство, удовлетворяющее $\max\{8cr_i : 1 \le i \le \overline{N}\} \le 1$, то*

$$\sum_{i=1}^{\overline{N}} \frac{\mu(B_{r_i}(x_i))}{r_i^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f, B_{2cr_i}(x_i))\Big)^p \le C\|f\|^p_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_2}{p}}(S^2)}. \tag{3.1.76}$$

Доказательство. Легко видеть, что для заданного шара $B = B_{r_i}(x_i) \in \mathcal{B}$ существует шар $\widetilde{B}$ с таким же радиусом и центром в некоторой точке $\tilde{x}_i \in S^2$, для которого $\widetilde{B} \subset 2cB$. Кроме того, очевидно, что $2cB \subset B_{4cr_i}(x)$ для всех $x \in 2cB \cap S^2$. При $k \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\mathcal{B}(k) := \{B \in \mathcal{B} : r_B \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]\}.$$

Следовательно, используя определение 1.2.92, и, применяя предложение 2.4.2 при $\mathfrak{m}_k = 2^{k(\theta-\theta_2)}\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}$, легко видеть, что для любого шара $B \in \mathcal{B}(k)$,

$$\mu(B)\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,2cB)\Big)^p \le C2^{-k\theta_2}\mathcal{H}_{\theta_2}(2cB\cap S^2) \inf_{x\in 2cB\cap S^2}\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,4cB_k(x))\Big)^p. \tag{3.1.77}$$

Из определения 2.2.1 следует, что семейство $\mathcal{B}(k)$ является дизъюнктным. Поэтому, в силу предложения 1.2.54 кратность покрытия $\{2cB : B \in \mathcal{B}(k)\}$ ограничена некоторой константой $C > 0$, не зависящей от k. Следовательно, принимая во внимание предложение 1.2.38, выводим

$$\begin{aligned}
&\sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,2cB)\Big)^p \\
&\le C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(p-\theta_2)} \sum_{B\in\mathcal{B}(k)} \int\limits_{2cB\cap S^2} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,4cB_k(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_{\theta_2}(x). \\
&\le C \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0\\ \mathcal{B}(k)\neq\emptyset}} 2^{k(p-\theta_2)} \int\limits_{S^2} \Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,4cB_k(x))\Big)^p \, d\mathcal{H}_{\theta_2}(x).
\end{aligned} \tag{3.1.78}$$

По условию леммы $\max\{8cr_B : B \in \mathcal{B}\} \le 1$, поэтому, если $B \in \mathcal{B}(k)$, то $4c2^{-k} \le 1$. Таким образом, для любого $k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющего условию $\mathcal{B}(k) \neq \emptyset$, будем иметь $2^{-j(k)} \le 1$, где $j(k)$–наибольшее среди всех $j \in \mathbb{N}_0$, для которых $4c2^{-k} \le 2^{-j}$. Учитывая это наблюдение и предложение 2.3.1, мы продолжим оценку (3.1.78) и получим

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,2cB)\Big)^p \le C\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(p-\theta_2)} \int\limits_{S^2}\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,B_j(x))\Big)^p d\mathcal{H}_{\theta_2}(x). \tag{3.1.79}$$

В результате, принимая во внимание определение 3.1.3 и используя лемму 2.2.27 при $L = 0$ и $\{\mathfrak{m}_k\} = \{2^{k(\theta-\theta_2)}\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}\}$, получаем оценку (3.1.76).

Лемма доказана. □

Теперь мы готовы установить первый *основополагающий результат данного параграфа.*

Теорема 3.1.80. *Для любого $c \ge 1$ существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\mathcal{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) \le C\Big(\|f^{\sharp}_{\mu\lfloor_{S^1}}\|_{L_p(S^1,\mu)} + \|f\|_{L_p(S^1,\mu)} + \|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta}{p}}(S^2)} + \mathcal{GL}^{(3)}_p(f)\Big). \tag{3.1.81}$$

Доказательство. Пусть $\underline{k} \in \mathbb{N}$ – наименьший среди всех $k \in \mathbb{N}$, для которых $2^{-k} < 1/4c$. Пусть $\mathcal{B}$ – произвольное (S,c)-хорошее семейство замкнутых шаров. Определим вспомогательные семейства $\underline{\mathcal{B}} := \{B \in \mathcal{B} : r_B \ge 2^{-\underline{k}-1}\}$ и $\overline{\mathcal{B}} := \mathcal{B} \setminus \underline{\mathcal{B}}$. Положим также

$$\mathcal{B}^1 := \{B \in \overline{\mathcal{B}} : cB \cap S^2 = \emptyset\}, \quad \mathcal{B}^2 := \{B \in \overline{\mathcal{B}} : cB \cap S^1 = \emptyset\}. \tag{3.1.82}$$

Для любого $B \in \mathcal{B}$ положим $k(B) := k(r_B)$. Напомним важное обозначение (2.2.6).

Шаг 1. При $B \in \mathcal{B}^1$ имеем $\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,cB) = \mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f,2cB))$. В силу леммы 3.1.71 имеем

$$\sum_{B\in\mathcal{B}^1} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,cB)\Big)^p \le C\int\limits_{S^1}(f^{\sharp}_{\mu\lfloor_{S^1}})^p\, d\mu(x). \tag{3.1.83}$$

Шаг 2. При $B \in \mathcal{B}^2$ имеем $\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,cB) = \mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,2cB))$. Из леммы 3.1.75 получаем

$$\sum_{B\in\mathcal{B}^2} \frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathfrak{m}_{k(B)}}(f,cB)\Big)^p \le C\|f\,|\,\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_2}{p}}(S^2)\|^p. \tag{3.1.84}$$

Шаг 3. Положим $\mathcal{B}^3 := \overline{\mathcal{B}} \setminus (\mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2)$, то есть $B \in \mathcal{B}^3$ в том и только том случае, если $cB \cap S^1 \neq \emptyset$,$cB \cap S^2 \neq \emptyset$ и при этом $B \in \overline{\mathcal{B}}$. При каждом $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим семейства

$$\mathcal{B}^3(k) := \{B \in \mathcal{B}^3 : r_B \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]\}. \tag{3.1.85}$$

Заметим, что при $k \in \mathbb{N}_0$ для любого шара $B \in \mathcal{B}^3(k)$ существуют точки $x^1_k(B) \in S^1 \cap cB$ и $x^2_k(B) \in S^2 \cap cB$ такие, что

$$\frac{1}{2}B_k(x^i_k(B)) \subset 2cB \subset 3cB_k(x^i_k(B)), \quad i = 1,2. \tag{3.1.86}$$

Следовательно, применение леммы 3.1.36 (при $2c$ вместо c) даёт

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,2cB) &\le C\Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f,2cB)+\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,2cB)\\ &+\fint\limits_{2cB\cap S^1}\fint\limits_{2cB\cap S^2}|f(y')-f(z')|\,d\mu(y')d\mathcal{H}_{\theta_2}(z')\Big).\end{aligned}\tag{3.1.87}$$

Шаг 4. Ясно, что $\mathcal{B}^3$ является (S^1,c)-хорошим и (S^2,c)-хорошим семейством одновременно. Поэтому, из лемм 3.1.71, 3.1.75 следует, что

$$\begin{aligned}&\sum_{B\in\mathcal{B}^3}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big[\Big(\mathcal{E}_{\mu\lfloor_{S^1}}(f,2cB)\Big)^p+\Big(\mathcal{E}_{\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}}(f,2cB)\Big)^p\Big]\\ &\le C\Big[\int\limits_{S^1}(f^\sharp_{\mu\lfloor_{S^1}})^p\,d\mu(x)+\|f\|^p_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_2}{p}}(S^2)}\Big].\end{aligned}\tag{3.1.88}$$

Шаг 5. Фиксируем на время $k\ge\underline{k}$ и $B\in\mathcal{B}^3(k)$. Из предложения 3.1.40 и (3.1.39) имеем

$$(\mu(2cB))^{-1}\le C\,\mathrm{w}_{k-\underline{k}}(y,z)\quad\text{при}\quad(y,z)\in 2cB\times 2cB$$

В то же время, комбинируя определение 1.2.92 с включениями (3.1.86) и, принимая во внимание свойство равномерно локального удвоения меры μ вместе с замечанием 1.2.95, получим

$$\mu(2cB)\le C\mu(2cB\cap S^1),\quad \mu(B)2^{k\theta_2}\le C\mathcal{H}_{\theta_2}(2cB\cap S^2).$$

В результате выводим существование $C>0$ такой, что для всех пар $(y,z)\in 2cB\cap S^1\times 2cB\cap S^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}&\le C2^{kp}\mu(B)\frac{\mathcal{H}_{\theta_2}(2cB\cap S^2)}{\mathcal{H}_{\theta_2}(2cB\cap S^2)}\mu(2cB)\,\mathrm{w}_{k-\underline{k}}(y,z)\\ &\le C2^{k(p-\theta_2)}\mathcal{H}_{\theta_2}(2cB\cap S^2)\mu(2cB\cap S^1)\,\mathrm{w}_{k-\underline{k}}(y,z).\end{aligned}\tag{3.1.89}$$

Кроме того, используя свойство равномерно локального удвоения меры μ, замечание 1.2.95, и (3.1.85), легко видеть, что

$$\fint\limits_{2cB\cap S^1}\fint\limits_{2cB\cap S^2}|f(y')-f(z')|\,d\mu(y')d\mathcal{H}_{\theta_2}(z')\le C\inf A^{1,2}_{k-\underline{k}}(f)(y,z),\tag{3.1.90}$$

где инфимум взят по всем $(y,z)\in 2cB\cap S^1\times 2cB\cap S^2$.

Шаг 6. Из определения 2.2.1 следует, что при каждом $k\in\mathbb{N}_0$ семейство $\mathcal{B}(k)$ является дизъюнктным. Поэтому, в силу предложения 1.2.54 кратность покрытия $\{2cB: B\in\mathcal{B}(k)\}$ ограничена некоторой константой $C>0$, не зависящей от k. Используя этот факт вместе с (3.1.89), (3.1.90), и учитывая, что $2cB\cap S^1\times 2cB\cap S^2\subset\Sigma^{1,2}_{k-\underline{k}}$ при каждом $B\in\mathcal{B}^3(k)$, получим

$$\begin{aligned}&\sum_{k=\underline{k}+1}^{\infty}\sum_{B\in\mathcal{B}^3(k)}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\fint\limits_{2cB\cap S^1}\fint\limits_{2cB\cap S^2}|f(y)-f(z)|\,d\mu(y)d\mathcal{H}_{\theta_2}(z)\Big)^p\\ &\le C\sum_{k=\underline{k}+1}^{\infty}2^{k(p-\theta_2)}\iint\limits_{\Sigma^{1,2}_{k-\underline{k}}}\mathrm{w}_{k-\underline{k}}(y,z)(A^{1,2}_{k-\underline{k}}(f)(y,z))^p\,d\mu(y)d\mathcal{H}_{\theta_2}(z)\le C\Big(\mathcal{GL}^3_p(f)\Big)^p.\end{aligned}\tag{3.1.91}$$

Используя лемму 2.2.22 в комбинации с предложением 3.1.21, будем иметь

$$\sum_{B\in\underline{\mathcal{B}}}\frac{\mu(B)}{(r_B)^p}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,2cB)\Big)^p\le C\|f\|^p_{L_p(\mathfrak{m}_0)}\le C\Big(\|f\|^p_{L_p(S^1,\mu)}+\|f\|^p_{L_p(S^2,\mathcal{H}_{\theta_2})}\Big). \tag{3.1.92}$$

Шаг 7. По построению имеем $\mathcal{B}^3=\cup_{k=\underline{k}+1}^{\infty}\mathcal{B}^3(k)$. Поэтому, собирая вместе оценки (3.1.83), (3.1.84), (3.1.87), (3.1.88), (3.1.91), (3.1.92), приходим к (3.1.81) и завершаем доказательство. □

Для доказательства следующего результата напомним читателю, что в силу предложения 1.2.106, множество S^2 является $\sigma_2(S)$-пористым.

Теорема 3.1.93. *Существует константа $\underline{c}\ge 1$, зависящая от $\sigma_2(S)$ такая, что выполнено следующее. Для любого $c\ge\underline{c}$ существует константа $C>0$ такая, что*

$$\mathcal{GL}^{(3)}_p(f)\le C\mathcal{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f). \tag{3.1.94}$$

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов. При $k\in\mathbb{N}_0$ пусть $Z_k(S^2)$ – максимальное 2^{-k}-разделённое подмножество S^2, а $\mathcal{A}_k(S^2)$ соответствующее индексное множество, то есть $Z_k(S^2):=\{z_{k,\alpha}:\alpha\in\mathcal{A}_k(S^2)\}$.

Шаг 1. Рассуждая как при доказательстве теоремы 3.1.63, имеем

$$\Big(\mathcal{GL}^{(3)}_p(f)\Big)^p\le C\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(p-\theta)}\int\limits_{S^2}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,B_k(y))\Big)^p\,d\mathfrak{m}_k(y). \tag{3.1.95}$$

Шаг 2. Поскольку S^2 является $\sigma_2:=\sigma_2(S)$-пористым множеством, при $k\in\mathbb{N}_0$ для любого $\alpha\in\mathcal{A}_k(S^2)$ найдется шар $\widehat{B}_{k,\alpha}\subset B_{k,\alpha}\setminus S^2$ радиуса $r(\widehat{B}_{k,\alpha})\ge\sigma_2 r(B_{k,\alpha})$. Следовательно, $\frac{3}{\sigma_2}\widehat{B}_{k,\alpha}\supset B_k(y)$ для всех $y\in B_{k,\alpha}\cap S^2$. Это включение в комбинации с предложением 2.3.1 приводит к оценке

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,B_k(y))\le C\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(\frac{3}{\sigma_2}\widehat{B}_{k,\alpha},f)\quad\text{для всех}\quad y\in B_{k,\alpha}\cap S^2. \tag{3.1.96}$$

Шаг 3. Из свойства равномерного локального удвоения μ и (3.1.96) ясно, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{S^2}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,B_k(y))\Big)^p\,d\mathfrak{m}_k(y)&\le\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(S^2)}\int\limits_{B_{k,\alpha}\cap S^2}\Big(\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(f,B_k(y))\Big)^p\,d\mathfrak{m}_k(y)\\&\le C\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(S^2)}2^{k\theta}\mu(\widehat{B}_{k,\alpha})\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(\frac{3}{\sigma_2}\widehat{B}_{k,\alpha},f).\end{aligned} \tag{3.1.97}$$

Шаг 4. В силу леммы 2.3.9 существует константа $N_1\in\mathbb{N}_0$ такая, что при каждом $k\in\mathbb{N}$ семейтсво $\{\widehat{B}_{k,\alpha}:\alpha\in\mathcal{A}_k(S^2)\}$ может быть разбито на не более чем N_1 дизъюнктных подсемейств. Кроме того, так как $\operatorname{dist}(\frac{1}{2}\widehat{B}_{k,\alpha},S^2)\ge\frac{\sigma_2}{2}2^{-k}$, существует константа $N_2\in\mathbb{N}$, зависящая

только от σ_2 такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ и любого $\alpha \in \mathcal{A}_k(S^2)$, шар $\frac{1}{2}\widehat{B}_{k,\alpha}$ не пересекает любой шар $\frac{1}{2}\widehat{B}_{k+N_2,\beta}$, $\beta \in \mathcal{A}_{k+N_2}(S^2)$. В итоге существует $i \in \{1, ..., N_2\}$ и последовательность индексных множеств $\{\mathcal{J}_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что $\mathcal{J}_k \subset \mathcal{A}_{i+kN_2}$, $k \in \mathbb{N}$ и справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(p-\theta)} \sum_{\alpha\in\mathcal{A}_k(S^2)} 2^{k\theta}\mu(\widehat{B}_{k,\alpha})\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_k}(\frac{3}{\sigma_2}\widehat{B}_{k,\alpha}, f)\\ &\leq N_1N_2\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(i+kN_2)p}\sum_{\alpha\in\mathcal{J}_k}\mu(\widehat{B}_{i+kN_2,\alpha})\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{i+kN_2}}(\frac{3}{\sigma_2}\widehat{B}_{i+kN_2,\alpha}, f).\end{aligned} \tag{3.1.98}$$

Шаг 5. Учитывая, что семейство $\mathcal{B} := \{B_{i+kN_2,\alpha} : k \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathcal{J}_k\}$ дизъюнктно, комбинируя (3.1.95), (3.1.97), (3.1.98), и, полагая $\underline{c} = \frac{3}{\sigma_2}$, приходим к требуемой оценке. □

Главный результат этого параграфа состоит в следующем.

Следствие 3.1.99. *Функция $f \in \cap_{i=1}^2 L_p(\mathcal{H}_{\theta_i}\lfloor_{S^i})$ принадлежит пространству $W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}$ в том и только том случае, если $f \in \mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_2}{p}}(\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2})$, $f^\sharp_{\mu\lfloor_{S^1}} \in L_p(S,\mu)$ и $\mathcal{GL}_p^{(3)}(f) < +\infty$. Кроме того,*

$$\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}} \approx \|f\|_{L_p(S^1,\mu)} + \|f^\sharp_{\mu\lfloor_{S^1}}\|_{L_p(S^1,\mu)} + \|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_2}{p}}(S^2)} + \mathcal{GL}_p^{(3)}(f), \tag{3.1.100}$$

где константы эквивалентности не зависят от f.

Наконец, существует $\mathfrak{m}_0$-оператор продолжения

$$\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\}} \in \mathcal{L}(W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}, W_p^1(\mathrm{X})).$$

Доказательство. Применяя теорему 2.6.1 сперва для множества S^1 с последовательностью мер $\{\mathfrak{m}_k^1\} := \{2^{k\theta}\mu\}$, а затем для множества S^2 с последовательностью мер $\{\mathfrak{m}_k^2\} := \{2^{k(\theta-\theta_2)}\mathcal{H}_{\theta_2}\lfloor_{S^2}\}$, получим существование константы $C > 0$ такой, что

$$\|f\|_{L_p(S^1,\mu)} + \|f^\sharp_{\mu\lfloor_{S^1}}\|_{L_p(S^1,\mu)} + \|f\|_{\mathrm{B}_p^{1-\frac{\theta_2}{p}}(S^2)} \leq C\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S^{\mathfrak{m}_0}}.$$

Кроме того, ясно, что $\chi_{S^2}F|_S^{\mathfrak{m}_0} = F|_{S^2}^{\mathcal{H}_{\theta_2}}$ и $\chi_{S^1\setminus S^2}F|_S^{\mathfrak{m}_0} = \chi_{S^1\setminus S^2}F|_{S^1}^{\mu}$. Комбинируя вышеприведённые наблюдения с теоремами 3.1.80, 3.1.93, завершаем доказательство. □

3.1.5. **Заключительные замечания.** Следует отметить, что, наши результата, в частности, применимы в ситуации, когда $S = \cup_{i=1}^N S^i$ и $S^N \subset ... \subset S^1 = S$. Нестрого говоря, в этом случае мы характеризуем пространство следов пространства $W_p^1(\mathrm{X})$ на множестве S с "различной точностью" на различных кусках S. Удивительно, но такие случаи ранее в литературе не рассматривались.

Заметим также, что конкретная конструкция весов, данная в (3.1.38) не важна. В самом деле, во всех основных результатах данного параграфа можно использовать другие веса $\widetilde{\mathrm{w}}_k$.

Единственное требование состоит в том, что при $c \geq 1$ существует такая константа $C > 0$, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ неравенства

$$C^{-1}\widetilde{\mathrm{w}}_k(y,z) \leq \mathrm{w}_k(y,z) \leq C\widetilde{\mathrm{w}}_k(y,z)$$

справедливы при всех $(y,z) \in \mathrm{X}\times\mathrm{X}$, удовлетворяющих условию $\mathrm{d}(y,z) \leq c2^{-k}$. Например, для любого $k \in \mathbb{N}_0$, можно взять

$$\widetilde{\mathrm{w}}_k(y,z) := \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\mu(B_k(y))} + \frac{1}{\mu(B_k(z))}\Big), \quad (y,z) \in \mathrm{X}\times\mathrm{X}\,.$$

3.2. Следы пространств $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ на кривых

Цель данного параграфа – получить точное внутренне описание следов пространств $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ на спрямляемых кривых $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Мы будем иметь дело только с *простыми* (то есть без самопересечений) плоскими кривыми. Соответствующую теорию можно было бы развивать и для произвольных кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$. Однако, борьба с точками пересечения и большой размерностью ведёт к возникновению большого числа технических трудностей, преодоление которых затемняет суть дела.

Мы начнём с напоминания основ теории абсолютно непрерывных отображений и общей теории кривых, затем получим явные выражения для регулярных последовательностей мер, а потом упрощённый критерий на след пространства $W_p^1(\mathbb{R}^2)$ на заданной кривой.

3.2.1. **Абсолютно непрерывные отображения.** Пусть $\mathrm{X} = (\mathrm{X},\mathrm{d})$ – метрическое пространство. Напомним, что отображение $\gamma : [a,b] \to \mathrm{X}$ называется *абсолютно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{d}(\gamma(a_i),\gamma(b_i)) < \varepsilon$$

для всякого конечного набора попарно непересекающихся интервалов $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^k$, удовлетворяющих условиям $(a_i,b_i) \subset [a,b]$, $i = 1,...,k$ и $\sum_{i=1}^k |b_i - a_i| < \delta$.

Для заданного измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ будем говорить, что отображение $f\colon E \to \mathbb{R}$ обладает *N-свойством Лузина*, если для любого множества $E_0 \subset E$ лебеговой меры нуль образ $f(E_0)$ тоже имеет лебегову меру нуль. Мы часто будем использовать знаменитый результат Банаха–Зарецкого.

Предложение 3.2.1. *Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной в том и только том случае, если она непрерывна на $[a,b]$, имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$ и обладает N-свойством Лузина.*

Следующее предложение будет для нас ключевым. Оно является вариантом так называемой "формулы площади", хорошо известной в геометрической теории меры. В действительности, это предложение – частный случай теоремы 12 работы [67] (см. также теорему 4.3.3 в [88], где необходимо сделать минимальные технические исправления), поскольку каждое абсолютно непрерывное отображение $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принадлежит $W_1^{1,loc}(\mathbb{R})$ и в силу предложения 3.2.1 обладает N-свойством Лузина.

Предложение 3.2.2. *Пусть* $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– абсолютно непрерывное отображение. Пусть* $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ *– измеримая функция. Тогда для любого измеримого множества* $E \subset \mathbb{R}$

$$\int\limits_E g(x)|\Phi'(x)|\,dx = \int\limits_{\Phi(E)} \sum_{x\in\Phi^{-1}(y)\cap E} g(x)\,dy = \int\limits_{\Phi(E)} \left(\int_{\Phi^{-1}(y)\cap E} g(x)\,d\mathcal{H}^0(x) \right) dy. \tag{3.2.3}$$

3.2.2. **Спрямляемые кривые в $\mathbb{R}^n$.** Символом $\mathbb{R}^n$ в этом параграфе будем обозначать линейное вещественное евклидово пространство строк $x = (x_1, ..., x_n)$. Иногда мы будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как вещественное векторное пространство, снабжённое равномерной нормой, то есть $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$. Такие случаи будут ясны из контекста. При этом мы время от времени будем использовать факт эквивалентности различных норм в конечномерных линейных пространствах, не оговаривая это особо.

Замкнутый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r \geq 0$ в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ будем обозначать через $B_r(x)$, а замкнутый шар с тем же центром и тем же радиусом в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ будем обозначать через $Q_r(x)$ (поскольку это куб с ребрами параллельными координатным осям с длиной ребра $2r$).

Под *кривой в* $\mathbb{R}^n$ мы всегда понимаем образ Γ некоторого непрерывного отображения $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, то есть $\Gamma = \gamma([a, b])$. Отображение γ называется *параметризацией кривой* Γ. Отметим, что всякий раз, когда мы будем иметь дело с кривой, мы будем рассматривать её вместе с параметризацией, а не просто как множество точек. Если $[a', b'] \subset [a, b]$, то сужение отображения γ на $[a', b']$ называется подкривой и обозначается $\gamma|_{[a',b']}$.

Скажем, что Γ – *простая кривая*, если отображение γ инъективно. Скажем, что Γ – *спрямляемая кривая*, если длина кривой

$$l(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_\infty < \infty, \tag{3.2.4}$$

где супремум взят по всем конечным наборам $\{t_i\}_{i=0}^n$ таким, что $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Соответствующая функция *длины дуги* s_γ определяется равенством

$$s_\gamma(t) := l(\gamma|_{[a,a+t]}), \quad t \in [a, b].$$

Свойства, приведённые в следующем предложении, вытекают из результатов главы 5 книги [71] в комбинации с замечанием 1.2.81.

Предложение 3.2.5. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *– спрямляемая кривая и пусть* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *её параметризация. Тогда кривая* Γ *допускает параметризацию переменной длиной дуги. Более точно, существует* 1*-липшицево отображение* $\gamma_s\colon [0, l(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$*, определяемое формулой*

$$\gamma_s(\tau) := \gamma(s_\gamma^{-1}(\tau)), \tag{3.2.6}$$

где

$$s_\gamma^{-1}(\tau) := \sup\{s\colon s_\gamma(s) = \tau\}. \tag{3.2.7}$$

Более того, при $\mathcal{H}^1$*-п.в.* $t \in [0, l(\gamma)]$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{u\to t\\ u\neq t}} \frac{\|\gamma_s(t) - \gamma_s(u)\|_\infty}{|t-u|} = 1. \tag{3.2.8}$$

Если кривая Γ *является простой, то*

$$\frac{l(\gamma)}{2} \leq \mathcal{H}^1(\Gamma) \leq 1. \tag{3.2.9}$$

Замечание 3.2.10. Если рассматривать лишь простые кривые Γ, то длина кривой однозначно определятся соответствующим множеством точек $\Gamma = \gamma([a,b])$. Поэтому в случае простой спрямляемой кривой мы будем использовать всюду далее символ $l(\Gamma)$ вместо $l(\gamma)$ для обозначения длины кривой.

Следующее утверждение проясняет локальное поведение меры $\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma$. Доказательство этого утверждения получается комбинацией леммы 3.5 монографии [44] и замечания 1.2.81.

Предложение 3.2.11. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *– спрямляемая кривая. Тогда неравенства*

$$1 \leq \underline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma(Q(x,r))}{2r} \leq \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma(Q(x,r))}{2r} \leq 2. \tag{3.2.12}$$

справедливо при $\mathcal{H}^1$*-почти всех* $x \in \Gamma$.

Очевидно, можно было бы предполагать всюду далее, что произвольная кривая Γ параметризована 1-липшицевым отображением (например, своей переменной длиной дуги). Однако, как будет ясно в дальнейшем, полезно иметь некоторую свободу в выборе параметризаций. Этот факт оправдывает введение следующего определения.

Определение 3.2.13. Для заданной простой кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ скажем, что отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ является *допустимой параметризацией кривой* Γ, если выполнены следующие условия:

(1) отображение γ абсолютно непрерывно и инъективно;

(2) $\|\dot\gamma(t)\|_\infty > 0$ при $\mathcal{H}^1$-п.в. $t \in [a,b]$.

Замечание 3.2.14. В силу предложения 3.2.5, для заданной простой спрямляемой кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ положительной длины параметризация переменной длиной дуги является допустимой. Действительно, так как параметризация γ_s является липшицевой, то она будет и абсолютно непрерывной. Инъективность переменной длины дуги вытекает из того, что кривая не имеет самопересечений. Условие (2) определения 3.2.13 удовлетворено в силу (3.2.8).

При $i = 1, \dots, n$ обозначим символом Π_i *отображение проекции* вдоль i-ой координатной оси, то есть, если $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $\Pi_i(x) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Иногда будем использовать сокращение $\widehat{x}^i := \Pi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. Если $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – параметризация кривой Γ, то символом γ_i, $i = 1, \dots, n$ обозначим её i-ую компоненту. Аналогично, если при некотором $t_0 \in [a,b]$ существует вектор скорости

$$\dot\gamma(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.15}$$

то при $i = 1, \dots, n$ через $\dot\gamma_i(t_0)$ обозначим соответствующую компоненту вектора $\dot\gamma(t_0)$.

Определение 3.2.16. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ – простая спрямляемая кривая и пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – допустимая параметризация Γ. При $i \in \{1, \dots, n\}$ отождествим $\mathbb{R}^{n-1}$ с гиперплоскостью, ортогональной i-ой координатной оси и определим

$$\mathcal{L}_i[\Gamma](x') := \Pi_i^{-1}(x') \cap \Gamma, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.2.17}$$

Иными словами, $\mathcal{L}_i[\Gamma](x')$ – это пересечение прямой, проходящей через x' параллельно i-ой координатной оси с кривой Γ. Определим индикатрисы Банаха кривой Γ равенствами

$$N_i[\Gamma](x') := \#\mathcal{L}_i[\Gamma](x') = \#\{t \in [a,b] \mid t = (\Pi_i \circ \gamma)^{-1}(x')\}, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.2.18}$$

Замечание 3.2.19. Из теоремы 4.3.2 книги [88] следует, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция $N_i[\Gamma] \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n-1})$. Следовательно, $N_i[\Gamma](x') \in \mathbb{N}_0$ при каждом $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\mathcal{L}^{n-1}$-почти всех $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Кроме того, анализ доказательства леммы 4.1.4 из [88] позволяет установить, что $N_i[\Gamma]$, $i = 1, ..., n$ – борелевские функции.

3.2.3. **Конструкция специальных 1-регулярных последовательностей мер.** Напомним, что каждое линейно связное множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее по крайней мере две различные точки, является 1-толстым и, соответственно, $(n-1)$-котолстым. В частности, каждая

кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ длины $l(\Gamma) > 0$ является 1-толстым и 1-котолстым множеством одновременно. Следовательно, существует 1-корегулярная последовательность мер, сконцентрированных на Γ. Цель данного параграфа – предъявить для *любой простой спрямляемой кривой* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *положительной длины*, явную конструкцию 1-корегулярной последовательности мер, сконцентрированных на Γ. Мы назовем такую последовательность *специальной* 1-*корегулярной последовательностью мер* и будем обозначать её символом $\{\mu_k[\Gamma]\}$.

Для начала кратко опишем основную идею построения. Без ограничения общности мы будем предполагать, что $\Gamma \subset [0,1)^2$. В силу замечания 3.2.19 при каждом $i = 1, 2$ пересечения заданной спрямляемой кривой Γ с почти всеми прямыми L_i, параллельными i-ой координатной оси состоят из не более чем конечного числа различных точек. Следовательно, мы можем легко построить специальным образом 2-корегулярную последовательность мер, сконцентрированную на каждом таком конечном множестве. После этого, выбрав допустимую параметризацию $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ кривой Γ и, применяя предложение 3.2.2, мы легко получим 1-корегулярную последовательность мер, сконцентрированных на Γ.

Пусть $I_0 := [0,1)$ – полуоткрытый единичный интервал. При $k \in \mathbb{N}_0$ пусть $\mathcal{D}_k$ обозначает семейство всех двоичных полуоткрытых интервалов длины 2^{-k}, содержащихся в I_0, то есть

$$\mathcal{D}_k := \left\{ I_{k,m} := \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right),\ m = 0, \dots, 2^k - 1 \right\}.$$

Определение 3.2.20. Для заданного множества различных точек $\{x_i\}_{i=0}^N \subset I_0$, $N \in \mathbb{N}_0$, пусть $\mathrm{P}(\{x_i\}_{i=0}^N)$ – множество всех *вероятностных мер*, носители которых совпадают с множеством $\{x_i\}_{i=0}^N$. Иными словами, $\nu \in \mathrm{P}(\{x_i\}_{i=0}^N)$ в том и только том случае, если существует *плотность* $\alpha\colon \{x_i\}_{i=0}^N \to [0,1]$, удовлетворяющая равенству $\sum_{i=0}^N \alpha(x_i) = 1$, для которой

$$\nu = \sum_{i=0}^{N} \alpha(x_i)\delta_{x_i}, \tag{3.2.21}$$

где $\delta_{x_i}, i = 0, \dots, N$ – меры Дирака, сосредоточенные в точках x_i, $i = 0, \dots, N$.

Определение 3.2.22. Пусть $\{x_i\}_{i=0}^N \subset I_0$, $N \in \mathbb{N}$ – произвольное конечное множество различных точек. Пусть $k^* := k^*(\{x_i\}_{i=0}^N)$ – наименьшее среди всех $k \in \mathbb{N}_0$, для каждого из которых, отображение, ставящее в соответствие каждой точке x_i единственный двоичный интервал $I_{k,m}(x_i) \ni x_i$, является инъективным. Для любого $k \geq k^*$ определим *семейство*

$$\mathcal{F}_k(\{x_i\}_{i=0}^N) := \left\{ I_{k,m}\colon I_{k,m} \cap \{x_i\}_{i=0}^N \neq \emptyset \right\}. \tag{3.2.23}$$

При каждом $i \in \{0, \dots, N\}$ для любого $k \geq k^*(\{x_i\}_{i=0}^N)$ обозначим символом $I_{k,m}(x_i)$ единственный двоичный интервал из семейтсва $\mathcal{F}_k(\{x_i\}_{i=0}^N)$, содержащий x_i.

Для заданного дерева $\mathcal{T}$ с корнем r, введём внутреннюю метрику ρ на $\mathcal{T}$ и получим так называемое *метрическое дерево* $(\mathcal{T}, \rho)$. Более точно, для заданных двух вершин $\xi, \xi' \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$, соединённых ребром e положим $\rho(\xi, \xi') = 1$. Для произвольных вершин $\xi, \xi' \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ положим по определению $\rho(\xi, \xi') = \inf \sum_i \rho(\xi_i, \xi_{i-1})$, где инфимум взят по всем путям $\xi =: \xi_0 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \xi_l := \xi'$ таким, что ξ_i и ξ_{i+1} соединены единственным ребром e_i при всех $i \in \{0, ..., l-1\}$. При $i \in \mathbb{N}_0$, пусть $\mathcal{V}^i(\mathcal{T}) := \{\xi \in \mathcal{T} \colon \rho(r, \xi) = i\}$. Если $\mathcal{V}^{i+1}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$, то для любой вершины $\xi \in \mathcal{V}^i(\mathcal{T})$ обозначим через $n(\xi)$ число ребер, соединяющих ξ с соответствующими "вершинами-детьми" из $\mathcal{V}^{i+1}(\mathcal{T})$.

Определение 3.2.24. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$. Для заданного непустого семейства двоичных интервалов $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{D}_k$ определим дерево $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F}_k)$ как метрическое дерево, вершины которого $\mathcal{V}^i(\mathcal{T})$, $i = 0, \ldots, k$, естественно соответствуют тем двоичным интервалам в $\mathcal{D}_i$, каждый из которых содержит по меньшей мере один интервал из семейства $\mathcal{F}_k$.

Определение 3.2.25. Пусть $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{D}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ – произвольное непустое семейство двоичных интервалов. При каждом $j \in \mathbb{N}_0$ и любом $I \in \mathcal{F}_k$ определим *вес Фростмана*, полагая

$$\alpha_F^j[\mathcal{F}_k](I) := \begin{cases} \prod\limits_{l=j}^{k-1} \frac{1}{n(\xi_l(I))} & \text{при } j \in \{0, \ldots, k-1\}, \\ 1 & \text{при } j > k-1, \end{cases} \tag{3.2.26}$$

где при каждом $j \in \{0, \ldots, k\}$ через $\xi_j(I) \in \mathcal{V}^j(\mathcal{T})$ обозначена единственная вершина, соответствующая единственному двоичному интервалу $\mathcal{D}_j$, содержащему интервал I и $r =: \xi_0(I) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \xi_k(I) := \xi(I)$ – единственный путь, соединяющий корень r с вершиной $\xi(I)$. Для конечного множества $\{x_i\}_{i=0}^N$, $N \in \mathbb{N}$ попарно различных точек определим *вес Фростмана*, полагая

$$\alpha_F^j[\{x_i\}_{i=0}^N](x_i) := \alpha_F^j[\mathcal{F}_k(\{x_i\}_{i=0}^N)](I_{k,m}(x_i)), \quad k \geq k^*(\{x_i\}_{i=0}^N). \tag{3.2.27}$$

Определение 3.2.28. Для конечного множества $\{x_i\}_{i=0}^N \subset I_0$, $N \in \mathbb{N}$ различных точек определим при каждом $j \in \mathbb{N}_0$ *меру типа Фростмана* $\nu_F^j[\{x_i\}_{i=0}^N]$, полагая

$$\nu_F^j[\{x_i\}_{i=0}^N] := \sum_{i=0}^N \alpha_F^j[\{x_i\}_{i=0}^N](x_i)\delta_{x_i}. \tag{3.2.29}$$

Замечание 3.2.30. Из определения k^* следует, что определения 3.2.25 и 3.2.28 корректны. В самом деле, при $k \geq k^*$ для любой пары интервалов $I \in \mathcal{F}_k(\{x_i\}_{i=0}^N)$, $J \in \mathcal{F}_{k^*}(\{x_i\}_{i=0}^N)$, удовлетворяющих условию $I \subset J$, справедливо равенство

$$\alpha_F^j[\mathcal{F}_k(\{x_i\}_{i=0}^N)](I) = \alpha_F^j[\mathcal{F}_{k^*}(\{x_i\}_{i=0}^N)](J).$$

Следующая лемма отражает базовые свойства весов Фростмана.

Лемма 3.2.31. *Пусть $\{x_i\}_{i=0}^N \subset I_0$, $N \in \mathbb{N}_0$, – конечное множество различных точек. Тогда, при каждом $j \in \mathbb{N}_0$ справедливы следующие свойства:*

(1) для любого двоичного интервала $I_{j,m}$, $m \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$

$$\nu_F^j[\{x_i\}_{i=0}^N](I_{j,m}) = \begin{cases} 1, & \{x_i\}_{i=0}^N \cap I_{j,m} \neq \emptyset; \\ 0, & \{x_i\}_{i=0}^N \cap I_{j,m} = \emptyset; \end{cases} \tag{3.2.32}$$

(2) при каждом $i \in \{0, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} &\textit{либо} \quad \alpha_F^j[\{x_i\}_{i=0}^N](x_i) = \alpha_F^{j+1}[\{x_i\}_{i=0}^N](x_i), \\ &\textit{либо} \quad \alpha_F^j[\{x_i\}_{i=0}^N](x_i) = 2^{-1}\alpha_F^{j+1}[\{x_i\}_{i=0}^N](x_i). \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Доказательство. При $j \geq k^*$, очевидно, справедливо первое равенство в (3.2.33). Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F}_{k^*}(\{x_i\}_{i=0}^N))$ – соответствующее метрическое дерево. Заметим, что в случае $j < k^*$ равенства (3.2.33) следуют непосредственно из (3.2.26), поскольку для любых $\xi \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ мы имеем либо $n(\xi) = 1$, либо $n(\xi) = 2$.

Для доказательства (3.2.32) рассуждаем по индукции. При $j \geq k^*$ доказательство очевидно. Предположим, что $k^* > 1$ и пусть (3.2.32) доказано при некотором $j_0 \in \{1, \dots, k^*\}$. Тогда из (3.2.33) легко заключить справедливость (3.2.32) при $j_0 - 1$, используя те же аргументы, что и выше. □

Замечание 3.2.34. Заметим, что для произвольного множества $\{x_i\}_{i=0}^N \subset I_0$, $N \in \mathbb{N}$, состоящего из попарно различных точек, для всякого $j \in \mathbb{N}_0$ и интервала $I_{j,m}$, удовлетворяющего условию $I_{j,m} \cap \{x_i\}_{i=0}^N \neq \emptyset$, имеем

$$\nu_F^j \lfloor_{I_{j,m}} \in \mathrm{P}(I_{j,m} \cap \{x_i\}_{i=0}^N).$$

Заметим, что, если $N \geq 2$, $j \geq k^*$, то $\nu_F^j(I_0) = N$. Поэтому $\nu_F^j \notin \mathrm{P}(\{x_i\}_{i=0}^N)$.

Напомним определение 3.2.16 и положим $\widehat{\gamma}^i(t) := \Pi_i(\gamma(t))$.

Определение 3.2.35. Пусть $\Gamma \subset [0,1)^2$ – простая спрямляемая кривая положительной длины. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ – допустимая параметризация Γ. При $j \in \mathbb{N}_0$ и $i = 1, 2$ положим для каждого $t \in [a,b]$

$$\mathcal{W}_i^j[\gamma](t) := \begin{cases} \alpha_F^j[\mathcal{L}_i[\Gamma](\widehat{\gamma}^i(t))](\gamma_i(t)), & \text{если } N_i[\Gamma](\widehat{\gamma}^i(t)) < \infty; \\ 0, & \text{если } N_i[\Gamma](\widehat{\gamma}^i(t)) = \infty. \end{cases} \tag{3.2.36}$$

При $j \in \mathbb{N}_0$ определим также *специальную плотность* равенством

$$\mathrm{D}^j[\gamma](t) := \max\{\mathcal{W}_2^j[\gamma](t)|\dot\gamma_1(t)|, \mathcal{W}_1^j[\gamma](t)|\dot\gamma_2(t)|\}, \quad t \in [a,b]. \tag{3.2.37}$$

Замечание 3.2.38. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ и $\gamma'\colon [a',b'] \to \mathbb{R}^2$ – две допустимые параметризации Γ. Предположим, что $\gamma(t) = \gamma'(t'(t))$ для некоторой строго возрастающей абсолютно непрерывной функции $t'\colon [a,b] \to [a',b']$. Тогда легко видеть, что $\mathcal{W}_i^j[\gamma](t) = \mathcal{W}_i^j[\gamma'](t'(t))$ при $i = 1,2$ для любого $j \in \mathbb{N}_0$ и всех $t \in [a,b]$.

Предложение 3.2.39. *Пусть $\Gamma \subset [0,1)^2$ – простая спрямляемая кривая положительной длины. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ – допустимая параметризация Γ. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}_0$ функции $\mathcal{W}_i^j[\gamma]$, $i = 1,2$ и $\mathrm{D}^j[\gamma]$ измеримы.*

Доказательство. Покажем, что функции $\mathcal{W}_1^j[\gamma]$, $j \in \mathbb{N}_0$ измеримы. Доказательство измеримости функций $\mathcal{W}_2^j[\gamma]$, $j \in \mathbb{N}_0$ основано на аналогичных рассуждениях. Проверим сначала, что $\mathcal{W}_1^0[\gamma]$ – измеримая функция.

Фиксируем число $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{D}_k$ – произвольное непустое семейство двоичных интервалов. положим по определению

$$F_k := \bigcup_{I_{k,m} \in \mathcal{F}_k} I_{k,m}, \quad \widetilde{E}(F_k) := \gamma_2(\gamma_1^{-1}(F_k)) \setminus \gamma_2([a,b] \setminus \gamma_1^{-1}(F_k)).$$

Другими словами, $\widetilde{E}(F_k)$ – множество всех $x_2 \in \Pi_1(\Gamma)$, для которых $\mathcal{L}_1[\Gamma](x_2) \subset F_k$. Множество $\gamma_1^{-1}(F_k)$ является борелевским. Поскольку γ_2 – непрерывная функция, отсюда следует, что $\widetilde{E}(F_k)$ является разностью двух суслинских множеств, а значит является универсально измеримым множеством. Пусть теперь (в формуле ниже $F_k' = \cup\{I_{k,m} : I_{k,m} \in \mathcal{F}_k'\}$)

$$E(F_k) := \widetilde{E}(F_k) \setminus \bigcup_{\substack{F_k' \subset F_k \\ F_k' \neq F_k}} \widetilde{E}(F_k'), \quad G(F_k) := \gamma_2^{-1}(E(F_k)).$$

Неформально говоря, $E(F_k)$ – это множество всех таких точек на второй координатной оси, что прямая, проходящая через любую из них и параллельная первой координатной оси, пересекает кривую Γ во множестве точек, которое будучи спроектированным на первую координатную ось, имеет непустое пересечение с любым интервалом из семейства $\mathcal{F}_k$ и имеет пустое пересечение с другими интервалами из семейства $\mathcal{D}_k$.

Очевидно, $E(F_k)$ и $G(F_k)$ являются универсально измеримыми множествами. Положим

$$\mathcal{W}_{k,1}[\gamma](t) := \alpha_F[\mathcal{F}_k](I_{k,m}), \quad \text{если } t \in \gamma_1^{-1}(I_{k,m}) \cap G(F_k). \tag{3.2.40}$$

Так как для различных семейств $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{F}'_k$ множества $G(F_k)$ и $G(F'_k)$ не пересекаются, и, поскольку

$$[a,b] = \bigcup_{\mathcal{F}_k} G(F_k),$$

функция $\mathcal{W}_{k,1}[\gamma]$ корректно определена всюду на $[a,b]$ и измерима.

Из замечания 3.2.19 вытекает, что множество $\mathcal{G}$, где $N_1[\Gamma] = +\infty$ имеет меру $\mathcal{H}^1(\mathcal{G}) = 0$. Так как $N_1[\Gamma]$ – борелевская функция, множество $\mathcal{G}$ является борелевским. Следовательно, множество $\gamma_2^{-1}(\mathcal{G})$ является борелевским. В итоге, по самому определению множеств $E(F_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ и $\mathcal{G}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{W}_{k,1}[\gamma](t) = \mathcal{W}_1^0[\gamma](t) \quad \text{для всех } t \in [a,b] \setminus \gamma_2^{-1}(\mathcal{G}).$$

Отсюда следует, что функция $\mathcal{W}_1^0[\gamma]$ измерима. Заметим, что образ функции $\mathcal{W}_1^0[\gamma]$ не более чем счётен. Используя этот факт в комбинации с измеримостью функции $\mathcal{W}_1^0[\gamma]$ и (3.2.26), (3.2.27), (3.2.33), (3.2.36), легко выводим измеримость $\mathcal{W}_1^j[\gamma]$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Наконец, для проверки измеримости $\mathrm{D}^j[\gamma]$ достаточно воспользоваться доказанной измеримостью $\mathcal{W}_i^j$ и учесть условие (1) определения 3.2.13. Доказательство завершено. □

Теперь дадим ключевое определение. Напомним определение 1.2.23 и замечание 1.2.25.

Определение 3.2.41. Пусть $\Gamma \subset [0,1)^2$ – простая спрямляемая кривая положительной длины, а $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ – допустимая параметризация Γ. Назовем последовательность мер $\{\mu_k[\Gamma]\} := \{\mu_k[\Gamma]\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ *специальной* 1*-корегулярной последовательностью мер на* Γ, если

$$\mu_k[\Gamma] := \gamma_\sharp(\mathrm{D}^k[\gamma]\mathcal{L}^1\lfloor_{[a,b]}) \quad \text{при каждом } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2.42}$$

Мы покажем, что меры $\mu_k[\Gamma]$, $k \in \mathbb{N}_0$ корректно определены. Для этой цели мы напомним один факт из классической теории функций, который, возможно, относится к фольклору. Поскольку весьма сложно дать точную ссылку на литературу, мы приведем подробное несложное доказательство.

Предложение 3.2.43. *Пусть* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $[A,B] \subset \mathbb{R}$ *и пусть* $g\colon [a,b] \to [A,B]$ *– абсолютно непрерывная функция. Предположим, что*

$$\frac{dg}{dt}(t) > 0 \quad \textit{при } \mathcal{L}^1\textit{-п.в. } t \in [a,b]. \tag{3.2.44}$$

Тогда обратное отображение $g^{-1}\colon [A,B] \to [a,b]$ *также абсолютно непрерывно.*

Доказательство. Из (3.2.44) следует, что функция $g\colon [a,b] \to [A,B]$ строго возрастает. Следовательно, существует обратная функция $g^{-1}\colon [A,B] \to [a,b]$, которая также строго возрастает и непрерывна. Следовательно, чтобы установить абсолютную непрерывность функции $g^{-1}\colon [A,B] \to [a,b]$, достаточно показать, что справедливо свойство Лузина. Предположим противное. Тогда существует множество $E \subset [A,B]$ с мерой $\mathcal{L}^1(E) = 0$ такое, что $\mathcal{H}^1(g^{-1}(E)) > 0$. Комбинируя это с (3.2.44), получим

$$r_0 := \int\limits_{g^{-1}(E)} \frac{dg}{dt}(t)\,dt > 0. \tag{3.2.45}$$

Пусть $\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность непустых интервалов такая, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i,B_i)$. Поскольку g^{-1} строго возрастает, имеем последовательность непустых интервалов $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что $(a_i,b_i) := g^{-1}((A_i,B_i))$ при $i \in \mathbb{N}$. Очевидно, $g^{-1}(E) \subset \cup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$. Так как g абсолютно непрерывна, мы применим формулу Ньютона–Лейбница и учтём (3.2.45). В итогу будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_i - B_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{a_i}^{b_i} \frac{dg}{dt}(t)\,dt \geq r_0. \tag{3.2.46}$$

Последовательность $\{(A_i,B_i)\}_{i=1}^{\infty}$ была выбрана произвольно. Следовательно из (3.2.46) и определения меры $\mathcal{H}^1$ заключаем, что $\mathcal{H}^1(E) \geq r_0/2 > 0$. Поэтому $\mathcal{L}^1(E) \geq r_0 > 0$. Это противоречие завершает доказательство теоремы. □

Предложение 3.2.47. *Пусть $\Gamma \subset [0,1)^2$ – простая спрямляемая кривая положительной длины. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ и $\gamma'\colon [a',b'] \to \mathbb{R}^2$ – допустимые параметризации кривой Γ. Тогда справедливо равенство*

$$\gamma_\sharp(\mathrm{D}^k[\gamma]\mathcal{L}^1\lfloor_{[a,b]}) = \gamma'_\sharp(\mathrm{D}^k[\gamma']\mathcal{L}^1\lfloor_{[a',b']}). \tag{3.2.48}$$

Доказательство. Из того, что параметризации γ и γ' допустимы, следует, что соответствующие функции длины дуги s_γ и $s_{\gamma'}$ абсолютно непрерывны и строго возрастают. Кроме того,

$$\begin{aligned} \dot{s}_\gamma(t) &= \|\dot{\gamma}(t)\| > 0 \quad \text{при } \mathcal{L}^1\text{-п.в. } t \in [a,b]; \\ \dot{s}_{\gamma'}(t') &= \|\dot{\gamma}'(t')\| > 0 \quad \text{при } \mathcal{L}^1\text{-п.в. } t' \in [a',b']. \end{aligned} \tag{3.2.49}$$

Следовательно, существуют непрерывные строго возрастающие функции $t = t(s) = s_\gamma^{-1}(s)$ и $t' = t'(s) = s_{\gamma'}^{-1}(s)$. Положим $t'(t) := s_{\gamma'}^{-1}(s_\gamma(t))$ для всех $t \in [a,b]$. Отметим, что

$$\frac{dt'}{dt}(t) > 0, \quad \text{при } \mathcal{L}^1\text{-п.в. } t \in [a,b].$$

Из предложения 3.2.43 заключаем, что не только функции s_γ, $s_{\gamma'}$, но также и функции s_γ^{-1}, $s_{\gamma'}^{-1}$ обладают свойством Лузина. Следовательно, функция $t'(\cdot)$ абсолютно непрерывна и строго возрастает. В результате, применяя предложение 3.2.2 при $\Phi(t) = t'(t)$, а также, учитывая (3.2.37) и замечание 3.2.38, приходим для любого измеримого множества E к желаемому равенству

$$\int\limits_E \mathrm{D}^k[\gamma](t)\,dt = \int\limits_E \mathrm{D}^k[\gamma'](t'(t))\frac{dt'}{dt}(t)\,dt = \int\limits_{t'(E)} \mathrm{D}^k[\gamma'](t')\,dt'.$$

Доказательство завершено. □

Напомним предложение 3.2.5. Напомним также определение 2.1.1 и замечание 2.1.7. Теперь мы можем сформулировать *основной результат этого параграфа.*

Теорема 3.2.50. *Пусть $\Gamma \subset [0,1)^2$ – простая спрямляемая кривая положительной длины. Тогда специальная 1-корегулярная последовательность мер $\{\mu_k[\Gamma]\} := \{\mu_k[\Gamma]\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ принадлежит $\mathfrak{M}_1^{str}(\Gamma)$.*

Доказательство. Используя замечание 3.2.14 и предложение 3.2.47, мы можем предположить без ограничения общности, что кривая Γ параметризована переменной длиной дуги γ_s. В течение доказательства будем использовать краткое обозначение $\gamma = \gamma_s$. В силу предложения 3.2.5, отображение $\gamma : [0, l(\Gamma)] \to \Gamma$ является 1-липшицевым. Очевидно, отображения γ_i, $i = 1, 2$ также являются 1-липшицевыми как композиции γ с соответствующими проекциями Π_i. Положим

$$l_i = \operatorname{diam}\gamma_i([a,b]) \quad \text{при } i = 1, 2.$$

Поскольку Γ – спрямляемая кривая и $l(\Gamma) > 0$, имеем

$$0 < l(\Gamma) \le l_1 + l_2 \le 2l(\Gamma) < +\infty. \tag{3.2.51}$$

Теперь проверим условия (**M**1)–(**M**4) определения 2.1.1 для $\{\mu_k[\Gamma]\}$.

Шаг 1. Так как γ – параметризация кривой Γ длиной дуги, непосредственно из (3.2.37) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{D}^k[\gamma](t) > 0 \quad \text{при } \mathcal{H}^1\text{-п.в. } t \in [a,b].$$

Следовательно, конструкция (3.2.42) даёт

$$\operatorname{supp}\mu_k[\Gamma] = \Gamma \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2.52}$$

Таким образом, условие (**M**1) проверено.

Шаг 2. Нам будет удобно теперь проверить условие (**M**4). Из (3.2.33), (3.2.36) и (3.2.37) немедленно следует, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено

$$2^{-1}\,\mathrm{D}^{k+1}[\gamma](t) \le \mathrm{D}^k[\gamma](t) \le \mathrm{D}^{k+1}[\gamma](t) \quad \text{при } \mathcal{H}^1\text{-п.в. } t \in [a,b]. \tag{3.2.53}$$

Этот факт вместе с (3.2.42) влечёт существование последовательности весов $\{w_k[\Gamma]\}$ такой, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем $\mu_k[\Gamma] = w_k[\Gamma]\mu_0[\Gamma]$ и

$$2^{-1} w_{k+1}[\Gamma](x) \le w_k[\Gamma](x) \le w_{k+1}[\Gamma](x) \quad \text{при } \mu_0[\Gamma]\text{-п.в. } x \in \Gamma. \tag{3.2.54}$$

Шаг 3. Фиксируем произвольное число $j \in \mathbb{N}_0$. Если $i = 1$, положим $i' = 2$, а если $i = 2$, положим $i' = 1$. Ясно, что для любого двоичного куба $Q_{j,m}$ при $j \ge k$, $m \in \mathbb{Z}^2$, из (3.2.37) и (3.2.42) получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\gamma^{-1}(Q_{j,m})} \mathcal{W}^k_{i'}[\gamma](s)|\dot\gamma_i(s)|\,ds \le \mu_k[\Gamma](Q_{j,m}) \\ &\le \int\limits_{\gamma^{-1}(Q_{j,m})} \Big(\mathcal{W}^k_1[\gamma](s)|\dot\gamma_2(s)| + \mathcal{W}^k_2[\gamma](s)|\dot\gamma_1(s)|\Big)\,ds, \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{3.2.55}$$

Так как отображение γ инъективно, имеем, при $\mathcal{H}^1$-п.в. $x_i \in \Pi_{i'}(Q_{j,m})$ равенство

$$\int\limits_{\gamma^{-1}(Q_{j,m})\cap\gamma_i^{-1}(x_i)} \mathcal{W}^k_{i'}[\gamma](s)\,d\mathcal{H}^0(s) = \int\limits_{\Pi_i(Q_{j,m})} d\nu^k_F[\mathcal{L}_{i'}[\Gamma](x_i)](x_{i'}). \tag{3.2.56}$$

Напомним, что отображения γ_i, $i = 1,2$ являются липшицевыми. Следовательно, мы применим предложение 3.2.2 и воспользуемся (3.2.56), принимая во внимание определение 3.2.35 и замечание 3.2.34. При любом $k \in \mathbb{N}_0$ для всех $j \ge k$ и всех $m \in \mathbb{Z}^2$, получим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\gamma^{-1}(Q_{j,m})} \mathcal{W}^k_{i'}[\gamma](s)|\dot\gamma_i(s)|\,ds = \int\limits_{\Pi_{i'}(Q_{j,m}\cap\Gamma)} \left(\int_{\Pi_i(Q_{j,m})} d\nu^k_F[\mathcal{L}_{i'}[\Gamma](x_i)](x_{i'})\right) dx_i \\ &\le \int\limits_{\Pi_{i'}(Q_{j,m}\cap\Gamma)} dy \le \mathcal{L}^1(\Pi_{i'}(Q_{j,m}\cap\Gamma)) = 2\mathcal{H}^1(\Pi_{i'}(Q_{j,m}\cap\Gamma)), \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{3.2.57}$$

С другой стороны, аналогичные рассуждения позволяют установить при любом $k \in \mathbb{N}_0$, при всех $m \in \mathbb{Z}^2$ неравенство

$$\int\limits_{\gamma^{-1}(Q_{k,m})} \mathcal{W}^k_{i'}[\gamma](s)|\dot\gamma_i(s)|\,ds = \mathcal{L}^1(\Pi_{i'}(Q_{k,m}\cap\Gamma)) \ge \mathcal{H}^1(\Pi_{i'}(Q_{k,m}\cap\Gamma)), \quad i = 1,2. \tag{3.2.58}$$

Шаг 4. Проверим условие (3) при $d = 1$ для меры $\{\mu_k[\Gamma]\}_{k\in\mathbb{N}_0}$. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$ и $x \in \Gamma$. Положим $Q_k(x) := Q(x, 2^{-k})$ для краткости. Используя (3.2.52), (3.2.54), (3.2.58), и

субаддитивность меры $\mathcal{H}^1$, получим

$$\begin{aligned}
&\mu_k[\Gamma](Q_k(x)\cap\Gamma)=\mu_k[\Gamma](Q_k(x))\geq\tfrac{1}{4}\mu_{k+2}[\Gamma](Q_k(x))\\
&\geq\frac{1}{4}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^2\\ Q_{k+2,m}\cap\frac{1}{2}Q_k(x)\neq\emptyset}}\mu_{k+2}[\Gamma](Q_{k+2,m})\geq\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^2\\ Q_{k+2,m}\cap\frac{1}{2}Q_k(x)\neq\emptyset}}\tfrac{1}{4}\mathcal{L}^1(\Pi_i(Q_{k+2,m}\cap\Gamma))\\
&\geq\tfrac{1}{4}\mathcal{L}^1(\Pi_i(\frac{1}{2}Q_k(x)\cap\Gamma)),\quad i=1,2.
\end{aligned}\tag{3.2.59}$$

Заметим, что если $k\geq-\log_2(\max\{l_1,l_2\})$, то $Q_{k+1}(x)\cap\Gamma$ содержит линейно связное подмножество диаметром не менее 2^{-k-1}. Поэтому,

$$\max\{\mathcal{L}^1(\Pi_1(\frac{1}{2}Q_k(x)\cap\Gamma)),\mathcal{L}^1(\Pi_2(\frac{1}{2}Q_k(x)\cap\Gamma))\}\geq 2^{-k-1},\tag{3.2.60}$$

Наконец, комбинируя (3.2.59), (3.2.60) и учитывая (3.2.45), нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
\mu_k[\Gamma](Q_k(x))&\geq\frac{1}{8}\min\{1,2^k\max\{l_1,l_2\}\}2^{-k}\\
&\geq\frac{1}{8}\min\{1,\max\{l_1,l_2\}\}2^{-k},\quad k\in\mathbb{N}_0.
\end{aligned}\tag{3.2.61}$$

Шаг 5. Для проверки условия (2) при $d=1$ фиксируем $x\in\Gamma$ и $r\in(0,2^{-k}]$. Напомним обозначение $k(r)$, данное в (1.2.61). Заметим, что найдется не более 9 двоичных кубов $Q_{k(r),m}$, пересечения которых с $Q=Q(x,r)$ не пусты. Следовательно, применим второе неравенство в (3.2.55), а затем воспользуемся (3.2.57) при $j=k(r)$ (это возможно, поскольку $k(r)\geq k$). Мы получаем

$$\begin{aligned}
\mu_k[\Gamma](Q)&\leq\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^2\\ Q_{k(r),m}\cap Q\neq\emptyset}}\mu_k[\Gamma](Q_{k(r),m})\\
&\leq\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{k(r),m}\cap Q\neq\emptyset}}\sum_{i=1}^{2}\mathcal{L}^1(\Pi_i(Q_{k(r),m}\cap\Gamma))\leq\frac{18}{2^{k(r)}}\leq 36r.
\end{aligned}\tag{3.2.62}$$

Шаг 6. Наконец, для справедливость условия (**M**5) определения 2.1.1 сразу следует из теоремы 2.1.24.

Теорема полностью доказана. □

3.2.4. **Основной результат.** Напомним определение 1.2.19. Для удобства читателя напомним частный случаем теоремы Безиковича о дифференцировании мер. Читатель может найти доказательство, например, в параграфе 2.4 замечательной монографии [19].

Предложение 3.2.63. *Пусть μ и ν – такие локально конечные борелевски регулярные меры на $\mathbb{R}^n$, что $\nu\ll\mu$. Тогда для μ-почти всех $x\in\operatorname{supp}\mu$ существует конечный предел*

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x):=\lim_{r\to 0}\frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))}.$$

Мы начнём со вспомогательного утверждения.

Лемма 3.2.64. *Пусть $\Gamma \subset [0,1)^2$ – простая спрямляемая кривая положительной длины. Тогда при $k \in \mathbb{N}_0$ имеем*

$$\mu_k[\Gamma] \ll \mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma \quad и \quad \mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma \ll \mu_k[\Gamma]. \tag{3.2.65}$$

Доказательство. Соотношение $\mu_k[\Gamma] \ll \mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma$, очевидно, следует из предложения 2.1.13 и теоремы 3.2.50. Более того, имеем $\mu_k[\Gamma](E) \le C_{\{\mu_k[\Gamma]\},1}\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma(E)$ для любого множества $E \subset \Gamma$.

Покажем теперь, что $\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma \ll \mu_k[\Gamma]$. В силу предложения 3.2.47 и замечания 3.2.14 мы можем считать, что Γ параметризованна переменной длиной дуги $\gamma_s\colon [0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}^2$.

Поскольку $\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma$ – конечная борелевски регулярная мера, из абсолютной непрерывности $\mu_k[\Gamma]$ относительно $\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma$, отмеченной выше, и предложения 3.2.63 следует существование такой функции $g[\Gamma] \in L_1(\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma)$ что для $\mathcal{H}^1$-п.в. точек $x \in \Gamma$ имеем

$$g[\Gamma](x) = \frac{d\mu_0[\Gamma]}{d\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma}(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mu_0[\Gamma](B_r(x))}{\mathcal{H}^1(B_r(x)\cap\Gamma)} \le C_{\{\mu_k[\Gamma]\},1}. \tag{3.2.66}$$

Покажем, что

$$g[\Gamma](x) > 0 \quad \text{для } \mathcal{H}^1\text{-п.в. } x \in \Gamma. \tag{3.2.67}$$

В силу предложения 3.2.11 из (3.2.66) следует, что для доказательства (3.2.67) достаточно установить неравенство

$$\varlimsup_{r\to 0} \frac{\mu_0[\Gamma](B_r(x))}{r} > 0 \quad \text{при } \mathcal{H}^1\text{-п.в. } x \in \Gamma. \tag{3.2.68}$$

Поскольку множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ связно и отображение γ_s – параметризация Γ переменной длиной дуги, получим, что для каждой точки $x \in \Gamma$ и любого положительного числа $r < \frac{\operatorname{diam}\Gamma}{3}$ прообраз $\gamma_s^{-1}(B_r(x))$ содержит отрезок $[t_x^1(r), t_x^2(r)] \ni \gamma_s^{-1}(x)$, для которого выполнено следующее:

(1) $\gamma_s(t_x^1(r)) = x$, $\gamma_s(t_x^2(r)) \in \partial B_r(x)$;

(2) справедливо неравенство

$$|t_x^1(r) - t_x^2(r)| \ge r. \tag{3.2.69}$$

Так как γ_s – параметризация длиной дуги, учитывая предложение 3.2.11, получаем

$$|t_x^1(r) - t_x^2(r)| \le l(\Gamma \cap B_r(x)) \to 0, \quad r \to 0. \tag{3.2.70}$$

Комбинируя (3.2.42), (3.2.69), (3.2.70), и, учитывая, что γ_s обладает N-свойством Лузина (поскольку γ_s является 1-липшицевым отображением), получим

$$\begin{aligned}\varliminf_{r\to 0}\frac{\mu_0[\Gamma](B_r(x))}{r} &\geq \varliminf_{r\to 0}\fint_{t_x^1(r)}^{t_x^2(r)}\chi_{[0,l(\Gamma)]}(\tau)\,\mathrm{D}^0[\gamma_s](\tau)\,d\tau \\ &= \mathrm{D}^0[\gamma_s](\gamma_s^{-1}(x)) > 0 \quad \text{при } \mathcal{H}^1\text{-п.в. } x\in\Gamma.\end{aligned} \tag{3.2.71}$$

Наконец, используя (3.2.67) определение меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^1$, легко видеть, что мера $\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_0[\Gamma]$.

Лемма полностью доказана. □

Теперь мы можем сформулировать основной результат данного раздела, который является немедленным следствием теорем 3.2.50,2.6.1 и леммы 3.2.64.

Теорема 3.2.72. *Пусть $\Gamma\subset[0,1)^2$ – простая спрямляемая кривая положительной длины, а $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ – допустимая параметризация Γ. Пусть $\{\mu_k\}=\{\mu_k[\Gamma]\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ – специальная 1-корегулярная последовательность мер на Γ и фиксирован параметр $p\in(1,\infty)$. Тогда $\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma$-класс эквивалентности борелевской функции $f\colon\Gamma\to\mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma$-пространству следов $W_p^1(\mathbb{R}^2)|_\Gamma^{\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma}$ в том и только том случае, если существует такое число $\sigma_0:=\sigma_0(\Gamma)\in(0,1]$, что при любом $\sigma\in(0,\sigma_0]$*

$$\mathcal{BN}_{p,\{\mu_k\},\sigma}(f):=\|f\|_{L_p(\mu_0)}+\Big(\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(p-1)}\int\limits_{\Gamma_k(\sigma)}\Big(\mathcal{E}_{\mu_k}(x,B_{2^{-k}}(x))\Big)^p d\mu_k(x)\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty. \tag{3.2.73}$$

Кроме того, для любого $\sigma\in(0,\sigma_0]$ существует константа $C>0$, зависящая только от p, n, σ, $\mathcal{C}_{\{\mu_k\}}$ такая, что

$$C^{-1}\mathcal{BN}_{p,\{\mu_k\},\sigma}(f)\leq\|f\|_{W_p^1(\mathbb{R}^2)|_\Gamma^{\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma}}\leq C\mathcal{BN}_{p,\{\mu_k\},\sigma}(f). \tag{3.2.74}$$

Оператор $\mathrm{Ext}_\Gamma:=\mathrm{Ext}_{\Gamma,\{\mu_k\}}\colon W_p^1(\mathbb{R}^2)|_\Gamma^{\mathcal{H}^1\lfloor_\Gamma}\to W_p^1(\mathbb{R}^2)$, определяемый формулой (2.3.29), линеен, ограничен и является $\mathcal{H}^1$-оператором продолжения.

3.3. Следы пространств $W_p^1(\mathrm{X})$ на любых множествах при больших p

В данном разделе мы получим естественное обобщение теоремы 1.2 из [112] для некоторого класса метрических пространств с мерой. Напомним определения 1.2.72 и 1.2.88.

Пусть $\mathrm{X}=(\mathrm{X},\mathrm{d},\mu)$ – геодезическое метрическое пространство с мерой. Предположим, что X является Q-регулярным по Альфорсу при некотором $Q\geq 1$. Кроме того, фиксируем $p\in(Q,\infty)$ и предположим, что $\mathrm{X}\in\mathfrak{A}_p$. Зафиксируем параметр $\theta\in[Q,p)$ и непустое замкнутое множество $S\subset\mathrm{X}$. Для простоты предположим, что $S\subset B_1(\underline{x})$ при некотором $\underline{x}\in\mathrm{X}$. Имеем $S\in\mathcal{LCR}_\theta(\mathrm{X})$.

Комбинируя результаты работы [21] с теоремой 9.1.15 из [71] получаем, что для каждой функции $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ существует *непрерывный представитель* $\overline{F}$ такой, что для каждого замкнутого шара B справедливо неравенство

$$\sup_{x\in B}|\overline{F}(x) - F_B| \le C r_B\Big(\fint_B (|\nabla F|_{*,p}(y))^p\, d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3.1}$$

Кроме того, ясно, что для функции $F \in W_p^1(\mathrm{X})$ её p-точный след $F|_S$ корректно определён и совпадает с поточечным ограничением $\overline{F}$ на множество S.

Из замечания 1.2.50 легко видеть,что, если шар $B_r(x)$ с радиусом $r \in (0,1]$ и центром $x \in \mathrm{X}$ такой, что $B_{cr}(x)\cap S \neq \emptyset$ при $c \ge 1$, то, для каждой последовательности $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{M}_\theta^{str}(S)$,

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{m}_{k(r)}}(f, B_{2cr}(x)) \le \sup_{y,z\in B_{2cr}(x)\cap S}|f(y)-f(z)| \quad \text{для всех} \quad f \in C(S). \tag{3.3.2}$$

Определим *модифицированный функционал типа Брудного–Шварцмана* на $C(S)$ со значениями в $[0,+\infty]$ следующим образом. Для функции $f \in C(\mathrm{X})$ положим

$$\widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f) := \sup\Big(\sum_{i=1}^N \frac{\mu(B_{r_i})(x_i)}{r_i^p}\sup_{y,z\in B_{60r_i}(x_i)\cap S}|f(y)-f(z)|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

где супремум взят по всем конечным дизъюнктным семействам замкнутых шаров $\{B_i\}_{i=1}^N$ в X с радиусами ≤ 1. В частном случае $\mathrm{X} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty, \mathcal{L}^n)$ наш функционал очень близок рассмотренному в работе [112]. Единственная разница заключается в том, что в работе [112] соответствующие коэффициент растяжения шаров был равен 11, а не 60. Используя (3.3.1) и предложение 1.2.54, легко видеть, что

$$\widetilde{\mathcal{BSN}}_p(F|_S) + \inf_{z\in S}|F|_S(z)| \le C\|F\|_{W_p^1(\mathrm{X})} \quad \text{для всех} \quad F \in W_p^1(\mathrm{X}). \tag{3.3.3}$$

С другой стороны, если $x_m \in S$ – точка минимума, а $x_M \in S$ – точка максимума, то легко видеть, что

$$|f(x_m) - f(x_M)| \le (\mu(B_1(\underline{x})))^{-\frac{1}{p}}\widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f).$$

В результате, из (3.3.2) имеем

$$\mathrm{BSN}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},30}(f) \le \widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f) + \sup_{x\in S}|f(x)| \le C(\widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f) + \inf_{z\in S}|f(z)|), \quad f \in C(S). \tag{3.3.4}$$

Наконец, применим теорему 2.6.3 при $\epsilon = \frac{1}{10}$, $c = 30$ и воспользуемся (3.3.3), (3.3.4).

Теорема 3.3.5. *Функция $f \in C(S)$ принадлежит пространству $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ в том и только том случае, если $\widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f) < +\infty$. Кроме того, существует такое $C > 0$, что*

$$\frac{1}{C}\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S} \le \widetilde{\mathcal{BSN}}_p(f) + \inf_{z\in S}|f(z)| \le C\|f\|_{W_p^1(\mathrm{X})|_S} \quad \textit{при всех} \quad f \in C(S).$$

Наконец, существует линейный ограниченный p-точный оператор продолжения $\mathrm{Ext}_{S,p}$, действующий из $W_p^1(\mathrm{X})|_S$ в $W_p^1(\mathrm{X})$.

Глава 4. СВОЙСТВА ТИПА ПОРИСТОСТИ МНОЖЕСТВ В $\mathbb{R}^n$

На протяжении всей главы считаем фиксированным число $n \in \mathbb{N}$, а под $\mathbb{R}^n$ понимаем метрическое пространство с мерой $\mathbb{R}^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty, \mathcal{L}^n)$, то есть $\mathbb{R}^n$ – линейное n-мерное пространство строк $x = (x_1, \dots, x_n)$ вещественных чисел с нормой $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ и классической мерой Лебега $\mathcal{L}^n$. На протяжении главы термин "куб" будет обозначать *замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям.* При $x \in \mathbb{R}^n$ и $l \geq 0$ положим $Q_l(x) := \prod_{i=1}^n [x_i - l, x_i + l]$. Иными словами, $Q_l(x)$ – шар с центром в x радиуса l в пространстве $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Для куба Q через $l(Q)$ обозначим его длину ребра. При $c > 0$ положим $cQ_l(x) := Q_{cl}(x)$.

Напомним определения 1.2.92, 1.2.103 и 1.5.1. Для краткости положим в этой главе $\mathcal{ADR}^d := \mathcal{ADR}^d(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{LCR}^d(\lambda) := \mathcal{LCR}^d(\mathbb{R}^n, \lambda)$ и, наконец, $\mathcal{LCR}^d := \mathcal{LCR}^d(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, пористые шары в $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ мы будем называть пористыми кубами и использовать символ $\mathcal{POR}_S(\sigma)$ для обозначения соответствующего семейства.

Существует тесная связь между свойствами пористости множеств и их размерностями. В [89] было показано, что множество $S \subset \mathbb{R}^n$ пористое в том и только том случае, если его размерность по Ассуаду строго меньше n. Ситуация становится более сложной в контексте размерности по Хаусдорфу. Работы [105, 84, 96] содержат результаты, утверждающие, что "достаточно сильная пористость" множества $S \subset \mathbb{R}^n$ влечёт за собой наличие соответствующего ограничения сверху на его размерность по Хаусдорфу. Однако (в противоположность размерности по Ассуаду) можно построить непористое множество $S \subset \mathbb{R}^n$, размерность по Хаусдорфу которого строго меньше n. Основная цель настоящей главы — понять, как поведение обхватов по Хаусдорфу пересечений кубов $Q \cap S$ с заданным множеством $S \subset \mathbb{R}^n$ влияет на свойства типа пористости множества S.

Отправной точкой наших исследований является весьма частный случай нашего предложения 1.2.106. Этот частный случай был впервые изучен А. Йонссоном [77] (см. также [118, предложение 9.18]).

Предложение 4.0.1. *Пусть $d \in [0, n)$ и $S \in \mathcal{ADR}^d$. Тогда существует константа $\tau \in (0, 1/2)$, зависящая только от d, n и $c_1^d(S)$, $c_d^2(S)$, такая, что S является τ-пористым.*

Стоит сделать несколько замечаний, касающихся предложения 4.0.1.

Замечание 4.0.2. Требование $d < n$ существенно. Действительно, в случае $d = n$ множество $S = \mathbb{R}^n$, очевидно, принадлежит $\mathcal{ADR}^n$, но не удовлетворяет никакому свойству типа пористости.

Замечание 4.0.3. Пример 4.5.1 ниже показывает, что аналог предложения 4.0.1 не справедлив для множеств, удовлетворяющих только правому неравенству в (1.2.94). Легко можно показать также, что аналог предложения 4.0.1 не справедлив для множеств, удовлетворяющих только левому неравенству в (1.2.94).

Замечание 4.0.4. Условие d-регулярности по Альфорсу–Давиду является лишь достаточным условием для пористости множества S, но оно далеко от того, чтобы быть необходимым.

Замечание 4.0.5. Предложение 4.0.1 имеет существенный недостаток. Действительно, только d-мерные множества могут удовлетворять условиям этой теоремы.

Как мы уже видели в главе 2 и увидим далее в главе 5 исследования проблемы следа пространства Соболева приводят к изучению свойств типа пористости более сложных множеств по сравнению с множествами, регулярными по Альфорсу–Давиду, состоящих из кусков разной размерности. Это даёт мотивацию для поиска менее ограничительных условий на множество S, которые тем не менее достаточны для наличия у S свойств типа пористости.

Проблема 4.0.6. *Пусть даны параметры* $d \in (0, n)$ *и* $\lambda \in (0, 1)$. *Существует ли константа* $\tau \in (0, 1/2)$ *такая, что* $\mathcal{LCR}^d(\lambda) \subset \mathcal{POR}(\tau)$*?*

К сожалению, ответ на проблему 4.0.6 отрицательный. Например, в случае $S = \mathbb{R}^n$ имеем $S \in \mathcal{LCR}^d(\lambda)$ при всех $d \in (0, n)$ и всех $\lambda \in (0, 1]$, но $S \notin \mathcal{POR}(\tau)$ ни для какого $\tau \in (0, 1/2)$. Причина этого ясна. В отличие от условия (1.2.94), в условии (1.5.6) содержится нетривиальное ограничение на обхват по Хаусдорфу снизу, но не содержится никакой нетривиальной оценки сверху. Оценка $\mathcal{H}^d_\infty(Q_l(x) \cap S) \leq l^d$ выполнена автоматически и не даёт какой-либо дополнительной информации.

Напомним, что псевдометрикой на $\mathbb{R}^n$ называется симметричная неотрицательная функция $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$, удовлетворяющая неравенству треугольника. В дальнейшем для заданной псевдометрики ρ на $\mathbb{R}^n$ будем обозначать псевдометрическое пространство $(\mathbb{R}^n, \rho)$ через $\mathbb{R}^n_\rho$. Через $B^{n,\rho}_r(x)$ будем обозначать замкнутый шар с центром в $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса r (в псевдометрике ρ), т.е. $B^{n,\rho}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) \leq r\}$. Для заданной псевдометрики ρ на $\mathbb{R}^n$, множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и параметра $\tau \in (0, 1]$ будем говорить, что шар $B^{n,\rho}_r(x)$ *является* (S, ρ, τ)-*пористым*, если существует шар $B^{n,\rho}_{r'}(x') \subset B^{n,\rho}_r(x) \setminus S$ радиуса $r' \geq \tau r$. Шар B называется (S, ρ)-пористым, если он (S, ρ, τ)-пористый при некотором $\tau \in (0, 1]$. При $\tau \in (0, 1/2)$ множество $S \subset \mathbb{R}^n$ будем называть (ρ, τ)-пористым, если для любой точки $x \in S$ и любого $r \in (0, 1]$ шар $B^{n,\rho}_r(x)$ является (S, ρ, τ)-пористым.

Для множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и параметров $d \in [0, n]$, $\lambda \in (0, 1]$ положим

$$\mathcal{F}_S(d, \lambda) := \big\{Q : \mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S) \geq \lambda(l(Q))^d\big\}. \tag{4.0.7}$$

Поскольку все кубы Q предполагаются замкнутыми, очевидно, $\{x\} \in \mathcal{F}_S(d, \lambda)$ для всех $x \in S$.

Для параметров $d \in [0, n]$, $\lambda \in (0, 1]$ и непустого множества S мы определим (d, λ)-*толстое относительно* S *расстояние* от произвольной точки $y \in \mathbb{R}^n \setminus S$ до S формулой

$$\mathrm{D}_{S,d,\lambda}(y, S) := \begin{cases} \inf\{l(Q) : Q \in \mathcal{F}_S(d, \lambda),\ y \in Q\}, & \{Q \in \mathcal{F}_S(d, \lambda) : y \in Q\} \neq \emptyset, \\ +\infty, & \{Q \in \mathcal{F}_S(d, \lambda) : y \in Q\} = \emptyset. \end{cases}$$

При $\delta \geq 0$ мы также определим (d, λ)-*толстую* δ-*окрестность* множества S формулой

$$S_\delta(d, \lambda) := \big\{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{D}_{S,d,\lambda}(y, S) \leq \delta\big\}. \tag{4.0.8}$$

В § 4.2 мы построим псевдометрику $\rho := \rho_{S,d,\lambda}$ на $\mathbb{R}^n$ и покажем, что $S_\delta(d, \lambda)$ является δ-окрестностью множества S в псевдометрике ρ.

4.1. Предварительные сведения

Под *двоичным кубом* в этой главе мы понимаем произвольный замкнутый куб

$$Q_{k,m} := \prod_{i=1}^n \Big[\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i + 1}{2^k}\Big], \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Для $k \in \mathbb{Z}$ через $\mathcal{D}_k$ обозначим семейство всех замкнутых двоичных кубов с длиной ребра 2^{-k}. Положим также

$$\mathcal{D} := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k, \qquad \mathcal{D}_+ := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}_k.$$

Для семейства кубов $\mathcal{Q}$ в $\mathbb{R}^n$ и числа $c > 1$ положим

$$c\mathcal{Q} := \{cQ : Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Нам понадобится следующее элементарное утверждение. Напомним определение 1.2.37.

Предложение 4.1.1. *Пусть* $c \geq 1$ *и* $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$\mathrm{MULT}(c\mathcal{D}_k) \leq ([c] + 2)^n. \tag{4.1.2}$$

В дальнейшем будем использовать следующий *частичный порядок* на множестве всех неперекрывающихся (напомним определение 1.2.3) семейств двоичных кубов. Для двух неперекрывающихся семейств $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}' \subset \mathcal{D}$ будем писать $\mathcal{Q} \succeq \mathcal{Q}'$, если для любого куба $Q' \in \mathcal{Q}'$ существует единственный куб $Q \in \mathcal{Q}$ такой, что $Q \supset Q'$. Если, кроме того, $l(Q) > l(Q')$ для

всех таких Q и Q', то будем писать $\mathcal{Q} \succ \mathcal{Q}'$. Скажем, что два неперекрывающихся семейства двоичных кубов $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}' \subset \mathcal{D}$ *сравнимы*, если либо $\mathcal{Q} \succeq \mathcal{Q}'$, либо $\mathcal{Q}' \succeq \mathcal{Q}$. В противном случае соответствующие семейства называются *несравнимыми*.

Покрытием множества $E \subset \mathbb{R}^n$ назовем семейство $\mathcal{F}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$ такое, что $E \subset \cup_{F\in\mathcal{F}} F$. *Двоичным неперекрывающимся покрытием множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ назовем неперекрывающееся семейство $\mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$ такое, что $\mathcal{Q}$ – покрытие множества E.

Для не более чем счетного семейства $\mathcal{F}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$ и числа $d \in [0, n]$ положим

$$\mathrm{H}^d(\mathcal{F}) := \sum_{F\in\mathcal{F}} \Big(\operatorname{diam} F\Big)^d. \tag{4.1.3}$$

Мы также определим *метрический пол* и *метрический потолок* семейства $\mathcal{F}$, полагая

$$\underline{\mu}(\mathcal{F}) := \inf\{\operatorname{diam} F : F \in \mathcal{F}\}, \qquad \overline{\mu}(\mathcal{F}) := \sup\{\operatorname{diam} F : F \in \mathcal{F}\}. \tag{4.1.4}$$

В данной главе мы будем иметь дело не только с классическими мерой и обхватом по Хаусдорфу, но и с их соответствующими двоичными аналогами.

Определение 4.1.5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – непустое множество и $d \in [0, n]$. Для любого параметра $\delta \in (0, +\infty]$ положим

$$\mathcal{H}^d_\delta(E) := \inf \mathrm{H}^d(\mathcal{F}), \qquad \mathcal{DH}^d_\delta(E) := \inf \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}), \tag{4.1.6}$$

где в первом случае инфимум взят по всем таким не более чем счетным покрытиям $\mathcal{F}$ множества E, что $\overline{\mu}(\mathcal{F}) < \delta$ кубами, а во втором – по всем таким двоичным неперекрывающимся покрытиям $\mathcal{Q}$ множества E, что $\overline{\mu}(\mathcal{Q}) < \delta$. Величина $\mathcal{H}^d_\infty(E)$ называется *d-обхватом по Хаусдорфу* множества E. Величина $\mathcal{DH}^d_\infty(E)$ называется *двоичным d-обхватом по Хаусдорфу* множества E. Определим *d-меру Хаусдорфа* и *двоичную d-меру Хаусдорфа* множества E, полагая соответственно

$$\mathcal{H}^d(E) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^d_\delta(E), \qquad \mathcal{DH}^d(E) := \lim_{\delta\to 0} \mathcal{DH}^d_\delta(E). \tag{4.1.7}$$

Замечание 4.1.8. Любой куб $Q = Q_l(x)$ в $\mathbb{R}^n$ можно покрыть не более чем 3^n двоичными кубами $Q_{k,m}$ с длиной ребра $2^{-k} < 2l \le 2^{1-k}$. Отсюда легко показать, что для любого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного параметра $\delta \in (0, +\infty]$

$$\mathcal{H}^d_\delta(E) \le \mathcal{DH}^d_\delta(E) \le 3^n \mathcal{H}^d_\delta(E). \tag{4.1.9}$$

Замечание 4.1.10. Пусть $d \in (0, n]$ и $\delta \in (0, \infty]$. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное непустое множество. Тогда согласно [93, Lemma 4.6] и замечанию 4.1.8 получим

$$\mathcal{H}^d(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{DH}^d(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H}^d_\delta(E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{DH}^d_\delta(E) = 0.$$

Определение 4.1.11. Пусть $d \in [0,n]$ и $E \subset \mathbb{R}^n$ — множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(E) > 0$. Скажем, что семейство $\mathcal{F}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$ является *d-почти покрытием множества E*, если найдется множество $E' \subset E$ такое, что $\mathcal{H}^d_\infty(E') = 0$ и $\mathcal{F}$ является покрытием множества $E \setminus E'$.

Определение 4.1.12. Пусть $d \in [0,n]$ и $S \subset \mathbb{R}^n$ – множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) \in (0,+\infty)$. При $\varepsilon > 0$ будем говорить, что d-почти покрытие $\mathcal{F}$ множества S является *ε-оптимальным*, если $\mathrm{H}^d(\mathcal{F}) \le (1+\varepsilon)\mathcal{H}^d_\infty(S)$. Будем говорить, что двоичное неперекрывающееся d-почти покрытие $\mathcal{Q}$ множества S является *ε-оптимальным*, если $\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}) \le (1+\varepsilon)\mathcal{DH}^d_\infty(S)$. Наконец скажем, что двоичное ε-оптимальное неперекрывающееся d-почти покрытие $\mathcal{Q}$ множества S *максимально*, если $\mathcal{Q} \succeq \mathcal{Q}'$ для любого ε-оптимального двоичного неперекрывающегося d-почти покрытия $\mathcal{Q}'$ множества S, сравнимого с $\mathcal{Q}$.

Замечание 4.1.13. Пусть $d \in (0,n]$ и $S \subset \mathbb{R}^n$ – такое множество, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) \in (0,+\infty)$. Легко видеть, что максимальное ε-оптимальное двоичное неперекрывающееся d-почти покрытие множества S существует, но, вообще говоря, не единственно.

Определение 4.1.14. Пусть $d \in [0,n]$ и $\lambda \in (0,1]$. Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Скажем, что куб $Q = Q_l(x)$ с центром $x \in \mathbb{R}^n$ и длиной ребра $l \in [0,\infty)$ является *(d,λ)-толстым относительно S*, если

$$\mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S) \ge \lambda l^d. \tag{4.1.15}$$

Аналогично куб $Q \subset \mathbb{R}^n$ называется *(d,λ)-двоично толстым относительно S*, если

$$\mathcal{DH}^d_\infty(Q \cap S) \ge \lambda l^d. \tag{4.1.16}$$

Напомним, что для параметров $d \in [0,n]$, $\lambda \in (0,1]$ и множества $S \subset \mathbb{R}^n$ семейство всех (d,λ)-толстых кубов мы обозначаем через $\mathcal{F}_S(d,\lambda)$ (см. (4.0.7)).

Замечание 4.1.17. Имеем $Q_0(x) = x$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, неравенство (4.1.15) тривиально выполнено при $Q = \{x\}$ для любых $d \in [0,n]$, $\lambda \in (0,1]$ и $x \in S$. Иногда нам будет удобно рассматривать точку $x \in S$ заданного множества $S \subset \mathbb{R}^n$ как (d,λ)-толстый относительно S куб (с нулевой длиной ребра) при некоторых $d \in [0,n]$ и $\lambda \in (0,1]$.

В §4.3 мы будем постоянно работать со специальным семейством двоичных кубов. Это семейство образует своего рода строительные блоки для доказательства основных результатов настоящей работы.

Определение 4.1.18. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – непустое множество. При $d \in [0,n]$ и $\lambda \in (0,1]$ определим (d,λ)-*краеугольное* для S семейство кубов формулой

$$\mathcal{DF}_S(d,\lambda) := \big\{Q \in \mathcal{D}_+ : \mathcal{DH}^d_\infty(Q \cap S) \geq \lambda(l(Q))^d\big\}.$$

Замечание 4.1.19. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное непустое множество. Если $Q = Q_l(x) \in \mathcal{F}_S(d,\lambda)$ при некоторых $d \in [0,n]$ и $\lambda \in (0,1]$, то $Q_{cl}(x) \in \mathcal{F}_S(d,\lambda/c^d)$. Действительно, используя свойство монотонности d-обхвата по Хаусдорфу, получим

$$\mathcal{H}^d_\infty(Q_{cl}(x) \cap S) \geq \mathcal{H}^d_\infty(Q_l(x) \cap S) \geq \lambda l^d = \frac{\lambda}{c^d}(cl)^d.$$

Предложение 4.1.20. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – множество. Пусть $d \in (0,n]$, $\lambda \in (0,1]$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, любого куба $\overline{Q} = Q_l(x)$, удовлетворяющего условию $\mathcal{DH}^d_\infty(\overline{Q} \cap S) < \lambda l^d$, и любого ε-оптимального двоичного неперекрывающегося d-почти покрытия $\mathcal{Q}$ множества $\overline{Q} \cap S$ справедливо неравенство*

$$l(Q) \leq 2^{k(l)} \quad \textit{для всех} \quad Q \in \mathcal{Q}, \tag{4.1.21}$$

где $k(l)$ – единственное целое, для которого $l \in (2^{k(l)}, 2^{k(l)+1}]$.

Доказательство. Положим $\overline{\lambda} := \mathcal{DH}^d_\infty(\overline{Q} \cap S)$. По условию $\overline{\lambda} < \lambda l^d$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, что $(1+\varepsilon_0)\overline{\lambda} < \lambda l^d$. Следовательно, взяв $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ и взяв произвольное ε-оптимальное двоичное неперекрывающееся d-почти покрытие $\mathcal{Q}$ множества $Q \cap S$, мы, очевидно, получим

$$(l(Q))^d \leq \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}) \leq (1+\varepsilon)\overline{\lambda} < \lambda l^d \quad \text{для всех} \quad Q \in \mathcal{Q}.$$

Поскольку $\mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$, получаем (4.1.21). □

Следующее элементарное предложение будет достаточно полезно в дальнейшем. Оно проясняет взаимосвязь между (d,λ)-толстыми и (d,λ)-двоично толстыми кубами.

Предложение 4.1.22. *Пусть $d \in (0,n)$, $\lambda \in (0,1)$, а $S \subset \mathbb{R}^n$ – борелевское множество с обхватом $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $Q = Q_l(x)$ – куб с длиной ребра $l \in (0,1]$ и $k := [-\log_2 l] \in \mathbb{N}_0$. Тогда*

(i) если $cQ \in \mathcal{F}_S(d,\lambda)$ ($cQ \in \mathcal{DF}_S(d,\lambda)$) при некотором $c \geq 1$, то существует двоичный куб $Q_{k,m} \in \mathcal{F}_S(d,\lambda/([2c]+1)^n)$ ($Q_{k,m} \in \mathcal{DF}_S(d,\lambda/([2c]+1)^n)$) такой, что $Q_{k,m} \cap Q \neq \emptyset$;

(ii) если $Q \notin \mathcal{F}_S(d,\lambda/2^{dj})$ ($Q \in \mathcal{D}_+ \setminus \mathcal{DF}_S(d,\lambda/2^{dj})$) при некотором $j \in \mathbb{N}_0$, то никакой двоичный куб $Q_{k+j,m} \subset Q$ не принадлежит семейству $\mathcal{F}_S(d,\lambda)$ (семейству $\mathcal{DF}_S(d,\lambda)$).

Доказательство. Ясно, что $l \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]$. Поскольку Q замкнут, не более $([2c]+1)^n$ двоичных кубов $Q_{k,m}$ могут иметь непустое пересечение с кубом cQ.

Чтобы доказать утверждение (i), предположим противное. Используя элементарное свойство субаддитивности обхвата $\mathcal{H}^d_\infty$, получим

$$\mathcal{H}^d_\infty(cQ \cap S) \le \sum_{Q_{k,m} \cap cQ \neq \emptyset} \mathcal{H}^d_\infty(Q_{k,m} \cap S) < \frac{\lambda([2c]+1)^n}{2^{kd}([2c]+1)^n} \le \lambda(l(Q))^d.$$

Это противоречит предположению, что $cQ \in \mathcal{F}_S(d, \lambda)$.

Для доказательства утверждения (ii) предположим, напротив, что существует двоичный куб $Q_{k+j,m} \subset Q$ такой, что $Q_{k+j,m} \in \mathcal{F}_S(d, \lambda)$. В силу монотонности $\mathcal{H}^d_\infty$ получим по определению числа k неравенство

$$\mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S) \ge \mathcal{H}^d_\infty(Q_{k+j,m} \cap S) \ge \frac{\lambda}{2^{(k+j)d}} \ge \frac{\lambda l^d}{2^{dj}}.$$

Однако это противоречит предположению, что $Q \notin \mathcal{F}_S(d, \lambda/2^{dj})$.

Соответствующие двоичные аналоги утверждений доказываются аналогично. □

4.2. (d, λ)-толстая псевдометрика

В этом параграфе мы введем некоторые новые понятия, которые могут представлять самостоятельный интерес.

Следующие данные предполагаются фиксированными на протяжении всего параграфа:

(D.4.2.1) произвольные числа $n \in \mathbb{N}$ и $d \in (0, n)$;

(D.4.2.2) множество $S \subset Q_{0,0}$, удовлетворяющее условию $\lambda_S := \mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$.

Напомним (4.0.7) и определение 4.1.18. При $\lambda \in (0, 1]$ будем писать $\mathcal{F}(\lambda)$ и $\mathcal{DF}(\lambda)$ вместо $\mathcal{F}_S(d, \lambda)$ и $\mathcal{DF}_S(d, \lambda)$ соответственно. Кроме того, при $\lambda \in (0, 1]$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ определим семейство $\mathcal{Q}_{x,y}(\lambda) := \{Q \ni x, y : Q \in \mathcal{F}(\lambda)\}$. Далее, при любом $\lambda \in (0, 1]$ и любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\widetilde{\rho}_{S,d,\lambda}(x, y) := \widetilde{\rho}_\lambda(x, y) := \begin{cases} \inf\{l(Q) : Q \in \mathcal{Q}_{x,y}(\lambda)\}, & x \neq y,\ \mathcal{Q}_{x,y}(\lambda) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \mathcal{Q}_{x,y}(\lambda) = \emptyset, \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Для любых двух точек $x, y \in \mathbb{R}^n$, из которых хотя бы одна принадлежит множеству S, положим

$$\rho_\lambda(x, y) := \rho_{S,d,\lambda}(x, y) := \inf \sum_{i=0}^{N-1} \widetilde{\rho}_\lambda(x^i, x^{i+1}), \tag{4.2.2}$$

где инфимум взят по всем таким конечным наборам точек $\{x^i\}_{i=0}^N \subset \mathbb{R}^n$, что $x^0 = x$ и $x^N = y$. Наконец, в случае, когда $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus S$, мы определим

$$\rho_\lambda(x,y) := \rho_{S,d,\lambda}(x,y) := \max\Big\{\|x-y\|_\infty, \sup_{\xi\in S} |\rho_\lambda(x,\xi) - \rho_\lambda(y,\xi)|\Big\}, \tag{4.2.3}$$

где мы полагаем $|\rho_\lambda(x,\xi) - \rho_\lambda(y,\xi)| := +\infty$, если $\max\{\rho_\lambda(x,\xi), \rho_\lambda(y,\xi)\} = +\infty$.

Напомним, что *псевдометрикой на* $\mathbb{R}^n$ называется симметричная неотрицательная функция $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$, удовлетворяющая неравенству треугольника.

Предложение 4.2.4. *Для любого* $\lambda \in (0,1]$ *функция* $\rho_\lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ *является псевдометрикой на* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Симметричность очевидна из (4.2.2) и (4.2.3). Кроме того, заметим, что

$$\rho_\lambda(x,y) \geq \|x-y\|_\infty \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.5}$$

Следовательно, равенство $\rho_\lambda(x,y) = 0$ возможно только при $x = y$.

Остаётся проверить неравенство треугольника. Фиксируем произвольную тройку точек $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Если $\rho_\lambda(x,y) = +\infty$ или $\rho_\lambda(y,z) = +\infty$, неравенство треугольника, очевидно, выполнено, поэтому далее считаем, что $\rho_\lambda(x,y) < +\infty$ и $\rho_\lambda(y,z) < +\infty$. Следует рассмотреть три случая.

В первом случае по крайней мере две из трех точек x, y, z (предположим, что $y, z \in S$, потому что остальные комбинации аналогичны) принадлежит множеству S. Для фиксированного $\delta > 0$ пусть $\{x^i\}_{i=0}^N, \{x^i\}_{i=N+1}^L \subset \mathbb{R}^n$ – конечные наборы точек, для которых $x^0 = x$, $x^N = y$, $x^L = z$ и

$$\sum_{i=0}^{N-1} \widetilde{\rho}_\lambda(x^i, x^{i+1}) \leq \rho_\lambda(x,y) + \frac{\delta}{2}, \qquad \sum_{i=N}^{L-1} \widetilde{\rho}_\lambda(x^i, x^{i+1}) \leq \rho_\lambda(y,z) + \frac{\delta}{2}.$$

Складывая два неравенства и используя (4.2.2), получим

$$\rho_\lambda(x,z) \leq \sum_{i=0}^{L-1} \widetilde{\rho}_\lambda(x^i, x^{i+1}) \leq \rho_\lambda(x,y) + \rho_\lambda(y,z) + \delta.$$

Поскольку $\delta > 0$ было выбрано произвольно, мы выводим неравенство треугольника для этого случая.

Во втором случае две точки не принадлежат S, а одна принадлежит S. Рассмотрим подслучай, когда $x, z \notin S$ и $y \in S$. Пусть $\xi \in S$. Без ограничения общности предположим, что $\rho_\lambda(x,\xi) \geq \rho_\lambda(z,\xi)$. Тогда, пользуясь уже доказанным неравенством треугольника в первом случае, получим

$$\begin{aligned} |\rho_\lambda(x,\xi) - \rho_\lambda(z,\xi)| &= \rho_\lambda(x,\xi) - \rho_\lambda(z,\xi) \leq \rho_\lambda(x,y) + \rho_\lambda(y,\xi) - \rho_\lambda(z,\xi) \\ &\leq \rho_\lambda(x,y) + |\rho_\lambda(y,\xi) - \rho_\lambda(z,\xi)| \leq \rho_\lambda(x,y) + \rho_\lambda(y,z). \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора $\xi \in S$, неравенства (4.2.5) и определения (4.2.3) получаем требуемое неравенство треугольника. Теперь рассмотрим подслучай, когда $x, y \notin S$, а $z \in S$. Учитывая (4.2.3) и очевидное неравенство $|\rho_\lambda(x,z) - \rho_\lambda(y,z)| \le \sup_{\xi\in S} |\rho_\lambda(x,\xi) - \rho_\lambda(\xi,y)|$, получаем

$$\rho_\lambda(x,z) \le |\rho_\lambda(x,z) - \rho_\lambda(y,z)| + \rho_\lambda(y,z) \le \rho_\lambda(x,y) + \rho_\lambda(y,z).$$

Наконец, рассмотрим третий случай, когда $x, y, z \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Если выполнено неравенство $\|x - z\| \ge \sup_{\xi\in S} |\rho_\lambda(x,\xi) - \rho_\lambda(z,\xi)|$, то из (4.2.3) получим

$$\rho_\lambda(x,z) = \|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\| \le \rho_\lambda(x,y) + \rho_\lambda(y,z). \tag{4.2.6}$$

Если $\|x - z\| < \sup_{\xi\in S} |\rho_{\lambda,\varepsilon}(x,\xi) - \rho_{\lambda,\varepsilon}(z,\xi)|$, то в силу (4.2.3) для любой точки $\xi \in S$ имеем

$$|\rho_\lambda(x,\xi) - \rho_\lambda(z,\xi)| \le |\rho_\lambda(x,\xi) - \rho_\lambda(y,\xi)| + |\rho_\lambda(y,\xi) - \rho_\lambda(z,\xi)| \le \rho_\lambda(x,y) + \rho_\lambda(y,z). \tag{4.2.7}$$

Беря супремум в (4.2.7) по всем $\xi \in S$ и комбинируя месте с (4.2.6), получаем неравенство треугольника для случая, когда $x, y, z \in \mathbb{R}^n \setminus S$.

Таким образом, мы показали, что неравенство треугольника справедливо для любой тройки точек $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. □

Замечание 4.2.8. Если $\lambda \in (0, \lambda_S]$, то $Q_{0,0} \in \mathcal{DF}(\lambda)$ (по предположению (D.4.2.2) и замечанию 4.1.8). Следовательно, из (4.2.2), (4.2.3) легко видеть, что $\rho_\lambda(x,y) < +\infty$ для всех $x, y \in Q_{0,0}$.

Напомним, что (d,λ)-*толстое расстояние* между множествами $E \subset \mathbb{R}^n \setminus S$ и S задаётся формулой

$$\mathrm{D}_\lambda(E,S) := \mathrm{D}_{S,d,\lambda}(E,S) := \inf\big\{\rho_\lambda(x,\xi) : x \in E,\ \xi \in S\big\}. \tag{4.2.9}$$

Следующее предложение даёт более простой способ вычисления (d,λ)-толстого расстояния от заданной точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$ до множества S.

Предложение 4.2.10. *Пусть* $\lambda \in (0, \lambda_S]$. *Тогда равенство*

$$\mathrm{D}_\lambda(x,S) = \inf\big\{l(Q) : Q \ni x,\ Q \in \mathcal{F}(\lambda)\big\} \tag{4.2.11}$$

справедливо для любых $x \in \mathbb{R}^n$, *для которых* $\mathrm{D}_\lambda(x,S) < +\infty$.

Доказательство. Теперь фиксируем точку $x \in \mathbb{R}^n$, для которой $\mathrm{D}_\lambda(x,S) < +\infty$. Обозначим правую часть (4.2.11) через $\widetilde{\mathrm{D}}_\lambda(x,S)$. Наша цель — показать, что $\mathrm{D}_\lambda(x,S) = \widetilde{\mathrm{D}}_\lambda(x,S)$. При $\varepsilon > 0$, используя (4.2.2), (4.2.9), выберем $x_\varepsilon \in S$ и точки $\{x_i\}_{i=0}^{N_\varepsilon}$ таким образом, что $x_0 = x$, $x_{N_\varepsilon} = x_\varepsilon$ и

$$\sum_{i=0}^{N_\varepsilon - 1} \widetilde{\rho}_\lambda(x_i, x_{i+1}) < \mathrm{D}_\lambda(x,S) + \varepsilon.$$

Следовательно, получим

$$\mathrm{D}_\lambda(x,S) \le \widetilde{\mathrm{D}}_\lambda(x,S) \le \widetilde{\rho}_\lambda(x_0,x_1) < \mathrm{D}_\lambda(x,S) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно, получаем требуемое равенство. □

Замечание 4.2.12. Введённая выше псевдометрика $\rho_\lambda := \rho_{S,d,\lambda}$ является естественным обобщением метрики, индуцированной $\|\cdot\|_\infty$-нормой. В самом деле, при $\lambda \in (0,1]$ мы имеем $\rho_{S,0,\lambda}(x,y) = \|x-y\|_\infty$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\lambda \in (0, \lambda_S]$. Если множество S является (d,λ)-толстым, то есть $S \in \mathcal{LCR}^d(\lambda)$, то, используя предложение 4.2.10, легко видеть, что

$$\operatorname{dist}(x,S) \le \mathrm{D}_\lambda(x,S) \le 2\operatorname{dist}(x,S) \quad \text{при всех} \quad x \in U_{\frac{1}{2}}(S), \tag{4.2.13}$$

где $U_{\frac{1}{2}}(S)$ есть $1/2$-окрестность множества S в метрике, порождённой $\|\cdot\|_\infty$-нормой.

При $\lambda \in (0,1]$ для любого $\varepsilon \ge 0$ введем ε-окрестность множества S относительно метрики ρ_λ формулой

$$U_\varepsilon^{\rho_\lambda}(S) := \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{D}_\lambda(x,S) < \varepsilon\}.$$

В силу замечания 4.1.17 имеем $U_\varepsilon^{\rho_\lambda}(S) \supset S$ при всех $\varepsilon \ge 0$ и всех $\lambda \in (0,1]$.

Замечание 4.2.14. Для любого $\lambda \in (0, \lambda_S]$ и любого $\varepsilon > 0$ имеем (см. (4.0.8))

$$U_\varepsilon^{\rho_\lambda}(S) = S_\varepsilon(\lambda) := \bigcup_{Q \in \mathcal{F}(\lambda) : 0 \le l(Q) < \varepsilon} Q. \tag{4.2.15}$$

В самом деле, в силу предложения 4.2.10 для заданной точки $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $\mathrm{D}_\lambda(x,S) < \varepsilon$ в том и только том случае, если существует куб $Q \in \mathcal{F}(\lambda)$ с длиной ребра $0 \le l(Q) < \varepsilon$. Это доказывает утверждение.

4.3. Краеугольные семейства кубов

Следующие данные предполагаются *фиксированными* на протяжении всего раздела:

(D.4.3.1) произвольные числа $n \in \mathbb{N}$ и $d \in (0,n]$;

(D.4.3.2) множество $S \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$.

Напомним определение 4.1.18. При $\lambda \in (0,1]$ положим для краткости $\mathcal{DF}(\lambda) := \mathcal{DF}_S(d,\lambda)$. В дальнейшем мы будем работать со специальными подсемействами семейства $\mathcal{DF}(\lambda)$.

Определение 4.3.1. При $\lambda \in (0,1]$ будем говорить, что семейство кубов $\mathcal{Q}$ является (d,λ)-*хорошим для* S, если выполнены следующие условия:

(1) семейство $\mathcal{Q}$ — двоичное неперекрывающееся d-почти покрытие множества S;

(2) $\mathcal{Q} \subset \mathcal{DF}(\lambda)$

Следующий результат — это удобная для наших целей модификация леммы 2.1 из работы Нетрусова [13]. Мы дадим полное доказательство, чтобы сделать изложение самозамкнутым. Кроме того, мы надеемся, что доказательство прояснит идеи, лежащие в основе результатов этого параграфа. Напомним определение 1.2.4.

Лемма 4.3.2. *Пусть куб $\overline{Q} \in \mathcal{D}_+$ удовлетворяет условию*

$$0 < \mathcal{DH}^d_\infty(\overline{Q} \cap S) < 1. \tag{4.3.3}$$

Тогда для любого $\lambda \in (0,1)$ существует семейство кубов $\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda) := \widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q}, \lambda) \subset \mathcal{D}$ такое, что

(1) $\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)$ является (d,λ)-хорошим для множества $\overline{Q} \cap S$;

(2) для любого куба $Q \in \widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)$

$$l(Q) \le \frac{l(\overline{Q})}{2}; \tag{4.3.4}$$

(3) для любого двоичного куба $Q \subset \overline{Q}$ справедливо условие упаковки типа Карлесона

$$\mathrm{H}^d(\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)|_Q) \le (l(Q))^d. \tag{4.3.5}$$

Доказательство. При заданном $\lambda \in (0,1)$ зафиксируем столь малое $\varepsilon > 0$, что

$$0 < \tau := \frac{\varepsilon}{1-\lambda} < 1. \tag{4.3.6}$$

Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Напомним определение 4.1.12. Для двоичного куба $K \subset \overline{Q}$, удовлетворяющего условию

$$0 < \mathcal{H}^d_\infty(K \cap S) < (l(K))^d, \tag{4.3.7}$$

пусть $\mathcal{Q}(K)$ – максимальное ε-оптимальное двоичное неперекрывающееся d-почти покрытие множества $K \cap S$. В силу (4.3.7) и предложения 4.1.20 (уменьшая при необходимости $\varepsilon > 0$) имеем

$$l(Q) \le \frac{l(K)}{2} \quad \text{при всех} \quad Q \in \mathcal{Q}(K). \tag{4.3.8}$$

Ключевое свойство семейства $\mathcal{Q}(K)$ состоит в том, что выполняется условие упаковки Карлесона. Более точно, по построению и по определению 4.1.12 для любого двоичного куба $Q \subset K$ имеем

$$\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}(K)|_Q) \le (l(Q))^d. \tag{4.3.9}$$

В самом деле, в противном случае, если для некоторого двоичного куба $Q \subset K$ неравенство (4.3.9) не выполнено, мы модифицируем семейство $\mathcal{Q}(K)$, включив в него куб Q и исключив все кубы $Q' \subset Q$, $Q' \in \mathcal{Q}(K)$. Это даст нам ε-оптимальное двоичное неперекрывающееся d-почти покрытие множества $K \cap S$. Но это противоречит максимальности семейства $\mathcal{Q}(K)$.

Шаг 2. Для двоичного куба $K \subset \overline{Q}$ положим

$$\mathcal{Q}^1(K) := \mathcal{Q}(K) \cap \mathcal{DF}(\lambda) \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathcal{Q}}^1(K) := \mathcal{Q}(K) \setminus \mathcal{Q}^1(K).$$

Используя определение 4.1.12 и субаддитивность $\mathcal{DH}^d_\infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+\varepsilon}\,\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}(K)) = \frac{1}{1+\varepsilon}\,\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^1(K)) + \frac{1}{1+\varepsilon}\,\mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^1(K)) \le \mathcal{DH}^d_\infty(K \cap S) \le \\ &\le \sum_{Q \in \mathcal{Q}^1(K)} \mathcal{DH}^d_\infty(Q \cap S) + \sum_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}^1(K)} \mathcal{DH}^d_\infty(Q \cap S) \le \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^1(K)) + \lambda\,\mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^1(K)). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Это, очевидно, даёт

$$\varepsilon\,\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^1(K)) \ge \big(1 - \lambda(1+\varepsilon)\big)\,\mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^1(K)). \tag{4.3.11}$$

Следовательно, используя (4.3.11), определение 4.1.12 и (4.3.6), получим

$$\mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^1(K)) \le \frac{\varepsilon}{(1-\lambda)(1+\varepsilon)}\,\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}(K)) \le \tau(l(K))^d. \tag{4.3.12}$$

Шаг 3. Далее рассуждаем по индукции. Предположим, что мы построили при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$ для всех $j \in \{1, \dots, k_0\}$ семейства кубов $\mathcal{Q}^j = \mathcal{Q}^j(\overline{Q})$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}^j = \widetilde{\mathcal{Q}}^j(\overline{Q})$ такие, что:

(i) $\mathcal{Q}^1 \subset \dots \subset \mathcal{Q}^{k_0}$ и $\widetilde{\mathcal{Q}}^1 \succ \dots \succ \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}$;

(ii) $\mathcal{Q}^{k_0} \subset \mathcal{DF}(\lambda)|_{\overline{Q}}$;

(iii) $\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0} \subset \mathcal{D}_+|_{\overline{Q}} \setminus \mathcal{DF}(\lambda)|_{\overline{Q}}$;

(iv) для любого двоичного куба $Q \subset \overline{Q}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{H}^d\big(\mathcal{Q}^{k_0}|_Q \cup \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q\big) \le (l(Q))^d; \tag{4.3.13}$$

(v) справедливо неравенство

$$\mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}) \le \tau^{k_0}(l(\overline{Q}))^d. \tag{4.3.14}$$

Действительно, применяя рассуждения предыдущего шага при $K = \overline{Q}$, получаем, что по крайней мере при $k_0 = 1$ пункты (i)–(v) проверены, а значит есть база индукции.

С учётом обозначений и конструкций шагов 1 и 2 положим

$$\mathcal{Q}^{k_0+1} := \mathcal{Q}^{k_0} \cup \bigcup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}} \mathcal{Q}^1(Q) \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0+1} := \bigcup_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}} \widetilde{\mathcal{Q}}^1(Q). \tag{4.3.15}$$

Ясно, что условия (i)–(iii) выполнены при замене k_0 на $k_0 + 1$. Остаётся проверить, что (4.3.13) и (4.3.14) справедливы при замене k_0 на $k_0 + 1$. По построению нетрудно видеть, что достаточно рассмотреть случай когда, $\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q \neq \emptyset$, поскольку в противном случае либо куб Q содержится в одном из кубов $Q' \in \mathcal{Q}^{k_0} \cup \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}$, и рассмотрение легко сводится к предыдущему шагу, либо имеем равенство $\mathcal{Q}^{k_0}|_Q = \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0+1}|_Q$, для которого уже все ясно по предположению индукции. Если же $\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q \neq \emptyset$, то применение (4.3.9) с заменой K на Q' даёт

$$\sum_{Q'' \colon \exists Q' \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q,\ Q'' \in \mathcal{Q}^1(Q') \cup \widetilde{\mathcal{Q}}^1(Q')} (l(Q''))^d \leq \sum_{Q' \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q} (l(Q'))^d = \mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q). \tag{4.3.16}$$

По определению ясно, что $\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0} \cap \mathcal{Q}^{k_0} = \emptyset$. Следовательно, объединяя (4.3.13), (4.3.15) и (4.3.16), получим

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^{k_0+1}|_Q \cup \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0+1}|_Q) = \sum_{Q'' \colon \exists Q' \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q,\ Q'' \in \mathcal{Q}^1(Q') \cup \widetilde{\mathcal{Q}}^1(Q')} (l(Q''))^d + \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^{k_0}|_Q) \leq \\ \leq \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^{k_0}|_Q) + \mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q) = \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^{k_0}|_Q \cup \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}|_Q) \leq (l(Q))^d \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

для любого двоичного куба $Q \subset K$. Поэтому, (4.3.13) справедливо при замене k_0 на $k_0 + 1$.

Комбинируя (4.3.12), (4.3.14), (4.3.15), мы выводим оценку

$$\mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0+1}) = \sum_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}} \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^1(Q)) \leq \tau\, \mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^{k_0}) \leq \tau^{k_0+1} (l(\overline{Q}))^d. \tag{4.3.18}$$

Шаг 4. В результате по индукции мы построим последовательности $\{\mathcal{Q}^k\}_{k \in \mathbb{N}} := \{\mathcal{Q}^k(\overline{Q})\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{\mathcal{Q}}^k\}_{k \in \mathbb{N}} := \{\widetilde{\mathcal{Q}}^k(\overline{Q})\}_{k \in \mathbb{N}}$ такие, что условия (i)–(v) выполнены при любом $k \in \mathbb{N}$ вместо фиксированного $k_0 \in \mathbb{N}$. Положим

$$\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}^k \subset \mathcal{DF}(\lambda)|_{\overline{Q}}. \tag{4.3.19}$$

Заметим также, что с учётом нашей конструкции оценка (4.3.18) влечёт за собой соотношения

$$\widetilde{\mathcal{Q}}^k \succ \widetilde{\mathcal{Q}}^{k+1} \quad \text{и} \quad \mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^k) < \tau^k (l(\overline{Q}))^d \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.3.20}$$

Кроме того,

$$\overline{Q} \cap S \setminus \bigcup_{Q \in \widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)} Q \subset \widetilde{\mathcal{Q}}^k \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, учитывая (4.3.20) и то, что $\tau \in (0,1)$, получим

$$\mathcal{H}^d_\infty\Big(\overline{Q} \cap S \setminus \bigcup_{Q \in \widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)} Q\Big) \le \varlimsup_{k\to\infty} \mathrm{H}^d(\widetilde{\mathcal{Q}}^k) = 0.$$

Следовательно, в силу (4.3.19) семейство $\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)$ является двоичным неперекрывающимся (d,λ)-толстым d-почти покрытием множества $S \cap \overline{Q}$. Это доказывает утверждение (1) леммы.

По построению утверждение (2) легко следует из неравенства (4.3.8) при $K = \overline{Q}$.

Наконец, из наших построений ясно, что $\mathcal{Q}^k \subset \mathcal{Q}^{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Комбинируя этот факт с (4.3.20) и используя неравенство (4.3.13), в котором k_0 заменено на $k \in \mathbb{N}$, получим

$$\mathrm{H}^d(\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)|_Q) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{H}^d\big(\mathcal{Q}^k|_Q \cup \widetilde{\mathcal{Q}}^k|_Q\big) \le (l(Q))^d \tag{4.3.21}$$

для любого двоичного куба $Q \subset \overline{Q}$. Этим проверяется утверждение (3) леммы. □

Следующее понятие будет играть ключевую роль в дальнейшем изложении.

Определение 4.3.22. При $\lambda \in (0,1]$ будем говорить, что последовательность семейств кубов $\{\widehat{\mathcal{Q}}^s(\lambda)\}_{s\in\mathbb{N}_0} := \{\widehat{\mathcal{Q}}^s_S(d,\lambda)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ является (d,λ)-*хорошей последовательностью для* S, если выполнены следующие условия:

(1) $\widehat{\mathcal{Q}}^0 := \{Q \in \mathcal{D}_0 : \mathcal{DH}^d_\infty(S \cap Q) > 0\}$;

(2) при любом $s \in \mathbb{N}$ семейство $\widehat{\mathcal{Q}}^s(\lambda)$ является (d,λ)-хорошим для S;

(3) $\widehat{\mathcal{Q}}^{s+1}(\lambda) \prec \widehat{\mathcal{Q}}^s(\lambda)$ для всех $s \in \mathbb{N}_0$;

(4) для любого $s \in \mathbb{N}_0$, любого куба $\overline{Q} \in \widehat{\mathcal{Q}}^s(\lambda)$ и любого двоичного куба $Q \subset \overline{Q}$

$$\sum_{Q' \in \widehat{\mathcal{Q}}^{s+1}(\lambda)|_Q} (l(Q'))^d \le \begin{cases} 2^{n-d}(l(Q))^d, & \text{если } Q = \overline{Q} \text{ и } Q \in \mathcal{DF}(1), \\ (l(Q))^d & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{4.3.23}$$

Теорема 4.3.24. *Для любого $\lambda \in (0,1)$ существует (d,λ)-хорошая для S последовательность семейств кубов $\{\widehat{\mathcal{Q}}^s(\lambda)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$.*

Доказательство. Разобьем доказательство на два шага.

Шаг 1. Зафиксируем произвольный куб $\overline{Q} \in \mathcal{D}_+$, удовлетворяющий условию

$$\mathcal{DH}^d_\infty(\overline{Q} \cap S) > 0,$$

и рассмотрим два случая.

В первом случае

$$\mathcal{DH}^d_\infty(\overline{Q}\cap S) < (l(\overline{Q}))^d.$$

Применим лемму 4.3.2 к кубу $\overline{Q}$ и получим (d,λ)-хорошее для $\overline{Q}\cap S$ семейство $\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q},\lambda)$, удовлетворяющее условиям (4.3.4) и (4.3.5).

Во втором случае

$$\mathcal{DH}^d_\infty(\overline{Q}\cap S) = (l(\overline{Q}))^d,$$

т.е. $\overline{Q}\in\mathcal{DF}(1)$. Разделим куб $\overline{Q}$ на 2^n конгруэнтных двоичных кубов. Пусть $\mathcal{K}_{\overline{Q}}$ – те из них, пересечения которых с множеством S имеют положительный $\mathcal{H}^d_\infty$-обхват. Положим $\mathcal{K}^g_{\overline{Q}} := \mathcal{K}_{\overline{Q}}\cap\mathcal{DF}(\lambda)$, $\mathcal{K}^b_{\overline{Q}} := \mathcal{K}_{\overline{Q}}\setminus\mathcal{K}^g_{\overline{Q}}$. Для каждого $\overline{Q}'\in\mathcal{K}^b_{\overline{Q}}$ применим лемму 4.3.2. Это даст семейства $\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q}',\lambda), \overline{Q}'\in\mathcal{K}^b_{\overline{Q}}$, удовлетворяющие условиям (1) и (2) леммы 4.3.2, в которых $\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)$ заменены на $\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q}',\lambda)$. Положим

$$\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q},\lambda) := \mathcal{K}^g_{\overline{Q}}\cup\bigcup_{\overline{Q}'\in\mathcal{K}^b_{\overline{Q}}}\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q}',\lambda).$$

По построению ясно, что

$$\mathcal{H}^d_\infty\Big(\overline{Q}\cap S\setminus\bigcup_{Q\in\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q},\lambda)}Q\Big)=0. \tag{4.3.25}$$

Кроме того, по построению

$$l(Q)=\frac{l(\overline{Q})}{2}\quad\text{для всех}\quad Q\in\mathcal{K}_{\overline{Q}}. \tag{4.3.26}$$

Используя (4.3.5) с заменой $\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q},\lambda)$ на $\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q}',\lambda)$, $\overline{Q}'\in\mathcal{K}^b_{\overline{Q}}$, учитывая, что $\#\big(\mathcal{K}^g_{\overline{Q}}\cup\mathcal{K}^b_{\overline{Q}}\big)\le 2^n$, и, наконец, используя (4.3.26), получим

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^d(\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q},\lambda)) &\le \sum_{\overline{Q}'\in\mathcal{K}^b_{\overline{Q}}}\mathrm{H}^d(\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q}',\lambda))+\mathrm{H}^d(\mathcal{K}^g_{\overline{Q}})\le \mathrm{H}^d(\mathcal{K}^b_{\overline{Q}})+\mathrm{H}^d(\mathcal{K}^g_{\overline{Q}})=\\ &= \#\big(\mathcal{K}^g_{\overline{Q}}\cup\mathcal{K}^b_{\overline{Q}}\big)\left(\frac{l(\overline{Q})}{2}\right)^d\le 2^{n-d}(l(\overline{Q}))^d. \end{aligned}\tag{4.3.27}$$

С другой стороны, по построению нетрудно видеть, что $\mathrm{H}^d(\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q},\lambda)|_Q)\le(l(Q))^d$ для любого куба $Q\subset\overline{Q}$ с длиной ребра $l(Q)<l(\overline{Q})$.

В итоге аналог формулы (4.3.23) справедлив при замене $\widehat{\mathcal{Q}}^{s+1}(\lambda)|_Q$ на $\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q},\lambda)$.

Шаг 2. Построим желаемую последовательность по индукции. В силу условия **(D.4.3.2)** ясно, что семейство $\widehat{\mathcal{Q}}^0(\lambda)$, состоящее из всех двоичных кубов $Q\in\mathcal{D}_0$, для каждого из которых $\mathcal{DH}^d_\infty(Q\cap S)>0$, непусто. Положим по определению

$$\widehat{\mathcal{Q}}^1(\lambda) := \bigcup_{\overline{Q}\in\widehat{\mathcal{Q}}^0(\lambda)}\widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q},\lambda)\subset\mathcal{DF}(\lambda).$$

Предположим, что мы уже построили при некотором $j_0 \in \mathbb{N}$ семейства $\widehat{\mathcal{Q}}^0(\lambda), \dots, \widehat{\mathcal{Q}}^{j_0}(\lambda)$ такие, что условия (1)–(4) определения 4.3.22 выполнены для всех $s \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$. Положим

$$\widehat{\mathcal{Q}}^{j_0+1}(\lambda) := \bigcup_{\overline{Q} \in \widehat{\mathcal{Q}}^{j_0}(\lambda)} \widehat{\mathcal{Q}}(\overline{Q}, \lambda) \subset \mathcal{DF}(\lambda). \tag{4.3.28}$$

В силу (4.3.25), (4.3.27), (4.3.28) условия (1)–(4) определения 4.3.22 выполнены для всех $s \in \{0, \dots, j_0\}$.

В итоге по индукции мы получаем требуемую последовательность $\{\widehat{\mathcal{Q}}^s(\lambda)\}_{s \in \mathbb{N}_0}$. □

Несмотря на то, что доказательство следующего результата элементарно, насколько нам известно, он никогда не был ранее сформулирован в таком виде в литературе. При $\lambda \in (0, 1)$ мы получим каноническое разбиение семейства $\mathcal{DF}(\lambda)$. На этот результат можно неформально смотреть как на естественное обобщение разбиения семейства всех двоичных кубов $\mathcal{D}_+$ на подсемейства $\mathcal{D}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 4.3.29. *Для любого $\lambda \in (0, 1)$ существует единственная последовательность $\{\mathcal{Q}^s(\lambda)\}_{s \in \mathbb{N}} := \{\mathcal{Q}^s_S(d, \lambda)\}_{s \in \mathbb{N}}$ такая, что выполнено следующее:*

($\mathcal{F}1$) $\mathcal{DF}(\lambda) = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}^s(\lambda)$;

($\mathcal{F}2$) *при любом $s \in \mathbb{N}$ семейство $\mathcal{Q}^s(\lambda)$ является (d, λ)-хорошим для S;*

($\mathcal{F}3$) $\mathcal{Q}^s(\lambda) \succ \mathcal{Q}^{s+1}(\lambda)$ *при любом $s \in \mathbb{N}$;*

($\mathcal{F}4$) *если для некоторых кубов $\overline{Q} \in \mathcal{Q}^s(\lambda)$ и $\underline{Q} \in \mathcal{Q}^{s+1}(\lambda)$ существует куб $Q \in \mathcal{D}_+$ такой, что*

$$\underline{Q} \subset Q \subset \overline{Q} \quad \text{и} \quad l(Q) \in (l(\underline{Q}), l(\overline{Q})),$$

то Q не принадлежит семейству $\mathcal{DF}(\lambda)$, т.е. $\mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S) < \lambda(l(Q))^d$.

Доказательство. проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего зафиксируем $\lambda \in (0, 1)$ и для произвольного куба $Q \in \mathcal{D}_0$ такого, что $\mathcal{DH}^d_\infty(Q \cap S) > 0$, через $\mathcal{Q}(Q, \lambda)$ обозначим семейство всех максимальных двоичных кубов $Q' \in \mathcal{DF}(\lambda)$, длины ребер которых строго меньше $l(Q)$. Тогда для любого $Q \in \mathcal{D}_0$, удовлетворяющего условию $\mathcal{DH}^d_\infty(Q \cap S) > 0$, имеют место следующие свойства:

(А) $\mathcal{Q}(Q, \lambda) \subset \mathcal{DF}(\lambda)$;

(Б) $\{Q\} \succ \mathcal{Q}(Q, \lambda)$;

(В)семейство $\mathcal{Q}(Q, \lambda)$ является (d, λ)-хорошим для $Q \cap S$.

Свойства (А) и (Б) очевидны по построению. Чтобы установить свойство (В), применим теорему 4.3.24 и зафиксируем (d,λ)-хорошую для S последовательность семейств кубов $\{\widehat{\mathcal{Q}}^s(\lambda)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$. Пусть $j_0\in\mathbb{N}_0$ — наименьшее число среди всех $j\in\mathbb{N}_0$ таких, что $\{Q\}\succ\widehat{\mathcal{Q}}^j(\lambda)$. По построению очевидно, что $\mathcal{Q}(\lambda)\succeq\widehat{\mathcal{Q}}^{j_0}(\lambda)$. Свойство (В) вытекает из того, что для любого куба $Q\in\mathcal{D}_0$, удовлетворяющего условию $\mathcal{DH}^d_\infty(Q\cap S)>0$, семейство $\widehat{\mathcal{Q}}^{j_0}(\lambda)|_Q$ является (d,λ)-хорошим для множества $S\cap Q$.

Шаг 2. Построим желаемую последовательность $\{\mathcal{Q}^s(\lambda)\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ по индукции.

База индукции. Положим

$$\mathcal{K}^0_{\mathrm{g}}:=\mathcal{D}_0\cap\mathcal{DF}(\lambda),\qquad \mathcal{K}^0_{\mathrm{b}}:=\bigl\{Q\in\mathcal{D}_0:0<\mathcal{DH}^d_\infty(Q\cap S)<\lambda\bigr\} \tag{4.3.30}$$

и определим

$$\mathcal{Q}^1(\lambda):=\bigcup_{Q\in\mathcal{K}^0_{\mathrm{b}}}\mathcal{Q}(Q,\lambda)\cup\mathcal{K}^0_{\mathrm{g}}. \tag{4.3.31}$$

Из построения немедленно следует, что семейство $\mathcal{Q}^1(\lambda)$ является (d,λ)-хорошим для S.

Шаг индукции. Предположим, что при некотором $j_0\in\mathbb{N}$ мы уже построили семейства $\mathcal{Q}^s(\lambda)$, $s\in\{1,\dots,j_0\}$. Положим по определению

$$\mathcal{Q}^{j_0+1}(\lambda):=\bigcup_{Q\in\mathcal{Q}^{j_0}(\lambda)}\mathcal{Q}(Q,\lambda). \tag{4.3.32}$$

Таким образом, по индукции мы построим семейства $\mathcal{Q}^s(\lambda)$ для всех $s\in\mathbb{N}$.

Шаг 3. Ясно, что

$$\mathcal{Q}^s(\lambda)\subset\mathcal{DF}(\lambda)\quad\text{и}\quad\mathcal{Q}^s(\lambda)\succ\mathcal{Q}^{s+1}(\lambda)\quad\text{при любом}\quad s\in\mathbb{N}.$$

Кроме того, при любом $s\in\mathbb{N}$ семейство $\mathcal{Q}^s(\lambda)$ является (d,λ)-хорошим для S. Это доказывает свойства $(\mathcal{F}2)$ и $(\mathcal{F}3)$ из условия теоремы.

Предположим теперь, что существуют число $j\in\mathbb{N}$, кубы $\overline{Q}\in\mathcal{Q}^j(\lambda)$, $\underline{Q}\in\mathcal{Q}^{j+1}(\lambda)$ и куб $Q\in\mathcal{D}$ такие, что

$$\underline{Q}\subset Q\subset\overline{Q}\quad\text{и}\quad l(Q)\in(l(\underline{Q}),l(\overline{Q})).$$

Заметим, что $Q\notin\mathcal{DF}(\lambda)$, поскольку в противном случае мы получим противоречие с максимальностью куба $\underline{Q}\in\mathcal{Q}(\overline{Q},\lambda)$. Для завершения доказательства заметим, что уже установленное свойство $(\mathcal{F}4)$ из условия теоремы вместе с (4.3.31), (4.3.32) даёт свойство $(\mathcal{F}1)$. □

Определение 4.3.33. При $\lambda\in(0,1)$ последовательность $\{\mathcal{Q}^s(\lambda)\}_{s\in\mathbb{N}}:=\{\mathcal{Q}^s_S(d,\lambda)\}_{s\in\mathbb{N}}$ назовем *каноническим разбиением семейства* $\mathcal{DF}(\lambda):=\mathcal{DF}_S(d,\lambda)$.

Следующий результат будет важен при доказательстве теоремы 4.4.35, однако мы полагаем, что он может представлять и самостоятельный интерес. Напомним определение 1.2.3.

Теорема 4.3.34. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$. Пусть $\{\widehat{\mathcal{Q}}^s(\lambda_1)\}_{s\in\mathbb{N}}$ является (d,λ_1)-хорошей последовательностью для S. Пусть $Q \in \mathcal{D}_+$, и пусть*

$$j_0 := \min\bigl\{j \in \mathbb{N}_0 : \widehat{\mathcal{Q}}^j(\lambda_1)|_Q \prec \{Q\}\bigr\}.$$

Тогда неравенство

$$\mathrm{H}^d(\mathcal{C}) \le \begin{cases} 2^{n-d}\frac{(l(Q))^d}{\lambda_2}, & Q \in \mathcal{DF}(1), \\ \frac{(l(Q))^d}{\lambda_2}, & Q \notin \mathcal{DF}(1), \end{cases} \tag{4.3.35}$$

справедливо для всякого семейства $\mathcal{C} \subset \mathcal{DF}(\lambda_2)$, удовлетворяющего следующим условиям:

(i) семейство $\mathcal{C}$ – неперекрывающееся;

(ii) $\{Q\} \succeq \mathcal{C} \succeq \widehat{\mathcal{Q}}^{j_0}(\lambda_1)|_Q$.

Доказательство. Заметим, что для всякого куба $Q' \in \mathcal{C}$ семейство $\widehat{\mathcal{Q}}^{j_0}(\lambda_1)|_{Q'}$ является (d,λ_1)-хорошим для множества $S \cap Q'$. Следовательно, принимая во внимание включение $\mathcal{C} \subset \mathcal{DF}(\lambda_2)$, и, используя (4.3.23), получим

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^d(\mathcal{C}) &\le \frac{1}{\lambda_2}\sum_{Q'\in\mathcal{C}} \mathcal{DH}^d_\infty(Q'\cap S) \le \frac{1}{\lambda_2}\sum_{Q'\in\mathcal{C}} \mathrm{H}^d\bigl(\widehat{\mathcal{Q}}^{j_0}(\lambda_1)|_{Q'}\bigr) \\ &\le \frac{1}{\lambda_2}\,\mathrm{H}^d\bigl(\widehat{\mathcal{Q}}^{j_0}(\lambda_1)|_Q\bigr) \le \frac{c}{\lambda_2}(l(Q))^d, \end{aligned} \tag{4.3.36}$$

где $c = 1$ в случае, если $Q \notin \mathcal{DF}(1)$, и $c = 2^{n-d}$ в случае, если $Q \in \mathcal{DF}(1)$. □

4.4. Основные результаты

Напомним, что при $\delta > 0$ для множества $S \subset \mathbb{R}^n$ его *δ-окрестность* определяется как

$$U_\delta(S) := \bigl\{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty < \delta \text{ для некоторого } x \in S\bigr\}. \tag{4.4.1}$$

Кроме того, диаметр множества измеряется с помощью расстояния, порождённого $\|\cdot\|_\infty$-нормой, то есть $\operatorname{diam} E := \sup\{\|x-y\|_\infty : x, y \in E\}$.

Мы начнём со следующего элементарного наблюдения. Напомним, что метрический пол и метрический потолок семейства множеств были определены в (4.1.4).

Предложение 4.4.2. *Пусть $\overline{Q}$ – произвольный куб в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств в $\mathbb{R}^n$ такое, что $\overline{\mu} := \overline{\mu}(\mathcal{F}) < l(\overline{Q})/2$. Тогда*

$$\mathcal{L}^n\Bigl(\bigcup_{F\in\mathcal{F}:F\cap\partial\overline{Q}\neq\emptyset} F\Bigr) \le n2^{n+1}(l(\overline{Q}))^{n-1}\overline{\mu}. \tag{4.4.3}$$

Доказательство. Любой n-мерный куб имеет $2n$ граней. При $i \in \{1, \dots, 2n\}$ обозначим i-ю грань куба $\overline{Q}$ через $\partial^i \overline{Q}$. Ясно, что для любого $\delta > 0$ будем иметь

$$U_\delta(\partial \overline{Q}) \subset \bigcup_{i=1}^{2n} U_\delta(\partial^i \overline{Q}). \tag{4.4.4}$$

Элементарные геометрические соображения показывают, что

$$\mathcal{L}^n(U_\delta(\partial^i \overline{Q})) \le 2(2\delta + l(\overline{Q}))^{n-1}\delta \quad \text{для любого} \quad i \in \{1, \dots, 2n\}. \tag{4.4.5}$$

Объединяя (4.4.4) и (4.4.5), получаем оценку

$$\mathcal{L}^n(U_\delta(\partial \overline{Q})) \le \sum_{i=1}^{2n} \mathcal{L}^n(U_\delta(\partial^i \overline{Q})) \le 4n(2\delta + l(\overline{Q}))^{n-1}\delta \quad \text{для любого} \quad \delta > 0. \tag{4.4.6}$$

Из (4.1.4) ясно, что если $F \cap \partial \overline{Q} \ne \emptyset$ для некоторого $F \in \mathcal{F}$, то $F \subset U_{(1+\epsilon)\overline{\mu}}(\partial Q)$ при достаточно малом $\epsilon > 0$. Следовательно, используя (4.4.6) при $\delta = \overline{\mu}$ и принимая во внимание, что $(1+\epsilon)\overline{\mu} \le 2^{-1} l(\overline{Q})$, получим желаемую оценку

$$\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{F \in \mathcal{F}: F \cap \partial Q \ne \emptyset} F \Big) \le \mathcal{L}^n(U_{\overline{\mu}}(\partial \overline{Q})) \le 4n(2\overline{\mu} + l(\overline{Q}))^{n-1}\overline{\mu} \le n 2^{n+1} (l(Q))^{n-1}\overline{\mu}.$$

□

Далее нам понадобится один вспомогательный результат, который может представлять и самостоятельный интерес.

Лемма 4.4.7. *Пусть $d \in (0, n)$, $\overline{c} > 1$ и $r > 1$. Тогда существует число $\overline{\delta} = \overline{\delta}(n, \overline{c}, r) > 0$ такое, что для любых $\tau > 0$, $\delta \in (0, \overline{\delta}]$ и любого не более чем счётного семейства $\mathcal{F}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$, обладающего свойствами*

(1) $\mathrm{H}^d(\mathcal{F}) < +\infty$;

(2) $\delta\tau \le \underline{\mu}(\mathcal{F}) \le \overline{\mu}(\mathcal{F}) \le \tau < +\infty$,

при $\mathrm{F} := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{L}^n(U_{r\delta\tau}(\mathrm{F})) \le \overline{c}\tau^{n-d}\,\mathrm{H}^d(\mathcal{F}). \tag{4.4.8}$$

Доказательство. Фиксируем $\theta > 1$ настолько близкое к 1 и $k^* \in \mathbb{N}$ настолько большое, что

$$\theta^n + \frac{([2r]+1)^n}{2^{k^*(n-d)}} < \overline{c}. \tag{4.4.9}$$

Положим теперь

$$\overline{\delta} := \frac{\theta - 1}{[2r]+1} \cdot 2^{-k^*}. \tag{4.4.10}$$

Зафиксируем $\tau > 0$, $\delta \in (0, \overline{\delta}]$ и произвольное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$, которые обладают свойствами (1), (2). Положим $\underline{\mu} := \underline{\mu}(\mathcal{F})$ и $\overline{\mu} := \overline{\mu}(\mathcal{F})$ для краткости. Поскольку в данной главе диаметр множества измеряется относительно расстояния, порождённого $\|\cdot\|_\infty$, очевидно, что для любого множества $F \in \mathcal{F}$ существует куб $Q(F) \supset F$ с длиной ребра $l(Q(F)) = \operatorname{diam} F$. Такой куб, вообще говоря, не единственный. Фиксируем выбор кубов $Q(F)$, $F \in \mathcal{F}$, и определим семейство

$$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(\mathcal{F}) := \big\{Q : Q = Q(F) \text{ для некоторого } F \in \mathcal{F}\big\}.$$

По построению ясно, что

$$\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}) = \mathrm{H}^d(\mathcal{F}), \qquad \underline{\mu}(\mathcal{Q}) = \underline{\mu}, \qquad \overline{\mu}(\mathcal{Q}) = \overline{\mu}. \tag{4.4.11}$$

Поскольку $l(Q) \geq \delta\tau$, легко видеть, что для любого куба $Q \in \mathcal{Q}$ существует константа $c(Q) \in (1, [2r] + 1]$ такая, что

$$U_{r\delta\tau}(\mathrm{F}) \subset \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} U_{r\delta\tau}(Q) \subset \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}} c(Q)Q. \tag{4.4.12}$$

Наша цель – произвести “умный” выбор констант $c(Q)$, $Q \in \mathcal{Q}$. Для этого мы разобьем семейство $\mathcal{Q}$ на два непересекающихся подсемейства. А именно, положим

$$\mathcal{Q}^1 := \big\{Q \in \mathcal{Q} : l(Q) > 2^{-k^*}\tau\big\}, \qquad \mathcal{Q}^2 := \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}^1. \tag{4.4.13}$$

Так как $\delta \in (0, \overline{\delta}]$, из (4.4.10) будем иметь $U_{r\delta\tau}(Q) \subset \theta Q$ для всех $Q \in \mathcal{Q}^1$. С другой стороны, поскольку $l(Q) \geq \delta\tau$ для всех $Q \in \mathcal{Q}$, ясно, что $U_{r\delta\tau}(Q) \subset ([2r] + 1)Q$ для всех $Q \in \mathcal{Q}^2$. Следовательно, включение (4.4.12) справедливо с константой

$$c(Q) = \begin{cases} \theta, & \text{если} \quad Q \in \mathcal{Q}^1, \\ [2r] + 1, & \text{если} \quad Q \in \mathcal{Q}^2. \end{cases} \tag{4.4.14}$$

Из (4.4.12)–(4.4.14) имеем

$$\mathcal{L}^n(U_{r\delta\tau}(\mathrm{F})) \leq \theta^n \,\mathrm{H}^n(\mathcal{Q}^1) + ([2r] + 1)^n \,\mathrm{H}^n(\mathcal{Q}^2). \tag{4.4.15}$$

Поскольку $d \in (0, n)$, из (4.1.4) и (4.4.13) мы получаем первую ключевую оценку

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{Q}^2) \leq \Big(\frac{\tau}{2^{k^*}}\Big)^{n-d} \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^2) \leq \Big(\frac{\tau}{2^{k^*}}\Big)^{n-d} \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}) = \Big(\frac{\tau}{2^{k^*}}\Big)^{n-d} \mathrm{H}^d(\mathcal{F}). \tag{4.4.16}$$

Аналогично мы получаем вторую ключевую оценку

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{Q}^1) \leq \tau^{n-d} \,\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^1) = \tau^{n-d} \,\mathrm{H}^d(\mathcal{F}). \tag{4.4.17}$$

Объединяя (4.4.15)–(4.4.17) и учитывая (4.4.9), получаем (4.4.8). □

Теперь мы готовы доказать относительно простой результат, который, однако, будет играть важную роль в доказательстве основных результатов данной главы. Грубо говоря, мы покажем, что если куб $\overline{Q}$ не является $(d, \overline{\lambda})$-толстым относительно данного множества S, то можно найти куб $\underline{Q} \subset \overline{Q}$ такой, что $\mathcal{H}^d_\infty(\underline{Q} \cap S)/(l(\underline{Q}))^d$ гораздо меньше, чем $\overline{\lambda}$, но при этом длина ребра $l(\underline{Q})$ разумным образом контролируема снизу.

Поскольку приводимое ниже доказательство весьма техническое, для удобства читателя мы неформально поясним некоторые идеи, лежащие в его основе. Грубо говоря, если $d \in (0, n)$ и куб $\overline{Q}$ не является $(d, \overline{\lambda})$-толстым, то для достаточного большого $k = k(d, \overline{\lambda}) \in \mathbb{N}$ можно построить семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}_k|_{\overline{Q}}$, состоящее из $\approx 2^{kn}$ кубов, такое, что

$$\sum_{Q \in \mathcal{F}} \mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S) \leq C(n) \mathcal{H}^d_\infty(\overline{Q} \cap S)$$

для некоторой универсальной константы $C(n) \geq 1$. Следовательно, если мы предположим, что $\mathcal{H}^d_\infty(Q \cap S)$ не мало для любого куба $Q \in \mathcal{F}$, и если k достаточно велико, то, принимая во внимание, что $d < n$, в силу элементарных соображений, связанных с подсчетом количества элементов в покрытии, мы получим противоречие с малостью $\mathcal{H}^d_\infty(\overline{Q} \cap S)$. Чтобы построить $\mathcal{F}$, нужно фиксировать достаточно малое $\varepsilon > 0$ и фиксировать ε-оптимальное покрытие $\mathcal{Q}$ множества $\overline{Q} \cap S$. Основная техническая трудность состоит в разбиении семейства $\mathcal{Q}$ на "большую" $\mathcal{Q}^b$ и "малую" $\mathcal{Q}^s$ части. Кубы $Q \in \mathcal{Q}^b$ имеют относительно большую длину ребра, но мера Лебега $\mathcal{L}^n$ их объединения относительно мала. Следовательно, нужно фиксировать $k \in \mathbb{N}$ так, что 2^{-k} примерно равно минимуму длин ребер кубов из семейства $\mathcal{Q}^b$, а затем отобрать кубы из семейства $\mathcal{D}_k|_{\overline{Q}}$, которые не пересекают кубы $Q \in \mathcal{Q}^b$.

Теорема 4.4.18. *Пусть $d \in (0, n)$ и $\overline{\lambda} \in (0, 1)$. Для любого $c > 1$ существует константа $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}(\overline{\lambda}, n, d, c) > 0$ такая, что для любых множества S и куба $\overline{Q}$, удовлетворяющих условиям*

$$l(\overline{Q}) \leq 1 \quad \text{и} \quad \mathcal{H}^d_\infty(S \cap \overline{Q}) < \overline{\lambda}(l(\overline{Q}))^d, \tag{4.4.19}$$

существует куб $\underline{Q} \subset \overline{Q}$ со следующими свойствами:

(i) $\underline{Q} \in \mathcal{D}_+$ *и* $\mathcal{H}^d(\underline{Q} \cap S) < \frac{\overline{\lambda}}{c}(l(\underline{Q}))^d$;

(ii) $l(\underline{Q}) \geq \underline{\kappa} l(\overline{Q})$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное множество S и куб $\overline{Q}$, удовлетворяющие условиям (4.4.19). Без ограничения общности мы можем предполагать, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$, поскольку

в противном случае утверждение тривиально. Так как $\overline{\lambda} \in (0,1)$, мы зафиксируем столь малое $\varepsilon \in (0,1/2)$ и $\overline{c} > 1$, столь близкое к 1, что

$$(1+\varepsilon)\overline{\lambda} < 1 \quad \text{и} \quad 1 - \overline{c}((1+\varepsilon)\overline{\lambda})^{n/d} > \frac{3}{4}(1-\overline{\lambda}^{n/d}). \tag{4.4.20}$$

Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. В силу того, что $\overline{Q} \notin \mathcal{F}_S(d,\overline{\lambda})$, существует ε-оптимальное покрытие $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_\varepsilon$ множества $\overline{Q} \cap S$, для которого

$$\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}) \le (1+\varepsilon)\overline{\lambda}(l(\overline{Q}))^d. \tag{4.4.21}$$

Следовательно, из (4.4.19)–(4.4.21) получаем

$$\overline{\mu} := \overline{\mu}(\mathcal{Q}) \le \big(\mathrm{H}^d(\mathcal{Q})\big)^{1/d} \le (\overline{\lambda}(1+\varepsilon))^{1/d} l(\overline{Q}) =: \tau < 1. \tag{4.4.22}$$

Шаг 2. Пусть $\overline{\delta} = \overline{\delta}(n,\overline{c},3) > 0$ – то же число, что и в лемме 4.4.7. Положим

$$\underline{\kappa} := \min\Big\{\frac{\overline{\delta}}{3}, \frac{\overline{\lambda}^{n/d}}{n2^{n+3}}, \frac{1}{2}\bigg(\frac{1-\overline{\lambda}^{n/d}}{3^{n+1}c}\bigg)^{1/(n-d)}\Big\}. \tag{4.4.23}$$

Разобьем семейство $\mathcal{Q}$ на два непересекающихся подсемейства. А именно, определим подсемейства “больших” и “малых” кубов семейства $\mathcal{Q}$, полагая соответственно

$$\mathcal{Q}^b_{\underline{\kappa}} := \big\{Q \in \mathcal{Q} : l(Q) \ge \underline{\kappa}\tau\big\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}} := \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}^b_{\underline{\kappa}}. \tag{4.4.24}$$

Положим

$$F := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}^b_{\underline{\kappa}}} Q.$$

Основная идея — показать, что из (4.4.23) для

$$k := [-\log_2(\underline{\kappa}\tau)] \tag{4.4.25}$$

следует, что найдется достаточно много кубов из семейства $\mathcal{D}_k$ внутри $\overline{Q}$, которые не пересекаются ни с F, ни с ∂Q. Положим

$$\mathcal{F}^1_k := \big\{Q \in \mathcal{D}_k : Q \cap F \ne \emptyset\big\}, \qquad \mathcal{F}^2_k := \big\{Q \in \mathcal{D}_k : Q \cap \partial\overline{Q} \ne \emptyset\big\}$$
$$\mathcal{F}^3_k := \big\{Q \in \mathcal{D}_k : Q \subset \overline{Q},\ Q \notin (\mathcal{F}^1_k \cup \mathcal{F}^2_k)\big\}.$$

Шаг 3. В силу (4.4.25) имеем $2^{-k} \le 2\underline{\kappa}\tau$. Следовательно, $Q \subset U_{3\underline{\kappa}\tau}(F)$ для любого куба $Q \in \mathcal{F}^1_k$. Применим лемму 4.4.7 при $\mathcal{F} = \mathcal{Q}^b_{\underline{\kappa}}$, $\delta = \underline{\kappa}$, $r = 3$ и учтем (4.4.21),(4.4.22). Это даёт

$$V^1_k := \mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{Q \in \mathcal{F}^1_k} Q\Big) \le \mathcal{L}^n(U_{3\underline{\kappa}\tau}(F)) \le \overline{c}\tau^{n-d}\,\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}) \le \overline{c}((1+\varepsilon)\overline{\lambda})^{n/d}(l(\overline{Q}))^n. \tag{4.4.26}$$

С другой стороны, используя предложение 4.4.2 и принимая во внимание первое неравенство в (4.4.20), получаем

$$V_k^2 := \mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}_k^2} Q\Big) \le n2^{n+1}(l(\overline{Q}))^{n-1}\underline{\kappa}\tau \le n2^{n+1}\underline{\kappa}(l(\overline{Q}))^n. \tag{4.4.27}$$

Используя (4.4.23), мы продолжим (4.4.27) и получим

$$V_k^2 \le \frac{(\overline{\lambda})^{n/d}}{4}(l(\overline{Q}))^n. \tag{4.4.28}$$

Шаг 4. По самому определению семейства $\mathcal{F}_k^3$ мы, очевидно, имеем следующий факт. Если $Q\in\mathcal{F}_k^3$ и $Q'\in\mathcal{Q}$ таков, что $Q'\cap Q\cap S\neq\emptyset$, то $Q'\in\mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}}$ и

$$\sum_{Q'\in\mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}}:Q'\cap Q\cap S\neq\emptyset}(l(Q'))^d = \sum_{Q'\in\mathcal{Q}:Q'\cap Q\cap S\neq\emptyset}(l(Q'))^d.$$

Мы используем это наблюдение и учтем, что $\mathcal{Q}$ является покрытием множества $\overline{Q}\cap S$. Следовательно, по определению обхвата по Хаусдорфу ясно, что для любого куба $Q\in\mathcal{F}_k^3$

$$\mathcal{H}^d_\infty(Q\cap S) \le \sum_{Q'\in\mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}}:Q'\cap Q\cap S\neq\emptyset}(l(Q'))^d. \tag{4.4.29}$$

Из (4.4.24) и (4.4.25) следует, что

$$2^{-k}\ge l(Q) \quad \text{для любого куба} \quad Q\in\mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}}.$$

Следовательно, так как $\mathcal{F}_k^3$ – неперекрывающееся семейство, каждый куб $Q'\in\mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}}$ имеет общие точки не более чем с 3^n кубами из $\mathcal{F}_k^3$. Следовательно, используя (4.4.29), получим

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}_k^3}\mathcal{H}^d_\infty(Q\cap S) \le \sum_{Q\in\mathcal{F}_k^3}\sum_{Q'\in\mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}}:Q'\cap Q\cap S\neq\emptyset}(l(Q'))^d \le 3^n\,\mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}}). \tag{4.4.30}$$

С другой стороны, так как семейство $\mathcal{F}_k^3$ состоит из двоичных неперекрывающихся кубов с длиной ребра 2^{-k}, ясно, что число кубов в семействе $\mathcal{F}_k^3$ можно вычислить по формуле

$$\#\mathcal{F}_k^3 = 2^{kn}\,\mathrm{H}^n(\mathcal{F}_k^3) = 2^{kn}\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}_k^3} Q\Big).$$

Из (4.4.20), (4.4.26), (4.4.28) следует, что

$$\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{F}_k^3} Q\Big) \ge (l(\overline{Q}))^n - V_k^1 - V_k^2 \ge \frac{1-\overline{\lambda}^{n/d}}{2}(l(\overline{Q}))^n.$$

В результате мы получаем

$$\#\mathcal{F}_k^3 \ge 2^{kn}\frac{1-\overline{\lambda}^{n/d}}{2}(l(\overline{Q}))^n. \tag{4.4.31}$$

Шаг 5. Если мы предположим, что $\mathcal{F}_k^3 \subset \mathcal{F}_S(d, \overline{\lambda}/c)$, то, собирая вместе (4.4.21), (4.4.24), (4.4.25), (4.4.30) и (4.4.31), получим

$$
\begin{aligned}
(1+\varepsilon)\overline{\lambda}(l(\overline{Q}))^d &\geq \mathrm{H}^d(\mathcal{Q}^s_{\underline{\kappa}}) \geq \frac{1}{3^n}\frac{\overline{\lambda}}{c}\cdot 2^{-kd}\,\#\mathcal{F}_k^3 > \frac{\overline{\lambda}}{2c}2^{k(n-d)}\frac{1-\overline{\lambda}^{n/d}}{3^n}(l(\overline{Q}))^n \\
&\geq \frac{\overline{\lambda}(1-\overline{\lambda}^{n/d})}{2c\cdot 3^n}\Big(\frac{l(\overline{Q})}{2\underline{\kappa}\tau}\Big)^{n-d}(l(\overline{Q}))^d.
\end{aligned} \tag{4.4.32}
$$

Используя (4.4.32) и принимая во внимание определение параметра τ, данное в (4.4.22), получим

$$
(1+\varepsilon)((1+\varepsilon)\overline{\lambda})^{(n-d)/d}\underline{\kappa}^{n-d} \geq \frac{1-\overline{\lambda}^{n/d}}{c\cdot 2^{n-d+1}\cdot 3^n}.
$$

Следовательно, используя первое неравенство в (4.4.20), получим (напомним, что $\varepsilon \in (0, 1/2)$)

$$
\underline{\kappa}^{n-d} > \frac{1-\overline{\lambda}^{n/d}}{c\cdot 3^{n+1}2^{n-d}}.
$$

Это неравенство противоречит (4.4.23).

Доказательство завершено. □

Следующее понятие, которое уже было упомянуто во введении, даёт естественное обобщение понятия пористых кубов.

Определение 4.4.33. Для множества $S \subset \mathbb{R}^n$, куба Q и параметра $\gamma \in (0, 1]$ скажем, что множество $\Omega \subset Q$ является (S, γ)-*полостью* куба Q, если

$$
\Omega \subset Q \setminus S \quad \text{и} \quad \mathcal{L}^n(\Omega \setminus S) \geq \gamma(l(Q))^n.
$$

Будем говорить, что куб Q является (S, γ)-*полым*, если существует (S, γ)-полость Ω куба Q.

Нам понадобятся некоторые обозначения. Для чисел $d \in (0, n)$, $\lambda \in (0, 1)$, $r \geq 1$, множества $S \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$, и любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ определим при любом $\varkappa \in (0, 1]$ множество

$$
\Omega_\varkappa(Q, r) := \Omega_\varkappa(Q, d, \lambda, r) := Q \setminus \bigcup\{rQ' : Q' \in \mathcal{DF}_S(d, \lambda) \text{ и } l(Q') \leq \varkappa l(Q)\}. \tag{4.4.34}
$$

Теорема 4.4.35. *Пусть $d \in (0, n)$, $\lambda \in (0, 1)$ и $r \geq 1$. Тогда для любого $\gamma \in (0, 1 - 2^{d-n})$ существует число $\overline{\varkappa} = \overline{\varkappa}(\gamma, n, d, \lambda, r) \in (0, 1)$ такое, что для любого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и любого куба $\overline{Q} = Q_{k,m} \in \mathcal{D}_+$, удовлетворяющего условию*

$$
\mathcal{DH}^d_\infty(\overline{Q} \cap S) < (l(\overline{Q}))^d, \tag{4.4.36}
$$

множества $\Omega_\varkappa(\overline{Q}, d, \lambda, r)$ являются (S, γ)-полостями куба $\overline{Q}$ при всех $\varkappa \in (0, \overline{\varkappa})$.

Доказательство. Зафиксируем множество $S \subset \mathbb{R}^n$ и куб $\overline{Q} = Q_{k,m} \in \mathcal{D}_+ \notin \mathcal{DF}_S(d,1)$. Без ограничения общности предположим, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$, поскольку в противном случае утверждение тривиально. Мы также зафиксируем параметр $\gamma \in (0, 1 - 2^{d-n})$. В этом доказательстве положим для краткости $\mathcal{DF} := \mathcal{DF}_S(d,\lambda)$. Пусть $\{\widehat{\mathcal{Q}}^s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — произвольная (d,λ)-хорошая для S последовательность. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Фиксируем число $\overline{c} > 1$, столь близкое к 1, что

$$\frac{\overline{c}}{2^{n-d}} < \frac{1}{2}(1 - \gamma + 2^{d-n}). \tag{4.4.37}$$

Пусть $\overline{\delta} = \overline{\delta}(\overline{c}, n, r)$ то же, что и в лемме 4.4.7. Теперь зафиксируем наименьшее $k \in \mathbb{N}$, для которого

$$2^{-k} < \overline{\delta} \quad \text{и} \quad \frac{r^d}{2^{k(n-d)}\lambda} + \frac{n2^{n+1}}{2^k} < \frac{1}{2}(1 - \gamma - 2^{d-n}). \tag{4.4.38}$$

Шаг 2. Положим

$$s_0 := \min\bigl\{s \in \mathbb{N}_0 : \{\overline{Q}\} \succ \widehat{\mathcal{Q}}^{s+1}|_{\overline{Q}}\bigr\}. \tag{4.4.39}$$

Поскольку $\overline{Q} \in \mathcal{D}_+ \notin \mathcal{DF}_S(d,1)$, в силу (4.3.23) имеем

$$\mathrm{H}^d\bigl(\widehat{\mathcal{Q}}^{s_0+1}|_{\overline{Q}}\bigr) \le (l(\overline{Q}))^d. \tag{4.4.40}$$

Шаг 3. Рассмотрим семейство

$$\mathcal{K} := \bigl\{Q \in \mathcal{DF} :\ rQ \cap \overline{Q} \ne \emptyset,\ l(rQ) \le 2^{-k-1} l(\overline{Q})\bigr\}.$$

Разобьем $\mathcal{K}$ на три подсемейства. А именно, положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^1 &:= \bigl\{Q \in \mathcal{K} : \operatorname{int} Q \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}\bigr\},\\
\mathcal{K}^2 &:= \bigl\{Q \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^1 : \exists \widehat{Q} \in \widehat{\mathcal{Q}}^{s_0+1},\ \widehat{Q} \subset Q\bigr\},\\
\mathcal{K}^3 &:= \bigl\{Q \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^1 : \exists \widehat{Q} \in \widehat{\mathcal{Q}}^{s_0+1},\ Q \subset \widehat{Q},\ l(Q) < l(\widehat{Q})\bigr\}.
\end{aligned} \tag{4.4.41}$$

Непосредственно из построения следует, что

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^1 \cup \mathcal{K}^2 \cup \mathcal{K}^3. \tag{4.4.42}$$

Шаг 4. Используя предложение 4.4.2, получим

$$\mathcal{L}^n\Bigl(\bigcup_{Q\in\mathcal{K}^1} (rQ \cap \overline{Q})\Bigr) \le n2^{n+1}(l(\overline{Q}))^n \frac{1}{2^k}. \tag{4.4.43}$$

Шаг 5. Пусть $\overline{K}^2 \subset \mathcal{K}^2$ – семейство всех максимальных (относительно включения) двоичных кубов из семейства $\mathcal{K}^2$. Очевидно,

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{K}^2} Q \subset \bigcup_{Q\in\overline{K}^2} Q. \tag{4.4.44}$$

Рассмотрим также семейство

$$\mathcal{C} := \overline{K}^2 \cup \big\{Q \in \widehat{Q}^{s_0+1}|_{\overline{Q}} : \operatorname{int} Q \cap \operatorname{int} Q' = \emptyset \ \text{ для любого куба } Q' \in \overline{K}^2\big\}.$$

Воспользуемся включением (4.4.44), затем учтем, что $l(Q) \le 2^{-k} l(\overline{Q})$ для всех $Q \in \overline{K}^2$, и, наконец, применим теорему 4.3.34 при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. В результате получим

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{K}^2} rQ\Big) \le \mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{Q\in\overline{K}^2} rQ\Big) \le r^n \operatorname{H}^n(\overline{K}^2) \\ &\le r^d\Big(\frac{l(\overline{Q})}{2^k}\Big)^{n-d} \operatorname{H}^d(\overline{K}^2) \le r^d\Big(\frac{l(\overline{Q})}{2^k}\Big)^{n-d} \operatorname{H}^d(\mathcal{C}) \le \frac{r^d}{2^{k(n-d)}\lambda}(l(\overline{Q}))^n. \end{aligned} \tag{4.4.45}$$

Шаг 6. Пусть $\widehat{\mathcal{Q}} \subset \widehat{\mathcal{Q}}^{s_0+1}|_{\overline{Q}}$ – семейство, состоящее из всех кубов $\widehat{Q}$, для каждого из которых существует куб $Q \in \mathcal{K}^3$ такой, что $Q \subset \widehat{Q}$ и $l(Q) < l(\widehat{Q})$. Полагая $\tau := 2^{-1} l(\overline{Q})$, в силу (4.4.39) получим

$$\overline{\mu}(\widehat{\mathcal{Q}}) \le \overline{\mu}\big(\widehat{\mathcal{Q}}^{s_0+1}|_{\overline{Q}}\big) \le \tau. \tag{4.4.46}$$

Используя первое неравенство в (4.4.38), будем иметь

$$\bigcup_{Q\in\mathcal{K}^3} rQ \subset U_{r\bar{\delta}\tau}\Big(\bigcup_{\widehat{Q}\in\widehat{\mathcal{Q}}} \widehat{Q}\Big). \tag{4.4.47}$$

Используем (4.4.47), затем применим лемму 4.4.7 и, наконец, воспользуемся (4.4.40). Это приводит к оценке

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{Q\in\mathcal{K}^3} rQ\Big) &\le \mathcal{L}^n\Big(U_{r\bar{\delta}\tau}\Big(\bigcup_{\widehat{Q}\in\widehat{\mathcal{Q}}} \widehat{Q}\Big)\Big) \le \overline{c}\Big(\frac{l(\overline{Q})}{2}\Big)^{n-d} \operatorname{H}^d(\widehat{\mathcal{Q}}) \\ &\le \overline{c}\Big(\frac{l(\overline{Q})}{2}\Big)^{n-d} \operatorname{H}^d\big(\widehat{\mathcal{Q}}^{s_0+1}|_{\overline{Q}}\big) \le \frac{\overline{c}}{2^{n-d}}(l(\overline{Q}))^n. \end{aligned} \tag{4.4.48}$$

Шаг 7. Положим $\overline{\varkappa} := 2^{-k-1} r^{-1}$. Собирая вместе оценки (4.4.37), (4.4.38), (4.4.43), (4.4.45), (4.4.48), получим

$$\mathcal{L}^n\big(\overline{Q} \setminus \Omega_{\overline{\varkappa}}(\overline{Q}, d, \lambda, r)\big) \le (1-\gamma)(l(\overline{Q}))^n. \tag{4.4.49}$$

Принимая во внимание, что $\Omega_{\overline{\varkappa}}(\overline{Q}, d, \lambda, r) \subset \Omega_{\varkappa}(\overline{Q}, d, \lambda, r)$ при всех $\varkappa \in (0, \overline{\varkappa})$, завершаем доказательство. $\square$

Теперь мы готовы доказать *первый основной результат.* Напомним, что (d,λ)-толстая δ-окрестность произвольного множества $S\subset\mathbb{R}^n$ была определена в (4.0.8).

Теорема 4.4.50. *Пусть $d\in[0,n)$, $\overline{\lambda}\in(0,1)$ и $\lambda\in(0,1)$. Тогда существуют константы $\underline{\gamma}=\underline{\gamma}(n,d,\overline{\lambda})\in(0,1]$ и $\overline{\delta}=\overline{\delta}(n,d,\lambda,\overline{\lambda})\in(0,1)$ такие, что для любого множества $S\subset\mathbb{R}^n$, любого куба $\overline{Q}$ с длиной ребра $l=l(\overline{Q})\in(0,1]$, удовлетворяющего условию $\mathcal{H}^d_\infty(\overline{Q}\cap S)<\overline{\lambda}l^d$, и любого $\delta\in(0,\overline{\delta}]$ множество*

$$W_{\delta l}(\overline{Q}):=\overline{Q}\setminus S_{\delta l}(d,\lambda) \tag{4.4.51}$$

является $(S,\underline{\gamma})$-полостью куба Q.

Доказательство. Случай $d=0$ очевиден, поэтому далее считаем, что $d\in(0,n)$. Фиксируем произвольные множество $S\subset\mathbb{R}^n$ и куб $\overline{Q}=Q_l(x)$, удовлетворяющие предположениям теоремы. Применение теоремы 4.4.18 с константой $c=3^n$ даёт существование константы $\underline{\kappa}:=\underline{\kappa}(\overline{\lambda},n,d,3^n)$ и куба $\underline{Q}\in\mathcal{D}_+$ с длиной ребра $l(\underline{Q})\geq\underline{\kappa}l(\overline{Q})$ таких, что $\mathcal{H}^d_\infty(\underline{Q}\cap S)<\frac{\overline{\lambda}}{3^n}l(\underline{Q})$. В силу замечания 4.1.8 имеем $\mathcal{DH}^d_\infty(\underline{Q}\cap S)<\overline{\lambda}l(\underline{Q})$. Следовательно, по теореме 4.4.35 существует константа $\overline{\varkappa}:=\overline{\varkappa}((1-2^{d-n})/2,n,d,\lambda/3^n,3)$ такая, что

$$\mathcal{L}^n\Big(\Omega_{\overline{\varkappa}}\Big(\underline{Q},d,\frac{\lambda}{3^n},3\Big)\Big)\geq\frac{1-2^{d-n}}{2}(l(\underline{Q}))^n. \tag{4.4.52}$$

В силу предложения 4.1.22 для любого куба $Q\in\mathcal{F}_S(d,\lambda)$ существует куб $Q'\in\mathcal{D}_j$ с $j=[-\log_2 l(Q)]$ такой, что $Q'\in\mathcal{DF}_S(d,\lambda/3^n)$. Очевидно, $Q\subset 3Q'$. Следовательно, полагая

$$\overline{\delta}:=\overline{\delta}(n,d,\overline{\lambda},\lambda):=\underline{\kappa}(\overline{\lambda},n,d,3^n)\overline{\varkappa}\Big(\frac{1-2^{d-n}}{2},n,d,\frac{\lambda}{3^n},3\Big)=\underline{\kappa}\overline{\varkappa},$$

для любого $\delta\in(0,\overline{\delta})$ будем иметь

$$W_{\delta l}(\overline{Q},d,\lambda)\supset\Omega_{\overline{\varkappa}}\Big(\underline{Q},d,\frac{\lambda}{3^n},3\Big). \tag{4.4.53}$$

Теперь положим

$$\underline{\gamma}(\overline{\lambda},n,d)=\frac{1-2^{d-n}}{2}(\underline{\kappa}(\overline{\lambda},n,d,2^n))^n.$$

В результате заключаем, что

$$\mathcal{L}^n(W_{\delta l}(\overline{Q},d,\lambda))\geq\mathcal{L}^n\Big(\Omega_{\overline{\varkappa}}\Big(\underline{Q},d,\frac{\lambda}{3^n},3\Big)\Big)\geq\underline{\gamma}(\overline{\lambda},n,d)(l(\overline{Q}))^n. \tag{4.4.54}$$

Доказательство завершено. □

Следует сделать несколько замечаний, проясняющих теорему 4.4.50.

Замечание 4.4.55. Из доказательства теоремы 4.4.50 вытекают равенства

$$\lim_{\overline{\lambda}\to 1}\underline{\gamma}(n,d,\overline{\lambda})=0,\qquad \lim_{\overline{\lambda}\to 1}\overline{\delta}(n,d,\lambda,\overline{\lambda})=0,\qquad \lim_{\lambda\to 0}\overline{\delta}(n,d,\lambda,\overline{\lambda})=0.$$

Замечание 4.4.56. Заметим, что если $\overline{Q}\setminus S_{\delta l}(d,\lambda)\neq\emptyset$, то существует шар в псевдометрике $\rho_{S,d,\lambda}$ внутри $\mathbb{R}^n\setminus S$. В силу замечания 4.2.12 $\rho_{S,0,\lambda}(x,y)=\|x-y\|_\infty$ при $x,y\in\mathbb{R}^n$. Следовательно, в случае $d=0$ условие $\overline{Q}\setminus S_{\delta l}(0,\lambda)\neq\emptyset$ эквивалентно $(S,\|\cdot\|_\infty)$-пористости куба $2\overline{Q}$.

Замечание 4.4.57. Мы покажем в примере 4.5.3, что условие $d<n$ существенно и не может быть отброшено.

Замечание 4.4.58. Легко показать, что если $d\in(0,1]$, $\overline{\lambda}\in(0,1)$, $S\subset\mathbb{R}^n$ – непустое множество, а куб $\overline{Q}=Q_l(x)$ с длиной ребра $l\in(0,1]$ таков, что $\overline{Q}\notin\mathcal{F}_S(d,\overline{\lambda})$, то куб $\overline{Q}$ является $(S,1-\overline{\lambda}^{n/d})$-полым. В самом деле, по определению 4.1.14 существует не более чем счётное покрытие $\mathcal{U}$ множества $\overline{Q}\cap S$ такое, что $\mathrm{H}^d(\mathcal{U})<\overline{\lambda}l^d$. Для любого множества $U\in\mathcal{U}$ существует куб $Q(U)\supset U$ с длиной ребра $l(Q)=\operatorname{diam}U$. Ясно, что $l(Q(U))<\overline{\lambda}^{1/d}l$ для любого множества $U\in\mathcal{U}$. Отсюда получается оценка

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{U})<\overline{\lambda}^{n/d-1}l^{n-d}\,\mathrm{H}^d(\mathcal{U})\leq\overline{\lambda}^{n/d}l^n. \tag{4.4.59}$$

Так как $\overline{\lambda}<1$, требуемый результат следует из (4.4.59) и свойства субаддитивности меры $\mathcal{L}^n$.

Очевидно, что существует огромная разница между элементарным наблюдением, сделанным выше, и теоремой 4.4.50. Первое не даёт какой-либо информации о структуре полостей в кубах, пересечения которых с S имеют относительно малый d-обхват по Хаусдорфу. С другой стороны, говоря неформально, теорема 4.4.50 утверждает, что соответствующие полости могут быть выбраны так, что они будут находиться на некоторой "ненулевой глубине" в множестве $\mathbb{R}^n\setminus S$ относительно специально подобранного расстояния.

Теперь мы покажем, что теорема 4.4.50 допускает существенное уточнение в контексте d-толстых множеств, тем самым получим естественное обобщение предложения 4.0.1.

Теорема 4.4.60. *Пусть $d\in[0,n)$, $\lambda\in(0,1)$. Для любого $\overline{\lambda}\in(0,1)$ существует константа $\underline{\tau}=\underline{\tau}(n,d,\lambda,\overline{\lambda})\in(0,1)$ такая, что для любого множества $S\in\mathcal{LCR}^d(\lambda)$ любой куб $\overline{Q}$ с длиной ребра $l(\overline{Q})\in(0,1]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(\overline{Q}\cap S)<\overline{\lambda}(l(\overline{Q}))^d$ является $(S,\underline{\tau})$-пористым.*

Доказательство. Случай $d=0$ очевиден, поэтому далее считаем, что $d\in(0,n)$. Так как S является (d,λ)-толстым множеством, в силу (4.2.13) имеем (см. обозначение (4.0.8)) $S_{2\varepsilon}(d,\lambda)\supset U_\varepsilon(S)$ для любого $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2}]$. По теореме 4.4.50 это означает, что $\overline{Q}\setminus U_{\delta l}(S)\neq\emptyset$ для любого $\delta\in(0,\overline{\delta}]$. Полагая $\underline{\tau}:=\underline{\tau}(n,d,\overline{\lambda},\lambda)=\overline{\delta}(n,d,\overline{\lambda},\lambda)/2$ и беря произвольную точку $x^*\in\overline{Q}\setminus U_{\delta l}(S)$, мы получим $Q_{\underline{\tau}}(x^*)\subset\overline{Q}\setminus S$, завершая доказательство. □

4.5. Примеры

В этом заключительном параграфе мы приведем элементарные примеры, иллюстрирующие точность основных результатов.

Следующий пример показывает, что условие d-толстости в теореме 4.4.60 не может быть отброшено.

Пример 4.5.1. Пусть $K \subset [0,1]$ — множество Кантора, полученное делением отрезков на три равные части. Для $j \in \mathbb{N}$ определим $K_j := \{3^{-j}x : x \in K\}$ и $S_j := \cup_{i=0}^{2^j-1}(\frac{i}{2^j} + K_{2j}$. Очевидно, что при $j \in \mathbb{N}$ максимальный диаметр замкнутых одномерных кубов $Q \subset [0,1] \setminus S_j$ не превосходит 2^{-j}. Если $d = \ln 2/\ln 3$, мы получим

$$\mathcal{H}^d(S_j) \le \frac{2^j}{2^{2j}} \to 0, \qquad j \to \infty. \tag{4.5.2}$$

Наконец, определим множество

$$S := \bigcup_{j=0}^{\infty}\Big(\Big(1 - \frac{1}{2^j}\Big) + \frac{1}{2^{j+1}}S_{j+1}\Big),$$

где $cS_{j+1} = \{cx : x \in S_{j+1}\}$, $c > 0$. Из (4.5.2) следует, что множество S не является (d,λ)-толстым ни при каком $\lambda \in (0,1)$. С другой стороны, любой двоичный интервал $[1-2/2^j, 1-1/2^j]$, $j \in \mathbb{N}$, может быть (S,τ)-пористым только при $\tau < 2^{-j}$.

Теперь мы покажем, что ограничение $d < n$ в теореме 4.4.50 не может быть отброшено.

Пример 4.5.3. При $j \in \mathbb{N}$ положим $S_j := \cup_{i=0}^{2^j-1}[\frac{i}{2^j}, \frac{i}{2^j} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2^j}]$. Определим множество

$$S := \bigcup_{j=0}^{\infty}\Big(\Big(1 - \frac{1}{2^j}\Big) + \frac{1}{2^{j+1}}S_{j+1}\Big).$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{H}^1_\infty\Big(\Big[1 - \frac{2}{2^j}, 1 - \frac{1}{2^j}\Big] \cap S\Big) < \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^j} \quad \text{для любого} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4.5.4}$$

С другой стороны, для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\Big[1 - \frac{2}{2^j}, 1 - \frac{1}{2^j}\Big] \setminus \bigcup_{Q' : l(Q') \le 2^{-2j},\ Q' \in \mathcal{F}_S(1,1/10)} Q' = \emptyset. \tag{4.5.5}$$

Это показывает, что утверждение теоремы 4.4.50 неверно при $d = n = 1$ и $\lambda = 1/10$.

Глава 5. ПОЧТИ ТОЧНОЕ ОПИСАНИЕ СЛЕДОВ ПРОСТРАНСТВ $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ НА КОМПАКТАХ

Несмотря на большую общность результатов главы 2 настоящей диссертации, все же они не позволяют получить точное описание следа пространства Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ на произвольном замкнутом множестве $S \subset \mathbb{R}^n$ при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $p \in (1, n]$.

Цель данной главы – сделать шаг в направлении решения задачи о следе в самой общей постановке, то есть без каких-либо дополнительных ограничений на множество S. Мы рассмотрим более слабую задачу "почти точного описания пространства следов", ограничиваясь при этом рассмотрением следов пространств $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ на компактах $S \subset \mathbb{R}^n$. Случай произвольных замкнутых множеств $S \subset \mathbb{R}^n$ идеологически мало отличается, но привносит немало технических трудностей, изложение которых затемнит основную идею.

Замечание 5.0.1. Заметим, что с учётом предложения 1.3.10 и определения 1.2.78 при каждом $p \in (1, n]$ имеем следующие импликации. Если $C_p(E) = 0$ для некоторого множества $E \subset \mathbb{R}^n$, то $\mathcal{H}^d(E) = 0$ при любом $d > n - p$. Если $\mathcal{H}^{n-p}(E) = 0$, то $C_p(E) = 0$.

Напомним определения 1.3.19 и 1.3.22. Если $p \in (1, n]$, $d \in (n - p, n]$, а $S \subset \mathbb{R}^n$ – борелевское множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) \neq 0$, то при $F \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$ под *d-следом* $F|_S^d$ элемента F на множестве S будем понимать $\mathcal{H}^d\lfloor_S$-след элемента F на S, то есть положим $F|_S^d := F|_S^{\mathcal{H}^d\lfloor_S}$. Более того, под *d-пространством следов* мы будем понимать $\mathcal{H}^d\lfloor_S$-пространство следов, а под *d-оператором следа* – $\mathcal{H}^d\lfloor_S$-оператор следа, полагая $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^d := W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^{\mathcal{H}^d\lfloor_S}$ и $\operatorname{Tr}|_S^d := \operatorname{Tr}|_S^{\mathcal{H}^d\lfloor_S}$, соответственно.

Замечание 5.0.2. Заметим, что в силу замечания 5.0.1 определения d-следа, d-пространства следов и d-оператора следа корректны. Действительно, если $p \in (1, n]$, $d \in (n-p, n]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$, то $C_{1,p}(S) > 0$. В таком случае для заданного элемента $F \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$ ограничение $\overline{F}|_S$ p-точного представителя F на S корректно определено. При этом, оператор $\operatorname{Tr}|_S^d$ корректно определен и является линейным ограниченным оператором из $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ в $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^d$.

Замечание 5.0.3. В силу неравенства Гёльдера $W_p^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset W_q^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при всех $1 \leq q \leq p < \infty$. Следовательно, для параметров $p \in (1, n]$, $d \in (n - p, n]$ и компакта $S \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$, используя гладкие срезающие функции, легко показать, что для любого $\varepsilon \in (0, \min\{p - (n - d), p - 1\})$ справедливо включение

$$W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^d \subset W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^n)|_S^d$$

и оператор $\operatorname{Tr}|_S^d$ корректно определён на пространстве $W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^n)$.

Наконец заметим, что непосредственно из предложения 1.3.21 и замечания 5.0.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 5.0.4. *Пусть $p \in (1, n]$, $d \in (n-p, n]$. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Тогда пространства $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ и $W^1_p(\mathbb{R}^n)|^d_S$ являются банаховыми пространствами.*

Теперь мы может более точно поставить задачу, которую мы решим в данной главе. Напомним для этого определение 1.2.31.

Проблема 5.0.5. ***(проблема почти точного описания следа)**. Пусть $p \in (1, n]$, $d^* \in (n-p, n]$ и $\varepsilon^* := \min\{p-(n-d^*), p-1\}$. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное компактное множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^{d^*}_\infty(S) > 0$.*

(**q**1) *При каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ найти такое банахово пространство $\mathrm{X}_\varepsilon(S) = \mathrm{X}(S, p, d^*, \varepsilon)$ борелевских функций $f : S \to \mathbb{R}$, снабжённое внутренним образом определённой нормой, что справедливы включения*

$$W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S \subset \mathrm{X}_\varepsilon(S) \subset W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S \tag{5.0.6}$$

и для некоторой константы $C = C(p, n, d^*, \varepsilon) > 0$ следующие неравенства

$$\frac{1}{C}\|f\|_{W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S} \le \|f\|_{\mathrm{X}_\varepsilon(S)} \le C\|f\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S} \tag{5.0.7}$$

справедливы для всех $f \in W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$.

(**q**2) *При $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ существует ли ограниченный линейный оператор*

$$\mathrm{Ext} = \mathrm{Ext}(S, p, d^*, \varepsilon) : \mathrm{X}_\varepsilon(S) \to W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \tag{5.0.8}$$

такой, что $\mathrm{Tr}\,|^{d^*}_S \circ \mathrm{Ext} = \mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor_S}$ на пространстве $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$?

Сделаем несколько *важных замечаний*, касающихся постановки задачи.

(**R**1) Под "*нормой, определённой внутренним образом*" в пространстве $\mathrm{X}_\varepsilon(S)$ мы имеем в виду норму, выражение для которой содержит явную вычислительную процедуру, *использующую только* значения заданной функции $f : S \to \mathbb{R}$ и геометрические свойства S.

(**R**2) Так как S – компакт, из замечаний 5.0.2, 5.0.3 заключаем, что (**q**1) имеет смысл, при этом включение $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S \subset W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$ следует понимать в том смысле, что $\mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor_S}(W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S) \subset W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S \subset W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$.

(**R**3) Поскольку $0 < \varepsilon < \varepsilon^* \le p$, имеем $p - \varepsilon > n - d^*$. Из замечания 5.0.1 следует, что мера $\mathcal{H}^{d^*}\lfloor_S$ абсолютно непрерывна как относительно ёмкости C_p, так и относительно ёмкости $C_{p-\varepsilon}$. Следовательно, в силу замечания 5.0.2 оператор $\mathrm{Tr}\,|^{d^*}_S$ корректно определён на $W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$.

(**R**4) Из (5.0.6) и (5.0.7) следует, что $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ непрерывно вложено в $\mathrm{X}_\varepsilon(S)$. Следовательно, любой линейный непрерывный оператор $\mathrm{Ext}(S, d^*, \varepsilon)$, действующий из $\mathrm{X}_\varepsilon(S)$ в $W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, является линейным непрерывным оператором из $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ в $W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что термин "почти точное описание следа" может быть неформально объяснен следующим образом. Существует в некотором смысле сколь угодно малый "ε-зазор" между пространством $W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ и пространством $\mathrm{X}_\varepsilon(S)$. Если бы мы могли формально положить $\varepsilon = 0$, то получили бы формулировку точной проблемы следа.

5.1. Предварительные сведения

На протяжении всей главы мы зафиксируем параметр $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и будем пользоваться теми же соглашениями о кубах и двоичных кубах, что и в предыдущей главе (см. самое начало главы 4). Если не оговорено обратное, $\|x\| := \|x\|_\infty$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

При $k \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ определим множество *k-соседних для m индексов*, полагая

$$\mathrm{n}_k(m) := \{m' \in \mathbb{Z}^n : Q_{k,m'} \subset 3Q_{k,m}\}.$$

Кроме того, для куба $Q \in \mathcal{D}_k$ семейство всех *соседних для Q кубов* определяется равенством

$$\mathrm{n}(Q) := \{Q' \in \mathcal{D}_k : Q' \cap Q \neq \emptyset\}.$$

Нам будет полезен факт, элементарное доказательство которого мы оставляем читателю.

Предложение 5.1.1. *Пусть $c \geq 1$ и $k \in \mathbb{Z}$. Пусть кубы $Q, Q' \in \mathcal{D}_k$ таковы, что $cQ \cap Q' \neq \emptyset$. Тогда $[c]Q \cap Q' \neq \emptyset$.*

Иногда нам будет необходимо использовать максимальные функции для грубой оценки сверху средних значений функций. Напомним (1.2.64).

Предложение 5.1.2. *Пусть $p, \sigma \in [1, \infty)$. Пусть $\underline{Q} = Q_{\underline{l}}(\underline{x})$ – куб с длиной ребра $2\underline{l} > 0$, $\Omega \subset \underline{Q}$ – борелевское множество. Тогда*

$$\mathcal{L}^n(\Omega)\Big(\fint\limits_{\underline{Q}} |f(x)|^\sigma \, dx\Big)^{\frac{p}{\sigma}} \leq 2^{\frac{np}{\sigma}} \int\limits_{\Omega} \Big(M_\sigma[f](x)\Big)^p \, dx \quad \text{для всех} \quad f \in L^{\mathrm{loc}}_\sigma(\mathbb{R}^n). \tag{5.1.3}$$

Доказательство. Заметим, что $\underline{Q} \subset Q_{2\underline{l}}(y)$ при всех $y \in \Omega$. Этот факт и (1.2.64) дают

$$\Big(\fint\limits_{\underline{Q}} |f(x)|^\sigma \, dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}} \leq 2^{\frac{n}{\sigma}} \Big(\fint\limits_{Q_{2\underline{l}}(y)} |f(x)|^\sigma \, dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}} \leq 2^{\frac{n}{\sigma}} M_\sigma[f](y) \quad \text{для всех} \quad y \in \Omega.$$

Следовательно, используя это наблюдение, получим требуемую оценку

$$\mathcal{L}^n(\Omega)\Big(\fint\limits_{\underline{Q}} |f(x)|^\sigma \, dx\Big)^{\frac{p}{\sigma}} \leq 2^{\frac{np}{\sigma}} \mathcal{L}^n(\Omega) \inf_{y \in \Omega} \Big(M_\sigma[f](y)\Big)^p \leq 2^{\frac{np}{\sigma}} \int\limits_{\Omega} \Big(M_\sigma[f](x)\Big)^p \, dx.$$

□

При доказательстве основных результатов этой главы нам понадобится достаточно деликатный факт, который в свою очередь является частным результата Э. Сойера [107].

Теорема 5.1.4. *Пусть $d \in [0,n]$, $s \in [0,n)$, $R \in (0,+\infty]$ и $q \in (1,\infty)$. Пусть $\mathfrak{m}$ – локально конечная борелевски регулярная мера $\mathbb{R}^n$ такая, что для некоторой положительной константы $C(\mathfrak{m},R) > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathfrak{m}(Q_l(x)) \le C(\mathfrak{m},R) l^d \quad \textit{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n, l \in (0,R).$$

Если $qs \ge n-d$, то оператор $M^R_{1,s}$ является ограниченным отображением из $L_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_q(\mathfrak{m})$. Более того, его операторная норма зависит только от n,d,q,s и $C(\mathfrak{m},R)$.

Далее нам необходима очень специальная последовательность мер.

Определение 5.1.5. Пусть $d \in (0,n]$ и пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Будем говорить, что последовательность борелевски регулярных мер $\{\mathfrak{m}_k\} = \{\mathfrak{m}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ является *d-последовательностью Фростмана на S*, если выполнены следующие условия:

(**FM**1) $\operatorname{supp}\mathfrak{m}_k = S$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$;

(**FM**2) существует константа $C_1 > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathfrak{m}_k(Q_l(x)) \le C_1 l^d \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{и всех} \quad l \in (0, 2^{-k}]; \tag{5.1.6}$$

(**FM**3) существует константа $C_2 > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{m}_k(Q_{k,m} \cap S) \ge C_2 \mathcal{H}^d_\infty(Q_{k,m} \cap S) \quad \text{при всех} \quad m \in \mathbb{Z}^n; \tag{5.1.7}$$

(**FM**4) $\mathfrak{m}_k = w_k \mathfrak{m}_0$ при $w_k \in L_\infty(\mathfrak{m}_0)$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$, и существует такая константа $C_3 > 0$, что для всех $k,j \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{C_3} 2^{(d-n)j} w_{k+j}(x) \le w_k(x) \le C_3 w_{k+j}(x) \quad \text{при} \quad \mathfrak{m}_0 - \text{п.в.} \quad x \in S. \tag{5.1.8}$$

Класс всех d-последовательностей Фростмана на S обозначим символом $\mathfrak{FM}^d(S)$.

Замечание 5.1.9. Легко видеть, что существуют наименьшие константы $C_1 > 0$ и $C_3 > 0$, для которых справедливы неравенства (5.1.6) и (5.1.8). Обозначим их через $\mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},1}$ и $\mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},3}$, соответственно. Аналогично, существует наибольшая константа $C_2 > 0$, для которой справедливо неравенство (5.1.7), мы обозначим её через $\mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},2}$.

Замечание 5.1.10. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$ при $d \in (0,n]$. Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$. Из (5.1.8) легко следует, что при $p \in [1,\infty)$, элемент

$f \in L_p(\mathfrak{m}_{k_0})$ для некоторого фиксированного $k_0 \in \mathbb{N}_0$ в том и только том случае, если $f \in L_p(\mathfrak{m}_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, $L_p(\{\mathfrak{m}_k\}) = L_p(\mathfrak{m}_{k_0})$ для любого $k_0 \in \mathbb{N}_0$.

Отметим также, что, если $S \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, то в силу неравенства Гёльдера для любых $1 < q < p < \infty$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_q(\mathfrak{m}_0)} \le \Big(\mathfrak{m}_0(S)\Big)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} \quad \text{для всех} \quad f \in L_p(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{5.1.11}$$

Следующая теорема показывает, что определение 5.1.5 осмысленно. Доказательство повторяет с минимальными техническими модификациями доказательство теоремы 2.1.44. Стоит лишь заметить, что условие "котолстости" множества использовалась там лишь в одном месте при переходе от (2.1.59) к (2.1.60). Кроме того, при построении вспомогательных мер $\mathfrak{m}^{j,k}$, $0 \le k \le j$ можно распределять массу не по точкам максимального ϵ^j-разделённого подмножества в S, а по тем двоичным кубам из решётки $\mathcal{D}_j$, которые пересекают S.

Теорема 5.1.12. *Пусть $d \in (0, n]$, и пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – такое замкнутое множество, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Тогда $\mathfrak{FM}^d(S) \neq \emptyset$.*

Замечание 5.1.13. Если замкнутое множество S принадлежит классу $\mathcal{LCR}^d(\mathbb{R}^n)$ при некотором $d \in (0, n]$, то как нетрудно показать, $\mathfrak{FM}^d(S) \subset \mathfrak{M}^d(S)$.

Пример 5.1.14. Рассуждая как в примере 2.1.9, нетрудно показать, что, если $d^* \in (0, n]$, $S \in \mathcal{ADR}^{d^*}(\mathbb{R}^n)$ и $d \in (0, d^*)$, то, полагая $\mathfrak{m}_k := 2^{k(d^*-d)}\mathcal{H}^{d^*}\lfloor_S$ при $k \in \mathbb{N}_0$, получим последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} = \{\mathfrak{m}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathfrak{FM}^d(S)$.

Замечания 5.0.2, 5.0.3 оправдывают введение следующего определения.

Определение 5.1.15. Пусть $p \in (1, n]$, $d \in (n-p, n]$ и $\varepsilon \in [0, \min\{p-(n-d), p-1\})$. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Через $\mathfrak{E}(S, p, d, \varepsilon)$ обозначим *линейное пространство всех отображений* $\operatorname{Ext} : W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S \to W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ таких, что:

($\mathfrak{E}$1) отображение Ext линейно и ограничено;

($\mathfrak{E}$2) отображение Ext является "*правым обратным*" для d-оператора следа, точнее

$$\operatorname{Tr}|^d_S \circ \operatorname{Ext} = \mathrm{I}_{\mathcal{H}^d\lfloor_S} \quad \text{на} \quad W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S.$$

Следующее предложение – простая модификация классического неравенства Пуанкаре.

Предложение 5.1.16. *Для любых $c, c' \ge 1$ существует константа $C = C(n, c, c') > 0$ такая, что для любых кубов $Q_1 := Q_l(x_1)$, $Q_2 := Q_{cl}(x_2)$ при $l > 0$ и $\|x_1 - x_2\| \le c'l$*

$$\fint_{Q_1}\fint_{Q_2} |F(y) - F(z)|\, dz\, dy \le Cl \fint_{(2c'+c)Q_1} \|\nabla F(y)\|\, dy \quad \textit{для всех} \quad F \in W^{1,\mathrm{loc}}_1(\mathbb{R}^n). \tag{5.1.17}$$

Доказательство. Фиксируем кубы Q_1, Q_2, удовлетворяющие предположениям леммы. Напомним классическое неравенство Пуанкаре (см. (7.45) в [118]). Более точно, существует константа $C' = C'(n) > 0$ такая, что для любого куба Q следующее неравенство

$$\fint_Q \Big| F(y) - \fint_Q F(z)\,dz \Big|\,dy \le C'(n) l \fint_Q \|\nabla F(y)\|\,dy \quad \text{для всех} \quad F \in W_1^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \tag{5.1.18}$$

Теперь зафиксируем произвольный элемент $F \in W_1^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $\|x_1 - x_2\| \le c' l$, очевидно, имеем $(2c' + c)Q_1 \supset Q_2$. Поэтому, в силу (5.1.18), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2c'+c)^{2n}} \fint_{Q_1} \fint_{Q_2} |F(y) - F(z)|\,dy\,dz \\
&\le \fint_{(2c'+c)Q_1} \fint_{(2c'+c)Q_1} \Big| F(y) - \fint_{(2c'+c)Q_1} F(x)\,dx + \fint_{(2c'+c)Q_1} F(x)\,dx - F(z) \Big|\,dy\,dz \\
&\le 2 \fint_{(2c'+c)Q_1} \Big| F(y) - \fint_{(2c'+c)Q_1} F(x)\,dx \Big|\,dy \le 2C'(n) l \fint_{(2c'+c)Q_1} \|\nabla F(y)\|\,dy.
\end{aligned}$$

Это даёт (5.1.17) с константой $C(n) = 2C'(n)(2c' + c)^{2n}$. □

Теперь отметим ключевое свойство мер Фростмана. А именно при $d \in (0, n]$ и любом достаточно большом $\sigma > 1$ мы можем контролировать для любого элемента $F \in W_\sigma^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ насколько близки усреднения элемента F по кубу Q, вычисленное с помощью d-фростмановской меры $\mathfrak{m}$ и усреднение F по Q, вычисленное с помощью классической меры Лебега $\mathcal{L}^n$. Более точно, справедлив следующий результат. При $l > 0$ положим $k(l) := [\log_2(\frac{1}{l})]$ и напомним обозначение (4.0.7). Пользуясь евклидовой структурой пространства $\mathbb{R}^n$, можно слегка модифицировать доказательство теоремы 2.6.12 и получить следующий результат.

Теорема 5.1.19. *Пусть $d \in (0, n]$, $\lambda \in (0, 1]$, $\sigma \in (\max\{1, n - d\}, n]$. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество, удовлетворяющее условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от $C_{\{\mathfrak{m}_k\},i}$, $i = 1, 2, 3$ и параметров n, d, λ, σ (но не зависящая от конструкции последовательности $\{\mathfrak{m}_k\}$) такая, что неравенство*

$$\fint_{Q\cap S} \Big| F|_S^d(y) - \fint_Q F(z)\,dz \Big|\,d\mathfrak{m}_{k(l)}(y) \le Cl \Big(\fint_Q \|\nabla F(t)\|^\sigma\,dt \Big)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{5.1.20}$$

справедливо для любого $Q = Q_l(x) \in \mathcal{F}_S(d, \lambda)$ при $l \in (0, 1]$ и любого $F \in W_\sigma^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Докажем теперь простейшую теорему вложения для пространства $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S^d$.

Предложение 5.1.21. *Пусть $d \in (0, n]$ и $p \in (\max\{1, n-d\}, \infty)$. Пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$. Если $F \in W_p^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то его d-след*

$f = F|_S^d \in L_p(\{\mathfrak{m}_k\})$. *Кроме того, существует константа* $C > 0$, *зависящая только от* n, d, p *и* $\mathrm{C}_{\mathfrak{m}_k,i}$, $i = 1, 2, 3$ *такая, что неравенство*

$$\|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} \leq C\|F\|_{W_p^1(Q_{0,0})} \tag{5.1.22}$$

справедливо для всех $F \in W_p^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющих условию* $f = F|_S^d$.

Доказательство. Фиксируем параметр $p \in (\max\{1, n-d\}, \infty)$ и элемент $F \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$. В силу замечания 5.0.2, d-след $f := F|_S^d$ корректно определен. Кроме того, из (**MF**2) определения 5.1.5 следует, что мера $\mathfrak{m}_0$ абсолютно непрерывна относительно $\mathcal{H}^d\lfloor_S$. Следовательно, используя классические оценки (см., например, параграф 2 в [65]) и телескопические аргументы, легко видеть, что для любого $\delta \in (0,1)$ существует константа $C > 0$ (не зависящая от F) такая, что

$$\Big|f(x) - \fint_{Q_{0,0}} F(y)\,dy\Big| \leq C \int_{Q_{0,0}} \frac{\|\nabla F(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}}\,dy \leq C M^1_{1,1-\delta}[\chi_{Q_{0,0}}\|\nabla F\|](x) \quad \text{при} \quad \mathfrak{m}_0 - \text{п.в.} \quad x \in S.$$

Зафиксируем $\delta \in (0,1)$ так, что $p(1-\delta) > n-d$ и напомним, что $S \subset Q_{0,0}$. Применение теоремы 5.1.4 при $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0$ и $s = 1-\delta$ в комбинации с неравенством Гёльдера даёт

$$\begin{aligned}\int_S |f(x)|^p\,d\mathfrak{m}_0(x) &\leq \int_S \Big|f(x) - \fint_{Q_{0,0}} F(y)\,dy\Big|^p\,d\mathfrak{m}_0(x) + \Big|\fint_{Q_{0,0}} F(y)\,dy\Big|^p \\ &\leq C\Big(\int_{Q_{0,0}} \Big(M^1_{1,1-\delta}[\chi_{Q_{0,0}}\|\nabla F\|](x)\Big)^p\,d\mathfrak{m}_0(x)\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_{Q_{0,0}} |F(y)|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\|F\|_{W_p^1(Q_{0,0})}.\end{aligned}$$

Предложение доказано. □

5.2. Комбинаторные инструменты

В этом параграфе будет заложен комбинаторный фундамент, который крайне важен для дальнейшего. Основываясь на инструментах, разработанных в этом разделе, мы введём новые максимальные функции типа Кальдерона и предъявим новый оператор продолжения в последующих параграфах. На протяжении всего параграфа будем считать *фиксированными параметр* $d^* \in (0, n]$ *и компакт* $S \subset Q_{0,0}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^{d^*}_\infty(S) > 0$.

5.2.1. **Допустимые последовательности покрытий.** Напомним определение 4.1.18. Поскольку S фиксировано, будем писать $\mathcal{DF}(d,\lambda)$ вместо $\mathcal{DF}_S(d,\lambda)$. Иногда нам будет удобно работать с проекциями $\mathcal{DF}(d,\lambda)$ на "k-ые уровни". Введём следующее определение.

Определение 5.2.1. Пусть $\lambda \in (0,1]$ и $d \in (0,n]$ таковы, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. При каждом $k \in \mathbb{N}_0$ определим семейства

$$\begin{aligned} &\mathcal{DF}_k(d,\lambda) := \mathcal{DF}_{S,k}(d,\lambda) := \mathcal{DF}(d,\lambda) \cap \mathcal{D}_k; \\ &\widetilde{\mathcal{DF}}_k(d,\lambda) := \widetilde{\mathcal{DF}}_{S,k}(d,\lambda) := \{Q \in \mathcal{D}_k : \text{ существует } Q' \in \mathrm{n}(Q) \cap \mathcal{DF}_k(d,\lambda)\}. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Через $\mathcal{A}_k(d,\lambda) := \mathcal{A}_{S,k}(d,\lambda)$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_k(d,\lambda) := \widetilde{\mathcal{A}}_{S,k}(d,\lambda)$ обозначим соответствующие индексные множества, то есть

$$\mathcal{DF}_k(d,\lambda) := \{Q_{k,m} : m \in \mathcal{A}_k(d,\lambda)\}, \quad \widetilde{\mathcal{DF}}_k(d,\lambda) := \{Q_{k,\widetilde{m}} : \widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k(d,\lambda)\}.$$

Напомним определение 4.3.33 и положим $\mathcal{Q}^j(d,\lambda) := \mathcal{Q}^j_S(d,\lambda)$ при $j \in \mathbb{N}$.

Определение 5.2.3. Пусть $\lambda \in (0,1)$ и пусть $d \in (0,n]$ таковы, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\{\mathcal{Q}^j_S(d,\lambda)\}_{j\in\mathbb{N}}$ – каноническое разбиение семейства $\mathcal{DF}(d,\lambda)$. Определим (d,λ)-*существенную часть множества* S равенством

$$\underline{S}(d,\lambda) := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup \{Q : Q \in \mathcal{Q}^j(d,\lambda)\}. \tag{5.2.4}$$

Иногда нам будет необходимо работать с семейством всех двоичных кубов, которые двоично (d,λ)-толстые относительно заданного множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и растяжения которых содержат заданный куб Q. Интуитивно такое семейство выглядит как “башня кубов”.

Определение 5.2.5. Пусть $d \in (0,n]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1]$ и $c \geq 1$. Для куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ определим (d,λ,c)-*башню куба* Q равенством

$$T_{d,\lambda,c}(Q) := \{Q' : Q' \in \mathcal{DF}(d,\lambda) \text{ и } Q \subset cQ'\}.$$

В случае $c = 1$ будем писать $T_{d,\lambda}(Q)$ вместо $T_{d,\lambda,1}(Q)$ и называть семейство $T_{d,\lambda}(Q)$ просто (d,λ)-*башней куба* Q.

Замечание 5.2.6. отметим, что определение 5.2.5 допускает случай, когда куб Q имеет длину ребра $l(Q) = 0$, то есть $Q = \{x\}$ для некоторой точки $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, можно рассматривать (d,λ,c)-башню точки x, которую будем обозначать символом $T_{d,\lambda,c}(x)$.

Предложение 5.2.7. *Пусть* $d \in (0,n]$ *и* $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. *Пусть* $\lambda \in (0,1)$ *и* $c \geq 1$. *Справедливы следующие свойства:*

(1) $\underline{S}(d,\lambda) \subset S$;

(2) $\mathcal{H}^d_\infty(S \setminus \underline{S}(d,\lambda)) = 0$;

(3) $\#T_{d,\lambda,c}(x) = +\infty$ *для любого* $x \in \underline{S}(d,\lambda)$.

Доказательство. Заметим, что для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо включение

$$\cup\{Q : Q \in \mathcal{Q}^j(d,\lambda)\} \subset U_{2^{-j+1}}(S), \tag{5.2.8}$$

где при $\delta > 0$ через $U_\delta(S)$ мы обозначаем δ-окрестность множества S в метрике, порождённой $\|\cdot\|_\infty$-нормой. Следовательно, учитывая замкнутость S, получаем (1).

Для доказательства (2) скомбинируем утверждение $(\mathcal{F}2)$ теоремы 4.3.29 и (5.2.4).

В силу (5.2.4) при $x \in \underline{S}(d,\lambda)$, для любого $j \in \mathbb{N}$ существует куб $Q^j \in \mathcal{Q}^j(d,\lambda)$, содержащий точку x. Комбинируя это утверждение с $(\mathcal{F}3)$ теоремы 4.3.29, получим (3). □

5.2.2. **Накрывающие кубы.** Насколько нам известно, понятия введённые в этом параграфе, являются новыми, и никогда ранее не использовались в литературе. Напомним определение 4.1.18 и сокращённое обозначение $\mathcal{DF}(d,\lambda) := \mathcal{DF}_S(d,\lambda)$.

Определение 5.2.9. Пусть число $d \in (0,n]$ такое, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1]$, $c \geq 1$. Для заданного куба $Q \in \mathcal{D}_+$ будем говорить, что куб $\overline{Q} \in \mathcal{D}_+$ является (d,λ,c)-*накрывающим для* Q, если справедливы следующие условия:

(**C**1) $l(\overline{Q}) \geq l(Q)$ и $Q \subset c\overline{Q}$;

(**C**2) $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d,\lambda)$;

(**C**3) если $Q' \in \mathcal{D}_+$, $Q \subset Q'$ и $l(Q') \in (l(Q), l(\overline{Q}))$, то $Q' \notin \mathcal{DF}(d,\lambda)$.

Для куба $Q \in \mathcal{D}_+$ обозначим через $\mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q)$ семейство (возможно, пустое) всех (d,λ,c)-накрывающих для Q кубов. Символом $\mathcal{K}_{d,\lambda,c}$ мы также будем обозначать многозначное отображение, которое каждому кубу $Q \in \mathcal{D}_+$ ставит в соответствие множество $\mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q)$.

Нам также понадобятся специальные селекторы многозначных отображений $\mathcal{K}_{d,\lambda,c}$.

Определение 5.2.10. Пусть $d \in (0,n]$ таково, что $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. При $\lambda \in (0,1]$ и $c \geq 1$ *селектором* многозначного отображения $\mathcal{K}_{d,\lambda,c}$ *с областью определения* $\mathfrak{D} \subset \mathcal{D}_+$ назовём такое отображение $\kappa_{d,\lambda,c} : \mathfrak{D} \to \mathcal{DF}_S(d,\lambda)$, что выполнены условия:

(**Sel**1) $\mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q) \neq \emptyset$ для всех $Q \in \mathfrak{D}$;

(**Sel**2) $\kappa_{d,\lambda,c}(Q) \in \mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q)$ для всех $Q \in \mathfrak{D}$.

Определение 5.2.11. Пусть $d \in (0,n]$ и $\overline{\lambda} = \mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1]$, $c \geq 1$. Для заданного двоичного куба $Q \subset Q_{0,0}$ с длиной ребра $l(Q) < 1$ скажем, что $\mathrm{K}(Q) \in \mathcal{D}_+$ является *сильно* (d,λ)-*накрывающим кубом для* Q, если он $(d,\lambda,1)$-накрывающий и $l(\mathrm{K}(Q)) > l(Q)$.

Замечание 5.2.12. Отметим, что в последующем определение 5.2.11 будет использовано при $\lambda \in (0,\overline{\lambda}]$, поскольку в этом случае имеем $Q_{0,0} \in \mathcal{DF}(d,\lambda)$ и следовательно, $\mathcal{K}_{d,\lambda,1}(Q) \neq \emptyset$ для

любых таких $Q \in \mathcal{D}_+$, что $Q \subset Q_{0,0}$. Требование $l(Q) < 1$ позволяет найти единственный куб $\mathrm{K}(Q) \in \mathcal{K}_{d,\lambda,1}(Q)$, для которого $l(\mathrm{K}(Q)) > l(Q)$.

Замечание 5.2.13. Пусть d, λ, c – те же, что и в определении 5.2.9. При $Q \in \mathcal{D}_+$, очевидно, может существовать несколько (d, λ, c)-накрывающих двоичных кубов для Q. Однако, легко видеть, что существует константа $C = C(n, c) > 0$, для которой

$$\#\mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q) \cap \mathcal{D}_k \leq C \quad \text{при любом} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Определение 5.2.14. Пусть $d \in (0, n]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0, 1]$ и $c \geq 1$. Для куба $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d, \lambda)$ определим (d, λ, c)-*теневое семейство куба* $\overline{Q}$, полагая

$$\mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q}) := \{\underline{Q} \in \mathcal{DF}(d, \lambda) : l(\underline{Q}) < l(\overline{Q}) \text{ и } \overline{Q} \in \mathcal{K}_{d,\lambda,c}(\underline{Q})\}.$$

В следующем предложении собраны элементарные свойства (d, λ, c)-теневых семейств кубов. Напомним определения 1.2.4, 4.3.33.

Предложение 5.2.15. *Пусть $d \in (0, n]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0, 1)$ и $c \geq 1$. Тогда для каждого куба $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d, \lambda)$ справедливы следующие свойства:*

(1) $\mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q}) \neq \emptyset$;

(2) *семейство $\mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$ является неперекрывающимся.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения фиксируем куб $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d, \lambda)$. Заметим, что существует такое число $j \in \mathbb{N}_0$, что $\overline{Q} \in \mathcal{Q}^j(d, \lambda)$. Поскольку $\mathcal{H}^d_\infty(\overline{Q}) \geq \lambda(l(\overline{Q}))^d > 0$ и семейство $\mathcal{Q}^{j+1}(d, \lambda)$ – двоичное неперекрывающееся d-почти покрытие множества S, заключаем, что $\mathcal{Q}^{j+1}(d, \lambda)|_{\overline{Q}} \neq \emptyset$. В силу свойства $(\mathcal{F}3)$ теоремы 4.3.29 имеем $\mathcal{Q}^{j+1}(d, \lambda)|_{\overline{Q}} \prec \overline{Q}$. Комбинируя эти наблюдения с определениями 5.2.9, 5.2.14 и свойством $(\mathcal{F}4)$, получаем $\mathcal{Q}^{j+1}(d, \lambda)|_{\overline{Q}} \subset \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$. Этим утверждение (1) доказано.

Для доказательства второго утверждения фиксируем куб $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d, \lambda)$ и два различных куба $\underline{Q}_1, \underline{Q}_2 \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$. Поскольку кубы $\underline{Q}_1$ и $\underline{Q}_2$ двоичные, возможны только два случая. В первом случае кубы имеют непересекающиеся внутренности, а во втором случае один из них содержится в другом. Мы утверждаем, что второй случай не может реализоваться. Действительно, предположим противное. Без ограничения общности мы можем считать, что $\underline{Q}_1 \subset \underline{Q}_2$. Поскольку $\underline{Q}_1$ и $\underline{Q}_2$ не совпадают, имеем $l(\underline{Q}_1) \leq \frac{1}{2} l(\underline{Q}_2)$. Кроме того, из определения 5.2.14 следует, что $l(\underline{Q}_2) \leq \frac{1}{2} l(\overline{Q})$. Следовательно, $l(\underline{Q}_2) \in (l(\underline{Q}_1), l(\overline{Q}))$. Но тогда, из условия (3) определения 5.2.9 заключаем, что $\underline{Q}_2 \notin \mathcal{DF}(d, \lambda)$. С другой стороны, по определению 5.2.14 кубы $\underline{Q}_1$, $\underline{Q}_2 \in \mathcal{DF}(d, \lambda)$. полученное противоречие доказывает утверждение.

Предложение полностью доказано. □

При $k \in \mathbb{N}_0$ для куба $Q \in \mathcal{D}_k$ положим

$$\Gamma_c(Q) := \{Q' \in \mathcal{D}_k : Q' \cap cQ \neq \emptyset\}. \tag{5.2.16}$$

Замечание 5.2.17. В силу предложения 5.1.1, если $Q' \in \Gamma_c(Q)$, то $[c]Q \cap Q' \neq \emptyset$. Следовательно, $Q' \subset ([c]+2)Q$. Так как различные кубы из семейства $\Gamma_c(Q)$ имеют непересекающиеся внутренности и равные длины рёбер, получаем

$$\#\Gamma_c(Q) \leq \frac{\mathcal{L}^n(([c]+2)Q)}{\mathcal{L}^n(Q')} \leq ([c]+2)^n.$$

Следующее понятие будет чрезвычайно важно для доказательства так называемой прямой теоремы о следах.

Определение 5.2.18. Пусть $d \in (0,n]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1)$ и $c \geq 1$. Для куба $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d,\lambda)$, определим (d,λ,c)-*айсберг* $\mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$ куба $\overline{Q}$ как семейство всех двоичных кубов $Q' \in \mathcal{D}_+$, удовлетворяющих условиям:

(**I**1) $Q' \notin \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$;

(**I**2) $l(Q') \leq l(\overline{Q})$;

(**I**3) существует такой куб $\underline{Q'} \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, что $\underline{Q'} \subset Q'$.

Замечание 5.2.19. Из определения 5.2.18 и утверждения (2) предложения 5.2.15 следует, что, если $Q \in \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, а куб $Q' \supset Q$ такой, что $l(Q') \leq l(\overline{Q})$, то $Q' \in \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$. Грубо говоря, для того, чтобы вообразить $\mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, при $Q \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, нужно построить башню вложенных друг в друга кубов, дины рёбер которых растут пока не достигнут $l(\overline{Q})$. Термин "айсберг" был выбран по следующей причине. С одной стороны, мы увидим в последующих параграфах, что "вершина заданного айсберга" $\mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, то есть куб $\overline{Q}$, содержит полезную информацию о поведении заданной функции $f : S \to \mathbb{R}$. С другой стороны, кубы из "невидимой части айсберга" $\mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, то есть все кубы из $\mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, длины рёбер которых меньше $l(\overline{Q})$, не содержат полезной информации для продолжения функции $f : S \to \mathbb{R}$ с S на $\mathbb{R}^n$.

Следующее предложение отражает базовые геометрические свойства (d,λ,c)-*айсбергов*.

Предложение 5.2.20. *Пусть $d \in (0,n]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1)$ и $c \geq 1$. Для куба $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d,\lambda)$, справедливы следующие свойства:*

(1) *если $Q \in \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$ и $l(Q) < l(\overline{Q})$, то $Q \notin \mathcal{DF}(d,\lambda)$;*

(2) *если $Q'' \in \mathcal{D}_+$ и $l(Q'') = l(\overline{Q})$, то $Q'' \in \Gamma_c(\overline{Q}) \cap \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$ в том и только том случае, если $\mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_{Q''} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения (1) заметим, что в силу условий (**I**1), (**I**3) определения 5.2.18, для куба $Q \in \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$ существует куб $\underline{Q} \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, для которого $\underline{Q} \subset Q$ и $l(\underline{Q}) < l(Q)$. С другой стороны, по определению 5.2.14 имеем $\overline{Q} \in \mathcal{K}_{d,\lambda,c}(\underline{Q})$. Следовательно, условие (**C**3) определения 5.2.9 приводит к требуемому утверждению.

Если $Q'' \in \mathcal{D}_+$, $l(Q'') = l(\overline{Q})$ и $Q'' \in \Gamma_c(\overline{Q}) \cap \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$, то $\mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_{Q''} \neq \emptyset$ по условию (**I**3) определения 5.2.18. Обратно, предположим, что $\mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_{Q''} \neq \emptyset$ для некоторого $Q'' \in \mathcal{D}_+$ с длиной ребра $l(Q'') = l(\overline{Q})$. Очевидно, условия (**I**2) и (**I**3) определения 5.2.18 выполнены с заменой Q' на Q''. С другой стороны, по определению 5.2.14 имеем $l(Q') < l(Q'')$ для всех $Q' \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_{Q''}$, и, следовательно, условие (**I**1) выполнено с заменой Q' на Q''. Этим показано, что $Q'' \in \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$. Наконец, в силу условия (**C**1) определения 5.2.9 и определения 5.2.14, условие $\mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_{Q''} \neq \emptyset$ влечёт существование куба $\underline{Q} \in \mathcal{DF}(d,\lambda)$, для которого $\underline{Q} \subset Q''$ и $\underline{Q} \subset c\overline{Q}$. Следовательно, из (5.2.16) следует, что $Q'' \in \Gamma_c(\overline{Q})$. Этим (2) доказано. □

Теперь мы покажем, что любое (d,λ,c)-теневое семейство удовлетворяет *условию Карлесона.* Это будет одним из основных технических инструментов в последующем.

Предложение 5.2.21. *Пусть $d \in (0,n]$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1)$ и $c \geq 1$. Тогда, для каждого $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d,\lambda)$ и любого $Q \in \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$ справедливо неравенство*

$$\sum\{(l(Q'))^{\widetilde{d}} : Q' \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_Q\} \leq \frac{2^{n-\widetilde{d}}}{\lambda}(l(Q))^{\widetilde{d}} \quad \textit{при всех} \quad \widetilde{d} \in [d,n]. \tag{5.2.22}$$

Более того,

$$\sum\{(l(Q'))^{\widetilde{d}} : Q' \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})\} \leq ([c]+2)^n \frac{2^{n-\widetilde{d}}}{\lambda}(l(\overline{Q}))^{\widetilde{d}} \quad \textit{при всех} \quad \widetilde{d} \in [d,n]. \tag{5.2.23}$$

Доказательство. Зафиксируем $\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d,\lambda)$, $Q \in \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$ и определим

$$j_0 := \min\{j \in \mathbb{N}_0 : \{Q\} \succ \mathcal{Q}^j(d,\lambda)|_Q\}.$$

В силу замечания 5.2.19, первого утверждения предложения 5.2.20 и условия (**C**3) определения 5.2.9 следует, что, если $Q' \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_Q$ и $\overline{Q'} \in \mathcal{K}_{d,\lambda,1}(Q') \setminus \{Q'\}$, то $\overline{Q'} \supset Q$, и, более того, $l(\overline{Q'}) \geq l(\overline{Q})$. Следовательно, из определения 5.2.14 заключаем, что $Q' \in \mathcal{Q}^{j_0}(d,\lambda)|_Q$. В результате применение теоремы 4.3.34 при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ даёт

$$\begin{aligned}&\sum\{(l(Q'))^{\widetilde{d}} | Q' \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_Q\}\\ &\leq \sum\{(\frac{1}{2})^{\widetilde{d}-d}(l(Q))^{\widetilde{d}-d}(l(Q'))^d | Q' \in \mathcal{Q}^{j_0}(d,\lambda)|_Q\} \leq \frac{2^{n-\widetilde{d}}}{\lambda}(l(Q))^{\widetilde{d}}.\end{aligned}$$

Этим первое утверждение доказано.

Докажем теперь (5.2.23). В силу второго утверждения предложения 5.2.20 достаточно просуммировать оценку (5.2.22) по всем кубам $Q \in \Gamma_c(\overline{Q}) \cap \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})$. Учитывая замечание 5.2.17, получим при всех $\widetilde{d} \in [d,n]$ требуемое неравенство

$$\sum\{(l(Q'))^{\widetilde{d}} : Q' \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})\} = \sum_{Q \in \Gamma_c(\overline{Q}) \cap \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})} \sum\{(l(Q'))^{\widetilde{d}} : Q' \in \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(\overline{Q})|_Q\}$$

$$\le \#\Gamma_c(\overline{Q}) \frac{2^{n-\widetilde{d}}}{\lambda} (l(\overline{Q}))^{\widetilde{d}} \le ([c]+2)^n \frac{2^{n-\widetilde{d}}}{\lambda} (l(\overline{Q}))^{\widetilde{d}}.$$

□

5.2.3. **Полости типа Уитни и полые кубы.** Прежде всего напомним определение 4.4.33, равенство (4.4.34) и теорему 4.4.35.

Определение 5.2.24. При $c \ge 1$ и $\varkappa \in \mathbb{N}$ для любого куба Q в $\mathbb{R}^n$ определим *специальную полость* Q равенством

$$\Omega_{c,\varkappa}(Q) := \Omega_{2^{-\varkappa}}(cQ, c). \tag{5.2.25}$$

Одно из замечательных свойств специальных полостей заключается в том, что они не могут пересекаться “слишком сильно”. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.2.26. *Пусть $c \ge 1$ и $\varkappa \in \mathbb{N}$. Тогда существует константа $C = C(n,c,\varkappa) > 0$ такая, что*

$$\mathrm{MULT}(\{\Omega_{c,\varkappa}(Q) : Q \in \mathcal{DF}(d,\lambda)\}) \le C. \tag{5.2.27}$$

Доказательство. Фиксируем кубы $Q_1 = Q_{k_1,m_1} \in \mathcal{DF}_{k_1}(d,\lambda)$ и $Q_2 = Q_{k_2,m_2} \in \mathcal{DF}_{k_2}(d,\lambda)$ при $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. В силу (4.4.34), (5.2.25) имеем

$$\Omega_{c,\varkappa}(Q_{k,m}) \subset cQ_{k,m}. \tag{5.2.28}$$

Следовательно, если $\Omega_{c,\varkappa}(Q_{k_1,m_1}) \cap \Omega_{c,\varkappa}(Q_{k_2,m_2})$, то $cQ_{k_1,m_1} \cap cQ_{k_2,m_2} \ne \emptyset$. Поэтому, из (4.4.34) и (5.2.25) вытекает оценка $|k_1 - k_2| \le \varkappa$ при условии, что $\Omega_{c,\varkappa}(Q_{k_1,m_1}) \cap \Omega_{c,\varkappa}(Q_{k_2,m_2}) \ne \emptyset$. Следовательно, если для некоторой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует число $k(x) \in \mathbb{N}_0$ и вектор $m(x) \in \mathbb{Z}^n$, для которых $x \in \Omega_{c,\varkappa}(Q_{k(x),m(x)})$, то будем иметь

$$\{j \in \mathbb{N}_0 : \text{существует } m \in \mathbb{Z}^n \text{ т.ч. } \Omega_{c,\varkappa}(Q_{j,m}) \ni x\} \subset [k(x)-\varkappa, k(x)+\varkappa] \cap \mathbb{N}_0. \tag{5.2.29}$$

Используем (5.2.28), (5.2.29) и применим предложение 4.1.1. Имеем

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}_+} \chi_{\Omega_{c,\varkappa}(Q)}(x) \le \sum_{k=k(x)-\varkappa}^{k(x)+\varkappa} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{cQ_{k,m}}(x) \le 2\varkappa([c]+2)^n \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство завершено. □

Замечание 5.2.30. В обозначениях данного параграфа (см. (5.2.25)) утверждение теоремы 4.4.35 можно слегка модифицировать следующим образом.

Пусть $d \in (0, d^*)$ и $\lambda \in (0, 1]$. Тогда для любого $c \geq 1$ существуют константы $\tau = \tau(n, d) > 0$ и $\underline{\varkappa} = \underline{\varkappa}(n, d, \lambda, c) \in \mathbb{N}$ такие, что неравенство

$$\mathcal{L}^n(\Omega_{c,\varkappa}(Q)) \geq \tau(l(Q))^n \tag{5.2.31}$$

справедливо для любого куба $Q \in \mathcal{D}_+ \setminus \mathcal{DF}(d, \lambda)$ и любого числа $\varkappa \geq \underline{\varkappa}$.

Напомним также [117], что поскольку S непусто, замкнуто и $S \neq \mathbb{R}^n$, существует непустое неперекрывающееся семейство $\mathcal{W}_S \subset \mathcal{D}$, называемое *разбиением Уитни*, такое, что $\mathbb{R}^n \setminus S$ представимо как объединение семейства $\{Q : Q \in \mathcal{W}_S\}$ и $\operatorname{dist}(Q, S) \leq l(Q) \leq 4 \operatorname{dist}(Q, S)$. Кубы Q из семейства $\mathcal{W}_S$ называются *кубами Уитни.*

В математическом фольклоре хорошо известно, что кубы Уитни и пористые кубы тесно связаны. Действительно, если куб $Q = Q_l(x) \in \mathcal{W}_S$, то можно найти куб $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}_l(\widetilde{x})$, центр $\widetilde{x}$ которого является метрической проекцией x на S, и при этом $Q \subset c\widetilde{Q}$ для некоторой универсальной константы $c \geq 1$. Следовательно, куб $c\widetilde{Q}$ является $(S, \frac{1}{c})$-пористым. Обратно, для (S, τ)-пористого куба $\widetilde{Q}$ можно найти куб Уитни Q, для которого $Q \subset \widetilde{c}\widetilde{Q}$ для некоторой универсальной константы $\widetilde{c} \geq 1$ и при этом $l(Q) \approx l(\widetilde{Q})$.

Поясним неформально, почему кубы Уитни и пористые кубы столь полезны. Если либо $p \in (1, n]$ и S достаточно регулярно, либо $p > n$ и S произвольно, то можно эффективно собрать информацию о поведении функции $f : S \to \mathbb{R}$ с любого S-пористого куба $\widetilde{Q}$, а затем в некотором смысле перенести эту информацию на соответствующий куб Уитни Q со сравнимой длиной ребра. Это и есть грубая схема классического метода продолжения Уитни.

К сожалению если $1 < p \leq n$, а S не обладает какими либо свойствами регулярности, то лишь малая часть кубов $\widetilde{Q}$, для которых $\widetilde{Q} \cap S \neq \emptyset$ может быть использована для эффективного сбора информации о функции $f : S \to \mathbb{R}$. Вообще говоря нельзя надеяться, что такие кубы будут пористыми. Это мотивирует нас ввести следующее определение.

Определение 5.2.32. При $c \geq 1$ определим *специальное семейство полых кубов* $\mathcal{P}(c) := \mathcal{P}_S(d, \lambda, c)$ как семейство всех таких кубов $Q \in \mathcal{DF}(d, \lambda)$, что $cQ \supset Q'$ для некоторого куба $Q' \in \mathcal{D}_+ \setminus \mathcal{DF}(d, \lambda)$ с длиной ребра $l(Q') \geq l(Q)/4$.

Мы увидим впоследствии, что в случае, если множество $S \subset \mathbb{R}^n$ существенно нерегулярно, то роль семейства кубов $\mathcal{P}_S(d, \lambda, c)$ для построения соболевского продолжения функции с S на $\mathbb{R}^n$ в сущности такая же, как и роль семейства всех (S, τ)-пористых кубов для случая, когда множество $S \subset \mathbb{R}^n$ достаточно регулярно.

5.3. Максимальные функции типа Кальдерона и новые функциональные пространства

В этом разделе мы введём далеко идущее обобщение максимальной функции типа Кальдерона, определённой ранее в §2.2. Напомним определение 1.2.33.

В этом параграфе мы будем делать различие между классами эквивалентности функций и индивидуально взятыми функциями. Поэтому будем использовать символы $\widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$.

Пусть $\{\mathfrak{m}_k\}$ – допустимая последовательность мер на $\mathbb{R}^n$ и $f \in \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$. Для заданных двоичных кубов $Q_1 \in \mathcal{D}_{k_1}$, $Q_2 \in \mathcal{D}_{k_2}$ при $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ напомним (1.2.40) и положим

$$\begin{aligned} &\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1,Q_2) := \Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_2,Q_1) \\ &:= \frac{1}{\min\{l(Q_1),l(Q_2)\}} \fint_{Q_1}\fint_{Q_2} |f(x)-f(y)|\, d\mathfrak{m}_{k_1}(x)\, d\mathfrak{m}_{k_2}(y). \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Из (1.2.40) и (5.3.1) легко видеть, что

$$\fint_{Q_1}\Big|f(y) - \fint_{Q_2} f(x)\, d\mathfrak{m}_{k_2}(x)\Big|\, d\mathfrak{m}_{k_1}(y) \le \min\{l(Q_1),l(Q_2)\}\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1,Q_2). \tag{5.3.2}$$

Предложение 5.3.3. *Пусть $\{\mathfrak{m}_k\}$ – допустимая последовательность мер на $\mathbb{R}^n$ и $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$. Тогда следующее неравенство*

$$\begin{aligned} &\min\{l(Q_1),l(Q_3)\}\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1,Q_3) \\ &\le \min\{l(Q_1),l(Q_2)\}\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1,Q_2) + \min\{l(Q_2),l(Q_3)\}\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_2,Q_3) \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

справедливо для любых кубов $Q_i \in \mathcal{D}_+$ при $\mathfrak{m}_{k_i}(Q_i) \ne 0$, $i = 1,2,3$.

Доказательство. Пусть $Q_i \in \mathcal{D}_{k_i}$ при $k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1,2,3$. Из (5.3.1) и (5.3.2) имеем

$$\begin{aligned} &\min\{l(Q_1),l(Q_3)\}\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1,Q_3) \\ &= \fint_{Q_1}\fint_{Q_2}\Big|f(x) - \fint_{Q_2} f(z)\, d\mathfrak{m}_{k_2}(z) + \fint_{Q_2} f(z)\, d\mathfrak{m}_{k_2}(z) - f(y)\Big|\, d\mathfrak{m}_{k_1}(y)\, d\mathfrak{m}_{k_3}(x) \\ &\le \fint_{Q_1}\Big|f(x) - \fint_{Q_2} f(z)\, d\mathfrak{m}_{k_2}(z)\Big|\, d\mathfrak{m}_{k_1}(x) + \fint_{Q_3}\Big|f(y) - \fint_{Q_2} f(y)\, d\mathfrak{m}_{k_2}(z)\Big|\, d\mathfrak{m}_{k_3}(y) \\ &\le \min\{l(Q_1),l(Q_2)\}\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1,Q_2) + \min\{l(Q_2),l(Q_3)\}\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_2,Q_3). \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Доказательство завершено. □

Теперь мы определим двоичную обобщённую максимальную функцию типа Кальдерона. Она будет незаменимым инструментом для нас. Напомним определения 5.1.5 и 5.2.9.

Определение 5.3.6. Пусть $d \in (0,n]$ и пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1]$ и $c \geq 1$. Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$ и $f \in \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$. Положим

$$f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x) := \sup \Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(\underline{Q},\overline{Q}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.3.7}$$

где супремум взят по всем таким парам кубов $\underline{Q},\overline{Q}$, что выполнены следующие условия:

($\mathbf{f}1$) $x \in c\underline{Q}$ и $\underline{Q},\overline{Q} \in \mathcal{DF}(d,\lambda)$;

($\mathbf{f}2$) $0 < l(\underline{Q}) \leq l(\overline{Q}) \leq 1$;

($\mathbf{f}3$) $\overline{Q} \in \mathcal{K}_{d,\lambda,c}(\underline{Q})$.

Если не существует пары кубов $\underline{Q},\overline{Q}$, удовлетворяющей условиям ($\mathbf{f}1$)–($\mathbf{f}3$), то полагаем $f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x) := 0$. Отображение $x \to f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x)$ назовём *двоичной обобщённой максимальной функцией типа Кальдерона.*

Из определения 5.3.6 немедленно вытекают свойства монотонности двоичных обобщённых максимальных функций типа Кальдерона. Мы опустим очевидное доказательство.

Предложение 5.3.8. *Пусть $d \in (0,n]$ и пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$. Пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$ и $f \in \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$. Тогда при $\lambda \in (0,1]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c_1}(x) \leq f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c_2}(x) \quad \textit{при всех} \quad 1 \leq c_1 \leq c_2 < \infty.$$

Определение 5.3.9. Пусть $d' \in (0,n]$, а $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^{d'}_\infty(S) > 0$. При $f \in \mathfrak{B}(S)$ скажем, что $x \in S$ – *d'-регулярная точка* f и будем писать $x \in S_f(d')$, если для любой последовательности $\{\mathfrak{m}'_k\} \in \mathfrak{FM}^{d'}(S)$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \max_{Q \in T_{d',\lambda',c'}(x) \cap \mathcal{D}_k} \fint_Q |f(x) - f(y)|\, d\mathfrak{m}'_k(y) = 0 \quad \text{для любых } c' \geq 1 \text{ и } \lambda' \in (0,1). \tag{5.3.10}$$

Если, при некотором $k \in \mathbb{N}_0$ множество $T_{d',\lambda',c'}(x) \cap \mathcal{D}_k$ пусто, то соответствующий максимум считается равным нулю. Через $S_f(d')$ обозначим *множество всех d'-регулярных точек* f.

Теперь мы готовы определить функциональное пространство, которое будет промежуточным между следами различных пространств Соболева.

Определение 5.3.11. Пусть $d^* \in (0,n]$ и пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\lambda^* := \mathcal{H}^{d^*}_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1]$ и $c \geq 1$ – некоторые фиксированные константы. Пусть $d \in (0,d^*]$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$. При $p \in (1,\infty)$ будем говорить, что $f \in \mathfrak{B}(S) \cap \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ принадлежит пространству $\widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$, если выполнены следующие условия:

(1) $\mathcal{H}^{d^*}(S \setminus S_f(d')) = 0$ для всех $d' \in [d,d^*]$;

(2) $\widetilde{\mathcal{N}}_{p,\lambda,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) < +\infty$, где мы полагаем

$$\mathcal{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f) := \|f^{\natural}_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad \widetilde{\mathcal{N}}_{p,\lambda,\{\mathfrak{m}_k\},c}(f) := \|f\|_{L_p(\mathfrak{m}_0)} + \mathcal{N}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f). \tag{5.3.12}$$

Определим пространство $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ как фактор пространство, то есть

$$\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S) := \widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)/\{f \in \widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S) : \widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f) = 0\}.$$

Снабдим пространство $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ нормой, задаваемой функционалом $\widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}$, то есть для заданного класса эквивалентных функций $[f] \in \mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ положим

$$\|[f]\|_{\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)} := \widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f). \tag{5.3.13}$$

Замечание 5.3.14. В дальнейшем, если не оговорено обратное, будем отождествлять класс эквивалентных функций $[f] \in \mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ с любым представителем f этого класса. Следует подчеркнуть, что структура класса $[f]$ не столь очевидна.

В самом деле, пусть $d \in (0, d^*)$, $S_1 \in \mathcal{ADR}^d(\mathbb{R}^n)$, а $S_2 \in \mathcal{ADR}^{d^*}(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ и положим $S = S_1 \cup S_2$. Тогда, держа в уме пример 5.1.14, легко видеть, что, изменяя заданную функцию $f : S \to \mathbb{R}$ на $\mathcal{H}^{d^*}$-пренебрежимом множестве, мы можем нарушить условие (2) в определении 5.3.11.

С другой стороны, учитывая пример 5.1.14, легко видеть, что, если S – замкнутое n-регулярное по Альфорсу–Давиду множество и $d^* \in (0, n)$, то, меняя $f : S \to \mathbb{R}$ на $\mathfrak{m}_0$-пренебрежимом множестве, мы можем нарушить условие (1) в определении 5.3.11 (поскольку в этом случае $\mathfrak{m}_0$ совпадает с точностью до константы с мерой $\mathcal{L}^n\lfloor_S$).

Формально в вышеприведённом определении пространство $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ зависит от выбора параметров λ, c. Обычно эти параметры будут фиксированы в конкретных параграфах, поэтому мы будем опускать их в соответствующих обозначениях.

Замечание 5.3.15. Проверим, что определение 5.3.11 корректно, то есть, что $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ – линейное нормированное пространство. Заметим, что для любого $d' \in [d, d^*]$ имеем

$$S_{f_1+f_2}(d') \supset S_{f_1}(d') \cap S_{f_2}(d').$$

Следовательно, остаётся проверить неравенство треугольника. В свою очередь для этого достаточно проверить, что для любых $f_1, f_2 \in \mathfrak{B}(S) \cap \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ справедливо неравенство

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f_1 + f_2) \le \widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f_1) + \widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f_2). \tag{5.3.16}$$

Действительно, из (5.3.1) и неравенства треугольника легко видеть, что для любых кубов $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}_+$ и любых элементов $f_1, f_2 \in \mathfrak{B}(S) \cap \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ справедливо неравенство

$$\Phi_{f_1+f_2,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1, Q_2) \le \Phi_{f_1,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1, Q_2) + \Phi_{f_2,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1, Q_2).$$

Используя эту оценку, в силу определения 5.3.6 получаем

$$(f_1+f_2)^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x)\le (f_1)^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x)+(f_2)^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{5.3.17}$$

Комбинируя (5.3.17) с неравенством треугольника для $L_p(\mathbb{R}^n)$-нормы и для $L_p(\mathfrak{m}_0)$-нормы, соответственно, выводим (5.3.16) и завершаем доказательство.

Замечание 5.3.18. Мы докажем в конце §5.7, что пространство $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ полно при условии, что $p\in(1,\infty)$, $d^*>n-p$, $d\in(n-p,d^*]$ и $\{\mathfrak{m}_k\}\in\mathfrak{FM}^d(S)$. Это не приведёт ни к какому логически "порочному кругу", поскольку при доказательстве всех основных результатов данной главы факт полноты $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ использоваться не будет.

5.4. Оператор продолжения

Оператор продолжения, который мы построим в этом разделе является пожалуй *наиболее интересным объектом* в данной главе. Во всех предшествующих работах, относящихся к задачам продолжения функций для пространств Соболева первого порядка $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ [111], [112] (см. также ссылки в этих статьях) авторы в основном использовали метод Уитни с незначительными модификациями. Удивительным образом это приносило успех. Однако, в нашем диапазоне параметров и при отсутствии ограничений на множество S мы вынуждены разработать более тонкий метод. Стоит, однако, отметить, что на подобные конструкции нас вдохновила работа Рычкова [101], где близкие по смыслу идеи применялись в существенно более простой ситуации.

На протяжении всего раздела будем считать фиксированными следующие данные:

(**D.5.4.1**) параметр $d\in(0,n]$ и компакт $S\subset Q_{0,0}$, для которого $\overline{\lambda}:=\mathcal{H}^d_\infty(S)>0$;

(**D.5.4.2**) произвольный параметр $\lambda\in(0,\overline{\lambda})$;

(**D.5.4.3**) произвольная последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\}\in\mathfrak{FM}^d(S)$.

Поскольку параметры d,λ и множество S предполагаются фиксированными, мы будем пользоваться упрощёнными обозначениями. Положим $\mathcal{DF}:=\mathcal{DF}_S(d,\lambda)$ и при всех $k\in\mathbb{N}_0$ положим $\mathcal{DF}_k:=\mathcal{DF}_{S,k}(d,\lambda)$, $\widetilde{\mathcal{DF}}_k:=\widetilde{\mathcal{DF}}_{S,k}(d,\lambda)$, $\mathcal{A}_k:=\mathcal{A}_{S,k}(d,\lambda)$, $\widetilde{\mathcal{A}}_k:=\widetilde{\mathcal{A}}_{S,k}(d,\lambda)$. Кроме того, напомним определение 5.2.3 и положим $\underline{S}:=\underline{S}(d,\lambda)$. В соответствии с принятыми обозначениями, если функция $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дифференцируема в точке $y\in\mathbb{R}^n$, то

$$\|\nabla g(y)\|:=\|\nabla g(y)\|_\infty:=\max\Big\{\Big|\frac{\partial g}{\partial x_1}(y)\Big|,...,\Big|\frac{\partial g}{\partial x_n}(y)\Big|\Big\}.$$

5.4.1. **Конструкция оператора продолжения.** Сначала мы предъявим формальную конструкцию оператора продолжения, а затем опишем основные движущие идеи построения.

Пусть $\widetilde{\psi}_0\in C^\infty_0(\mathbb{R})$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям:

(*i*) $\chi_{[\frac{1}{10},\frac{9}{10}]}(\cdot) \le \widetilde{\psi}_0(\cdot) \le \chi_{[-\frac{1}{10},\frac{11}{10}]}(\cdot)$ и $\widetilde{\psi}_0(\cdot) > 0$ на интервале $(-1/10, 11/10)$;

(*ii*) $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} \widetilde{\psi}_0(\cdot - m) \equiv 1$ на $\mathbb{R}$.

Положим

$$C_{\widetilde{\psi}_0} := \max_{t\in\mathbb{R}} |\frac{d\widetilde{\psi}_0}{dt}(t)|.$$

Определим функцию $\psi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$\psi_0(x) := \prod_{i=1}^n \widetilde{\psi}_0(x_i) \quad \text{при} \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

и положим $\psi_{k,m}(\cdot) := \psi_0(2^k(\cdot - m))$ для любых $(k, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$. Очевидно, что:

(i) для любого $k \in \mathbb{N}_0$ и любого $m \in \mathbb{Z}^n$,

$$\chi_{\frac{4}{5}Q_{k,m}}(\cdot) \le \psi_{k,m}(\cdot) \le \chi_{\frac{6}{5}Q_{k,m}}(\cdot) \quad \text{и} \quad \psi_{k,m}(\cdot) > 0 \text{ на } \operatorname{int}(\frac{6}{5}Q_{k,m}); \tag{5.4.1}$$

(ii) для любого $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \psi_{k,m}(\cdot) \equiv 1 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^n. \tag{5.4.2}$$

(iii) для любого $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \|\nabla\psi_{k,m}(y)\| \le C(n) C_{\widetilde{\psi}_0} 2^k \quad \text{для всех} \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.4.3}$$

Напомним обозначение $\mathrm{n}_k(m)$ (см. §5.1) и определим

$$\mathfrak{c}_{k,m} := \#(\mathrm{n}_k(m) \cap \mathcal{A}_k), \qquad (k, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n. \tag{5.4.4}$$

Замечание 5.4.5. Из определения 5.2.1 и (5.4.4) следует, что $\mathfrak{c}_{k,\widetilde{m}} \neq 0$ при всех $\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$.

При $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ положим

$$f_{k,m} := \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{c}_{k,m}} \sum\limits_{m'\in \mathrm{n}_k(m)\cap\mathcal{A}_k} \fint\limits_{Q_{k,m'}} f(x) d\mathfrak{m}_k(x), & \mathfrak{c}_{k,m} \neq 0; \\ 0, \quad \mathfrak{c}_{k,m} = 0. \end{cases} \tag{5.4.6}$$

Теперь мы готовы определить индуктивно специальную последовательность функций, которая будет играть роль аппроксимирующей последовательности для продолжения. Поскольку $S \subset Q_{0,0}$, $\overline{\lambda} := \mathcal{H}_\infty^d(S) > 0$ и $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$ имеем

$$f_{0,0} = \fint\limits_{Q_{0,0}} f(x)\, d\mathfrak{m}_0(x).$$

Это наблюдение оправдывает следующее определение.

Определение 5.4.7. При $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ определим *специальную аппроксимирующую последовательность* $\{f_k\} := \{f_k\}(\{\mathfrak{m}_k\})$ *для* f индуктивно. На нулевом шаге положим (отметим, что из (**D.5.4.1**) имеем $f_{0,m} = f_{0,0}$ для любого куба $Q_{0,m} \subset 3Q_{0,0}$)

$$f_0(x) := \sum_{Q_{0,m} \subset 3Q_{0,0}} \psi_{0,m}(x) f_{0,0}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ мы уже построили функции $f_0, ..., f_{k-1}$. Положим

$$f_k(x) := f_{k-1}(x) + \sum_{\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k} \psi_{k,\widetilde{m}}(x)(f_{k,\widetilde{m}} - f_{k-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.4.8}$$

Замечание 5.4.9. Очевидно, последовательность $\{f_k\} := \{f_k\}(\{\mathfrak{m}_k\})$ корректно определена, то есть не зависит от выбора представителей $\overline{f}$ элемента f. Следовательно, в последующем, если $\overline{f} \in \mathfrak{B}(S)$ такая, что $\mathfrak{m}_0$-класс эквивалентности f функции $\overline{f}$ принадлежит $L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$, то под специальной аппроксимирующей последовательностью для $\overline{f}$ мы всегда понимаем специальную аппроксимирующую последовательность $\{f_k\} := \{f_k\}(\{\mathfrak{m}_k\})$ для f.

Определение 5.4.10. Для любого $y \in \mathbb{R}^n$ определим *нижнее и верхнее основополагающее индексное множество*, соответственно, полагая

$$\underline{K}(y) := \underline{K}_{d,\lambda}(y) := \{k \in \mathbb{N}_0 : \text{существует} \quad m \in \mathcal{A}_k \quad \text{такой, что} \quad y \in \frac{14}{5} Q_{k,m}\};$$
$$\overline{K}(y) := \overline{K}_{d,\lambda}(y) := \{k \in \mathbb{N}_0 : \text{существует} \quad \widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k \quad \text{такой, что} \quad \psi_{k,\widetilde{m}}(y) \neq 0\}.$$

Замечание 5.4.11. Из предложения 5.2.7 имеем

$$\#\underline{K}(y) = \#\overline{K}(y) = +\infty \quad \text{для всех} \quad y \in \underline{S}. \tag{5.4.12}$$

Кроме того, из (5.4.1) и определения 5.4.10 получаем

$$\underline{K}(y) = \emptyset \iff y \notin \frac{14}{5} Q_{0,0} \quad \text{и} \quad \overline{K}(y) = \emptyset \iff y \notin \frac{16}{5} \operatorname{int} Q_{0,0}.$$

Следующее предложение даёт информацию о базовых свойствах нижнего и верхнего основополагающих индексных множеств.

Предложение 5.4.13. *Нижнее и верхнее основополагающие индексные множества обладают следующими свойствами:*

(1) $0 \in \underline{K}(y)$ *для любого* $y \in \frac{14}{5} Q_{0,0}$;

(2) $0 \in \overline{K}(y)$ *для любого* $y \in \frac{16}{5} Q_{0,0}$;

(3) $\underline{K}(y) \subset \overline{K}(y)$ *для любого* $y \in \mathbb{R}^n$;

(4) $\#\underline{K}(y) \leq \#\overline{K}(y) < +\infty$ *для любого* $y \in \frac{16}{5} Q_{0,0} \setminus S$.

Доказательство. Заметим, что $Q_{0,0} \in \mathcal{DF}_0$, так как $S \subset Q_{0,0}$ и $\mathcal{H}^d_\infty(S) = \overline{\lambda} > \lambda$ согласно нашим предположениям. Поэтому, из (5.4.1) и определения 5.4.10 выводим (1) и (2).

Свойство (3) напрямую вытекает из (5.4.1) и определений 5.2.1, 5.4.10.

Для проверки (4) достаточно показать, что $\#\overline{K}(y) < \infty$ для любого $y \in \frac{16}{5}Q_{0,0} \setminus S$, потому что неравенство $\#\underline{K}(y) \le \#\overline{K}(y)$ следует из доказанного свойства (3). Из замкнутости S и (5.2.8) следует, что для любого $y \in \frac{16}{5}Q_{0,0} \setminus S$ существует такое $j(y) \in \mathbb{N}$, что

$$y \notin \bigcup \Big\{ \frac{16}{5} Q : Q \in \mathcal{Q}^{j(y)}(d, \lambda) \Big\}.$$

Этим требуемое утверждение доказано. □

Предложение 5.4.13 оправдывает введение следующего понятия.

Определение 5.4.14. Определим *нижний основополагающий индекс* $\underline{k}(y)$ и *верхний основополагающий индекс* $\overline{k}(y)$, соответственно, равенствами

$$\begin{aligned} &\underline{k}(y) := \max\{k : k \in \underline{K}(y)\} \quad \text{для любого} \quad y \in \frac{14}{5} Q_{0,0} \setminus S; \\ &\overline{k}(y) := \max\{k : k \in \overline{K}(y)\} \quad \text{для любого} \quad y \in \frac{16}{5} Q_{0,0} \setminus S. \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

Предложение 5.4.16. *Пусть $f \in L_1(\mathfrak{m}_k)$ и пусть $\{f_k\}$ – специальная аппроксимирующая последовательность для f. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^n$ справедливы следующие свойства:*

(1) *для любого $k \in \underline{K}(y)$,*

$$\mathfrak{c}_{k,\widetilde{m}} \neq 0, \quad \textit{если} \quad y \in Q_{k,\widetilde{m}}; \tag{5.4.17}$$

(2) *для любого $k \in \underline{K}(y)$,*

$$\sum_{\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k} \psi_{k,\widetilde{m}}(y) = 1; \tag{5.4.18}$$

(3) *если $y \in \frac{14}{5}Q_{0,0} \setminus S$, то $\underline{k}(y) \le \overline{k}(y) < +\infty$ и*

$$f_k(y) = f_{\overline{k}(y)}(y) \quad \textit{для всех} \quad k > \overline{k}(y). \tag{5.4.19}$$

Доказательство. По определению 5.4.10, если $k \in \underline{K}(y)$, то $y \in \frac{14}{5}Q_{k,m}$ при некотором $m \in \mathcal{A}_k$. Следовательно, если вдобавок $y \in Q_{k,\widetilde{m}}$, то $\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k \cap \mathrm{n}_k(m)$. Поэтому, из определения 5.2.1 и (5.4.4) вытекает, что $\mathfrak{c}_{k,\widetilde{m}} \neq 0$.

Равенство (5.4.18) следует из определений 5.2.1, 5.4.10, оценок (5.4.1) и равенства (5.4.2).

Неравенство $\underline{k}(y) \le \overline{k}(y)$ следует из свойства (3) предложения 5.4.13. Неравенство $\overline{k}(y) < +\infty$ следует из свойства (4) предложения 5.4.13. По определению 5.4.14 имеем $\psi_{k,\widetilde{m}}(y) = 0$ при любом $k > \overline{k}(y)$ и при всех $\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$. Теперь (5.4.19) следует из (5.4.8). □

Имея в нашем распоряжении предложение 5.4.16 и свойство (1) предложения 5.2.7 мы можем построить требуемый оператор продолжений.

Определение 5.4.20. При $f \in \mathfrak{B}(S) \cap \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ пусть $\{f_k\}$ – специальная аппроксимирующая последовательность для f. Положим

$$\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}(f)(x) := \operatorname{Ext}(f)(x) := \begin{cases} f(x), & x \in S; \\ \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus S. \end{cases} \tag{5.4.21}$$

Следующее простое наблюдение немедленно следует из определения 5.4.20.

Предложение 5.4.22. *Оператор* Ext*, определяемый формулой* (5.4.21) *является линейным отображением из* $\mathfrak{B}(S) \cap \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ *в* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку конструкция нашего оператора продолжения выглядит достаточно замысловат, мы неформально опишем для удобства читателя ключевые идеи построения.

Первая идея – использовать только кубы из семейства $\mathcal{DF}$ для сбора полезной информации о поведении заданной функции $f \in \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$. Неформально говоря, семейство $\mathcal{DF}$ является своего рода скелетом для оператора продолжения. Действительно, теорема 5.1.19 позволяет надеяться, что усреднение по таким кубам с помощью мер $\mathfrak{m}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ необходимо при построении почти оптимальных соболевских продолжений.

Вторая идея выглядит как технический трюк. Тем не менее, она достаточно важна. Напомним (см. пункт 5.2.3), что через $\mathcal{W}_S$ мы обозначали семейство всех кубов Уитни в $\mathbb{R}^n \setminus S$. В большинстве известных ранее работ семейство $\mathcal{W}_S$ играло ключевую роль в построении соответствующих операторов продолжения. Это семейство в некотором смысле позволяло осуществить перенос информации о заданной функции $f : S \to \mathbb{R}$ с множества S на $\mathbb{R}^n \setminus S$. Вместо этого наш подход использует семейство $\cup_{k\in\mathbb{N}_0} \widetilde{\mathcal{DF}_k} \setminus \mathcal{DF}$. В случае, когда либо множество S достаточно регулярно, либо $p > n$, эта инновация не даёт ничего нового в сравнении с классическим подходом Уитни. Если же S сильно нерегулярно и при этом $p \in (1, n]$, наша модификация становится существенной. Она позволяет избежать работы со сложной комбинаторной структурой семейства кубов $\mathcal{W}_S$. Грубо говоря, сложно построить достаточно "хорошее дерево" ассоциированное с семейством $\mathcal{W}_S$.

Третья идея заключается в дополнительном усреднении по соседним кубам в (5.4.6). Этот простой трюк вместе с использованием семейств $\mathcal{DF}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ позволяет избежать больших производных у продолженной функции. Грубо говоря, при $f \in \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$, поточечные оценки

функции $\|\nabla \operatorname{Ext}(f)\|$ сверху будут содержать только члены вида

$$\Big| \fint\limits_{Q_{k,m}} f(y)\, d\mathfrak{m}_k(y) - \fint\limits_{Q_{l,m'}} f(y)\, d\mathfrak{m}_l(y)\Big|,$$

где $Q_{l,m'} \in \mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q_{k,m})$ при некотором $c > 1$. Это обстоятельство играет решающую роль при доказательстве оптимальности продолжения.

Как уже отмечалось ранее, корни вышеприведенных идей восходят к работе В. Рычкова [101]. Однако, в той работе рассматривались лишь d-толстые множества. В случае, если S – d-толстое множество, анализ поточечного поведения функций из специальных аппроксимирующих последовательностей становится гораздо более простым и прозрачным.

5.4.2. **Тонкие свойства специальной аппроксимирующей последовательности.** В этом параграфе при $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ мы исследуем поточечные свойства $\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}(f)$.

Мы начнём с технического наблюдения, которое будет использоваться в дальнейшем.

Предложение 5.4.23. *Пусть $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ и $c \in \mathbb{R}$. Тогда, для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ и любых $\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$ справедливо неравенство*

$$|f_{k,\widetilde{m}^k} - c| \le \max_{m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k)\cap \mathcal{A}_k} \fint\limits_{Q_{k,m^k}} |f(x) - c| d\mathfrak{m}_k(x). \tag{5.4.24}$$

Кроме того, для любых $k, j \in \mathbb{N}_0$ и любых $\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$, $\widetilde{m}^j \in \widetilde{\mathcal{A}}_j$ справедливо неравенство

$$|f_{k,\widetilde{m}^k} - f_{j,\widetilde{m}^j}| \le \max \fint\limits_{Q_{k,m^k}} \fint\limits_{Q_{j,m^j}} |f(x) - f(y)|\, d\mathfrak{m}_j(y) d\mathfrak{m}_k(x) \tag{5.4.25}$$

где максимум взят по всем $m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k) \cap \mathcal{A}_k$ и всем $m^j \in \mathrm{n}_j(\widetilde{m}^j) \cap \mathcal{A}_j$.

Доказательство. Для доказательства (5.4.24) фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$ и $\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$. В силу замечания 5.4.5, имеем $\mathfrak{c}_{k,\widetilde{m}^k} > 0$. Следовательно,

$$1 = \frac{1}{\mathfrak{c}_{k,\widetilde{m}^k}} \sum_{m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k)\cap \mathcal{A}_k} 1. \tag{5.4.26}$$

Используя это наблюдение и (5.4.6), выводим требуемую оценку

$$\begin{aligned} |f_{k,\widetilde{m}^k} - c| &= \Big| \frac{1}{\mathfrak{c}_{k,\widetilde{m}^k}} \sum_{m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k)\cap \mathcal{A}_k} \fint\limits_{Q_{k,m^k}} f(x) d\mathfrak{m}_k(x) - \frac{1}{\mathfrak{c}_{k,\widetilde{m}^k}} \sum_{m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k)\cap \mathcal{A}_k} c \Big| \\ &\le \max_{m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k)\cap \mathcal{A}_k} \Big| \fint\limits_{Q_{k,m^k}} f(x) d\mathfrak{m}_k(x) - c \Big| \le \max_{m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k)\cap \mathcal{A}_k} \fint\limits_{Q_{k,m^k}} |f(x) - c| d\mathfrak{m}_k(x). \end{aligned} \tag{5.4.27}$$

Зафиксируем теперь $k, j \in \mathbb{N}_0$ и $\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k$, $\widetilde{m}^j \in \widetilde{\mathcal{A}}_j$. Сначала применим (5.4.24) при $c = f_{j,\widetilde{m}^j}$, а затем для $\mathfrak{m}_k$-почти каждого $y \in S$ применим (5.4.24) при $c = f(y)$. Имеем

$$
\begin{aligned}
|f_{k,\widetilde{m}^k} - f_{j,\widetilde{m}^j}| &\le \max_{m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k) \cap \mathcal{A}_k} \fint\limits_{Q_{k,m^k}} |f(y) - f_{j,\widetilde{m}^j}| d\mathfrak{m}_k(y) \\
&\le \max_{m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k) \cap \mathcal{A}_k} \fint\limits_{Q_{k,m^k}} \Big(\max_{m^j \in \mathrm{n}_j(\widetilde{m}^j) \cap \mathcal{A}_j} \fint\limits_{Q_{j,m^j}} |f(y) - f(x)| \, d\mathfrak{m}_j(x) \Big) \, d\mathfrak{m}_k(y) \qquad (5.4.28) \\
&\le \max \fint\limits_{Q_{k,m^k}} \fint\limits_{Q_{j,m^j}} |f(y) - f(x)| \, d\mathfrak{m}_j(x) d\mathfrak{m}_k(y),
\end{aligned}
$$

где максимум взят по всем $m^k \in \mathrm{n}_k(\widetilde{m}^k) \cap \mathcal{A}_k$ и всем $m^j \in \mathrm{n}_j(\widetilde{m}^j) \cap \mathcal{A}_j$.

Доказательство завершено. □

Теперь мы разработаем инструмент, который будет краеугольным камнем в доказательстве основных утверждений данного раздела. Более точно, при $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ индуктивное определение последовательности $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, данное в (5.4.8), не столь полезно для вычислений. по этой причине мы выведем явную формулу для функций f_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 5.4.29. *Пусть $f \in L_1(\mathfrak{m}_k)$ и пусть $\{f_k\}$ – специальная аппроксимирующая последовательность для f. Тогда для любых $i, k \in \mathbb{N}_0$ при $k > i$ имеем*

$$
f_k(x) = f_i(x) + \sum_{j=i+1}^{k} S_{i,k}^j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (5.4.30)
$$

где для каждого $j \in \{i+1, ..., k\}$, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ мы полагаем

(5.4.31)

$$
S_{i,k}^j(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{\widetilde{m}^j \in \widetilde{\mathcal{A}}_j} \psi_{j,\widetilde{m}^j}(x) \Big(\prod_{r=j+1}^{k} \Big(\sum_{\widetilde{m}^r \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_r} \psi_{r,\widetilde{m}^r}(x) \Big) \Big) (f_{j,\widetilde{m}^j} - f_i(x)), & j \in \{i+1, ..., k-1\}; \\ \displaystyle\sum_{\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k} \psi_{k,\widetilde{m}^k}(x)(f_{k,\widetilde{m}^k} - f_i(x)), & j = k. \end{cases}
$$

Соответствующее произведение в формуле (5.4.31) *полагается равным нулю при $k < i+2$.*

Доказательство. при фиксированном $i \in \mathbb{N}_0$ мы докажем (5.4.30) по индукции.

База индукции. При $k = i+1$ утверждение очевидно следует из (5.4.8).

Шаг индукции. Предположим, что (5.4.30) доказано при некотором $k = l \in \mathbb{N}$, $l > i$. Покажем, что (5.4.30) справедливо при $k = l+1$.

Действительно, прежде всего, отметим, что из (5.4.31) для каждого $j = i+1, ..., l$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\Big(1 - \sum_{\widetilde{m}^{l+1} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{l+1}} \psi_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}}(x)\Big) S_{i,l}^j(x) \\
&= \sum_{\widetilde{m}^{l+1} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{l+1}} \psi_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}}(x) S_{i,l}^j(x) = S_{i,l+1}^j(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (5.4.32)
\end{aligned}
$$

С другой стороны, из (5.4.31) вытекает равенство

$$S^{l+1}_{i,l+1}(x) = \sum_{\widetilde{m}^{l+1}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{l+1}} \psi_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}}(x)(f_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}} - f_i(x)), \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{5.4.33}$$

Подставим теперь (5.4.30) при $k=l$ в (5.4.8) и используем (5.4.32), (5.4.33). Это приводит к требуемому равенству

$$\begin{aligned} f_{l+1}(x) &= f_i(x) + \sum_{j=i+1}^{l} S^j_{i,l}(x) + \sum_{\widetilde{m}^{l+1}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{l+1}} \psi_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}}(x)\Big(f_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}} - f_i(x) - \sum_{j=i+1}^{l} S^j_{i,l}(x)\Big) \\ &= f_i(x) + \sum_{j=i+1}^{l}\Big(1 - \sum_{\widetilde{m}^{l+1}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{l+1}} \psi_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}}(x)\Big) S^j_{i,l}(x) + \\ &+ \sum_{\widetilde{m}^{l+1}\in\widetilde{\mathcal{A}}_{l+1}} \psi_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}}(x)(f_{l+1,\widetilde{m}^{l+1}} - f_i(x)) = f_i(x) + \sum_{j=i+1}^{l+1} S^j_{i,l+1}(x), \quad x\in\mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{5.4.34}$$

Лемма доказана.

□

Замечание 5.4.35. В силу леммы 5.4.29, применённой при $i=0$ и (5.4.18), имеем

$$f_k(y) = \sum_{\widetilde{m}\in\widetilde{\mathcal{A}}_k} \psi_{k,\widetilde{m}}(y) f_{k,\widetilde{m}} \quad \text{для любого} \quad y\in\frac{14}{5}Q_{0,0} \quad \text{и всех} \quad k\in\underline{K}(y). \tag{5.4.36}$$

Эта простая формула будет нам помогать упрощать некоторые промежуточные оценки в доказательствах последующих утверждений.

Из предложения 5.4.13 следует, что существует предел последовательности $\{f_k(x)\}$ для любого $x\in\mathbb{R}^n\setminus S$. Это не так для произвольной точки $x\in S$. Однако, если заданная функция $f: S\to\mathbb{R}$ достаточно регулярна, мы можем извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{f_{k_s}(x)\}$ для соответствующих точек $x\in S$.

Лемма 5.4.37. *При $f\in\mathfrak{B}(S)\cap\widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ для любой точки $x\in\underline{S}\cap S_f(d)$ существует такая возрастающая последовательность $\{k_s\}=\{k_s(x)\}_{s\in\mathbb{N}_0}\subset\mathbb{N}_0$, что*

$$\lim_{s\to\infty} f_{k_s}(x) = f(x).$$

Доказательство. Фиксируем точку $x\in\underline{S}\cap S_f(d)$. В силу замечания 5.4.11, множество $\underline{K}(x)$ бесконечно и может быть записано как строго возрастающая последовательность $\{k_s\}=\{k_s(x)\}_{s\in\mathbb{N}_0}\subset\mathbb{N}_0$. Следовательно, из (5.3.10), (5.4.6) и (5.4.36) получаем

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{k_s}(x)| &\le \sum_{\substack{m\in\mathcal{A}_{k_s}\\ x\in\frac{16}{5}Q_{k_s,m}}} \fint_{Q_{k_s,m}} |f(x)-f(y)|\,d\mathfrak{m}_{k_s}(y) \\ &\le C \max_{\substack{m\in\mathcal{A}_{k_s}\\ x\in\frac{14}{5}Q_{k_s,m}}} \fint_{Q_{k_s,m}} |f(x)-f(y)|\,d\mathfrak{m}_{k_s}(y) \to 0, \quad s\to\infty. \end{aligned} \tag{5.4.38}$$

Лемма доказана. □

Следующее техническое утверждение будет важно при доказательстве главного результата настоящего раздела.

Предложение 5.4.39. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $\{k_i\}_{i=1}^s \subset \mathbb{N}_0$ такие, что $k_1 < .... < k_s$. Тогда*

$$
\begin{aligned}
&1 - \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{\widetilde{m}^{k_j} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_j}} \psi_{k_j,\widetilde{m}^{k_j}}(x) \prod_{r=j+1}^{s} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{k_r} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{k_r}} \psi_{k_r,\widetilde{m}^{k_r}}(x) \Big) - \sum_{\widetilde{m}^{k_s} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_s}} \psi_{k_s,\widetilde{m}^{k_s}}(x) \\
&= \prod_{j=1}^{s} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{k_j} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{k_j}} \psi_{k_j,\widetilde{m}^{k_j}}(x) \Big) \quad \textit{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned} \tag{5.4.40}
$$

где первая сумма в левой части (5.4.40) *есть нуль при $s = 1$.*

Доказательство. Докажем (5.4.40) по индукции. Фиксируем $x \in \mathbb{R}^n$.

База индукции. При $s = 1$ утверждение очевидно, поскольку второй член в левой части (5.4.40) обращается в нуль по определению.

Шаг индукции. Предположим, что мы уже доказали (5.4.40) при некотором $s_0 \in \mathbb{N}$ и при произвольных неотрицательных целых $k_1' < ... < k_{s_0}'$ (вместо $\{k_i\}_{i=1}^s$). чтобы сделать индукционный шаг, возьмём произвольные $k_1 < ... < k_{s_0+1}$ и применим (5.4.40) при $k_i' = k_{i+1}$, $i = 1, ..., s_0$. Это приводит к искомой цепочке равенств

$$
\begin{aligned}
&1 - \sum_{j=1}^{s_0} \sum_{\widetilde{m}^{k_j} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_j}} \psi_{k_j,\widetilde{m}^{k_j}}(x) \prod_{r=j+1}^{s_0+1} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{k_r} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{k_r}} \psi_{k_r,\widetilde{m}^{k_r}}(x) \Big) - \sum_{\widetilde{m}^{k_{s_0+1}} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_{s_0+1}}} \psi_{k_{s_0+1},\widetilde{m}^{k_{s_0+1}}}(x) \\
&= \prod_{j=2}^{s_0+1} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{k_j} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{k_j}} \psi_{k_j,\widetilde{m}^{k_j}}(x) \Big) - \sum_{\widetilde{m}^{k_1} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_1}} \psi_{k_1,\widetilde{m}^{k_1}}(x) \prod_{j=2}^{s_0+1} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{k_j} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{k_j}} \psi_{k_j,\widetilde{m}^{k_j}}(x) \Big) \\
&= \Big(1 - \sum_{\widetilde{m}^{k_1} \in \mathcal{A}_{k_1}} \psi_{k_1,m^{k_1}}(x) \Big) \prod_{j=2}^{s_0+1} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{k_j} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{k_j}} \psi_{k_j,\widetilde{m}^{k_j}}(x) \Big) = \prod_{j=1}^{s_0+1} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{k_j} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{k_j}} \psi_{k_j,\widetilde{m}^{k_j}}(x) \Big).
\end{aligned} \tag{5.4.41}
$$

Предложение полностью доказано. □

Замечание 5.4.42. Из (5.4.1) и предложения 5.4.39 при каждом $s \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$ имеем

$$
0 \le \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{\widetilde{m}^{k_j} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_j}} \psi_{k_j,\widetilde{m}^{k_j}}(x) \prod_{r=j+1}^{s} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{k_r} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{k_r}} \psi_{k_r,\widetilde{m}^{k_r}}(x) \Big) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.4.43}
$$

для всех таких $\{k_i\}_{i=1}^s \subset \mathbb{N}_0$, что $k_1 < .... < k_s$.

Теперь мы сформулируем и докажем основной результат данного параграфа, который содержит важную оценку. Она будет незаменимым инструментом при доказательстве поточечных оценок в §5.5. Напомним определение 5.4.10.

Теорема 5.4.44. *Существует константа $C > 0$, зависящая только от $C_{\widetilde{\psi}_0}$ и n, такая, что при каждом $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$, для каждого $y \in \frac{14}{5}Q_{0,0}$ и любого $k^* \in \underline{K}(y)$*

$$\|\nabla f_k(y)\| \le C\,\mathrm{M}_{k,c}(y) \quad \text{при всех} \quad k \ge k^* \quad \text{и всех} \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.4.45}$$

где

$$\mathrm{M}_{k,c}(y) := 2^k \max \fint_{Q_{j,m}} |f(x) - c|\, d\mathfrak{m}_j(x). \tag{5.4.46}$$

Максимум в (5.4.46) *взят по всем $j \in \{k^*, ..., k\}$ и всем $m \in \mathcal{A}_j$, для которых $\chi_{\frac{16}{5}Q_{j,m}}(y) \ne 0$.*

Доказательство. Фиксируем точку $y \in \frac{14}{5}Q_{0,0}$ и число $k^* \in \underline{K}(y)$. Фиксируем также произвольные числа $k \ge k^*$ и $c \in \mathbb{R}$. Применение леммы 5.4.29 при $i = k^*$ даёт (ниже мы предполагаем, что соответствующая сумма равна нулю при $k = k^*$)

$$\nabla f_k(y) = \nabla f_{k^*}(y) + \sum_{j=k^*+1}^{k} \nabla S^j_{k^*,k}(y), \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.4.47}$$

Без ограничения общности мы можем предположить, что $k > k^*$, поскольку при $k = k^*$ доказательство сильно проще технически, но аналогично идейно. Разобьем остаток доказательства на несколько шагов.

Шаг 1. Поскольку $k^* \in \underline{K}(y)$ из (5.4.18) и замечания 5.4.35 имеем

$$\nabla f_{k^*}(y) = \sum_{\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k^*}} \nabla \psi_{k^*,\widetilde{m}}(y) f_{k^*,\widetilde{m}} = \sum_{\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k^*}} \nabla \psi_{k^*,\widetilde{m}}(y)(f_{k^*,\widetilde{m}} - c). \tag{5.4.48}$$

Следовательно, из (5.4.1)–(5.4.3) получаем

$$\|\nabla f_{k^*}(y)\| \le C 2^{k^*} \sum_{\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k^*}} \chi_{\frac{6}{5}Q_{k^*,\widetilde{m}}}(y) |f_{k^*,\widetilde{m}} - c|. \tag{5.4.49}$$

Следовательно, из (5.4.24) и (5.4.49) выводим оценку

$$\begin{aligned} \|\nabla f_{k^*}(y)\| &\le C 2^{k^*} \sum_{\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k^*}} \chi_{\frac{6}{5}Q_{k^*,\widetilde{m}}}(y) \max_{m \in \mathrm{n}_{k^*}(\widetilde{m}) \cap \mathcal{A}_{k^*}} \fint_{Q_{k^*,m}} |f(x) - c|\, d\mathfrak{m}_{k^*}(x) \\ &\le C\Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\frac{6}{5}Q_{k^*,\widetilde{m}}}(y) \Big) \mathrm{M}_{k,c}(y) \le C\,\mathrm{M}_{k,c}(y). \end{aligned} \tag{5.4.50}$$

Шаг 2. Из (5.4.31) получаем при каждом $j \in \{k^* + 1, ..., k - 1\}$ (соответствующее произведение исчезает при $k < k^* + 2$),

$$\begin{aligned} \nabla S^j_{k^*,k}(y) &= \sum_{\widetilde{m}^j \in \widetilde{\mathcal{A}}_j} \nabla\Big(\psi_{j,\widetilde{m}^j}(y) \prod_{r=j+1}^{k} \Big(\sum_{\widetilde{m}^r \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_r} \psi_{r,\widetilde{m}^r}(y) \Big) \Big)(f_{j,\widetilde{m}^j} - c + c - f_{k^*}(y)) \\ &- \sum_{\widetilde{m}^j \in \widetilde{\mathcal{A}}_j} \psi_{j,\widetilde{m}^j}(y) \prod_{r=j+1}^{k} \Big(\sum_{\widetilde{m}^r \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_r} \psi_{r,\widetilde{m}^r}(y) \Big) \nabla f_{k^*}(y). \end{aligned} \tag{5.4.51}$$

Мы также имеем

$$\nabla S^k_{k^*,k}(y) = \sum_{\widetilde{m}^k\in\widetilde{\mathcal{A}}_k} \nabla\psi_{k,\widetilde{m}^k}(y)(f_{k,\widetilde{m}^k} - c + c - f_{k^*}(y)) - \sum_{\widetilde{m}^k\in\widetilde{\mathcal{A}}_k} \psi_{k,\widetilde{m}^k}(y)\nabla f_{k^*}(y). \tag{5.4.52}$$

Шаг 3. Для каждого $j \in \{k^*+1, ..., k-1\}$ воспользуемся правилом Лейбница дифференцирования произведения. Используя (5.4.1) – (5.4.3), будем иметь (соответствующее произведение в последней строке исчезает при $k \le k^*+2$)

$$\begin{aligned}
\Sigma^j_k(y) &:= \sum_{\widetilde{m}^j\in\widetilde{\mathcal{A}}_j} \Big\|\nabla\Big(\psi_{j,m^j}(y)\prod_{r=j+1}^{k}\Big(\sum_{\widetilde{m}^r\in\mathbb{Z}^n\setminus\widetilde{\mathcal{A}}_r}\psi_{r,\widetilde{m}^r}(y)\Big)\Big)\Big\| \\
&\le \sum_{\widetilde{m}^j\in\widetilde{\mathcal{A}}_j} \|\nabla\psi_{j,\widetilde{m}^j}(y)\| \prod_{r=j+1}^{k}\Big(\sum_{\widetilde{m}^r\in\mathbb{Z}^n\setminus\widetilde{\mathcal{A}}_r}\psi_{r,\widetilde{m}^r}(y)\Big) \\
&+ \sum_{\widetilde{m}^j\in\widetilde{\mathcal{A}}_j} \psi_{j,\widetilde{m}^j}(y)\Big\|\nabla\Big(\prod_{r=j+1}^{k}\Big(\sum_{\widetilde{m}^r\in\mathbb{Z}^n\setminus\widetilde{\mathcal{A}}_r}\psi_{r,\widetilde{m}^r}(y)\Big)\Big)\Big\| \\
&\le C2^j + \Big(\sum_{\widetilde{m}^j\in\widetilde{\mathcal{A}}_j}\psi_{j,\widetilde{m}^j}(y)\Big)\sum_{r'=j+1}^{k} C2^{r'}\prod_{\substack{r=j+1\\r\neq r'}}^{k}\Big(\sum_{\widetilde{m}^r\in\mathbb{Z}^n\setminus\widetilde{\mathcal{A}}_r}\psi_{r,\widetilde{m}^r}(y)\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{5.4.53}$$

Для каждого $r' \in \{k^*+2, ..., k\}$ используем замечание 5.4.42 при $s = k-k^*-1$ и

$$k_1 := k^*+1, ..., k_{r'-k^*-1} := r'-1 \quad \text{и} \quad k_{r'-k^*} := r'+1, ..., k_s := k.$$

Это приводит к (мы предполагаем, что $k > k^*+2$) ключевой оценке

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k^*+1}^{r'-1}\Big(\sum_{\widetilde{m}^j\in\widetilde{\mathcal{A}}_j}\psi_{j,\widetilde{m}^j}(y)\Big)\prod_{\substack{r=j+1\\r\neq r'}}^{k}\Big(\sum_{\widetilde{m}^r\in\mathbb{Z}^n\setminus\widetilde{\mathcal{A}}_r}\psi_{r,\widetilde{m}^r}(y)\Big) \\
&\le \sum_{\substack{j=k^*+1\\j\neq r'}}^{k-1}\Big(\sum_{\widetilde{m}^j\in\widetilde{\mathcal{A}}_j}\psi_{j,\widetilde{m}^j}(y)\Big)\prod_{\substack{r=j+1\\r\neq r'}}^{k}\Big(\sum_{\widetilde{m}^r\in\mathbb{Z}^n\setminus\widetilde{\mathcal{A}}_r}\psi_{r,\widetilde{m}^r}(y)\Big) \le 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, используя (5.4.53), и, меняя порядок суммирования, получим (соответствующее произведение ниже исчезает при $k = k^*+2$)

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k^*+1}^{k-1}\Sigma^j_k(y) \\
&\le C\Big(2^k + \sum_{r'=k^*+2}^{k} 2^{r'}\sum_{j=k^*+1}^{r'-1}\Big(\sum_{\widetilde{m}^j\in\widetilde{\mathcal{A}}_j}\psi_{j,\widetilde{m}^j}(y)\Big)\prod_{\substack{r=j+1\\r\neq r'}}^{k}\Big(\sum_{\widetilde{m}^r\in\mathbb{Z}^n\setminus\widetilde{\mathcal{A}}_r}\psi_{r,\widetilde{m}^r}(y)\Big)\Big) \le C2^k.
\end{aligned} \tag{5.4.54}$$

Кроме того, из (5.4.3) получаем

$$\Sigma^k_k(y) := \sum_{\widetilde{m}^k\in\widetilde{\mathcal{A}}_k} \|\nabla\psi_{k,\widetilde{m}^k}(y)\| \le C2^k. \tag{5.4.55}$$

Шаг 4. Подставим (5.4.48), (5.4.51), (5.4.52) в (5.4.47). Имеем

$$\|\nabla f_k(y)\| \le \sum_{i=1}^{7} R_k^i(y). \tag{5.4.56}$$

В правой части (5.4.56) мы положили

(5.4.57)

$$R_k^1(y) := \|\nabla f_{k^*}(y)\|, \quad R_k^7(y) := \sum_{\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k} \psi_{k,\widetilde{m}^k}(y) \|\nabla f_{k^*}(y)\|$$

$$R_k^4(y) := \sum_{j=k^*+1}^{k-1} \sum_{\widetilde{m}^j \in \widetilde{\mathcal{A}}_j} \psi_{j,\widetilde{m}^j}(y) \prod_{r=j+1}^{k} \Big(\sum_{\widetilde{m}^r \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_r} \psi_{r,\widetilde{m}^r}(y) \Big) \|\nabla f_{k^*}(y)\|,$$

$$R_k^3(y) := \sum_{j=k^*+1}^{k-1} \Sigma_k^j(y) |c - f_{k^*}(y)|, \quad R_k^6(y) := \sum_{\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k} \|\nabla \psi_{k,\widetilde{m}^k}(y)\| |c - f_{k^*}(y)|,$$

$$R_k^2(y) := \sum_{j=k^*+1}^{k-1} \Sigma_k^j(y) \sum_{\widetilde{m}^j \in \widetilde{\mathcal{A}}^j} \chi_{\frac{6}{5} Q_{j,\widetilde{m}^j}}(y) |f_{j,\widetilde{m}^j} - c|, \quad R_k^5(y) := \sum_{\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k} \|\nabla \psi_{k,\widetilde{m}^k}(y)\| |f_{k,\widetilde{m}^k} - c|.$$

Шаг 5. Из (5.4.2) и (5.4.50) имеем

$$R_k^7(y) \le R_k^1(y) \le C\, \mathrm{M}_{k,c}(y). \tag{5.4.58}$$

Шаг 6. Из замечания 5.4.42 и (5.4.50) получаем

$$R_k^4(y) \le \|\nabla f_{k^*}(y)\| = R_k^1(y) \le C\, \mathrm{M}_{k,c}(y). \tag{5.4.59}$$

Шаг 7. Из (5.4.54) и (5.4.55), очевидно, имеем

$$R_k^3(y) \le C 2^k |c - f_{k^*}(y)|, \quad R_k^6(y) \le C 2^k |c - f_{k^*}(y)|.$$

Следовательно, используя аргументы, аналогичные тем, что использованы на первом шаге доказательства, выводим

$$R_k^3(y) + R_k^6(y) \le C\, \mathrm{M}_{k,c}(y). \tag{5.4.60}$$

Шаг 8. Наконец, воспользуемся предложением 5.4.23 и учтём (5.4.46), (5.4.54), (5.4.55). Это приводит нас к оценкам

$$R_k^2(y) \le C\, \mathrm{M}_{k,c}(y), \quad R_k^5(y) \le C\, \mathrm{M}_{k,c}(y). \tag{5.4.61}$$

Шаг 9. Собирая вместе (5.4.56)–(5.4.61), выводим (5.4.45) и завершаем доказательство.

□

5.5. Обратная теорема о следе

В этом разделе мы докажем так называемую *обратную теорему о следе*. Более точно, для заданного компакта $S \subset Q_{0,0}$ и функции $f \in \mathfrak{B}(S)$, мы найдём условия, которые достаточны для существования соболевского продолжения F функции f.

На протяжении всего раздела следующие данные предполагаются фиксированными:

(**D.5.5.1**) числа $d^* \in (0, n]$, $d \in (0, d^*]$ и компакт $S \subset Q_{0,0}$, для которого $\overline{\lambda} := \mathcal{H}^{d^*}_\infty(S) > 0$;

(**D.5.5.2**) произвольный параметр $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$;

(**D.5.5.3**) произвольная последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$.

В этом параграфе положим $\mathcal{DF} := \mathcal{DF}_S(d, \lambda)$, $\underline{S} := \underline{S}(d, \lambda)$, $S_f := S_f(d)$. При каждом $k \in \mathbb{N}_0$ положим $\mathcal{DF}_k := \mathcal{DF}_{S,k}(d, \lambda)$ и $\widetilde{\mathcal{DF}}_k := \widetilde{\mathcal{DF}}_{S,k}(d, \lambda)$. При $c \geq 1$ положим $T_c(Q) := T_{d,\lambda,c}(Q)$, $\mathcal{K}_c(Q) := \mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q)$. Напомним определение 5.4.10 и для каждого фиксированного $y \in \mathbb{R}^n$ положим $\underline{K}(y) := \underline{K}_{d,\lambda}(y)$, $\overline{K}(y) := \overline{K}_{d,\lambda}(y)$. Также будем использовать символ Ext вместо $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}$ для обозначения соответствующего оператора продолжения, построенного в предыдущем параграфе. Наконец, на протяжении этого параграфа полагаем $f^\natural_c := f^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}$.

Напомним замечание 5.4.11.

Лемма 5.5.1. *Пусть $y \in \frac{14}{5}Q_{0,0}$. Пусть $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ и $j_1, j_2 \in \overline{K}(y)$ таковы, что:*

(1) $k_1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k_2$;

(2) $(k_1, k_2) \cap \underline{K}(y) = \emptyset$.

Тогда $Q_{j_1,m_1} \in \mathcal{K}_7(Q_{j_2,m_2})$ для любых $Q_{j_i,m_i} \in \mathcal{DF}_{j_i}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих условию $y \in \frac{16}{5}Q_{j_1,m_1} \cap \frac{16}{5}Q_{j_2,m_2}$.

Доказательство. При $j_1 = j_2$ утверждение сразу вытекает из определения 5.2.9 и предложения 5.1.1, поэтому далее считаем $j_1 < j_2$.

Пусть $Q_{j_i,m_i} \in \mathcal{DF}_{j_i}$, $i = 1, 2$ таковы, что $y \in \frac{16}{5}Q_{j_1,m_1} \cap \frac{16}{5}Q_{j_2,m_2}$. Фиксируем двоичный куб $Q \supset Q_{j_2,m_2}$ с длиной ребра $l(Q) \in (2^{-j_2}, 2^{-j_1})$. Мы утверждаем, что $Q \notin \mathcal{DF}$. Действительно, предположим противное. С одной стороны, по построению $-\log_2 l(Q) \in (j_1, j_2) \subset (k_1, k_2)$. С другой стороны, поскольку $Q \in \mathcal{D}_+$, имеем $l(Q) \geq 2l(Q_{j_2,m_2})$. Следовательно, учитывая, что $y \in \frac{16}{5}Q_{j_2,m_2}$, заключаем, что $y \in \frac{14}{5}Q$. Поэтому $-\log_2 l(Q) \in \underline{K}(y)$. Следовательно, $(k_1, k_2) \cap \underline{K}(y) \neq \emptyset$. Это противоречит предположениям леммы. Утверждение доказано.

Из условия $y \in \frac{16}{5}Q_{j_1,m_1} \cap \frac{16}{5}Q_{j_2,m_2}$, очевидно, имеем $\mathrm{dist}(Q_{j_1,m_1}, Q_{j_2,m_2}) \leq \frac{11}{5}2^{-j_1}$. Поскольку кубы являются двоичными, используя предложение 5.1.1, получаем $\mathrm{dist}(Q_{j_1,m_1}, Q_{j_2,m_2}) \leq 2^{1-j_1}$. Следовательно, $Q_{j_2,m_2} \subset 7Q_{j_1,m_1}$.

Доказательство завершено. □

Имея в нашем распоряжении лемму 5.5.1, мы можем установить важную оценку.

Лемма 5.5.2. *При $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ для любого $y \in \frac{14}{5}Q_{0,0}$ справедливо следующее утверждение. Если $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ и $j_1, j_2 \in \overline{K}(y)$ удовлетворяют предположениям леммы 5.5.1, то*

$$|f_{j_1,\widetilde{m}_1} - f_{j_2,\widetilde{m}_2}| \le 2^{-\max\{j_1,j_2\}} f_7^\sharp(y) \tag{5.5.3}$$

для любых таких $Q_{j_i,\widetilde{m}_i} \in \widetilde{\mathcal{DF}}_{j_i}$, $i = 1, 2$, что $y \in \frac{6}{5}Q_{j_1,\widetilde{m}_1} \cap \frac{6}{5}Q_{j_2,\widetilde{m}_2}$.

Доказательство. При $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ и $y \in \frac{14}{5}Q_{0,0}$, фиксируем $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ и $j_1, j_2 \in \overline{K}(y)$, удовлетворяющие предположениям леммы 5.5.1. Кроме того, фиксируем такие $Q_{j_i,\widetilde{m}_i} \in \widetilde{\mathcal{DF}}_{j_i}$, $i = 1, 2$, что $y \in \frac{6}{5}Q_{j_1,\widetilde{m}_1} \cap \frac{6}{5}Q_{j_2,\widetilde{m}_2}$. Очевидно, что для любых $m_i \in \mathrm{n}_{j_i}(\widetilde{m}_i)$, $i = 1, 2$ имеем

$$y \in \frac{16}{5}Q_{j_1,m_1} \cap \frac{16}{5}Q_{j_2,m_2} \tag{5.5.4}$$

Пользуясь предложением 5.4.23, учитывая (5.5.4) и применяя лемму 5.5.1, получим

$$\begin{aligned} &|f_{j_1,\widetilde{m}_1} - f_{j_2,\widetilde{m}_2}| \\ &\le \max_{\substack{i=1,2 \\ m_i \in \mathrm{n}_{j_i}(\widetilde{m}_i) \cap \mathcal{A}_{j_i} Q_{j_1},m_1}} \fint_{Q_{j_2},m_2} \fint |f(x) - f(y)|\, d\mathfrak{m}_{j_1}(x) d\mathfrak{m}_{j_2}(y) \le 2^{-\max\{j_1,j_2\}} f_7^\sharp(y). \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

Доказательство завершено. □

Напомним определения 5.4.7 и 5.4.10. При $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ установим полезную поточечную оценку для функций $f_k - f_l$ при $k, l \in \mathbb{N}$. Это будет основным инструментом для вывода различного сорта сходимостей специальной аппроксимирующей последовательности $\{f_k\}$.

Теорема 5.5.6. *Пусть $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ и $y \in \frac{14}{5}Q_{0,0}$. Пусть $\{f_k\}$ – специальная аппроксимирующая последовательность для f. Тогда для любых таких $k, s \in \mathbb{N}_0$, что $s \ge k$, справедливо неравенство*

$$|f_k(y) - f_s(y)| \le 2^{-\underline{k}(y,k)+3} f_7^\natural(y), \tag{5.5.7}$$

где $\underline{k}(y,k) = \max\{k' \in \underline{K}(y) : k' \le k\}$.

Доказательство. Фиксируем такие $k, s \in \mathbb{N}_0$, что $s \ge k$ и разобьём доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. В силу замечания 5.4.11 имеем $\underline{K}(y) \ne \emptyset$. Запишем $\underline{K}(y)$ в порядке возрастания, то есть $\underline{K}(y) = \{k_l\}$, где $\{k_l\} = \{k_l\}_{l=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ – строго возрастающая последовательность, либо конечное множество чисел, идущих в порядке возрастания. Положим

$$\underline{l} := \max\{l : k_l \le k\} \quad \text{и} \quad \bar{l} := \max\{l : k_l \le s\}. \tag{5.5.8}$$

Очевидно, имеем (вторая сумма исчезает в случае $\underline{l} = \bar{l}$)

$$|f_k(y) - f_s(y)| \le |f_k(y) - f_{k_{\underline{l}}}(y)| + \sum_{l=\underline{l}}^{\bar{l}-1} |f_{k_l}(y) - f_{k_{l+1}}(y)| + |f_s(y) - f_{k_{\bar{l}}}(y)|. \tag{5.5.9}$$

Шаг 2. Так как $\{k_l\} \subset \underline{K}(y)$ в силу замечания 5.4.35 получим

$$f_{k_l}(y) = \sum_{\widetilde{m}^{k_l} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_l}} \psi_{k_l,\widetilde{m}^{k_l}}(y) f_{k_l,\widetilde{m}^{k_l}} \quad \text{для любого} \quad l. \tag{5.5.10}$$

Из (5.5.10) для любого $l \in \{\underline{l}, ..., \bar{l}-1\}$ выводим

$$|f_{k_l}(y) - f_{k_{l+1}}(y)| \le \sum_{\widetilde{m}^{k_l} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_l}} \sum_{\widetilde{m}^{k_{l+1}} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_{l+1}}} \psi_{k_l,\widetilde{m}^{k_l}}(y) \psi_{k_{l+1},\widetilde{m}^{k_{l+1}}}(y) |f_{k_l,\widetilde{m}^{k_l}} - f_{k_{l+1},\widetilde{m}^{k_{l+1}}}|. \tag{5.5.11}$$

Заметим, что при $l \in \{\underline{l}, ..., \bar{l}-1\}$ имеем $(k_l, k_{l+1}) \cap \underline{K}(y) = \emptyset$. Следовательно, применение леммы 5.5.2 при $k_1 = j_1 = k_l$ и $k_2 = j_2 = k_{l+1}$ приводит к неравенству

$$|f_{k_l,\widetilde{m}^{k_l}} - f_{k_{l+1},\widetilde{m}^{k_{l+1}}}| \le 2^{-k_{l+1}} f_7^\natural(y), \tag{5.5.12}$$

которое справедливо для любого $l \in \{\underline{l}, ..., \bar{l}-1\}$ и для всех индексов $\widetilde{m}^{k_l} \in \widetilde{A}_{k_l}$, $\widetilde{m}^{k_{l+1}} \in \widetilde{A}_{k_{l+1}}$, удовлетворяющих условиям $\psi_{k_l,\widetilde{m}^{k_l}}(y) \ne 0$ и $\psi_{k_{l+1},\widetilde{m}^{k_{l+1}}}(y) \ne 0$.

В итоге, подставим (5.5.12) в (5.5.11) и учтём (5.4.2). Будем иметь оценку

$$\begin{aligned} &|f_{k_l,\widetilde{m}^{k_l}} - f_{k_{l+1},\widetilde{m}^{k_{l+1}}}| \\ &\le 2^{-k_{l+1}} f_7^\natural(y) \sum_{\widetilde{m}^{k_l} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_l}} \sum_{\widetilde{m}^{k_{l+1}} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_{l+1}}} \psi_{k_l,\widetilde{m}^{k_l}}(y) \psi_{k_{l+1},\widetilde{m}^{k_{l+1}}}(y) \le 2^{-k_{l+1}} f_7^\natural(y). \end{aligned} \tag{5.5.13}$$

Шаг 3. Предположим, что $k > k_{\underline{l}}$, поскольку в противном случае $f_k(y) - f_{k_{\underline{l}}}(y) = 0$. Применение леммы 5.4.29 при $i = k_{\underline{l}}$ даёт

$$|f_k(y) - f_{k_{\underline{l}}}(y)| \le \sum_{r=k_{\underline{l}}+1}^{k} S^r_{k_{\underline{l}},k}(y). \tag{5.5.14}$$

Если $k - k_{\underline{l}} \ge 2$, то из (5.4.18), (5.4.31) и (5.5.10), при каждом $r \in \{k_{\underline{l}} + 1, ..., k-1\}$ имеем неравенство (соответствующее произведение исчезает при $k = k_{\underline{k}} + 2$),

$$S^r_{k_{\underline{l}},k}(y) \le \sum_{\widetilde{m}^r \in \widetilde{\mathcal{A}}_r} \psi_{r,\widetilde{m}^r}(y) \Big(\prod_{r'=r+1}^{k} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{r'} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{r'}} \psi_{r',\widetilde{m}^{r'}}(y) \Big) \Big) \sum_{\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_{\underline{l}}}} \psi_{k_{\underline{l}},\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}}}(y) |f_{r,\widetilde{m}^r} - f_{k_{\underline{l}},\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}}}|. \tag{5.5.15}$$

Аналогично, имеем

$$S^k_{k_{\underline{l}},k}(y) \le \sum_{\widetilde{m}^k \in \widetilde{\mathcal{A}}_k} \psi_{k,\widetilde{m}^k}(y) \sum_{\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_{\underline{l}}}} \psi_{k_{\underline{l}},\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}}}(y) |f_{k,\widetilde{m}^k} - f_{k_{\underline{l}},\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}}}|. \tag{5.5.16}$$

В силу (5.5.8) имеем $(k_{\underline{l}}, k) \cap \underline{K}(y) = \emptyset$. Следовательно, при $r \in \{k_{\underline{l}} + 1, ..., k\}$, применяя лемму 5.5.2 при $k_1 = j_1 = k_{\underline{l}}$ и $k_2 = k$, $j_2 = r$, получаем

$$|f_{r,\widetilde{m}^r} - f_{k_{\underline{l}},\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}}}| \le 2^{-r} f_7^\natural(y) \tag{5.5.17}$$

для любых таких индексов $\widetilde{m}^r \in \widetilde{A}_r$, $\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}} \in \widetilde{\mathcal{A}}_{k_{\underline{l}}}$, что $\psi_{r,\widetilde{m}^r}(y) \neq 0$ и $\psi_{k_{\underline{l}},\widetilde{m}^{k_{\underline{l}}}}(y) \neq 0$.

В итоге, собирая вместе (5.5.14)–(5.5.17) и учитывая замечание 5.4.42, выводим оценку

$$\begin{aligned} |f_k(y) - f_{k_{\underline{l}}}(y)| &\le f_7^\natural(y) \sum_{r=k_{\underline{l}}+1}^{k-1} 2^{-r} \sum_{\widetilde{m}^r \in \widetilde{\mathcal{A}}_r} \psi_{r,\widetilde{m}^r}(y) \Big(\prod_{r'=r+1}^{k} \Big(\sum_{\widetilde{m}^{r'} \in \mathbb{Z}^n \setminus \widetilde{\mathcal{A}}_{r'}} \psi_{r',\widetilde{m}^{r'}}(y) \Big) \Big) \\ &+ 2^{-k} f_7^\natural(y) \le 2^{-k_{\underline{l}}+1} f_7^\natural(y). \end{aligned} \tag{5.5.18}$$

Шаг 4. Повторяя рассуждения, сделанные на предыдущем шаге, получим

$$|f_s(y) - f_{k_{\bar{l}}}(y)| \le 2^{-k_{\bar{l}}+1} f_7^\natural(y). \tag{5.5.19}$$

Остаётся скомбинировать (5.5.9), (5.5.13), (5.5.18), (5.5.19) и учесть, что $2^{-k_l} \le 2^{-\underline{k}(y,k)}$ для всех $l \in \{\underline{l}, ..., \bar{l}\}$. В результате выводим (5.5.7) и завершаем доказательство. □

Следствие 5.5.20. *Пусть $p \in (1, \infty)$ и $f \in \widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$. Пусть $\{f_k\}$ – специальная аппроксимирующая последовательность для f. Тогда класс эквивалентности $[\mathrm{Ext}(f)]$ функции $\mathrm{Ext}(f)$ принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$, а последовательность $\{f_k\}$ сходится к $[\mathrm{Ext}(f)]$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ и в смысле $\mathcal{L}^n$-почти всюду.*

Доказательство. При $y \in \frac{14}{5} Q_{0,0}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ положим $\underline{k}(y,k) := \max\{k' : k' \in \underline{K}(y) \text{ и } k' \le k\}$. Из леммы 5.4.29 легко следует, что для любых $k, s \in \mathbb{N}_0$ при $s > k$ имеют место включения

$$\mathrm{supp}(f_k - f_s) \subset \bigcup_{j \ge k} \bigcup \{4Q_{j,m} : m \in \mathcal{A}_j\} \subset U_{\frac{4}{2^k}}(S).$$

Следовательно по теореме 5.5.6 для таких k, s имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_k(y) - f_s(y)|^p \, dy \le \int\limits_{U_{\frac{4}{2^k}}(S)} 2^{(3-\underline{k}(y,k))p} (f_7^\natural(y))^p \, dy.$$

В итоге, используя абсолютную непрерывность интеграла Лебега, получаем

$$\varlimsup_{k,s \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_k(y) - f_s(y)|^p \, dy \le \varlimsup_{k \to \infty} \int\limits_{S} 2^{(3-\underline{k}(y,k))p} (f_7^\natural(y))^p \, dy. \tag{5.5.21}$$

Чтобы доказать фундаментальность последовательности $\{f_k\}$ достаточно показать, что правая часть (5.5.21) равна нулю. Для этого рассуждаем следующим образом. Прежде всего,

из предложения 5.2.7, (**D.5.5.1**), (5.4.12) и абсолютной непрерывности меры $\mathcal{L}^n$ относительно меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^d\lfloor_S$ будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} \underline{k}(y,k) = +\infty \quad \text{при} \quad \mathcal{L}^n - \text{п.в.} \quad y \in S. \tag{5.5.22}$$

Так как $2^{(3-\underline{k}(y,k))p}(f^\natural(y))^p \le (8f^\natural(y))^p$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$, применение теоремы Лебега о мажорирующей сходимости завершает доказательство утверждения. Кроме того, поскольку $f^\natural(y) < +\infty$ при $\mathcal{L}^n$-п.в. $y \in S$, в силу теоремы 5.5.6 и равенства (5.5.22) получаем фундаментальность числовых последовательностей $f_k(y)$ при $\mathcal{L}^n$-п.в. $y \in S$. Этот факт в комбинации с определениями 5.3.9, 5.3.11, предложением 5.2.7 и леммой 5.4.37 доказывает, что

$$\lim_{k\to\infty} f_k(y) = f(y) \quad \text{при} \quad \mathcal{L}^n - \text{п.в.} \quad y \in S. \tag{5.5.23}$$

Поскольку $\{f_k\}$ – фундаментальная последовательность в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, выводим существование $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, для которого $\|g - f_k\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0$, $k \to \infty$. Но тогда существует подпоследовательность $\{f_{k_s}\}$, сходящаяся $\mathcal{L}^n$-п.в. к g. Комбинируя этот факт с (5.5.23) и определением 5.4.20, приходим к равенству $g(x) = f(x) = \operatorname{Ext}(f)(x)$ при $\mathcal{L}^n$-п.в. $x \in \mathbb{R}^n$. Этим доказательство завершено.

□

Следующий факт относится к фольклору. Тем не менее, мы предоставим детальное доказательство для полноты картины.

Предложение 5.5.24. *При любых $p \in (1,\infty)$ и $c > 0$ существует такая константа $C > 0$, что, если $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ имеет носитель $\operatorname{supp} F \subset cQ_{0,0}$ и обобщённый градиент $\nabla F \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, то справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^p\,dx \le C \int\limits_{cQ_{0,0}} \|\nabla F(y)\|^p\,dy. \tag{5.5.25}$$

Доказательство. Хорошо известно [65], что существует такая константа $C > 0$, что для любой функции $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\|\nabla F\| \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, существует такое множество E_F с мерой $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E_F) = 0$, что

$$|F(x) - F(y)| \le C\|x-y\|\Big(M_1^{\|x-y\|}[\|\nabla F\|](x) + M_1^{\|x-y\|}[\|\nabla F\|](y)\Big) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^n \setminus E_F.$$

Если, кроме того, $\operatorname{supp} F \subset cQ_{0,0}$, то применение неравенства Гёльдера даёт для любой точки $x \in cQ_{0,0} \setminus E_F$ оценку

$$\begin{aligned} |F(x)|^p &\le \Big(\fint\limits_{2cQ_{0,0}\setminus cQ_{0,0}} |F(x) - F(y)|\,dy\Big)^p \le C \fint\limits_{2cQ_{0,0}\setminus cQ_{0,0}} |F(x) - F(y)|^p\,dy \\ &\le C\Big(M_1^{5c}[\|\nabla F\|](x)\Big)^p + C \fint\limits_{2cQ_{0,0}\setminus cQ_{0,0}} \Big(M_1^{5c}[\|\nabla F\|](y)\Big)^p\,dy. \end{aligned}$$

В итоге, применяя предложение 1.2.65 при $q = 1$ и $R = 5c$, получаем

$$\int\limits_{cQ_{0,0}} |F(x)|^p\,dx \le C \int\limits_{2cQ_{0,0}} \Big(M_1^{5c}[\|\nabla F\|](y)\Big)^p\,dy \le C \int\limits_{cQ_{0,0}} \|\nabla F(y)\|^p\,dy. \tag{5.5.26}$$

Доказательство завершено. □

Следующее утверждение – *краеугольный результат* всего параграфа.

Теорема 5.5.27. *Существует константа $C > 0$, зависящая только от n, $C_{\widetilde{\psi}}$, $\mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},2}$ и $\overline{\lambda}$ такая, что для любой функции $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$, для любого $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство*

$$\|\nabla f_k(x)\| \le C\Big(f_7^\natural(x) + \|f\|_{L_1(\mathfrak{m}_0)}\Big) \quad \textit{при} \quad \mathcal{L}^n\textit{-п.в.} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.5.28}$$

Доказательство. Зафиксируем функцию $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ и число $k \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим открытое множество (напомним, что все кубы по умолчанию предполагаются замкнутыми)

$$G_k := \mathbb{R}^n \setminus \Big(\bigcup_{j=0}^{k} \bigcup_{Q\in\mathcal{D}_j} (\frac{16}{5}Q \setminus \operatorname{int}\frac{16}{5}Q)\Big). \tag{5.5.29}$$

Фиксируем $y \in \frac{14}{5}Q_{0,0} \cap G_k$ и разобьём доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Из (**D.5.5.1**), (**D.5.5.2**) и предложения 5.4.13 имеем $0 \in \underline{K}(y) \cap \overline{K}(y)$. Положим

$$\underline{k}^* := \max\{k' \in \underline{K}(y) : k' \le k\}, \quad \overline{k}^* := \max\{k' \in \overline{K}(y) : k' \le k\}. \tag{5.5.30}$$

Следовательно, в силу определения 5.4.10 и формул (5.4.1), (5.5.30) существует куб

$$Q \in \mathcal{DF}_{\overline{k}^*} \quad \text{такой, что} \quad y \in \operatorname{int}\frac{16}{5}Q. \tag{5.5.31}$$

Шаг 2. Сделаем ключевое наблюдение. Из (5.5.29) легко видеть, что для любых $j \in [\overline{k}^*, k] \cap \mathbb{N}$ и любых кубов $Q' \in \mathcal{D}_j$ имеем (напомним ещё раз, что все кубы у нас замкнутые)

$$\text{либо} \quad y \in \operatorname{int}\frac{16}{5}Q', \quad \text{либо} \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \frac{16}{5}Q'. \tag{5.5.32}$$

Следовательно, существует $\delta = \delta(y,k) > 0$, для которого $\overline{k}^* = \max\{k' \in \overline{K}(y') : k' \le k\}$. Отсюда и из (5.4.1), (5.4.8) следует, что $f_k(y') = f_{\overline{k}^*}(y')$ для всех $y' \in Q_\delta(y)$. Поэтому

$$\nabla f_k(y) = \nabla f_{\overline{k}^*}(y). \tag{5.5.33}$$

Шаг 3. Предположим, что $\overline{k}^* > \underline{k}^*$, поскольку случай $\overline{k}^* = \underline{k}^*$ основан на той же идее, но технически проще. Пусть $j \in [\underline{k}^*, \overline{k}^*] \cap \mathbb{N}_0$ и $Q_{j,m} \in \mathcal{DF}_j$ такие, что

$$y \in \frac{16}{5}Q_{j,m}. \tag{5.5.34}$$

Из (5.5.31) и (5.5.34) имеем оценку $\operatorname{dist}(Q, Q_{j,m}) \le \frac{11}{5} 2^{-j}$. Поскольку $j \le \overline{k}^*$ и $Q, Q_{j,m} \in \mathcal{D}_+$, пользуясь предложением 5.1.1, получим

$$Q \subset 7Q_{j,m}. \tag{5.5.35}$$

Пусть $Q' \in \mathcal{D}_+$ такой, что $Q' \supset Q$ и $l(Q') \in (l(Q), 2^{-j})$ (напомним, что $2^{-j} \ge l(Q)$). Так как $l(Q') \ge 2l(Q)$, в силу (5.5.31) имеем

$$\frac{14}{5} Q' \ni y \quad \text{и} \quad l(Q') < 2^{-j} \le 2^{-\underline{k}^*}.$$

Это означает, что $Q' \notin \mathcal{DF}$ поскольку в противном случае мы немедленно получили бы противоречие с максимальностью $\underline{k}^*$. В итоге из (5.5.35) и определения 5.2.9 имеем

$$Q_{j,m} \in \mathcal{K}_7(Q). \tag{5.5.36}$$

Шаг 4. Применим теорему 5.4.44 при $k^* = \underline{k}^*$, k заменённым на $\overline{k}^*$ и при $c = \fint_Q f(t)\, d\mu_{\overline{k}^*}(t)$. Затем воспользуемся (5.5.33) и получим

$$\|\nabla f_k(y)\| = \|\nabla f_{\overline{k}^*}(y)\| \le C 2^{\overline{k}^*} \max \Big| \fint_{Q_{j,m}} f(t)\, d\mathfrak{m}_j(t) - \fint_Q f(t)\, d\mathfrak{m}_{\overline{k}^*}(t) \Big|,$$

где максимум взят по всем $j \in \{\underline{k}^*, ..., \overline{k}^*\}$ и всем $m \in \mathcal{A}_j$, для которых $y \in \frac{16}{5} Q_{j,m}$. Следовательно, из (5.5.31), (5.5.36) и определения 5.3.6 получаем

$$\|\nabla f_k(y)\| \le C f_7^\natural(y). \tag{5.5.37}$$

Шаг 5. При $z \in \mathbb{R}^n \setminus \frac{14}{5} Q_{0,0}$ по определению 5.4.7 имеем $f_k(z) = f_0(z)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В итоге, принимая во внимание, что $\mathfrak{m}_0(Q_{0,0}) = \mathfrak{m}_0(S) \ge \overline{\lambda}\, \mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},2}$, получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla f_k(z)\| = \|\nabla f_0(z)\| &\le C \fint_{Q_{0,0}} |f(x)|\, d\mathfrak{m}_0(x) \\ &\le C \int_{Q_{0,0}} |f(x)|\, d\mathfrak{m}_0(x) \quad \text{при всех} \quad z \in \mathbb{R}^n \setminus \frac{14}{5} Q_{0,0} \quad \text{и всех} \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{5.5.38}$$

Заметим, что все константы $C > 0$ на протяжении шагов 1–5 зависели только от n, $C_{\widetilde{\psi}}$, $\mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},2}$ и $\overline{\lambda}$. Кроме того, очевидно, $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus G_k) = 0$. Поэтому, комбинируя (5.5.37), (5.5.38), и, учитывая, что точка $y \in \frac{14}{5} Q_{0,0} \cap G_k$ была выбрана произвольно, выводим (5.5.28) и завершаем доказательство.

□

Теперь мы готовы сформулировать и доказать *главный результат этого раздела.*

Теорема 5.5.39. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $c \geq 7$ и $f \in \widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$. Тогда $\mathcal{L}^n$-класс эквивалентности $[\mathrm{Ext}(f)]$ функции $\mathrm{Ext}(f)$ принадлежит $W^1_p(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, специальная аппроксимирующая последовательность $\{f_k\}$ содержит такую подпоследовательность $\{f_{k_l}\}$, что последовательность $\mathcal{L}^n$-классов эквивалентности $\{[f_{k_l}]\}$ слабо сходится в $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ к $[\mathrm{Ext}(f)]$ и существует константа $C > 0$, зависящая только от параметров p, d, n, λ, c и констант $\mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},i}$, $i = 1,2,3$, такая, что справедливо неравенство*

$$\|[\mathrm{Ext}(f)]\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f) \quad \text{для любого} \quad f \in \mathfrak{B}(S) \cap \widetilde{L}_1(\{\mathfrak{m}_k\}). \tag{5.5.40}$$

Доказательство. Ясно, что $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} f_k \subset 4Q_{0,0}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, класс $[f_k]$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^n)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Применяя предложение 5.5.24, теорему 5.5.27, и, используя (5.1.6), (5.1.11), (5.3.12), заключаем, что $[f_k] \in W^1_p(\mathbb{R}^n)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\|[f_k]\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f), \tag{5.5.41}$$

в котором константа $C > 0$ не зависит от f и k. Следовательно, последовательность $\{[f_k]\}$ ограничена в $W^1_p(\mathbb{R}^n)$. В силу рефлексивности $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ существует подпоследовательность $\{[f_{k_l}]\}$, которая слабо сходится в $W^1_p(\mathbb{R}^n)$ к некоторому элементу $G \in W^1_p(\mathbb{R}^n)$. С другой стороны, в силу следствия 5.5.20, очевидно, имеем $G = \mathrm{Ext}(f)$. Более того, используя стандартные аргументы из теории слабо сходящихся последовательностей в комбинации с (5.5.41), получаем требуемую оценку

$$\|[\mathrm{Ext}(f)]\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)} \leq \varliminf_{l\to\infty} \|[f_{k_l}]\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)} \leq C\widetilde{\mathcal{N}}_{p,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f). \tag{5.5.42}$$

□

5.6. Прямая теорема о следе

На протяжении всего раздела следующие данные предполагаются фиксированными:

(**D.5.6.1**) параметр $d \in (0, n-1)$ и *компакт* $S \subset Q_{0,0}$, для которого $\overline{\lambda} = \mathcal{H}^d_\infty(S) > 0$;

(**D.5.6.2**) произвольный параметр $\lambda \in (0, \overline{\lambda})$;

(**D.5.6.3**) последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$.

Цель данного раздела – доказательство так называемой "прямой теоремы о следе". Другими словами мы установим, что функционал $\widetilde{\mathcal{N}}_{q,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}$ ограничен на d-пространстве следов $W^1_p(\mathbb{R}^n)|^d_S$ для любого $p \in (\max\{1, n-d\}, \infty)$ и всех $q \in (1, n-d)$.

Для удобства читателя мы снова напомним некоторые введённые ранее обозначения. Для куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ мы всегда полагаем $k_Q := [-\log_2 l(Q)]$. Напомним определения 5.2.14 и 5.2.18.

Так как множество S и параметры d, λ фиксированы в течение всего раздела, мы полагаем $\mathcal{F} := \mathcal{F}_S(d,\lambda)$, $\mathcal{DF} := \mathcal{DF}_S(d,\lambda)$, $\mathcal{A} := \mathcal{A}_S(d,\lambda)$. Кроме того, для куба $Q \in \mathcal{DF}$ и параметра $c \geq 1$ положим $\mathcal{K}_c(Q) := \mathcal{K}_{d,\lambda,c}(Q)$, $\mathcal{SH}_c(Q) := \mathcal{SH}_{d,\lambda,c}(Q)$, $\mathcal{IC}_c(Q) := \mathcal{IC}_{d,\lambda,c}(Q)$ и $T_c(Q) := T_{d,\lambda,c}(Q)$ для краткости. Напомним определение 5.2.32 и положим $\mathcal{P}(c) := \mathcal{P}_S(d,\lambda,c)$. Поскольку последовательность $\{\mathfrak{m}_k\}$ также фиксирована, будем писать $\Phi_f(Q_1,Q_2)$ вместо $\Phi_{f,\{\mathfrak{m}_k\}}(Q_1,Q_2)$ при $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ для любых $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}_+$. Наконец, положим $f_c^\natural := f_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}^\natural$.

Начн1м с полезной технической оценки.

Лемма 5.6.1. *Пусть $\sigma \in (\max\{1, n-d\}, n]$, $q \in (1,\infty)$, $c \geq 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует константа $C = C(n,d,\lambda,\sigma,q,\varepsilon) > 0$ такая, что*

$$\begin{aligned}\Phi_f(Q_1,Q_2) &\leq C\Big(\fint_{Q_1} \|\nabla F(x)\|^\sigma\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}} + C\frac{l(Q_2)}{l(Q_1)}\Big(\fint_{3cQ_2} \|\nabla F(x)\|^\sigma\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}}\\ &+ \frac{C}{(l(Q_1))^{1+\varepsilon}}\Big(\sum_{i=1}^N (l(Q^i))^{q+q\varepsilon}\Big(\fint_{Q^i}\|\nabla F(x)\|\,dx\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}},\end{aligned} \tag{5.6.2}$$

для всех $F \in W^1_\sigma(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих равенству $f = \operatorname{Tr}|^d_S(F)$, и для любых таких кубов $Q_1, Q_2 \in \mathcal{DF}$, что $Q_2 \in \mathcal{K}_c(Q_1)$. В (5.6.2) семейство $\{Q^i\}_{i=0}^N$ определяется единственным образом следующими условиями:

(1) $\{Q^i\}_{i=0}^N \subset \mathcal{D}_+$;

(2) $Q^0 := Q_1 \subset \ldots \subset Q^N$;

(3) $l(Q^{i+1}) = 2l(Q^i)$ *для всех* $i \in \{0,\ldots,N-1\}$ *и* $l(Q^N) = l(Q_2)$.

Доказательство. Ясно, что $Q_1 \in \mathcal{DF}_{k_1}$ и $Q_2 \in \mathcal{DF}_{k_2}$ для некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющих неравенству $k_2 \leq k_1$. Используя несколько раз неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}l(Q_1)\Phi_f(Q_1,Q_2) &\leq \fint_{Q_1}\Big|f(z) - \fint_{Q_1} F(x)\,dx\Big|\,d\mathfrak{m}_{k_1}(z) + \Big|\fint_{Q_1} F(x)\,dx - \fint_{Q^N} F(w)\,dw\Big|\\ &+ \Big|\fint_{Q^N} F(w)\,dw - \fint_{Q_2} F(y)\,dy\Big| + \fint_{Q_2}\Big|f(t) - \fint_{Q_2} F(y)\,dy\Big|\,d\mathfrak{m}_{k_2}(t) =: \sum_{j=1}^4 l(Q_1)\Phi_j.\end{aligned} \tag{5.6.3}$$

Так как $f = F|^d_S$, $\sigma \in (\max\{1,n-d\},n]$ и $Q_1, Q_2 \in \mathcal{DF}$ по теореме 5.1.19 имеем оценку

$$\Phi_1 \leq C\Big(\fint_{Q_1}\|\nabla F(x)\|^\sigma\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \Phi_4 \leq C\frac{l(Q_2)}{l(Q_1)}\Big(\fint_{Q_2}\|\nabla F(x)\|^\sigma\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{5.6.4}$$

Заметим, что $Q_1 \subset cQ_2$ в силу (**C**1) определения 5.2.9. Следовательно, используя предложение 5.1.16 при $c' = c$, и, применяя затем неравенство Гёльдера, получим

$$\Phi_3 \leq C\frac{l(Q_2)}{l(Q_1)}\fint_{3cQ_2}\|\nabla F(x)\|\,dx \leq C\frac{l(Q_2)}{l(Q_1)}\Big(\fint_{3cQ_2}\|\nabla F(x)\|^\sigma\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{5.6.5}$$

Чтобы оценить Φ_2, применим предложение 5.1.16, а затем воспользуемся неравенством Гёльдера для сумм. Имеем оценку

$$l(Q_1)\Phi_2 \le \sum_{i=0}^{N-1}\Big|\fint_{Q^i} F(x)\,dx - \fint_{Q^{i+1}} F(y)\,dy\Big| \le C\sum_{i=1}^{N}\fint_{Q^i}\fint_{Q^i}|F(x)-F(y)|\,dx\,dy$$

$$\le C\sum_{i=1}^{N} l(Q^i)\fint_{Q^i}\|\nabla F(\tau)\|\,d\tau = C\Big(\sum_{i=1}^{N}\frac{(l(Q^i))^{\varepsilon+1}}{(l(Q^i))^{\varepsilon}}\fint_{Q^i}\|\nabla F(\tau)\|\,d\tau\Big)^{\frac{q}{q}} \tag{5.6.6}$$

$$\le \frac{C}{(l(Q^0))^{\varepsilon}}\Big(\sum_{i=1}^{N}(l(Q^i))^{q+q\varepsilon}\Big(\fint_{Q^i}\|\nabla F(x)\|\,dx\Big)^{q}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Комбинируя оценки (5.6.3)–(5.6.6), выводим (5.6.2) и завершаем доказательство. □

Для функции $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ и константы $c > 0$ определим при каждом $t > 0$, *множество надуровня* $f_c^\natural$, полагая

$$\mathcal{U}_{c,t}(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f_c^\natural(x) > t\}. \tag{5.6.7}$$

Определение 5.6.8. Пусть $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ и $c \ge 1$. Для любого $t > 0$ определим *хорошую часть* $\mathcal{U}^g_{c,t}(f)$ множества $\mathcal{U}_{c,t}(f)$ как множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существуют кубы $\underline{Q}(x), \overline{Q}(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(1) $\underline{Q}(x) \in T_c(x)$ и $\overline{Q}(x) \in \mathcal{DF}$;

(2) $\overline{Q}(x) \in \mathcal{K}_c(\underline{Q}(x))$;

(3) $\Phi_f(\underline{Q}(x), \overline{Q}(x)) > t$;

(4) $l(\underline{Q}(x)) \ge 2^{-1} l(\overline{Q}(x))$.

Определим *плохую часть* $\mathcal{U}^b_{c,t}(f)$ множества $\mathcal{U}_{c,t}(f)$, полагая $\mathcal{U}^b_{c,t}(f) := \mathcal{U}_{c,t}(f) \setminus \mathcal{U}^g_{c,t}(f)$. Наконец, положим $\mathcal{U}^g_c(f) := \cup_{t>0}\mathcal{U}^g_{c,t}(f)$, $\mathcal{U}^b_c(f) := \cup_{t>0}\mathcal{U}^b_{c,t}(f)$.

Замечание 5.6.9. При $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ и $c \ge 1$ ясно, что $\{x : f_c^\natural(x) > 0\} = \mathcal{U}^g_c(f) \cup \mathcal{U}^b_c(f)$.

Следующее характеристическое свойство является следствием определения 5.6.8.

Предложение 5.6.10. *Пусть $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$ и $c \ge 1$. Для любого $t > 0$ точка $x \in \mathcal{U}^b_{c,t}(f)$ в том и только том случае, если $x \in \mathcal{U}_{c,t}(f)$ и*

$$l(\underline{Q}(x)) \le \frac{1}{4} l(\overline{Q}(x))$$

для любых пар кубов $\underline{Q}(x), \overline{Q}(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $\underline{Q}(x) \in T_c(x)$ *и* $\overline{Q}(x) \in \mathcal{DF}$;

(2) $\overline{Q}(x) \in \mathcal{K}_c(\underline{Q}(x))$;

(3) $\Phi_f(\underline{Q}(x), \overline{Q}(x)) > t$.

При $\sigma \in [1,\infty)$ для любого элемента $F \in W^1_\sigma(\mathbb{R}^n)$ определим при каждом $t>0$ множество

$$\mathcal{V}_{\sigma,t}(F) := \{x \in \mathbb{R}^n : M_\sigma(\|\nabla F\|)(x) > t\}.$$

Лемма 5.6.11. *Пусть $\sigma \in (\max\{1, n-d\},\infty)$ и $c \geq 1$. Пусть $F \in W^1_\sigma(\mathbb{R}^n)$ и $f := \operatorname{Tr}|^d_S(F)$. Тогда существует такая константа $C = C(n,d,\lambda,\sigma,c) > 0$, что*

$$\mathcal{U}^g_{c,t}(f) \subset \mathcal{V}_{\sigma,\frac{t}{C}}(F) \quad \text{для всех} \quad t>0. \tag{5.6.12}$$

В частности, для любого $p \in (\sigma,\infty)$ существует константа $C' = C'(n,d,\lambda,p,\sigma,c) > 0$ такая, что

$$\int\limits_{\mathcal{U}^g_c(f)} \Big(f^\natural_c(x)\Big)^p\,dx \leq C' \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|\nabla F(x)\|^p\,dx. \tag{5.6.13}$$

Доказательство. Зафиксируем число $t>0$. Для доказательства первого утверждения напомним определение 5.6.8 и найдём кубы $\underline{Q}(x) \in T_c(x)$, $\overline{Q}(x) \in \mathcal{DF}$ такие, что $\overline{Q}(x) \in \mathcal{K}_c(\underline{Q}(x))$, $l(\underline{Q}) \geq \frac{1}{2} l(\overline{Q}(x))$ и

$$\Phi_f(\underline{Q}(x), \overline{Q}(x)) > t. \tag{5.6.14}$$

Из леммы 5.6.1 и определения максимальной функции (1.2.64) легко следует, что

$$\Phi_f(\underline{Q}(x), \overline{Q}(x)) \leq C\Big(\fint\limits_{3c\overline{Q}(x)} \|\nabla F(y)\|^\sigma\,dy\Big)^{\frac{1}{\sigma}} \leq C M_\sigma(\|\nabla F\|)(x). \tag{5.6.15}$$

Комбинируя (5.6.14) и (5.6.15), получим (5.6.12).

Чтобы установить (5.6.13), используем (5.6.12) и применим предложение 1.2.65. Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{U}^g_c(f)} \Big(f^\natural(x)\Big)^p\,dx &= p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\mathcal{L}^n(\mathcal{U}^g_{c,t}(f))\,dt \leq p\int\limits_0^\infty t^{p-1}\mathcal{L}^n(\mathcal{V}_{\sigma,\frac{t}{C}}(F))\,dt \\ &\leq C\int\limits_0^\infty t^{p-1}\mathcal{L}^n(\mathcal{V}_{\sigma,t}(F))\,dt = C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(M_\sigma(\|\nabla F\|)(x)\Big)^p\,dx \leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|\nabla F(x)\|^p\,dx.\end{aligned} \tag{5.6.16}$$

Доказательство завершено. □

Введём некоторые обозначения, которые будут полезны в дальнейшем. Напомним предложение 5.2.15 и замечание 5.2.19. Для параметра $c \geq 1$ и куба $Q \in \mathcal{DF}$ положим

$$\mu_c(Q) := \inf\{l(Q') : Q' \in \mathcal{SH}_c(Q)\}, \quad \mathrm{N}_c(Q) := \log_2\Big(\frac{l(Q)}{\mu_c(Q)}\Big) \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}.$$

При $c \geq 1$ для куба $Q \in \mathcal{DF}$, для любого $j \in \mathbb{N}_0 \cap [0, \mathrm{N}_c(Q))$ определим *j-ый слой айсберга* $\mathcal{IC}_c(Q)$ равенством

$$\mathrm{L}^j_c(Q) := \{Q' \in \mathcal{IC}_c(Q) : l(Q') = 2^{-j} l(Q)\}.$$

Нам будет удобно формально полагать $\mathrm{L}^{\mathrm{N}_c(Q)}_c(Q) := \emptyset$.

Замечание 5.6.17. Легко проверить, что справедливы следующие свойства множеств $\mathrm{L}_c^j(Q)$:

(1) $\mathrm{L}_c^j(Q) \cap \mathrm{L}_c^{j'}(Q) = \emptyset$ при $j \neq j'$;

(2) $\mathcal{IC}_c(Q) = \cup_{j=0}^{\mathrm{N}_c(Q)} \mathrm{L}_c^j(Q)$.

Следующее утверждение – техническое ядром параграфа. Напомним определения 5.2.10, 5.2.32 и замечание 5.2.19.

Лемма 5.6.18. *Предположим, что задан параметр $c \geq 1$ и селектор κ_c многозначного отображения $\mathcal{K}_c$ с областью определения $\mathfrak{D} \subset \mathcal{DF}$ так, что:*

(1) $\mathcal{K}_c(Q) \cap \mathcal{P}(c) \neq \emptyset \quad$ *для всех* $\quad Q \in \mathfrak{D}$;

(2) $\kappa_c(Q) \in \mathcal{P}(c)$ *и* $l(\kappa_c(Q)) > l(Q)$ *для всех* $Q \in \mathfrak{D}$.

Тогда, для любых $p > \max\{1, n-d\}$, $q \in (1, n-d)$ *и* $\tau \in (1, \frac{n-d}{q})$ *существует константа* $C > 0$, *зависящая только от* $n, d, \lambda, p, q, \tau, c$ *такая, что неравенство*

$$R_{p,q,\tau}[g] := \sum_{Q \in \mathfrak{D}} (l(Q))^{n-q\tau} \sum_{\substack{Q' \supset Q \\ Q' \in \mathcal{IC}_c(\kappa_c(Q))}} (l(Q'))^{q\tau} \Big(\fint_{Q'} g(x)\,dx \Big)^q \leq C \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g^p(x)\,dx \Big)^{\frac{q}{p}} \tag{5.6.19}$$

справедливо для всех неотрицательных функций $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Зафиксируем параметры p, q, τ, удовлетворяющие предположениям леммы. Фиксируем также параметр $\sigma \in (q, p)$ и произвольную неотрицательную функцию $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Поскольку $l(\kappa_c(Q)) > l(Q)$ для всех $Q \in \mathfrak{D} \subset \mathcal{DF}$, имея в виду предположение (2) леммы, из определений 5.2.14, 5.2.18 получаем, что, если $Q \in \mathfrak{D}$, $Q' \in \mathcal{IC}_c(\kappa_c(Q))$ и $Q' \supset Q$, то $Q \in \mathcal{SH}_c(\kappa_c(Q))|_{Q'}$. Следовательно, мы поменяем порядок суммирования в определении $R_{p,q,\tau}[g]$, используем замечание 5.6.17, и учтём, что $\kappa_c(Q) \in \mathcal{P}(c)$ для всех $Q \in \mathfrak{D}$ в силу предположения (2) леммы. Отсюда выводим оценку

$$R_{p,q,\tau}[g] \leq \sum_{Q \in \mathcal{P}(c)} \sum_{j=0}^{\mathrm{N}_c(Q)} \sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} t_Q(Q') \Big(\fint_{Q'} g(x)\,dx \Big)^q, \tag{5.6.20}$$

где, для каждого куба $Q \in \mathcal{P}(c)$, для любого числа $j \in \mathbb{N}_0 \cap [0, \mathrm{N}_c(Q))$ и любого куба $Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)$

$$t_Q(Q') := (l(Q'))^{q\tau} \Big(\sum_{Q'' \in \mathcal{SH}_c(Q)|_{Q'}} (l(Q''))^{n-q\tau} \Big), \tag{5.6.21}$$

и в случае $\mathrm{N}_c(Q) < +\infty$ мы формально полагаем $t_Q(Q') = 0$ для всех $Q' \in \mathrm{L}_c^{\mathrm{N}_c(Q)}(Q)$ (напомним, что в этом случае $\mathrm{L}_c^{\mathrm{N}_c(Q)}(Q) = \emptyset$).

Шаг 2. Заметим, что $n - q\tau > d$ в силу предположений леммы. Следовательно, используя (5.2.22) при $\widetilde{d} = n - q\tau$ получим

$$t_Q(Q') \leq C(l(Q'))^n. \tag{5.6.22}$$

Кроме того, используя (5.2.23) при $\widetilde{d} = n - q\tau$, для каждого $Q \in \mathcal{P}(c)$ и любого числа $j \in \mathbb{N}_0 \cap [0, \mathrm{N}_c(Q))$ будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} t_Q(Q') = \sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} (l(Q'))^{q\tau} \Big(\sum_{Q'' \in \mathcal{SH}_c(Q)|_{Q'}} (l(Q''))^{n-q\tau} \Big) \\
&\le \Big(\frac{l(Q)}{2^j} \Big)^{q\tau} \sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} \sum_{Q'' \in \mathcal{SH}_c(Q)|_{Q'}} (l(Q''))^{n-q\tau} \\
&\le \Big(\frac{l(Q)}{2^j} \Big)^{q\tau} \sum_{Q'' \in \mathcal{SH}_c(Q)} (l(Q''))^{n-q\tau} \le C \Big(\frac{l(Q)}{2^j} \Big)^{q\tau} (l(Q))^{n-q\tau} \le \frac{C}{2^{jq\tau}} (l(Q))^n.
\end{aligned}
\tag{5.6.23}
$$

Шаг 3. Применение неравенства Гёльдера для сумм с показателями $\frac{\sigma}{q}$ и $\big(\frac{\sigma}{q}\big)' = \frac{\sigma}{\sigma - q}$ даёт для любого куба $Q \in \mathcal{P}(c)$ и любого числа $j \in \mathbb{N}_0 \cap [0, \mathrm{N}_c(Q))$ оценку

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} \Big(t_Q(Q') \Big)^{\frac{q}{\sigma} + (\frac{q}{\sigma})'} \Big(\fint_{Q'} g(x)\, dx \Big)^q \\
&\le C \Big(\sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} t_Q(Q') \Big)^{\frac{\sigma - q}{\sigma}} \Big(\sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} t_Q(Q') \Big(\fint_{Q'} g(x)\, dx \Big)^\sigma \Big)^{\frac{q}{\sigma}}.
\end{aligned}
\tag{5.6.24}
$$

Шаг 4. Используя (5.6.22), и, применяя предложение 5.1.2 при $\Omega = \underline{Q} = Q'$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} t_Q(Q') \Big(\fint_{Q'} g(x)\, dx \Big)^\sigma \le C \sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} (l(Q'))^n \Big(\fint_{Q'} g(x)\, dx \Big)^\sigma \\
&\le C \sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} \int\limits_{Q'} \Big(M(g)(x) \Big)^\sigma\, dx.
\end{aligned}
\tag{5.6.25}
$$

Шаг 5. Положим $\theta := q\tau \frac{\sigma - q}{\sigma} > 0$. Подставим (5.6.25) и (5.6.23) в (5.6.24). Это даёт нам для любого куба $Q \in \mathcal{P}(c)$ и любого числа $j \in \mathbb{N}_0 \cap [0, \mathrm{N}_c(Q))$ оценку

$$
\sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} t_Q(Q') \Big(\fint_{Q'} g(x)\, dx \Big)^q \le \frac{C}{2^{j\theta}} (l(Q))^n \Big(\fint_{cQ} \Big(M(g)(x) \Big)^\sigma\, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}}.
\tag{5.6.26}
$$

Пусть $\underline{\varkappa} = \underline{\varkappa}(n, d, \lambda, c)$ то же, что и в замечании 5.2.30. Напомним определение 5.2.32 и положим $\varkappa := \underline{\varkappa} + 3$. Получаем

$$
\mathcal{L}^n(\Omega_{c,\varkappa}(Q)) \ge C (l(Q))^n \quad \text{для любого} \quad Q \in \mathcal{P}(c).
\tag{5.6.27}
$$

Наконец, для любого куба $Q \in \mathcal{P}(c)$ и любого числа $j \in \mathbb{N}_0 \cap [0, \mathrm{N}_c(Q))$ скомбинируем (5.6.26), (5.6.27) и применим предложение 5.1.2 при $\Omega = \Omega_{c,\varkappa}(Q)$, $\underline{Q} = Q$. Имеем

(5.6.28)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Q' \in \mathrm{L}_c^j(Q)} t_Q(Q') \Big(\fint_{Q'} g(x)\, dx \Big)^q \le \frac{C}{2^{j\theta}} \mathcal{L}^n(\Omega_{c,\varkappa}(Q)) \Big(\fint_{cQ} \Big(M(g)(x) \Big)^\sigma\, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}} \\
&\le \frac{C}{2^{j\theta}} \int\limits_{\Omega_{c,\varkappa}(Q)} \Big(M_\sigma(M(g))(x) \Big)^q\, dx \quad \text{для любого} \quad Q \in \mathcal{P}(c) \quad \text{и любого} \quad j \in \mathbb{N}_0 \cap [0, \mathrm{N}_c(Q)).
\end{aligned}
$$

Шаг 6. Подставим (5.6.28) в (5.6.20) и примем во внимание, что $\theta > 0$. Приходим к оценке

$$R_{p,q,\tau}[g] \le C \sum_{Q\in\mathcal{P}(c)} \sum_{j=0}^{\mathrm{N}_c(Q)} \frac{1}{2^{j\theta}} \int\limits_{\Omega_{c,\varkappa}(Q)} \Big(M_\sigma(M(g))(x)\Big)^q\,dx$$
$$\le C \sum_{Q\in\mathcal{P}(c)} \int\limits_{\Omega_{c,\varkappa}(Q)} \Big(M_\sigma(M(g))(x)\Big)^q\,dx.$$

Ясно, что $\Omega_{c,\varkappa}(Q) \subset cQ_{0,0}$ для всех $Q \in \mathcal{P}(c)$. Кроме того, в силу предложения 5.2.26 имеем $\mathrm{MULT}(\{\Omega_{c,\varkappa}(Q) : Q \in \mathcal{P}(c)\}) \le C$ с константой $C > 0$, зависящей только от n, d, λ, c. Используя эти наблюдения и применяя предложение 1.2.38, мы продолжаем предыдущую оценку и получаем

$$R_{p,q,\tau}[g] \le C \int\limits_{cQ_{0,0}} \Big(M_\sigma[M(g))(x)\Big)^q\,dx. \tag{5.6.29}$$

Шаг 7. Применим сначала неравенство Гёльдера для интегралов с показателями $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{p-q}$, а затем дважды предложение 1.2.65. Это позволяет нам продолжить (5.6.29) и получить

$$\begin{aligned} R_{p,q,\tau}[g] &\le C\Big(\int\limits_{cQ_{0,0}} \Big(M_\sigma(M(g))(x)\Big)^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \\ &\le C\Big(\int\limits_{cQ_{0,0}} \Big(M(g)(x)\Big)^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \le C\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g^p(x)\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned} \tag{5.6.30}$$

Лемма доказана. □

Теперь сформулируем и докажем *ключевую лемму*, которая будет являться краеугольным камнем при доказательстве основного результата этого раздела.

Лемма 5.6.31. *Пусть $p \in (\max\{1, n-d\}, n]$, $q \in (1, n-d)$ и $c \ge 1$. Пусть селектор κ_c многозначного отображения $\mathcal{K}_c$ с областью определения $\mathfrak{D} \subset \mathcal{DF}$ таков, что:*

(1) $\mathcal{K}_c(Q) \cap \mathcal{P}(c) \ne \emptyset$ *для всех* $Q \in \mathfrak{D}$;

(2) $\kappa_c(Q) \in \mathcal{P}(c)$ *и* $l(\kappa_c(Q)) > l(Q)$ *для всех* $Q \in \mathfrak{D}$.

Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от p, q, n, d, λ, c, такая, что

$$\sum_{Q\in\mathfrak{D}} (l(Q))^n \Big(\Phi_f(Q, \kappa_c(Q))\Big)^q \le C\Big(\sum_{|\gamma|=1} \|D^\gamma F\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^q \tag{5.6.32}$$

для всех $F \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $f = \mathrm{Tr}\,|_S^d(F)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $F \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$ и положим $f = \mathrm{Tr}\,|_S^d(F)$. Кроме того, фиксируем параметр $\sigma \in (\max\{1, n-d\}, p)$. В силу предположений леммы и определений 5.2.10, 5.2.14 ясно, что

$$\kappa_c^{-1}(\overline{Q}) \subset \mathcal{SH}_c(\overline{Q}) \quad \text{для любого} \quad \overline{Q} \in \mathcal{P}(c). \tag{5.6.33}$$

Разобьём оставшуюся часть доказательства на несколько шагов.

Шаг 1. Из замечания 5.2.19 следует, что, если $Q \in \mathfrak{D}$, $Q \subset Q'$ и $l(Q') \in (l(Q), l(\kappa_c(Q))]$, то $Q' \in \mathcal{IC}_c(\kappa_c(Q))$. Следовательно, применение леммы 5.6.1 даёт для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ (выбор которого уточним позднее) оценку

$$
\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathfrak{D}} (l(Q))^n (\Phi_f(Q, \kappa_c(Q))^q \le C \sum_{Q\in\mathfrak{D}} (l(Q))^n \Big(\fint_Q \|\nabla F(x)\|^\sigma \, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}} \\
&+ C \sum_{Q\in\mathfrak{D}} (l(Q))^{n-q} (l(\kappa_c(Q)))^q \Big(\fint_{3c\kappa_c(Q)} \|\nabla F(y)\|^\sigma \, dy \Big)^{\frac{q}{\sigma}} \\
&+ C \sum_{Q\in\mathfrak{D}} (l(Q))^{n-q-q\varepsilon} \sum_{\substack{Q'\supset Q \\ Q'\in\mathcal{IC}_c(\kappa_c(Q))}} (l(Q'))^{q+q\varepsilon} \Big(\fint_{Q'} \|\nabla F(z)\| \, dz \Big)^q =: R^1 + R^2 + R^3.
\end{aligned} \tag{5.6.34}
$$

Шаг 2. Пусть $\underline{\varkappa} = \underline{\varkappa}(n, d, \lambda, c)$ – та же, что в замечании 5.2.30. Полагая $\varkappa := \underline{\varkappa} + 3$, получим

$$
\mathcal{L}^n(\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})) \ge C(l(\overline{Q}))^n \quad \text{для любого куба} \quad \overline{Q} \in \mathcal{P}(c). \tag{5.6.35}
$$

С другой стороны, для куба $\overline{Q} \in \mathcal{P}(c)$, удовлетворяющего условию $\kappa_c^{-1}(\overline{Q}) \ne \emptyset$, воспользуемся (5.6.33), применим предложение 5.2.15, а затем учтем замечание 5.2.30. Имеем

$$
\sum_{\underline{Q}\in\kappa_c^{-1}(\overline{Q})} (l(\underline{Q}))^n \le \sum_{\underline{Q}\in\mathcal{SH}_c(\overline{Q})} (l(\underline{Q}))^n \le (l(c\overline{Q}))^n \le C\mathcal{L}^n(\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})). \tag{5.6.36}
$$

Шаг 3. Воспользуемся неравенством Гёльдера для сумм с показателями $\frac{\sigma}{q}$ и $\frac{\sigma}{\sigma-q}$, а затем учтём (5.6.33), (5.6.35) и (5.6.36). Мы приходим к цепочке оценок

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\underline{Q}\in\kappa_c^{-1}(\overline{Q})} (l(\underline{Q}))^n \Big(\fint_{\underline{Q}} \|\nabla F(x)\|^\sigma \, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}} = \sum_{\underline{Q}\in\kappa_c^{-1}(\overline{Q})} (l(\underline{Q}))^{n(1-\frac{q}{\sigma})} \Big(\int_{\underline{Q}} \|\nabla F(x)\|^\sigma \, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}} \\
&\le C \Big(\mathcal{L}^n(\Omega_{\varkappa,c}(\overline{Q})) \Big)^{1-\frac{q}{\sigma}} \Big(\int_{c\overline{Q}} \|\nabla F(x)\|^\sigma \, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}} \le C\mathcal{L}^n(\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})) \Big(\fint_{c\overline{Q}} \|\nabla F(x)\|^\sigma \, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}}.
\end{aligned} \tag{5.6.37}
$$

Шаг 4. Чтобы оценить R_1 сверху, используем (5.6.37) и применим предложение 5.1.2 при $\Omega = \Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})$. Отсюда получаем (мы также используем очевидное включение $\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q}) \subset c\overline{Q}$)

$$
\begin{aligned}
R^1 &\le \sum_{\overline{Q}\in\mathcal{P}(c)} \sum_{\underline{Q}\in\kappa_c^{-1}(\overline{Q})} (l(\underline{Q}))^n \Big(\fint_{\underline{Q}} \|\nabla F(x)\|^\sigma \, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}} \\
&\le C \sum_{\overline{Q}\in\mathcal{P}(c)} \mathcal{L}^n(\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})) \Big(\fint_{c\overline{Q}} \|\nabla F(x)\|^\sigma \, dx \Big)^{\frac{q}{\sigma}} \le C \sum_{\overline{Q}\in\mathcal{P}(c)} \int_{\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})} \Big(M_\sigma[\|\nabla F\|](x) \Big)^q \, dx.
\end{aligned} \tag{5.6.38}
$$

Чтобы продолжить оценку (5.6.38), скомбинируем предложение 1.2.38 с предложением 5.2.26, применим неравенство Гёльдера для интегралов с показателями $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{p-q}$, и, наконец, используем предложение 1.2.65. Имеем

$$
\begin{aligned}
(R^1)^{\frac{p}{q}} &\le C\Big(\int\limits_{cQ_{0,0}} \Big(M_\sigma(\|\nabla F\|)(x)\Big)^q\,dx\Big)^{\frac{p}{q}} \\
&\le C\int\limits_{cQ_{0,0}} \Big(M_\sigma(\|\nabla F\|)(x)\Big)^p\,dx \le C\int\limits_{cQ_{0,0}} \|\nabla F(x)\|^p\,dx.
\end{aligned}
\tag{5.6.39}
$$

Шаг 5. Для любого куба $\overline{Q} \in \mathcal{P}(c)$ применим предложение 5.2.21 при $\widetilde{d} = n - q > d$, затем используем (5.6.35) и применим предложение 5.1.2 при $\Omega = \Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})$. Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{\underline{Q}\in\mathcal{SH}_c(\overline{Q})} (l(\underline{Q}))^{n-q}\Big)(l(\overline{Q}))^q\Big(\fint\limits_{3c\overline{Q}} \|\nabla F(y)\|^\sigma\,dy\Big)^{\frac{q}{\sigma}} \le C(l(\overline{Q}))^n\Big(\fint\limits_{3c\overline{Q}} \|\nabla F(y)\|^\sigma\,dy\Big)^{\frac{q}{\sigma}} \\
&\le C\mathcal{L}^n(\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q}))\Big(\fint\limits_{3c\overline{Q}} \|\nabla F(y)\|^\sigma\,dy\Big)^{\frac{q}{\sigma}} \le C\int\limits_{\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})} \Big(M_\sigma(\|\nabla F\|)(x)\Big)^q\,dx.
\end{aligned}
\tag{5.6.40}
$$

Из (5.6.33), (5.6.40) и предложения 5.2.26 выводим неравенство

$$
\begin{aligned}
R^2 &\le \sum_{\substack{\overline{Q}\in\mathcal{P}(c)\\ \kappa_c^{-1}(\overline{Q})\neq\emptyset}} \Big(\sum_{\underline{Q}\in\mathcal{SH}_c(\overline{Q})} (l(\underline{Q}))^{n-q}\Big)(l(\overline{Q}))^q\Big(\fint\limits_{3c\overline{Q}} \|\nabla F(y)\|^\sigma\,dy\Big)^{\frac{q}{\sigma}} \\
&\le C\sum_{\overline{Q}\in\mathcal{P}(c)}\int\limits_{\Omega_{c,\varkappa}(\overline{Q})} \Big(M_\sigma(\|\nabla F\|)(x)\Big)^q\,dx \le \int\limits_{cQ_{0,0}} \Big(M_\sigma(\|\nabla F\|)(x)\Big)^q\,dx.
\end{aligned}
\tag{5.6.41}
$$

Используя те же аргументы, что и при выводе (5.6.39), продолжим (5.6.41) и получим

$$
R^2 \le C\Big(\int\limits_{cQ_{0,0}} \|\nabla F(x)\|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}. \tag{5.6.42}
$$

Шаг 6. Фиксируем такое число $\varepsilon > 0$, что $\tau := (1+\varepsilon) \in (1, \frac{n-d}{q})$. В этом случае мы можем применить лемму 5.6.18 при $g = \|\nabla F\|$ и вывести

$$
R^3 \le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|\nabla F(x)\|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}. \tag{5.6.43}
$$

Шаг 7. Скомбинируем оценки (5.6.34), (5.6.39), (5.6.42), (5.6.43) и учтём, что при некотором $C > 0$, зависящем только от p и n,

$$
\frac{1}{C}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|\nabla F(x)\|_\infty^p\,dx \le \Big(\sum_{|\gamma|=1} \|D^\gamma F\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^p \le C\int\limits_{\mathbb{R}^n} \|\nabla F(x)\|_2^p\,dx.
$$

В итоге мы придём к неравенству (5.6.32) и завершаем доказательство. □

Следующая лемма является простым следствием соответствующих определений.

Лемма 5.6.44. *Пусть $f \in L_1(\{\mathfrak{m}_k\})$, $t > 0$ и $c \geq 1$ такие, что $\mathcal{U}^b_{c,t}(f) \neq \emptyset$. Тогда существует семейство $\mathfrak{D}_{c,t}(f) \subset \mathcal{DF}$ и селектор $\kappa_{c,t}(f)$ многозначного отображения $\mathcal{K}_c$ с областью определения $\mathfrak{D}_{c,t}(f)$, для которых справедливы следующие свойства:*

(1) $\mathcal{U}^b_{c,t}(f) \subset \cup\{c\underline{Q} : \underline{Q} \in \mathfrak{D}_{c,t}(f)\}$;

(2) $\mathfrak{D}_{c,t}(f)$ – *неперекрывающееся семейство;*

(3) $\kappa_{c,t}(f)(\underline{Q}) \in \mathcal{P}(c)$ *для любых* $\underline{Q} \in \mathfrak{D}_{c,t}(f)$;

(4) $l(\kappa_{c,t}(f)(\underline{Q})) \geq 4l(\underline{Q})$;

(5) $\Phi_f(\underline{Q}, \kappa_{c,t}(f)(\underline{Q})) > t$ *для любых* $\underline{Q} \in \mathfrak{D}_{c,t}(f)$.

Доказательство. При $x \in \mathcal{U}^b_{c,t}(f)$ пусть $\mathcal{F}(x)$ – семейство, состоящее из всех таких $\underline{Q} \in \mathcal{DF}$, для каждого из которых существует $\overline{Q} \in \mathcal{DF}$, так что (напомним замечание 5.2.6):

(i) $\underline{Q} \in T_c(x)$;

(ii) $l(\overline{Q}) \geq 4l(\underline{Q})$;

(iii) $\overline{Q} \in \mathcal{K}_c(\underline{Q})$;

(iv) $\Phi_f(\underline{Q}, \overline{Q}) > t$.

В силу предложения 5.6.10 семейство $\mathcal{F}(x)$ непусто при любом $x \in \mathcal{U}^b_{c,t}(f)$. Положим

$$\mathrm{M}(x) := \max\{l(\underline{Q}) : \underline{Q} \in \mathcal{F}(x)\}, \quad x \in \mathcal{U}^b_{c,t}(f).$$

Для любого $x \in \mathcal{U}^b_{c,t}(f)$ зафиксируем произвольный куб $\underline{Q}(x) \in \mathcal{F}(x)$ с ребром $l(\underline{Q}(x)) = \mathrm{M}(x)$. Положим

$$\mathfrak{D}_{c,t}(f) := \{\underline{Q}(x) : x \in \mathcal{U}^b_{c,t}(f)\}.$$

Из условия (i) заключаем, что справедливо свойство (1) леммы.

Поскольку семейство $\mathfrak{D}_{c,t}(f)$ состоит из двоичных кубов, возможны лишь два случая: либо различные кубы семейства $\mathfrak{D}_{c,t}(f)$ имеют непересекающиеся внутренности, либо один из них содержится в другом. Следовательно, для того чтобы установить (2), будем рассуждать от противного и предположим, что существуют такие кубы $\underline{Q}_1, \underline{Q}_2 \in \mathfrak{D}_{c,t}(f)$, что $\underline{Q}_1 \subset \underline{Q}_2$ и $l(\underline{Q}_2) > l(\underline{Q}_1)$. По построению существует точка $x \in \mathcal{U}^b_{c,t}(f)$ такая, что $\underline{Q}(x) = \underline{Q}_1$. По этой причине, включение $\underline{Q}_1 \subset \underline{Q}_2$ означает, что $x \in c\underline{Q}_2$ и, следовательно, $\underline{Q}_2 \in \mathcal{F}(x)$, поскольку $\underline{Q}_2 \in \mathfrak{D}_{c,t}(f)$. С другой стороны, неравенство $l(\underline{Q}_2) > l(\underline{Q}_1)$ противоречит максимальности длины ребра $\underline{Q}(x)$.

Для любого $\underline{Q} \in \mathfrak{D}_{c,t}(f)$ через $\kappa_{c,t}(f)(\underline{Q})$ обозначим произвольный куб $\overline{Q} \in \mathcal{K}_c(\underline{Q})$, удовлетворяющий условиям (ii)–(iv) выше. Вы итоге мы построим семейство $\mathfrak{D}_{c,t}(f)$ и селектор $\kappa_{c,t}(f)$ многозначного отображения $\mathcal{K}_c$ с областью определения $\mathfrak{D}_{c,t}(f)$, для которого справедливы свойства (4) и (5).

Зафиксируем произвольный куб $\underline{Q} \in \mathfrak{D}_{c,t}(f)$. По построению $\kappa_{c,t}(f)(\underline{Q}) \in \mathcal{K}_c(\underline{Q})$ и $l(\kappa_c(\underline{Q})) \geq 4l(\underline{Q})$. Этот факт вместе с условием (**C**3) определения 5.2.9 позволяет установить существование куба $Q \in \mathcal{D}_+ \setminus \mathcal{DF}$, для которого $\underline{Q} \subset Q \subset c(\kappa_{c,t}(f)(\underline{Q}))$ и $l(Q) = \frac{1}{2}l(\kappa_c(\underline{Q}))$. Комбинируя это наблюдение с определением 5.2.32, выводим свойство (3) леммы.

Доказательство завершено. □

Лемма 5.6.45. *Пусть $p \in (\max\{1, n-d\}, n]$ и $q \in (1, n-d)$. Тогда, для любого $c \geq 1$ существует константа $C > 0$, зависящая только от параметров p, q, n, d, λ, c, такая, что*

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{\nu q}\mathcal{L}^n(\mathcal{U}^b_{c,2^\nu}(f) \setminus \mathcal{U}^b_{c,2^{\nu+1}}(f)) \leq C\Big(\sum_{|\gamma|=1} \|D^\gamma F\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^q \tag{5.6.46}$$

для всех $F \in W^1_p(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $f = \operatorname{Tr}|^d_S(F)$.

Доказательство. Зафиксируем $c \geq 1$. При $t \in (0, \infty)$ зафиксируем семейство $\mathfrak{D}_{c,t}(f) \subset \mathcal{DF}$ и селектор $\kappa_{c,t}(f)$ многозначного отображения $\mathcal{K}_c$ с областью определения $\mathfrak{D}_{c,t}(f)$, для которых справедливы свойства (1)–(5) леммы 5.6.44.

При $\nu \in \mathbb{Z}$ положим

$$U_\nu := \mathcal{U}^b_{c,2^\nu}(f) \setminus \mathcal{U}^b_{c,2^{\nu+1}}(f), \quad \mathfrak{D}_\nu := \{Q \in \mathfrak{D}_{c,2^\nu}(f) : cQ \cap U_\nu \neq \emptyset\}. \tag{5.6.47}$$

Из свойства (1) леммы 5.6.44 имеем $\mathcal{U}^b_{c,2^\nu}(f) \subset \cup\{cQ \cap \mathcal{U}^b_{c,2^\nu}(f) : Q \in \mathfrak{D}_{c,2^\nu}(f)\}$. В результате, используя (5.6.47), будем иметь

$$U_\nu \subset \bigcup\{cQ \cap U_\nu : Q \in \mathfrak{D}_{c,2^\nu}(f)\} \subset \bigcup\{cQ \cap U_\nu : Q \in \mathfrak{D}_\nu\} \subset \bigcup\{cQ : Q \in \mathfrak{D}_\nu\}. \tag{5.6.48}$$

Мы утверждаем, что

$$\mathfrak{D}_\nu \cap \mathfrak{D}_{\nu'} = \emptyset \quad \text{при} \quad \nu \neq \nu'. \tag{5.6.49}$$

Действительно, предположим, что существуют числа $\nu, \nu' \in \mathbb{Z}$, такие, что $\nu < \nu'$ и существует куб $\underline{Q} \in \mathfrak{D}_\nu \cap \mathfrak{D}_{\nu'}$. Поскольку $\underline{Q} \in \mathfrak{D}_\nu$, в силу (5.6.47) мы можем найти и зафиксировать точку $\underline{x} \in U_\nu \cap c\underline{Q}$. С другой стороны, так как $\underline{Q} \in \mathfrak{D}_{\nu'} \subset \mathfrak{D}_{c,2^{\nu'}}(f)$ и $\underline{x} \in c\underline{Q}$, имеем (напомним, что наш селектор $\kappa_{c,2^{\nu'}}$ удовлетворяет условию (5) леммы 5.6.44 при $t = 2^{\nu'}$)

$$f^\natural_c(\underline{x}) \geq \Phi_f(\underline{Q}, \kappa_{c,2^{\nu'}}(\underline{Q})) > 2^{\nu'} \geq 2^{\nu+1}.$$

Отсюда немедленно следует, что $\underline{x} \in \mathcal{U}^b_{c,2^{\nu'}}(f)$, а, следовательно, $\underline{x} \notin U_\nu$. Это противоречие доказывает утверждение.

Теперь, имея в нашем распоряжении (5.6.49), положим

$$\mathfrak{D} := \bigcup_{\nu\in\mathbb{Z}} \mathfrak{D}_\nu \tag{5.6.50}$$

и получим корректно определённый селектор κ_c многозначного отображения $\mathcal{K}_c$ с областью определения $\mathfrak{D}$, полагая

$$\kappa_c(Q) := \kappa_{c,2^\nu}(f)(Q), \quad \text{если} \quad Q \in \mathfrak{D}_\nu. \tag{5.6.51}$$

Из свойства (3) леммы 5.6.44 и (5.6.51) следует, что

$$\kappa_c(Q) \in \mathcal{P}(c) \quad \text{для любых} \quad Q \in \mathfrak{D}. \tag{5.6.52}$$

Комбинируя (5.6.48) и (5.6.49), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{\nu q}\mathcal{L}^n(U_\nu) \le c^n \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{\nu q} \sum\{(l(\underline{Q}))^n : \underline{Q} \in \mathfrak{D}_\nu\} \\ &\le c^n \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{\underline{Q}\in\mathfrak{D}_\nu} (l(\underline{Q}))^n (\Phi_f(\underline{Q}, \kappa_c(\underline{Q})))^q \le c^n \sum_{\underline{Q}\in\mathfrak{D}} (l(\underline{Q}))^n (\Phi_f(\underline{Q}, \kappa_c(\underline{Q})))^q. \end{aligned} \tag{5.6.53}$$

Из (5.6.47), (5.6.50), (5.6.52) следует, что семейство $\mathfrak{D}$ и отображение κ_c удовлетворяют всем предположениям леммы 5.6.31. Поэтому, мы можем продолжить оценку (5.6.53) и получить

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{\nu q}\mathcal{L}^n(U_\nu) \le C\Big(\sum_{|\gamma|=1} \|D^\gamma F\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^q. \tag{5.6.54}$$

Доказательство завершено.

□

Главный результат этого параграфа звучит следующим образом.

Теорема 5.6.55. *Пусть $p \in (\max\{1, n-d\}, n]$, $q \in (1, n-d)$ и $c \ge 1$. Существует константа $C > 0$, зависящая только от параметров p, q, n, λ, d, c, такая, что*

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{q,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f) \le C\|F\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} \tag{5.6.56}$$

для всех $F \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $f = \operatorname{Tr}|_S^d(F)$.

Доказательство. В силу замечания 5.6.9, очевидно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f_c^\natural(x))^q\,dx = \int\limits_{\mathcal{U}_c^b(f)} (f_c^\natural(x))^q\,dx + \int\limits_{\mathcal{U}_c^g(f)} (f_c^\natural(x))^q\,dx. \tag{5.6.57}$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\mathcal{U}_c^b(f)} (f_c^\natural(x))^q\,dx \le 2^q \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 2^{q\nu}\mathcal{L}^n(\mathcal{U}_{c,2^\nu}^b(f) \setminus \mathcal{U}_{c,2^{\nu+1}}^b(f)). \tag{5.6.58}$$

Комбинируя (5.6.57), (5.6.58) и леммы 5.6.11, 5.6.45, получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f_c^\natural(x))^q\,dx \le C\Big(\sum_{|\gamma|=1} \|D^\gamma F\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\Big)^q. \tag{5.6.59}$$

Из (5.1.6) имеем $\mathfrak{m}_0(S) \le \mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},1}$. Следовательно, используя предложение 5.1.21 и оценку (5.1.11), получим неравенство

$$\|f\|_{L_q(\mathfrak{m}_0)} \le C\|F\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.6.60}$$

Из (5.6.59) и (5.6.60) выводим (5.6.56), завершая доказательство теоремы. □

5.7. Основные результаты

В этом параграфе мы докажем основной результат данной главы. А именно мы дадим полное решение проблемы 5.0.5. Для этой цели напомним определения 5.1.15, 5.3.11, а также определение d-оператора следа $\operatorname{Tr}|_S^d$, данное в начале главы. Напомним определение 1.2.31.

Прежде всего покажем, что оператор $\operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}$, определённый в (5.4.21) является оператором продолжения. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.7.1. *Пусть $q \in (1,n]$, $d^* \in (n-q,n]$, $d \in (0,n-q)$. Пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, для которого $\lambda^* := \mathcal{H}_\infty^{d^*}(S) > 0$ и пусть $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$. Пусть $c \ge 7$ и $\lambda \in (0,\lambda^*)$ – некоторые фиксированные константы. Тогда*

$$\operatorname{Tr}|_S^{d^*} \circ \operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}(f) = \mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor S}(f) \quad \textit{при} \quad f \in \widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{q,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S). \tag{5.7.2}$$

Доказательство. Зафиксируем до конца доказательства функцию $f \in \widetilde{\mathrm{X}}^{d^*}_{q,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ и положим $F = \operatorname{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}(f)$. Разобьём доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Фиксируем на время точку $\underline{x} \in \underline{S} \cap S_f(d)$. Пользуясь леммой 5.4.37, фиксируем строго возрастающую последовательность $\{k_s\} = \{k_s(\underline{x})\} \subset \mathbb{N}$, для которой $f_{k_s}(\underline{x}) \to f(\underline{x})$, $s \to \infty$. В силу неравенства треугольника для любых $l, s \in \mathbb{N}$ имеем (далее, как обычно, $Q_l(\underline{x})$ – шар в норме $\|\cdot\|_\infty$ с центром в x радиуса 2^{-l})

$$\begin{aligned} \fint\limits_{Q_l(\underline{x})} |f(\underline{x}) - F(y)|\,dy &\le |f(\underline{x}) - f_{k_s}(\underline{x})| + \Big|f_{k_s}(\underline{x}) - \fint\limits_{Q_l(\underline{x})} f_{k_s}(y)\,dy\Big| \\ &+ \fint\limits_{Q_l(\underline{x})} |f_{k_s}(y) - F(y)|\,dy =: R^1_{s,l}(\underline{x}) + R^2_{s,l}(\underline{x}) + R^3_{s,l}(\underline{x}). \end{aligned} \tag{5.7.3}$$

Шаг 2. Очевидно, $\lim_{s\to\infty} R^1_{s,l}(\underline{x}) = 0$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и всех $\underline{x} \in \underline{S} \cap S_f(d)$. Поскольку $d^* > d$, учитывая определение 5.3.9, получаем

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{s\to\infty} R^1_{s,l}(\underline{x}) = 0 \quad \text{для } \mathcal{H}^{d^*}\text{-п.в.} \quad \underline{x} \in S. \tag{5.7.4}$$

Шаг 3. Применяя стандартные телескопические рассуждения с учетом гладкости функций f_k, $k \in \mathbb{N}$, а затем используя теорему 5.5.27, имеем

$$
\begin{aligned}
R^2_{s,l}(\underline{x}) &\le C \sum_{j=l}^{\infty} 2^{-j} \fint\limits_{Q_j(\underline{x})} \|\nabla f_{k_s}(y)\|\, dy \le C \sum_{j=l}^{\infty} 2^{-j} \Big(\fint\limits_{Q_j(\underline{x})} f_7^\natural(y)\, dy + \|f\|_{L_1(\mathfrak{m}_0)} \Big) \\
&\le C 2^{-l} \|f\|_{L_1(\mathfrak{m}_0)} + 2^{-l\delta} \sup_{j \ge l} 2^{-j(1-\delta)} \fint\limits_{Q_j(\underline{x})} f_7^\natural(y)\, dy \quad \text{при любых } s, l \in \mathbb{N} \text{ и } \delta \in (0,1).
\end{aligned} \tag{5.7.5}
$$

В силу неравенства Гёльдера

$$
\sup_{j \ge l} 2^{-jq(1-\delta)} \Big(\fint\limits_{Q_l(x)} f_7^\natural(y)\, dy \Big)^q \le \sup_{j \ge l} 2^{-jq(1-\delta)} \fint\limits_{Q_l(x)} (f_7^\natural(y))^q\, dy. \tag{5.7.6}
$$

Зафиксируем теперь $\delta \in (0,1)$ настолько малым, что $q(1-\delta) > n - d^*$. Тогда, пользуясь оценкой (5.7.6) и предложением 1.2.91, заключаем, что

$$
\lim_{l \to \infty} \sup_{j \ge l} 2^{-j(1-\delta)} 2^{-j(1-\delta)} \fint\limits_{Q_l(x)} f_7^\natural(y)\, dy = 0 \qquad \text{при } \mathcal{H}^{d^*}\text{-п.в.} \quad x \in \mathbb{R}^n.
$$

В результате, из (5.7.5) выводим

$$
\varlimsup_{l \to \infty} \varlimsup_{s \to \infty} R^2_{s,l}(\underline{x}) = 0 \qquad \text{при } \mathcal{H}^{d^*}\text{-п.в.} \quad \underline{x} \in S_f \cap \underline{S}. \tag{5.7.7}
$$

Шаг 4. Используя следствие 5.5.20 и неравенство Гёльдера с показателями p и p', получим

$$
\varlimsup_{s \to \infty} R^3_{s,l}(\underline{x}) = 0 \quad \text{для любого } l \in \mathbb{N} \quad \text{при всех } \underline{x} \in S_f \cap \underline{S}. \tag{5.7.8}
$$

Шаг 5. В итоге, учитывая определение оператора $\operatorname{Tr}|^{d^*}_S$, данное в начале главы, определение 1.2.31 и собирая вместе оценки (5.7.3), (5.7.4), (5.7.7) и (5.7.8), выводим (5.7.2) и завершаем доказательство. □

Для следующей леммы полезно напомнить определение 5.3.9.

Лемма 5.7.9. *Пусть $p \in (1,n]$, $d^* \in (n-p, n]$. Пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\mathcal{H}^{d^*}_\infty(S) > 0$. Тогда для любого элемента $[f] \in W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ и любой борелевской функции $\overline{f} \in [f]$ равенство $\mathcal{H}^{d'}(S \setminus S_{\overline{f}}(d')) = 0$ справедливо при всех $d' \in (n-p, d^*]$.*

Доказательство. Положим $\lambda^* := \mathcal{H}^{d^*}_\infty(S)$ и фиксируем произвольные числа $d' \in (n-p, d^*]$, $\lambda' \in (0, \lambda^*)$, $c' \ge 1$. Фиксируем также

$$
[f] \in W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S \quad \text{и} \quad F \in W^1_p(\mathbb{R}^n), \text{ для которого } F|^{d^*}_S = [f]. \tag{5.7.10}
$$

Наконец, зафиксируем $\{\mathfrak{m}'_k\} \in \mathfrak{FM}^{d'}(S)$. Используя предложение 1.3.11, выберем p-точный представитель $\overline{F}$ элемента F. В силу того, что при $d' \in (n-p, d^*]$ мера $\mathcal{H}^{d'}\lfloor_S$ абсолютно непрерывна относительно p-емкости, без ограничения общности мы считаем $\overline{f} \equiv \overline{F}|_S$.

Пусть теперь $S' \subset S$ – пересечение следующих трёх множеств: множества $\underline{S}(d', \lambda')$, множества всех точек Лебега функции $\overline{F}$, и множества

$$\Big\{x \in S : \lim_{r\to 0} r^{p-n} \fint_{Q_r(x)} \sum_{|\gamma|=1} |D^\gamma F|(x)\, dx = 0\Big\}.$$

Используя предложения 1.2.91, 1.3.10, 5.2.7 и определение 1.3.13, мы получим

$$\mathcal{H}^{d'}(S \setminus S') = 0. \tag{5.7.11}$$

Для точки $x \in S'$ и куба $Q \in T_{d',\lambda',c'}(x) \cap \mathcal{D}_k$ в силу неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} \fint_{Q\cap S} |\overline{f}(x) - \overline{f}(z)|\, d\mathfrak{m}'_k(z) &\le \Big|\overline{F}(x) - \fint_Q F(y)\, dy\Big| \\ &+ \fint_{Q\cap S} \Big|\overline{f}(z) - \fint_Q F(y)\, dy\Big|\, d\mathfrak{m}'_k(z) =: J^1(Q) + J^2(Q). \end{aligned} \tag{5.7.12}$$

Если $x \in c'Q$ при некотором $Q \in \mathcal{D}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, то $Q \subset Q_{\frac{2c'}{2^k}}(x)$. Следовательно, имеем

$$\max_{Q\in T_{d',\lambda',c'}(x)\cap\mathcal{D}_k} J^1(Q) \le C \fint_{Q_{\frac{2c'}{2^k}}(x)} |\overline{F}(x) - \overline{F}(y)|\, dy.$$

Из построения множества S' следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \max_{Q\in T_{d',\lambda',c'}(x)\cap\mathcal{D}_k} J^1(Q) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in S'. \tag{5.7.13}$$

Применяя теорему 5.1.19 при $\sigma = p$ и $d = d'$, имеем

$$\begin{aligned} &\max_{Q\in T_{d',\lambda',c'}(x)\cap\mathcal{D}_k} (J^2(Q))^p \le C \max_{Q\in T_{d',\lambda',c'}(x)\cap\mathcal{D}_k} (l(Q))^{p-n} \sum_{|\gamma|=1} \int_Q |D^\gamma F(z)|^p\, dz \\ &\le C \sum_{|\gamma|=1} \Big(\frac{2^k}{2c'}\Big)^{n-p} \int_{Q_{\frac{2c'}{2^k}}(x)} |D^\gamma F(z)|^p\, dz \quad \text{при} \quad x \in S'. \end{aligned}$$

Следовательно, по определению множества S' получаем

$$\lim_{k\to\infty} \max_{Q\in T_{d',\lambda',c'}(x)\cap\mathcal{D}_k} J^2(Q) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in S'. \tag{5.7.14}$$

В итоге, комбинируя (5.7.11) с (5.7.12)–(5.7.14), получаем равенство $\mathcal{H}^{d'}(S \setminus S_f(d')) = 0$ и завершаем доказательство.

□

Мы переходим к *основному результату данной главы*, дающему решение проблемы 5.0.5.

Теорема 5.7.15. *Пусть $p \in (1,n]$, $d^* \in (n-p,n]$ и $\varepsilon^* := \min\{p-(n-d^*), p-1\}$. Пусть $S \subset Q_{0,0}$ – компакт, удовлетворяющий условию $\lambda^* := \mathcal{H}^{d^*}_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,\lambda^*)$ и $c \geq 7$ – произвольные постоянные. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*)$ справедливы включения*

$$W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S \subset \mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S) \subset W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S \tag{5.7.16}$$

при каждом $d \in (n-p, n-p+\varepsilon)$ для любой последовательности $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$.

Кроме того, для любых $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*)$, $d \in (n-p,n-p+\varepsilon)$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$ существует константа $C>0$, зависящая только от $p,\varepsilon,n,d,\lambda,c$ и $\mathrm{C}_{\mathfrak{m}_k,i}$, $i=1,2,3$, такая, что

$$\frac{1}{C}\|\mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor S}(f)\|_{W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S} \leq \|f\|_{\mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}} \leq C\|f\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S} \quad \text{для всех} \quad f \in W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S. \tag{5.7.17}$$

Оператор $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}$ принадлежит $\mathcal{L}(\mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S), W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n))$ и $\mathrm{Tr}\,|^{d^*}_S \circ \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}$ совпадает с $\mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor S}$ на пространстве $\mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$. В частности, $\mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda} \in \mathfrak{E}(S,p,d^*,\varepsilon)$.

Доказательство. Фиксируем произвольные числа $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*)$, $d \in (n-p,n-p+\varepsilon)$ и последовательность мер $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$. При $f \in W^1_p(\mathbb{R}^n)|_S$ применим лемму 5.7.9, а затем воспользуемся теоремой 5.6.55 при $q = p-\varepsilon$. Отсюда заключаем, что $f \in \mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ и, кроме того, существует константа $C>0$, зависящая только от параметров $n,p,\varepsilon,d,\lambda,c$ и констант $\mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},i}$, $i=1,2,3$, такая, что

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{p-\varepsilon,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(f) \leq C\|F\|_{W^1_p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{для всех таких} \quad F \in W^1_p(\mathbb{R}^n), \text{ что } f = F|^{d^*}_S.$$

Это наблюдение в комбинации с определением нормы в пространстве $W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$ доказывает первое включение в (5.7.16) и второе неравенство в (5.7.17).

Наоборот, пусть $f \in \mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ и $F = \mathrm{Ext}_{S,\{\mathfrak{m}_k\},\lambda}(f)$. Из теоремы 5.5.39 заключаем, что $\mathcal{L}^n$-класс эквивалентности $[F]$ функции F принадлежит $W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, и, существует константа $C>0$, зависящая только от параметров $n,p,\varepsilon,d,\lambda,c$ и констант $\mathrm{C}_{\{\mathfrak{m}_k\},i}$, $i=1,2,3$ такая, что

$$\|[F]\|_{W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{\mathrm{X}^{d^*}_{p-\varepsilon,d,\{\mathfrak{m}_k\}}}. \tag{5.7.18}$$

Применим теорему 5.7.1 при $q = p-\varepsilon$, а затем учтём определение d-пространства следов, данное в начале этой главы. В результате, будем иметь $\mathrm{I}_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor S}(f) \in W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$. Этим доказано второе включение в (5.7.16). Наконец, первое неравенство в (5.7.17) следует из определения нормы в пространстве $W^1_{p-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$ и оценки (5.7.18).

Теорема доказана. □

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

Лемма 5.7.19. *Пусть $d^* \in (0,n]$, а $S \subset Q_{0,0}$ – такой компакт, что $\lambda^* := \mathcal{H}^{d^*}_\infty(S) > 0$. Пусть $\lambda \in (0,1]$ и $c \geq 1$ – некоторые фиксированные постоянные. Если $p \in (1,\infty)$, $d^* > n-p$, $d \in (n-p, d^*]$ и $\{\mathfrak{m}_k\} \in \mathfrak{FM}^d(S)$, то $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ – банахово пространство.*

Доказательство. В силу замечания 5.3.15, достаточно показать, что пространство $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ полно. Фиксируем фундаментальную последовательность $\{f_j\} \subset \mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$. Тогда последовательность $\mathfrak{m}_0$-классов эквивалентности $\{[f_j]_{\mathfrak{m}_0}\}$ функций f_j, $j \in \mathbb{N}$ – фундаментальная последовательность в $L_p(\mathfrak{m}_0)$. Используя рассуждения из второй части доказательства теоремы 5.7.15 заключаем, что последовательность $\mathcal{H}^{d^*}$-классов эквивалентности $\{[f_j]_{d^*}\}$ функций f_j, $j \in \mathbb{N}_0$ является фундаментальной в пространстве $W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$. Используя полноту пространств $L_p(\mathfrak{m}_0)$ и $W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$ (напомним, что второе утверждение следует из предложения 5.0.4) в комбинации с теоремой 5.7.15 выводим существование $g_1 \in L_p(\mathfrak{m}_0)$ и $g_2 \in W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$ таких, что $[f_j]_{\mathfrak{m}_0} \to g_1$, $j \to \infty$ в $L_p(\mathfrak{m}_0)$ и $[f_j]_{\mathcal{H}^{d^*}\lfloor S} \to g_2$, $j \to \infty$ в $W^1_p(\mathbb{R}^n)|^{d^*}_S$ (мы используем обозначение (1.2.30)). Используя рассуждения из доказательства предложения 1.3.21, можно вывести существование подпоследовательности $\{f_{j_l}\}$ последовательности $\{f_j\}$, для которой $f_{j_l}(x) \to g_1(x)$, $l \to \infty$ при $\mathfrak{m}_0$-п.в. $x \in S$ и $f_{j_l}(x) \to g_2(x)$, $l \to \infty$ при $\mathcal{H}^{d^*}$-п.в. $x \in S$. В итоге имеем $g_1 = [f]_{\mathfrak{m}_0}$ и $g_2 = [f]_{d^*}$ для некоторой функции $f \in \mathfrak{B}(S)$. Кроме того, из леммы 5.7.9 имеем $\mathcal{H}^{d^*}(S \setminus S_f(d')) = 0$ при всех $d' \in [d, d^*]$.

Учитывая замечание 5.1.10, при $x \in \mathbb{R}^n$ для кубов $\underline{Q}, \overline{Q} \in \mathcal{D}_+$, удовлетворяющих условиям $(\mathbf{f}1)$–$(\mathbf{f}3)$ определения 5.3.6, мы можем перейти к пределу и прийти к равенству

$$\lim_{i\to\infty} \Phi_{f_i - f_j, \{\mathfrak{m}_k\}}(\underline{Q}, \overline{Q}) = \Phi_{f-f_j,\{\mathfrak{m}_k\}}(\underline{Q}, \overline{Q}).$$

Взяв соответствующие супремумы, находим, что при каждом $j \in \mathbb{N}_0$

$$(f-f_j)^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x) \leq \varliminf_{i\to\infty} (f_i - f_j)^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}(x) \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Используя лемму Фату и факт фундаментальности $\{f_j\}$ в пространстве $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$, получим

$$\|(f-f_j)^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \varliminf_{i\to\infty} \|(f_i-f_j)^\natural_{\{\mathfrak{m}_k\},\lambda,c}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \to 0, \quad j \to \infty. \tag{5.7.20}$$

Комбинируя вышеприведённые рассуждения с замечанием 5.3.15, имеем $f \in \mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$ и $f_j \to f$, $j \to \infty$ в пространстве $\mathrm{X}^{d^*}_{p,d,\{\mathfrak{m}_k\}}(S)$. Этим доказательство завершено. □

Глава 6. Пространства Бесова переменной гладкости

В данной главе мы введём *две новые шкалы* пространств Бесова переменной гладкости. Мы покажем, что обе являются обобщением известных ранее шкал пространств Бесова переменной гладкости. Также мы изучим связь между двумя введёнными шкалами пространств. Наконец, мы покажем, что возможно содержательное построение теории пространств Бесова переменной гладкости на липшицевых областях.

6.1. Некоторые определения и обозначения

На протяжении всей главы будем считать фиксированной размерность $n \in \mathbb{N}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Через $\|x\|$ обозначим евклидову норму вектора $x \in \mathbb{R}^n$. По этой причине мы будем опускать символ $\mathbb{R}^n$ из обозначения соответствующих пространств. То есть, полагаем $C^\infty := C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $L_p := L_p(\mathbb{R}^n)$, $D = D(\mathbb{R}^n)$ и т.д. Если мы не ставим пределы интегрирования, то это означает, что *интегрирование производится по всему пространству* $\mathbb{R}^n$.

Для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ через $D(U)$ обозначим пространство всех функций $\varphi \in C^\infty(U)$ с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Это пространство снабжается топологией индуктивного предела (см. детали, например, в гл. 6 книги [100]). Через $D'(U)$ обозначим пространство линейный непрерывных функционалов на $D(U)$.

Следуя идеям [106] и [102] через S_e обозначим линейное пространство всех функций $g \in C^\infty$, для которых

$$p_N(g) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \exp(N\|x\|) \sum_{|\alpha|\le N} |D^\alpha g(x)| < \infty \quad \text{при всех } N \in \mathbb{N}_0. \tag{6.1.1}$$

Снабдим S_e локально выпуклой топологией, определённой с помощью полунорм p_N, $N \in \mathbb{N}_0$. Через S'_e обозначим линейное пространство всех линейный непрерывных функционалов на S_e и снабдим S'_e сильной топологией (см. детали в [106]). Отметим, что $f \in S'_e$ в том и только том случае, если (поскольку $D(U)$ плотно в S_e [106]) для некоторых $C_f > 0$ и $N_f \in \mathbb{N}$

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le C_f p_{N_f}(\varphi) \quad \text{при} \quad \varphi \in D. \tag{6.1.2}$$

Свертка распределения $f \in S'_e$ с функцией $\varphi \in S_e$ определяется равенством

$$f * \varphi(x) := f(\varphi(x - \cdot)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Кроме того, при $\psi \in D$ через L_ψ обозначим супремум множества всех L, для которых

$$\int x^\beta \psi(x)\, dx = 0, \qquad |\beta| \le L. \tag{6.1.3}$$

Говорят, что функция ψ *имеет нулевые моменты вплоть до порядка* L, если выполнено условие (6.1.3). Если ψ не имеет нулевых моментов, то полагаем формально $L_\psi = -1$.

В дальнейшем под кубом Q будем понимать *замкнутый куб в* $\mathbb{R}^n$ *с ребрами параллельными координатным осям*, а через $l(Q)$ – дину ребра Q. Символом $Q_{k,m}$ будем обозначать *замкнутые двоичные кубы* ранга k в $\mathbb{R}^n$, а символом $\widetilde{Q}^n_{k,m}$ – *полуоткрытые двоичные кубы* ранга k, то есть при $k \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$Q_{k,m} := \prod_{i=1}^{n} \Big[\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k}\Big], \qquad \widetilde{Q}_{k,m} := \prod_{i=1}^{n} \Big[\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k}\Big).$$

Через I будем обозначать куб единичного радиуса с центром в нуле, то есть

$$I := [-1,1]^n.$$

6.2. Классы весовых последовательностей

Цель данного параграфа – ввести некоторые классы весовых последовательностей, которые затем будут определять переменную гладкость в функциональных пространствах. Напомним определение 1.2.35. В течение всего этого параграфа и далее до конца главы под *весом* будет пониматься исключительно $\mathcal{L}^n$-вес.

Определение 6.2.1. Пусть $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что последовательность весов $\{s_k\} = \{s_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу $\mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, если:

1) существует константа $C_1 > 0$ такая, что при любых $l, k \in \mathbb{N}_0$, $l \leq k$

$$\frac{1}{C_1} 2^{\alpha_1(k-l)} \leq \frac{s_k(x)}{s_l(x)} \leq C_1 2^{\alpha_2(k-l)} \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}^n; \tag{6.2.2}$$

2) существует константа $C_2 > 0$ такая, что при любом $k \in \mathbb{N}_0$

$$s_k(x) \leq C_2 s_k(y)(1 + 2^k\|x-y\|)^{\alpha_3} \quad \text{при всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Будем говорить, что последовательность весов $\{s_k\} = \{s_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу ${}^{\mathrm{loc}}\mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, если она удовлетворяет условию 1) и условию

2') существует константа $C_2' > 0$ такая, что при любом $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$s_k(x) \leq C_2' s_k(y) 2^{k\alpha_3} \quad \text{при всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \|x-y\| \leq 2^{-k}. \tag{6.2.3}$$

Замечание 6.2.4. Класс весовых последовательностей $\mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ был введён в [82]. Класс весовых последовательностей ${}^{\mathrm{loc}}\mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ был введён в [4].

Определение 6.2.1 нельзя считать удовлетворительным по следующим причинам. Во-первых, функции s_k, $k \in \mathbb{N}_0$ из весовой последовательности $\{s_k\}$ слабо растут на бесконечности. Во-вторых, каждый вес s_k не имеет точек сингулярности.

При $p \in (0,\infty]$ последовательность $\mathcal{L}^n$-весов $\{t_k\}$ на $\mathbb{R}^n$ назовем *p-допустимой весовой последовательностью*, если $t_k \in L_p^{\mathrm{loc}}$ при каждом $k \in \mathbb{N}_0$. Пусть $\{t_k\}$ – p-допустимая последовательность весов. Через $\{t_{k,m}\}$ обозначим семейство чисел, определяемое по формуле

$$t_{k,m} := \|t_k\|_{L_p(Q_{k,m})} \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{Z}^n, \tag{6.2.5}$$

а через $\{\bar{t}_k\}$ обозначим последовательность весов, определяемых при $k \in \mathbb{N}_0$ формулой

$$\bar{t}_k(x) := 2^{\frac{kn}{p}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}\chi_{\widetilde{Q}_{k,m}}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

При этом кратную последовательность $\{t_{k,m}\}$ будем называть *p-ассоциированной с весовой последовательностью* $\{t_k\}$.

Определение 6.2.6. Пусть $p, \sigma_1, \sigma_2 \in (0,\infty]$. Пусть $\alpha^1 := \{\alpha_k^1\}$, $\alpha^2 := \{\alpha_k^2\}$ – последовательности положительных вещественных чисел, а $\alpha_3 \in [0,+\infty)$. Положим $\sigma := (\sigma_1,\sigma_2)$, $\alpha := (\alpha^1,\alpha^2)$. Через $\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ обозначим множество всех таких p-допустимых весовых последовательностей $\{t_k\} := \{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, что при некоторых $C_1, C_2 > 0$ для любых $k, j \in \mathbb{N}_0$ выполнены следующие условия (с соответствующими модификациями при $\sigma_1 = \infty$ или $\sigma_2 = \infty$):

1) для любого $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\Big(\fint_{Q_{k,m}} t_k^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\fint_{Q_{k,m}} t_j^{-\sigma_1}(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma_1}} \le C_1\frac{\alpha_k^1}{\alpha_j^1} \quad \text{при} \quad 0 \le k \le j; \tag{6.2.7}$$

2) для любого $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\Big(\fint_{Q_{k,m}} t_k^p(x)\,dx\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big(\fint_{Q_{k,m}} t_j^{\sigma_2}(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma_2}} \le C_2\frac{\alpha_j^2}{\alpha_k^2} \quad \text{при} \quad 0 \le k \le j; \tag{6.2.8}$$

3) для любых $m, \widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющих условию $\|m_i - \widetilde{m}_i\| \le 1$,

$$0 < t_{k,m} \le 2^{\alpha_3} t_{k,\widetilde{m}}. \tag{6.2.9}$$

Замечание 6.2.10. В силу неравенства Гёльдера имеем $\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\widetilde{\sigma},p} \subset \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ при $\widetilde{\sigma}_i \ge \sigma_i$, $i = 1,2$.

Замечание 6.2.11. Пусть $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Оценка

$$t_{k,m} \le C\exp(\alpha_3 \ln 2\|m - \widetilde{m}\|)t_{k,\widetilde{m}} \quad \text{при} \quad m, \widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n \tag{6.2.12}$$

легко следует из (6.2.9) по индукции.

Замечание 6.2.13. Пусть даны параметры $c_1, c_2 \ge 1$ и последовательность $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Из (6.2.9) легко вывести, что при любых $k, j \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le j$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ справедливы неравенства:

1′) $\Big(\fint\limits_{c_1Q_{k,m}} t_k^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\fint\limits_{c_2Q_{k,m}} t_j^{-\sigma_1}(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma_1}} \le C_1'\dfrac{\alpha_k^1}{\alpha_j^1}$;

2′) $\Big(\fint\limits_{c_1Q_{k,m}} t_k^p(x)\,dx\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big(\fint\limits_{c_2Q_{k,m}} t_j^{\sigma_2}(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma_2}} \le C_2'\dfrac{\alpha_j^2}{\alpha_k^2}$.

Константы $C_1', C_2' > 0$ зависят только от $n, C_1, C_2, c_1, c_2, \alpha_3, \sigma_1, \sigma_2$.

Следующее элементарное утверждение будет полезно в дальнейшем.

Лемма 6.2.14. *Пусть $\sigma_1, p \in (0,\infty]$, $\sigma_2 \ge p$. Пусть $\{\alpha_k^1\}$, $\{\alpha_k^2\}$ – последовательности положительных вещественных чисел, а $\alpha_3 \in [0,+\infty)$. Тогда, если p-допустимая весовая последовательность $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, то $\{\bar t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$.*

Доказательство. В силу замечания 6.2.10 можно считать, что $\sigma_2 = p$. Ясно, что оценки (6.2.8), (6.2.9) справедливы при замене $\{t_k\}$ на $\{\bar t_k\}$. Заметим, что показатель σ_1 может быть записан как $\sigma_1 = \theta p_\theta'$, $p_\theta := \frac{p}{\theta}$ при некотором $\theta \in (0,p]$ (здесь мы предполагаем, что $\theta p_\theta' = \infty$ при $p_\theta' = \infty$ и $p_\theta = 1$ при $p = \theta \in (0,\infty]$). Следовательно, в силу неравенства Гёльдера при любом $j \in \mathbb{N}_0$ имеем оценку

$$2^{-\frac{jn}{\theta}} = \Big(\int\limits_{Q_{j,m}} \frac{t_j^\theta(x)}{t_j^\theta(x)}\,dx\Big)^{\frac{1}{\theta}} \le \Big(\int\limits_{Q_{j,m}} t_j^p(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_{Q_{j,m}} t_j^{-\sigma_1}(j)\,dx\Big)^{\frac{1}{\sigma_1}}. \tag{6.2.15}$$

Наконец, очевидно, что $\|t_k\|_{L_p(Q_{k,m})} = \|\bar t_k\|_{L_p(Q_{k,m})}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$. Учитывая вышесказанное и равенство $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{p}$, прямыми вычислениями получаем (6.2.7) при $\{\bar t_k\}$ вместо $\{t_k\}$. $\square$

Замечание 6.2.16. Пусть $\sigma_1, p \in (0,\infty]$, $\sigma_2 \ge p$ и $\alpha_3 \in [0,+\infty)$. Пусть $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, а $\{t_{k,m}\}$ – кратная последовательность, p-ассоциированная с $\{t_k\}$. Из леммы 6.2.14 и замечания 6.2.10 следует, что для любых $j,k \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяющих условию $0 \le k \le j$, и любого $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\sum_{\substack{m' \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,m'} \subset Q_{k,m}}} t_{j,m'}^p \le C_2\Big(\frac{\alpha_j^2}{\alpha_k^2}\Big)^p t_{k,m}^p. \tag{6.2.17}$$

Также из леммы 6.2.14 и замечания 6.2.10 следует, что для любых $j,k \in \mathbb{N}_0$, $j \ge k$

$$2^{(k-j)(\frac{n}{\sigma_1}+\frac{n}{p})} t_{k,m}\Big(\sum_{\substack{\widetilde m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde m} \subset Q_{k,m}}} \Big(\frac{1}{t_{j,m'}}\Big)^{\sigma_1}\Big)^{\frac{1}{\sigma_1}} \le C_1\frac{\alpha_k^1}{\alpha_j^1}. \tag{6.2.18}$$

Пример 6.2.19. Рассмотрим пример, иллюстрирующий преимущество определения 6.2.6 относительно определения 6.2.1. Напомним определение 1.2.108. Пусть $p \in (0,\infty)$, $r \in (0,p]$, а вес $\gamma^p \in A^{\mathrm{loc}}_{\frac{p}{r}}$. Пусть весовая последовательность $\{s_k\} \in^{\mathrm{loc}} \mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ (при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $\alpha_3 \ge 0$). Положим $t_k(x) = s_k(x)\gamma(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. Прямые вычисления с использованием определения класса $A^{\mathrm{loc}}_{\frac{p}{r}}$ показывают, что $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ при $\sigma_1 = \frac{pr}{p-r}$, $\sigma_2 = p$, $\{\alpha_k^1\} = \{2^{k\alpha_1}\}$,

$\{\alpha_k^2\} = \{2^{k\alpha_2}\}$ и некотором $\alpha_3 = \alpha_3(\gamma) \in [0, +\infty)$. Таким образом, умножение достаточно "хорошей последовательности" весов $\{s_k\}$ на достаточно сингулярный вес γ не портит показатели α_1, α_2 (конечно, при условии, что мы работаем в классе $\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$).

Замечание 6.2.20. Пусть $p \in (0, \infty]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\{\alpha_k^1\} = \{2^{k\alpha_1}\}$, $\{\alpha_k^2\} = \{2^{k\alpha_2}\}$ и $\alpha_3 \in [0, +\infty)$. Вложение ${}^{\rm loc}\mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2} \subset \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ при всех $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, \infty]$ доказывается элементарно. Пользуясь примером 6.2.19 легко показать, что обратное включение не имеет места. Кроме того, мы не можем, вообще говоря, надеяться, что $\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ вложено в какое-либо ${}^{\rm loc}\mathcal{W}^{\beta_3}_{\beta_1,\beta_2}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, поскольку весовой класс $\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ может содержать очень сложные устроенные последовательности $\{t_k\}$, функции в которых имеют сингулярности. Однако, если рассмотреть класс $\widetilde{\mathcal{X}}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, состоящий из всех таких p-допустимых последовательностей $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, что $\{t_k\} = \{\bar{t}_k\}$ (т.е. весовые функции кусочно постоянные), то $\widetilde{\mathcal{X}}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p} \subset^{\rm loc} \mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1-\frac{n}{\sigma_1},\alpha_2+\frac{n}{\sigma_2}}$.

6.3. Различные пространства Бесова переменной гладкости

В большинстве известных к настоящему времени работ по пространствам Бесова переменной гладкости использовался следующий подход, заложенный в работах О. Бесова [3] (при $p, q \in (1, \infty)$) и Х. Кемпки [82] (при $p, q \in (0, \infty]$).

Пусть B – единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\Psi_0 \in D$, $\Psi_0(x) = 1$ при $x \in B$ и $\operatorname{supp}\Psi_0 \subset 2B^n$. При $j \in \mathbb{N}$ положим $\Psi_j(x) := \Psi_0(2^{-j}x) - \Psi_0(2^{-j+1}x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Определение 6.3.1. Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $\alpha_3 \in [0, +\infty)$. При $\{s_k\} \in \mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ через $\mathrm{B}^{\{s_k\}}_{p,q}$ обозначим линейное пространство всех распределений $f \in S'$ с конечной квазинормой

$$\|f\|_{\mathrm{B}^{\{s_k\}}_{p,q}} := \|s_k\, \mathrm{F}^{-1}[\Psi_k\, \mathrm{F}[f]]\|_{\ell_q(L_p)}. \tag{6.3.2}$$

В (6.3.2) символы F и F^{-1} обозначают прямое и обратное преобразование Фурье.

Пространства Бесова переменной гладкости, норма в которых определяется с помощью классических разностей изучались в [3], [4] при $p, q \in (1, \infty)$. При этом, в отличие от определения 6.3.1 использовался весовой класс ${}^{\rm loc}\mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$.

Пусть $I := [-1, 1]^n$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, а число $l \in \mathbb{N}$. При $x, h \in \mathbb{R}^n$ положим $\Delta^l(h, U)f(x) := \sum_{i=0}^l C_l^i f(x+ih)$, если $[x, x+hl] \subset U$, и $\Delta^l(h, U)f(x) := 0$ в противном случае. Пусть $Q \subset U$ – куб с длиной ребра $l(Q) = 2^{-k}$ при некотором $k \in \mathbb{N}_0$. При $r \in (0, \infty]$ положим (модификации при $r = \infty$ очевидны)

$$\delta_r^l(Q, U)f := \Big(2^{2kn} \int\limits_Q \int\limits_{2^{-k}I} |\Delta^l(h, U)f(x)|^r \, dh\, dx\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{6.3.3}$$

В случае $U = \mathbb{R}^n$ будем писать $\delta_r^l(Q)f$ вместо $\delta_r^l(Q, \mathbb{R}^n)f$.

Определение 6.3.4. Пусть $p,q,r,\sigma_1,\sigma_2 \in (0,\infty]$ и $\alpha_3 \in [0,+\infty)$. Пусть $\alpha^1 := \{\alpha^1_k\}$, $\alpha^2 := \{\alpha^2_k\}$ – последовательности положительных чисел. Предположим, что $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Через $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ обозначим линейное пространство всех функций $f \in L^{\mathrm{loc}}_r$ с конечной квазинормой (с очевидными модификациями при $q=\infty$)

$$\|f\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})} := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|t_k \delta^l_r(\cdot + 2^{-k}I^n)f\|^q_{L_p}\Big)^{\frac{1}{q}} + \|t_0\|f\|_{L_r(\cdot+I^n)}\|_{L_p}. \tag{6.3.5}$$

Замечание 6.3.6. Определение 6.3.4 берет свои истоки в статье [16], где был рассмотрен случай $p,q \in (1,\infty)$, а на весовую последовательность накладывались чуть более жесткие ограничения. Стоит отметить, что как легко следует из неравенства Гёльдера и элементарных выкладок, определение 6.3.4 является естественным обобщением соответствующих определений из статей Бесова [3, 4].

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $r \in (0,+\infty]$. Для куба Q в $\mathbb{R}^n$ определим *локальное наилучшее приближение* функции $f \in L^{loc}_r$ на кубе Q в метрике $L_r(Q)$ полиномами *степени* ниже l равенством

$$E_l(f,Q)_r := \inf_{deg(P)<l} \|f-P\|_{L_r(Q)}. \tag{6.3.7}$$

Аналогично, определим *локальное наилучшее приближение* функции $f \in L^{loc}_r$ на кубе Q в метрике $L_r(Q)$ полиномами *координатной степени* ниже l равенством

$$\widehat{E}_l(f,Q)_r := \inf_{deg_i(P)<l} \|f-P\|_{L_r(Q)}, \tag{6.3.8}$$

где нижняя грань взята по всем таким полиномам, что при каждом $i=1,...,n$ степень $deg_i(P)$ полинома P по переменной x_i строго меньше l.

Рассмотрим вопрос о введении эквивалентных норм в пространстве $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$. Пусть $p,q,\sigma_1,\sigma_2 \in (0,+\infty]$, $r \in (0,p]$, $l \in \mathbb{N}$ и $c>1$. Пусть $\alpha^1 := \{\alpha^1_k\}$, $\alpha^2 := \{\alpha^2_k\}$ – последовательности положительных чисел, а $\alpha_3 \in [0,+\infty)$. Наконец, пусть $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, а $\{t_{k,m}\}$ – кратная последовательность, p-ассоциированная с $\{t_k\}$. При $f \in L^{loc}_r$ положим (с очевидными модификациями в случае $p=\infty$)

$$\|f\|^{(1)}_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})} := \Big\|\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\Big[\delta^l_r(Q_{k,m})f\Big]^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_{l_q} + \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{0,m}\|f\|^p_{L_r(Q_{0,m})}\Big)^{\frac{1}{p}};$$

$$\|f\|^{(2)}_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})} := \Big\|\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\Big[\delta^l_r(cQ_{k,m},cQ_{k,m})f\Big]^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_{l_q} + \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{0,m}\|f\|^p_{L_r(Q_{0,m})}\Big)^{\frac{1}{p}};$$

$$\|f\|^{(3)}_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})} := \Big\|\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}\Big[2^{\frac{kn}{r}}E_l(f,cQ_{k,m})_r\Big]^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_{l_q} + \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{0,m}\|f\|^p_{L_r(Q_{0,m})}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Утверждение, аналогичное приведённой ниже теореме, было доказано в [16] при $p,q \in (1,\infty)$ и чуть более сильных ограничениях на весовую последовательность $\{t_k\}$. В нашем случае доказательство не отличается идеологически. Мы опускаем детали.

Теорема 6.3.9. *При $i = 1, 2, 3$ квазинормы $\|\cdot\|^{(i)}_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}$ являются эквивалентными квазинормами в пространстве $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$.*

Определение 6.3.10. Пусть $p, q, \sigma_1, \sigma_2 \in (0, \infty]$. Пусть $\alpha^1 := \{\alpha^1_k\}$, $\alpha^2 := \{\alpha^2_k\}$ – последовательности положительных чисел, а $\alpha_3 \in [0, +\infty)$. Предположим, что $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Пусть $\varphi_0 \in D$, $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$ и $\varphi(\cdot) := \varphi_0(\cdot) - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. При $j \in \mathbb{N}$ положим $\varphi_j := 2^{jn}\varphi(2^j\cdot)$. Через $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ обозначим линейное пространство всех распределений $f \in S'_e$, для которых конечна квазинорма (с соответствующими модификациями при $q = \infty$)

$$\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})} := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \|t_k(\varphi_k * f)\|^q_{L_p}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.3.11}$$

Замечание 6.3.12. Пусть $p \in (0, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$, $\{\alpha^1_k\} = \{\alpha^2_k\} = \{2^{ks}\}$, а вес $\gamma^p \in A^{\mathrm{loc}}_\infty$. Взяв $\{t_k\} = \{2^{ks}\gamma\}$ в определении 6.3.10 получим определение весового пространства Бесова, совпадающее с тем, что дано в работе Рычкова [102]. Будем обозначать его символом $\mathrm{B}^s_{p,q}(\gamma)$. Известно, что при $\gamma^p \in A_\infty$ и $L_\varphi \geq [s]$ определение весового пространства Бесова, данное с помощью преобразования Фурье и с помощью сверток с гладкими функциями эквивалентны в надлежащем смысле (детали см., например, в [102]).

6.4. Формула представления Рычкова и её следствия

В данном параграфе мы подготовим технический фундамент для дальнейших построений. Мы существенно упростим методы работы [102]. В частности, нам удастся избежать использования теоремы об ограниченности локального максимального оператора Харди–Литтлвуда. Это достигается за счёт использования "правильного" определения 6.2.6 и введения специальной максимальной функции $M_A(j, m, c)$ (см. подробности ниже).

Соглашение об обозначениях. Всюду в этом параграфе, если $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то при любом $j \in \mathbb{N}$ мы полагаем $g_j := 2^{jn}g(2^j\cdot)$.

Фиксируем в этом параграфе *специальную липшицеву область* $G \subset \mathbb{R}^n$, то есть

$$G = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \varpi(x')\},$$

где ϖ – L-липшицева функция на $\mathbb{R}^{n-1}$. Определим специальные конусы равенствами

$$K := \Big\{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > L\Big(\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}, \qquad -K := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : -x \in K\}.$$

Пусть $A > 0$ и пусть $\varphi_0 \in D$, $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$, $\varphi = \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. При $c \geq 1$ определим максимальную функцию $M_{A,\varphi_0}(j, m, c)[f] := M_A(j, m, c)[f]$ распределения $f \in S'_e$ равенством

$$M_A(j, m, c)[f] := \sup_{k \geq j} 2^{A(j-k)} \sup_{y \in cQ_{j,m}} |\varphi_k * f(y)| \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n. \tag{6.4.1}$$

Аналогично, если $A > 0$, $\varphi_0 \in D(-K)$, $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$, $\varphi = \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$, то при $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $c \geq 1$ для распределения $f \in D'(G)$ совпадающего на G в смысле $D'(G)$ с некоторым распределением $\widetilde{f} \in S'_e$ положим

$$M^G_{A,\varphi_0}(j,m,c)[f] := M^G_A(j,m,c)[f] := \sup_{k\geq j} 2^{A(j-k)} \sup_{y\in cQ_{j,m}\cap G} |\varphi_k * f(y)|. \tag{6.4.2}$$

Близкая по смыслу конструкция использована в работе [102]. Преимущество нашей конструкции в том, что она локальна и кажется более естественной для работы с пространствами переменной гладкости.

Замечание 6.4.3. Пусть $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $c \geq 1$. Из (6.1.2) легко видеть, что $M_A(j,m,c) < \infty$ при $f \in S'_e$ и $A > C(n, N_f)$. Аналогично, $M^G_A(j,m,c) < \infty$ при $f \in D'(G)$ и $A > C(n, N_f)$ при условии, что f совпадает на G в смысле $D'(G)$ с некоторым распределением $\widetilde{f} \in S'_e$.

Напомним замечательный факт из работ В. Рычкова (см. теорему 1.6 в [102] и предложение 2.1 в [103]). Если $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то мы полагаем $g_j := 2^{jn} g(2^j \cdot)$ при $j \in \mathbb{N}$.

Теорема 6.4.4 (локальная формула представления Рычкова)**.** *Пусть $\varphi_0 \in D$ и $\int \varphi_0\,dx = 1$. Положим $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. Тогда, для любого числа $A \geq 0$, существуют функции $\psi_0, \psi \in D$ такие, что $L_\psi \geq A$ и для любого распределения $f \in D'$ справедливо равенство*

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * \varphi_j * f \text{ в смысле сходимости в } D'. \tag{6.4.5}$$

Более того, если дополнительно предположить, что $\varphi_0 \in D(-K)$, то функции ψ_0, ψ могут быть выбраны так, что их носители содержатся в $-K$, и при этом для любого распределения $f \in D'(G)$ справедливо равенство

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * \varphi_j * f \text{ в смысле сходимости в } D'(G). \tag{6.4.6}$$

Оценки, полученные в следующих двух леммах будут ключевыми для дальнейшего.

Лемма 6.4.7. *Пусть $r \in (0,\infty)$, $c_1 \geq 1$, $A \geq 0$. Пусть $\varphi_0 \in D$ и $\int \varphi_0\,dx = 1$. Положим $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. Тогда существуют константы $C := C(n, r, \varphi_0, A, c_1) > 0$, $c_2(\varphi_0, c_1, n) \geq c_1$ такие, что при $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $f \in S'_e$,*

$$M_A(j,m,c_1)[f] \leq C\Big(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Ar} 2^{kn} \int\limits_{c_2 Q_{j,m}} |\varphi_k * f(z)|^r\,dz\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{6.4.8}$$

Доказательство. Мы будем во многом следовать схеме доказательства леммы 2.9 из работы [102], но при этом внесём некоторые технические упрощения. Фиксируем произвольное $\theta > 0$, для которого $\operatorname{supp}(\psi_0 * \varphi_0) \subset [-\theta,\theta]^n$, $\operatorname{supp}(\psi * \varphi) \subset [-\theta,\theta]^n$.

Шаг 1. В силу (6.4.5) при каждом $A' \geq A$, при любом $j \in \mathbb{N}_0$ имеем (см. объяснение перед формулой (2.12) из [102])

$$\varphi_j * f = (\psi_0)_j * (\varphi_0)_j * \varphi_j * f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \varphi_j * \psi_k * \varphi_k * f,$$

где можно считать $L_\psi > A' + 1$. При любых $k \geq j$ имеем следующую оценку (см. формулу (2.13) в [102])

$$\|\varphi_j * \psi_k\|_{L_\infty} \leq C 2^{(j-k)L_\psi + jn} \leq C 2^{(j-k)(A'+1)+jn}, \tag{6.4.9}$$

где константа $C > 0$ зависит от c, L_ψ, φ_0, но не зависит ни от k ни от j. Ясно, что имеем аналогичную оценку для $(\psi_0)_j * (\varphi_0)_j$. Следовательно, так как при $k \geq j$ носитель функции $\varphi_j * \psi_k$ расположен внутри куба с длиной ребра $\leq \theta 2^{-j}$, при $y \in c_1 Q_{j,m}$ имеем

$$|\varphi_j * f(y)| \leq C\Big(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)(A'+1)} 2^{jn} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{j,m}} |\varphi_k * f(z)|\, dz\Big). \tag{6.4.10}$$

Шаг 2. В случае $r \geq 1$, оценка (6.4.8) легко выводится из (6.4.10) с помощью неравенств Гёльдера для интегралов и рядов с показателями r, r'. Действительно, при $A' = A$, $k \geq j$ для любого куба $Q_{k,m'}$ при $y \in c_1 Q_{k,m'}$ имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_k * f(y)|^r &\leq C\Big(\sum_{l=k}^{\infty} 2^{(k-l)(A+1)} 2^{kn} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{k,m'}} |\varphi_l * f(z)|\, dz\Big)^r \\ &\leq C\Big(\sum_{l=k}^{\infty} 2^{(k-l)(A+1)} 2^{\frac{kn}{r}} \Big(\int\limits_{(c_1+\theta)Q_{k,m'}} |\varphi_l * f(z)|^r\, dz\Big)^{\frac{1}{r}}\Big)^r \qquad (6.4.11) \\ &\leq C \sum_{l=k}^{\infty} 2^{(k-l)Ar} 2^{kn} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{k,m'}} |\varphi_l * f(z)|^r\, dz \leq C \sum_{l=k}^{\infty} 2^{(k-l)Ar} 2^{ln} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{k,m'}} |\varphi_l * f(z)|^r\, dz. \end{aligned}$$

Поэтому, используя оценку (6.4.11) при $k \geq j$ для любых кубов $Q_{j,m}$ и $Q_{k,m'} \subset Q_{j,m}$, увеличивая пределы интегрирования и суммируя ряд начиная с j, при любом $k \geq j$получим

$$2^{(j-k)Ar} \sup_{y \in c_1 Q_{j,m}} |\varphi_k * f(y)|^r \leq C \sum_{l=j}^{\infty} 2^{(j-l)Ar} 2^{ln} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{j,m}} |\varphi_l * f(z)|^r\, dz. \tag{6.4.12}$$

Таким образом, полагая $c_2 = (c_1 + \theta)$, из (6.4.12) выводим (6.4.8) при любом $r \geq 1$.

Шаг 3. В случае $r \in (0, 1)$ применим уже доказанную при $r = 1$ и произвольном $A' \geq A$ оценку (6.4.12). Получим при $k \geq j$,

$$\begin{aligned} 2^{(j-k)A'} \sup_{y \in c_1 Q_{j,m}} |\varphi_k * f(y)| &\leq C\Big(\sum_{l=j}^{\infty} 2^{(j-l)A'} 2^{ln} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{j,m}} |\varphi_l * f(z)|\, dz\Big) \leq \\ &\leq C(M_{A'}(j, m, (c_1+\theta))[f])^{1-r} \Big(\sum_{l=j}^{\infty} 2^{(j-l)A'r} 2^{ln} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{j,m}} |\varphi_l * f(z)|^r\, dz\Big). \end{aligned} \tag{6.4.13}$$

Очевидно, $M_{A'}(j,m,c_1)[f] \le M_{A'}(j,m,c_1+\theta)[f]$. Поэтому, если $M_{A'}(j,m,c_1+\theta)[f] < +\infty$, то

$$M_{A'}(j,m,c_1)[f] \le C(A')\Big(\sum_{l=j}^{\infty} 2^{(j-l)A'r}2^{ln} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{j,m}} |\varphi_l * f(z)|^r\,dz\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{6.4.14}$$

При этом константа $C > 0$ в правой части (6.4.14) не зависит от f, j и m, но зависит от A', поскольку соответствующая константа в правой части (6.4.9) зависит от параметра L_ψ, который в данном случае обязан превышать A'.

Заметим теперь, что для распределения $f \in S'_e$ имеем

$$|\varphi_k * f(x)| \le C\exp(N_f\|x\|)p_{N_f}(\varphi_k), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда вытекает, что $M_{A'}(j,m,c_1+\theta)[f] < +\infty$ при $A' > C(N_f)$. Поскольку правая часть (6.4.14) возрастает при убывании A', имеем

$$\sup_{y\in c_1Q_{j,m}} |\varphi_j * f(y)| \le M_{A'}(j,m,c_1)[f] \le C(f)\Big(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Ar}2^{kn} \int\limits_{(c_1+\theta)Q_{j,m}} |\varphi_k * f(z)|^r\,dz\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{6.4.15}$$

Мы подчеркнули зависимость константы в правой части (6.4.15) от f, поскольку ограничение на A', при которых была получена эта оценка, зависели от f, а значит и сама константа $C(A')$ косвенным образом зависит от f. Используя те же элементарные рассуждения, что и при переходе от оценки (6.4.11) к оценке (6.4.12), мы выводим из (6.4.15) оценку

$$M_A(j,m,c_1+\theta)[f] \le C(f)\Big(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Ar}2^{kn} \int\limits_{(c_1+2\theta)Q_{j,m}} |\varphi_k * f(z)|^r\,dz\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{6.4.16}$$

Из оценки (6.4.16) получаем, что конечность правой части (6.4.8) при $c_2 = (c_1+2\theta)$ гарантирует неравенство $M_A(j,m,c_1+\theta)[f] < +\infty$. Поэтому, применяя оценку (6.4.14) при $A' = A$ и увеличивая пределы интегрирования, будем иметь

$$M_A(j,m,c_1)[f] \le C(A)\Big(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Ar}2^{kn} \int\limits_{(c_1+2\theta)Q_{j,m}} |\varphi_k * f(z)|^r\,dz\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{6.4.17}$$

В данном случае константа $C(A)$ уже не зависит ни от f, ни от j, ни от m.

Лемма полностью доказана.

□

Замечание 6.4.18. Повторяя доказательство леммы 6.4.7 с незначительными модификациями, можно установить аналог оценки 6.4.8 для области G вместо $\mathbb{R}^n$. Более точно, пусть $r \in (0,\infty)$, $c_1 \ge 1$, $A \ge 0$. Пусть $\varphi_0 \in D(-K)$ и $\int \varphi_0\,dx = 1$. Положим $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$ и $\varphi_j := 2^{jn}\varphi(2^j\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда существуют константы $C := C(G,n,r,\varphi_0,A,c_1) > 0$,

$c_2(\varphi_0, c_1, n) \geq c_1$ такие, что при $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ для любого распределения $f \in D'(G)$, которое совпадает на G в смысле $D'(G)$, с некоторым распределением $\widetilde{f} \in S'_e$, справедливо неравенство

$$M_A^G(j, m, c_1)[f] \leq C\Big(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Ar} 2^{kn} \int\limits_{c_2 Q_{j,m} \cap G} |\varphi_k * f(z)|^r \, dz\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{6.4.19}$$

Обозначения. При $\mu \in (0, q]$ положим $q_\mu := \frac{q}{\mu}$, а через q'_μ обозначим сопряжённый показатель Гёльдера для q_μ. При $r \in (0, p]$ аналогичным образом определим p_r и p'_r.

Лемма 6.4.20. *Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$, $\sigma_1 \geq r p'_r$, $\sigma_2 \in (0, \infty]$ и пусть $\{\alpha_k^1\}$, $\{\alpha_k^2\}$ – последовательности положительных чисел, а $\alpha_3 \in [0, +\infty)$. Пусть $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Наконец, пусть $\varphi_0 \in D$, $\int \varphi_0 \, dx = 1$, $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$ и $\varphi_j := 2^{jn}\varphi(2^j \cdot)$, $j \in \mathbb{N}$. Предположим, что числа $A > 0$, $\mu \in (0, \min\{1, q, r\}]$ таковы, что условие 1.2.122 выполнено при $s = q_\mu$, $\{\beta_j\} = \{(2^{j(A - \frac{n}{r})}\alpha_j^1)^\mu\}$. Тогда при $c \geq 1$ для любого распределения $f \in \mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ (с соответствующим модификациями при $p = \infty$ или $q = \infty$) справедливо неравенство*

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p (M_A(j, m, c)[f])^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t_k^p(x)(\varphi_k * f(x))^p \, dx\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{6.4.21}$$

в котором константа $C > 0$ не зависит от f.

Доказательство. Мы приведём доказательство при $p, q \neq \infty$ (случаи, когда $p = \infty$ или $q = \infty$ аналогичны). Кроме того, заметим, что в силу замечания 6.2.10 без ограничения общности можно предполагать, что $\sigma_1 = r p'_r$.

Используем сначала (6.4.8), а затем, учтём, что ℓ_q-норма монотонна по q. Имеем оценку

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \, (M_A(j, m, c)[f])^p\Big)^{\frac{\mu}{p}} \leq \\
&\leq C\Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)Ar} 2^{kn} \int\limits_{\widetilde{c} Q_{j,m}} |\varphi_k * f(z)|^r \, dz\Big)^{\frac{\mu p}{\mu r}}\Big)^{\frac{\mu}{p}} \\
&\leq C\Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(\sum_{k=j}^{\infty}\Big(2^{(j-k)Ar+kn} \int\limits_{\widetilde{c} Q_{j,m}} |\varphi_k * f(z)|^r \, dz\Big)^{\frac{\mu}{r}}\Big)^{\frac{p}{\mu}}\Big)^{\frac{\mu}{p}}.
\end{aligned} \tag{6.4.22}$$

Очевидно, для любого семейства неотрицательных чисел $\{\gamma_{j,m}(k)\}$ справедлив следующий вариант неравенства Минковского для сумм (поскольку $\frac{p}{\mu} \geq 1$)

$$\Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(\sum_{k=j}^{\infty} \gamma_{j,m}(k)\Big)^{\frac{p}{\mu}}\Big)^{\frac{\mu}{p}} \leq \sum_{k=j}^{\infty}\Big(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p (\gamma_{j,m}(k))^{\frac{p}{\mu}}\Big)^{\frac{\mu}{p}}.$$

Применим это наблюдение при

$$\gamma_{j,m}(k) = 2^{(j-k)A\mu + kn\frac{\mu}{r}}\Big(\int\limits_{\widetilde{c} Q^n_{j,m}} |\varphi_k * f(z)|^r \, dz\Big)^{\frac{\mu}{r}}.$$

Это позволит нам продолжить оценку 6.4.22 и получить

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\,(M_A(j,m,c)[f])^p\Big)^{\frac{\mu}{p}} \le C\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)A\mu}\Big(2^{\frac{knp}{r}}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\Big(\int\limits_{\widetilde{c}Q_{j,m}} \frac{t_k^r(x)}{t_k^r(x)}|\varphi_k * f(z)|^r\,dz\Big)^{\frac{p}{r}}\Big)^{\frac{\mu}{p}}.$$

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера для интегралов с показателями p_r и p_r', учитывая равенство $2^{\frac{jnp}{r}} = 2^{jn}2^{\frac{jnp}{\sigma_1}}$ и определение 6.2.6, выводим

(6.4.23)
$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\,(M_A(j,m,c)[f])^p\Big)^{\frac{\mu}{p}} \le C\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(j-k)(A-\frac{n}{r})\mu}\frac{(\alpha_j^1)^\mu}{(\alpha_k^1)^\mu}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int\limits_{\widetilde{c}Q_{j,m}} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{\mu}{p}}.$$

Теперь положим $\beta_j = (2^{(A-\frac{n}{r})j}\alpha_j^1)^\mu$ и, применяя теорему 1.2.120 с учётом предположений, сделанных относительно A и $\{\alpha_k^1\}$, продолжим (6.4.23) оценку. В итоге, учитывая предложение 4.1.1, имеем требуемую цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p(M_A(j,m,c)[f])^p\Big)^{\frac{q}{p}}\\
&\le C\sum_{j=0}^{\infty}(\beta_j)^{\frac{q}{\mu}}\Big(\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{\beta_k}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int\limits_{\widetilde{c}Q_{j,m}} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{q}{\mu}} \qquad (6.4.24)\\
&\le C\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int\limits_{\widetilde{c}Q_{j,m}} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{q}{p}} \le C\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Лемма полностью доказана. □

Замечание 6.4.25. Пусть выполнены все условия леммы 6.4.22, но при этом $\varphi_0, \varphi \in D(-K)$. Тогда, повторяя с минимальными видоизменениями доказательство леммы 6.4.22 с учётом замечания 6.4.18, для распределения $f \in D'(G)$, совпадающего на G в смысле $D'(G)$ с некоторым распределением $\widetilde{f} \in S_e'$, будем иметь

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p(M_A^G(j,m,c)[f])^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int\limits_G t_k^p(x)(\varphi_k * f(x))^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}, \qquad (6.4.26)$$

где константа $C > 0$ не зависит от f.

Теперь мы готовы доказать полноту пространства $\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})$.

Лемма 6.4.27. *Пусть $p, q \in (0,\infty]$, $r \in (0,p]$, $\sigma_1 \ge rp_r'$, $\sigma_2 \in (0,\infty]$. Пусть $\{\alpha_k^1\}$, $\{\alpha_k^2\}$ – последовательности положительных вещественных чисел, а $\alpha_3 \in [0,+\infty)$. Далее, пусть $\{t_k\} \in \mathcal{X}_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$. Наконец, предположим, что для некоторых чисел $A > 0$, $\mu \in (0, \min\{1,q,r\}]$ условие (2.12) выполнено при $s = q_\mu$, $\{\beta_j\} = \{(2^{j(A-\frac{n}{r})}\alpha_j^1)^\mu\}$. Тогда $\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})$ – полное квазинормированное линейное пространство, непрерывно вложенное в S_e'.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\}) \subset S'_e$ и соответствующий оператор вложения непрерывен. Из определения пространства S'_e следует, что для этого достаточно установить при $f \in \mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$, $L = L(f), N = N(f) \in \mathbb{N}_0$ и любых $\theta \in D$ оценку

$$|\langle f, \theta\rangle| \le C\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})} \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{|\alpha|\le L} |D^\alpha\theta(x)|\exp(N\|x\|)\Big), \tag{6.4.28}$$

в которой константы C, N, L зависят от $\{t_k\}$, p, q, n, но не зависят ни от f, ни от θ. Оценка (6.4.28) легко следует из оценки

$$|\widetilde{\theta} * f(x)| \le C\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})}\Big(\sup_{\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le L} |D^\alpha\widetilde{\theta}(\widetilde{x})|\Big)\exp(N\|x\|), \tag{6.4.29}$$

в которой $\widetilde{\theta} \in D(I)$, а константа $C > 0$ не зависит ни от f, ни от $\widetilde{\theta}$. Чтобы доказать (6.4.29), будем рассуждать как и при выводе оценки (6.4.8), заменяя φ_0 на $\widetilde{\theta}$. Заметим также, что константа $C > 0$ в правой части (6.4.9) (с заменой φ_j на $\widetilde{\theta}$) может быть легко оценена сверху числом $\sup\limits_{\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n}\sum\limits_{|\alpha|\le L} |D^\alpha\widetilde{\theta}(\widetilde{x})|$ (это следует из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Теперь, используя замечание 6.2.11, оценку $\sup\limits_{x\in Q_{0,m}} |\theta * f(x)| \le M_A(0, m, c)[f]$ при $m \in \mathbb{Z}^n$, (напомним, что для некоторых $A > 0$, $\mu \in (0, \min\{1, q, r\}]$ условие (2.12) выполнено при $s = q_\mu$, $\{\beta_j\} = \{(2^{j(A-\frac{n}{r})}\alpha_j^1)^\mu\}$) и лемму 6.4.20, получим (заметим, что L зависит от A)

$$\sup_{x\in Q_{0,m}} |\widetilde{\theta} * f(x)| \le \frac{1}{t_{0,m}} t_{0,m} \sup_{x\in Q_{0,m}} |\widetilde{\theta} * f(x)| \le C\exp(\widehat{N}(\alpha_3)\|m\|)\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{0,m} \sup_{x\in Q_{0,m}} |\widetilde{\theta} * f(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le C\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le L} |D^\alpha\widetilde{\theta}(x)|\Big)\exp(\widehat{N}(\alpha_3)\|m\|).$$

Отсюда получаем (6.4.29) при $N = N(\widehat{N}(\alpha_3), n)$. Доказательство полноты пространства $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ повторяет почти дословно рассуждения из последнего абзаца леммы 2.15 из [102], при этом используя (6.4.28).

Лемма полностью доказана. □

Введём обобщение конструкции из формулы (6.4.1). Пусть $\{g^k\}$ – последовательность локально ограниченных измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций. При $A > 0$ для любых $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $c > 0$ положим

$$M_A(j, m, c)[\{g^k\}] := \sup_{k\ge j} 2^{A(j-k)} \sup_{y\in cQ_{j,m}} |g^k(y)|. \tag{6.4.30}$$

Таким образом при $f \in S'_e$ имеем

$$M_A(j, m, c)[f] = M_A(j, m, c)[\{\varphi_k * f\}].$$

Теперь мы готовы установить главный результат данного параграфа. Еще раз для удобства читателя напомним, что при $j \in \mathbb{N}$ мы полагаем $g_j := 2^{jn}g(2^j\cdot)$.

Теорема 6.4.31. *Пусть $p, q, \sigma_1 \in (0, \infty]$ и $\sigma_2 \geq p$. Пусть также $\{\alpha_k^1\} = \{2^{k\alpha_1}\}$, $\{\alpha_k^2\} = \{2^{k\alpha_2}\}$ при $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $\alpha_3 \in [0, +\infty)$ и $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Пусть $\zeta_0 \in D$, $\int \zeta_0(x)\,dx = 1$ и $\zeta := \zeta_0 - 2^{-n}\zeta_0(\frac{\cdot}{2})$ таковы, что $L_\zeta + 1 > \alpha_2$, функция $\psi_0 \in D$ та же что и в теореме 6.4.4, но $L_\psi + 1 > A$ при некотором $A > 0$. Тогда, если (с соответствующими модификациями при $p, q = +\infty$)*

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\Big(M_A(j,m,c)[\{g^k\}]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \psi_j * g^j$ сходится в S'_e. Более того, существует константа $C > 0$ такая, что для любой последовательности локально ограниченных измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций $\{g^k\}$ справедливо неравенство (с соответствующими модификациями при $p = \infty$ ил $q = \infty$)

$$\|\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * g^j\|_{\mathrm{B}^{\zeta_0}_{p,q}(\{t_k\})} \leq C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\Big(M_A(j,m,c)[\{g^k\}]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.4.32}$$

Доказательство. Доказательство проведем в случае $p, q < \infty$, поскольку остальные случаи технически проще и рассматриваются аналогично. В силу замечания 6.2.10 без ограничения общности можем считать, что $\sigma_2 = p$. Фиксируем последовательность локально ограниченных измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций $\{g^k\}$. Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Первое простое наблюдение состоит в том, что если $c_1, c_2 \in [1, +\infty)$, то для некоторой константы $C > 0$, зависящей только от c_1, c_2 и α_3, при всех $j \in \mathbb{N}_0$ имеем оценку

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\Big(M_A(j,m,c_1)[\{g^k\}]\Big)^p \leq C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\Big(M_A(j,m,c_2)[\{g^k\}]\Big)^p. \tag{6.4.33}$$

Действительно, в случае $c_2 \geq c_1$ неравенство (6.4.33), очевидно, следует из определения $M_A(j,m,c)[\{g^k\}]$. Если же $c_2 < c_1$, то при любом $j \geq k$ получаем

$$2^{A(j-k)} \sup_{y\in c_1 Q_{j,m}} |g^k(y)| \leq 2^{A(j-k)} \sum_{c_2 Q_{j,\widetilde{m}}\cap c_1 Q_{j,m}\neq\emptyset} \sup_{y\in c_2 Q_{j,\widetilde{m}}} |g^k(y)|.$$

Отсюда, очевидно, имеем

$$t_{j,m} M_A(j,m,c_1)[\{g^k\}] \leq C \sum_{c_2 Q_{j,\widetilde{m}}\cap c_1 Q_{j,m}\neq\emptyset} t_{j,\widetilde{m}} M_A(j,m,c_2)[\{g^k\}]. \tag{6.4.34}$$

Теперь, используя элементарные неравенства, из (6.4.34) легко получаем (6.4.33) при $c_2 < c_1$.

Шаг 2. Мы утверждаем, что $\psi_j * g^j \in S'_e$ при условии, что правая часть (6.4.32) конечна. Действительно, если $x \in Q_{j,m}$, то при некотором $c \geq 1$ имеем $\operatorname{supp}\psi_j(x - \cdot) \subset cQ_{j,m}$. Поэтому

$$|\psi_j * g^j(x)| = \Big|\int \psi_j(x-y) g^j(y)\,dy\Big| \leq C \sup_{y\in cQ_{j,m}} |g^j(y)| \leq C M_A(j,m,c)[\{g^k\}].$$

Из (6.2.12) следует, что $t_{j,m}^{-1} \le C\exp(\alpha_3\|m\|)t_{j,0}^{-1}$. Поэтому, при $\omega \in D$ имеем

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\frac{1}{t_{j,m}}\sup_{x\in Q_{j,m}}|\omega(x)| \le \frac{C}{t_{j,0}}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\frac{\exp((\alpha_3+1)\|m\|)}{\exp\|m\|}\sup_{x\in Q_{j,m}}|\omega(x)| \le C\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\exp((\alpha_3+1)\|x\|)|\omega(x)|.$$

В результате, если правая часть (6.4.32) конечна, то получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
|\langle\psi_j * g^j,\omega\rangle| &= \left|\int \omega(x)\psi_j * g^j(x)\,dx\right| \le \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\int\limits_{Q_{j,m}}|\omega(x)\psi_j * g^j(x)|\,dx\\
&\le 2^{-jn}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\frac{t_{j,m}}{t_{j,m}}\sup_{x\in Q_{j,m}}|\omega(x)\psi_j * g^j(x)|\\
&\le C2^{-jn}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\frac{1}{t_{j,m}}\sup_{x\in Q_{j,m}}|\omega(x)|\Big)\Big(\sup_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{j,m}M_A(j,m,c)[\{g^k\}]\Big)\\
&\le Cp_{N(\alpha_3)}[\omega]\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{j,m}^p\Big(M_A(j,m,c)[\{g^k\}]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} < +\infty,
\end{aligned}$$

в которых $C>0$ не зависит от ω, $N(\alpha_3)=[\alpha_3]+2$. Из (6.1.2) заключаем, что $\psi_j * g^j \in S_e'$.

Шаг 3. Из формулы (2.12) статьи [101] следует, что

$$\|\varphi_l * \psi_j\|_{L_\infty} \le C\begin{cases}2^{(l-j)(L_\psi+1)}2^{ln}, & l\le j\\ 2^{(j-l)(L_\varphi+1)}2^{jn}, & j<l.\end{cases} \tag{6.4.35}$$

Диаметр носителя функции $\varphi_l * \psi_j$ не превосходит $c2^{-jn}$ в случае $l>j$, а в случае $j\ge l$ он не превосходит $c2^{-ln}$ (константа c зависит только от размеров носителей φ_0, ψ_0 и от n). Комбинируя этот факт с оценкой (6.4.35), получаем

$$\sup_{y\in Q_{l,m}}|\varphi_l * \psi_j * g^j(y)| \le C\begin{cases}2^{(l-j)(L_\psi+1)}\sup\limits_{y\in cQ_{l,m}}|g^j(y)|, & l\le j\\ 2^{(j-l)(L_\varphi+1)}\sup\limits_{y\in cQ_{j,\widetilde{m}}}|g^j(y)|, & j<l.\end{cases} \tag{6.4.36}$$

В правой части (6.4.36) при $j<l$ куб $Q_{j,\widetilde{m}}$ – единственный двоичный куб с длиной ребра 2^{-j}, содержащий куб $Q_{l,m}$.

При $l>j$, используя (6.4.36), (6.2.17) и (6.4.30), получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
\int t_l^p(x)|\varphi_l * \psi_j * g^j(x)|^p\,dx &\le C2^{p(j-l)(L_\varphi+1)}\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{l,m}\subset Q_{j,\widetilde{m}}}}t_{l,m}^p\sup_{y\in cQ_{j,\widetilde{m}}}|g^j(y)|^p\\
&\le C2^{p(j-l)(L_\varphi+1-\alpha_2)}\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n}t_{j,\widetilde{m}}^p\sup_{y\in cQ_{j,\widetilde{m}}}|g^j(y)|^p \qquad (6.4.37)\\
&\le C2^{p(j-l)(L_\varphi+1-\alpha_2)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{j,m}^p\Big(M_A(j,m,c)[\{g^k\}]\Big)^p.
\end{aligned}$$

Если $l\le j$, то из (6.4.36) имеем

$$\begin{aligned}
\int t_l^p(x)|\varphi_l * \psi_j * g^j(x)|^p\,dx &\le C2^{p(l-j)(L_\psi+1)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{l,m}^p\sup_{y\in cQ_{l,m}}|g^j(y)|^p\\
&\le C2^{p(l-j)(L_\psi+1-A)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{l,m}^p\Big(M_A(l,m,c)[\{g_k\}]\Big)^p.
\end{aligned} \tag{6.4.38}$$

По условию теоремы $L_\psi + 1 - A > 0$ и $L_\varphi + 1 - \alpha_2 > 0$. Положим

$$\underline{\varepsilon} := \min\{L_\psi + 1 - A, L_\varphi + 1 - \alpha_2\}, \quad \overline{\varepsilon} := \max\{L_\psi + 1 - A, L_\varphi + 1 - \alpha_2\}. \tag{6.4.39}$$

Но тогда, из (6.4.37), очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=j+1}^{\infty} 2^{-ql\overline{\varepsilon}} \Big(\int t_l^p(x) |\varphi_l * \psi_j * g^j(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C \sum_{l=j+1}^{\infty} 2^{-ql\overline{\varepsilon}} 2^{q(j-l)(L_\varphi+1-\alpha_2)} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(M_A(j,m,c)[\{g^k\}] \Big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C 2^{-qj\overline{\varepsilon}} \sum_{l=j+1}^{\infty} 2^{q(j-l)(L_\varphi+1-\alpha_2)} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(M_A(j,m,c)[\{g^k\}] \Big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C 2^{-qj\overline{\varepsilon}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(M_A(j,m,c)[\{g^k\}] \Big)^p \Big)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, из (6.4.38), очевидно, имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{j} 2^{-ql\overline{\varepsilon}} \Big(\int t_l^p(x) |\varphi_l * \psi_j * g^j(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C \sum_{l=0}^{j} 2^{-ql\overline{\varepsilon}} 2^{q(l-j)(L_\psi+1-A)} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{l,m}^p \Big(M_A(l,m,c)[\{g^k\}] \Big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C 2^{-qj\underline{\varepsilon}} \sum_{l=0}^{j} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{l,m}^p \Big(M_A(l,m,c)[\{g^k\}] \Big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \le C 2^{-qj\underline{\varepsilon}} \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{l,m}^p \Big(M_A(l,m,c)[\{g^k\}] \Big)^p \Big)^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

В итоге, собирая вместе вышеприведённые оценки, получаем

$$\|\psi_j * g^j\|^q_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{2^{-k\overline{\varepsilon}} t_k\})} \le C 2^{-j\underline{\varepsilon}} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(M_A(j,m,c)[\{g^k\}] \Big)^p \Big)^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

В силу леммы 6.4.27 ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \psi_j * g^j$ сходится в полном пространстве $\mathrm{B}^{\zeta_0}_{p,q}(\{2^{-2k\sigma} t_k\})$. Поэтому, опять же в силу леммы 6.4.27, этот ряд сходится и в S'_e к некотором распределению g.

Шаг 4. Установим оценку (6.4.32). Для этого заметим, что из 6.4.36 легко получается цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
&\sup_{y\in Q_{l,m}} |\varphi_l * g(y)| \le \sum_{j=0}^{l} |\varphi_l * \psi_j * g^j(y)| + \sum_{j=l+1}^{\infty} |\varphi_l * \psi_j * g^j(y)| \\
&\le \sum_{j=0}^{l} 2^{(j-l)(L_\varphi+1)} \sup_{y\in cQ_{j,\widetilde{m}}} |g^j(y)| + \sum_{j=l+1}^{\infty} 2^{(l-j)(L_\psi+1-A)} 2^{A(l-j)} \sup_{y\in cQ_{l,m}} |g^j(y)|.
\end{aligned}$$

Поэтому при $\mu \in (0, \min\{1,p,q\}]$ для любого фиксированного $l \in \mathbb{N}_0$, учитывая монотонность l_q-нормы по q и условие $L_\psi + 1 - A > 0$, будем иметь

$$\Big(\int t_l^p(x)|\varphi_l * g(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le C\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{l,m}^p \sup_{y\in Q_{l,m}} |\varphi_l * g(y)|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le C\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{l,m}^p \Big(\sum_{j=0}^{l} 2^{\mu(j-l)(L_\varphi+1)} \sup_{y\in cQ_{j,\widetilde{m}}} |g^j(y)|^\mu\Big)^{\frac{p}{\mu}}\Big)^{\frac{\mu}{p}\frac{1}{\mu}} \tag{6.4.40}$$

$$+ C\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{l,m}^p \Big(M_A(l,m,c)[\{g^k\}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} =: S_{1,l} + S_{2,l}.$$

При этом константа $C > 0$ в (6.4.40) не зависит ни от $\{g^k\}$, ни от l.

Для оценки $S_{1,l}$ воспользуемся неравенством Минковского для сумм (это возможно, поскольку $\frac{p}{\mu} \ge 1$) и неравенством (6.2.17). Имеем

$$S_{1,l} \le C\Big(\sum_{j=0}^{l} 2^{\mu(j-l)(L_\varphi+1)}\Big(\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{l,m}\subset Q_{j,\widetilde{m}}}} t_{l,m}^p\Big) \sup_{y\in cQ_{j,\widetilde{m}}} |g^j(y)|^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} \le$$

$$\le C\Big(\sum_{j=0}^{l} 2^{\mu(l-j)(\alpha_2-L_\varphi-1)}\Big(\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n} t_{j,\widetilde{m}}^p \sup_{y\in cQ_{j,\widetilde{m}}} |g^j(y)|^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} \tag{6.4.41}$$

$$\le C\Big(\sum_{j=0}^{l} 2^{\mu(l-j)(\alpha_2-L_\varphi-1)}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(M_A(j,m,c)\Big)^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Напомним, что $L_\varphi + 1 > \alpha_2$. Теперь требуемое неравенство (6.4.32) следует из теоремы 1.2.120 и оценок (6.4.40), (6.4.41).

□

6.5. Эквивалентные квазинормы в пространствах $\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})$

Теперь, используя результаты предыдущего параграфы, мы готовы показать, что при различных φ_0, квазинормы определяемые в (6.3.11) эквивалентны при достаточно слабых предположениях относительно последовательности $\{t_k\}$.

Предположения. На протяжении всего параграфа предполагаем, что $\{\alpha_k^i\} = \{2^{k\alpha_i}\}$ $(i = 1,2)$ при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. В действительности все результаты могут быть легко обобщены на случай произвольных последовательностей $\{\alpha_k^i\}$, $i = 1,2$, но это потребует дополнительных технических деталей. Напомним, что мы полагаем $g_j := 2^{jn} g(2^j\cdot)$ при $j \in \mathbb{N}$.

Теорема 6.5.1. *Пусть $p,q \in (0,\infty]$, $\sigma_1 \in (0,+\infty]$, $\sigma_2 \ge p$. Пусть $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \ge 0$ и $\{t_k\} \in \mathcal{X}_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$. Предположим, что $\zeta_0, \varphi_0 \in D$ таковы, что $\int \varphi_0(x)\,dx = \int \zeta_0(x)\,dx = 1$. Тогда, если $\alpha_2 < 1 + L_\zeta$ при $\zeta := \zeta_0 - 2^{-n}\zeta_0(\frac{\cdot}{2})$, то существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\zeta_0}(\{t_k\})} \le C\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})}, \quad f \in S_e'. \tag{6.5.2}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 6.4.31 при $\{g^k\} = \{\varphi_k * f\}$ и $A > \frac{n}{r} + \max\{0, -\alpha_1\}$. С учётом формулы 6.4.5 получаем, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * \varphi_j * f$ сходится и в D' и в S'_e к распределению f. Кроме того, справедлива оценка

$$\|f\|_{\mathrm{B}^{\zeta_0}_{p,q}(\{t_k\})} \le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\Big(M_A(j,m,c)[\varphi]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Но тогда, поскольку $A > \frac{n}{r} + \max\{0, -\alpha_1\}$, используя лемму 6.4.20, получим оценку (6.5.2).

Теорема доказана. □

Замечание 6.5.3. В случае $p, q \in (0, \infty]$, $p \ne \infty$, $r \in (0, p]$, $\{t_k\} = \{2^{ks}\gamma\}$ при $s \in \mathbb{R}$, $\gamma^p \in A^{\mathrm{loc}}_{\frac{p}{r}}$ мы получаем один из результатов статьи [102] (следствие 2.7). А именно, мы получаем, что определение весового пространства Бесов не зависит от выбора φ_0 при условии, что $L_\varphi \ge [s]$.

Замечание 6.5.4. Предположим, что $\{t_k\} \in \mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$ при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $\alpha_3 \in [0, +\infty)$. Тогда существуют такие $C > 0$ и $d \in [0, +\infty)$, что оценка $t_{0,m} \ge C(1+\|m\|)^{-d}$ справедлива при всех $m \in \mathbb{Z}^n$. Рассуждения, использованные при выводе (6.4.29), в нашем случае в действительности дают (6.4.28) с весом $(1+\|x\|)^d$ вместо $\exp(N\|x\|)$. Это показывает, что если $f \in S'_e$ принадлежит пространству $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ при $\{t_k\} \in \mathcal{W}^{\alpha_3}_{\alpha_1,\alpha_2}$, то f принадлежит $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\}) \cap S'$. Следовательно, рассуждая как в доказательстве предложения 1.2 из [102] и используя теорему 3.10 из [82] вместе с теоремой 6.5.1, будем иметь $f \in \mathrm{B}^{\{t_k\}}_{p,q}$. Поэтому, используя замечание 6.3.12, заключаем, что пространство $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ является вполне естественным обобщением как пространства $\mathrm{B}^{\{t_k\}}_{p,q}$ так и пространства $\mathrm{B}^{s}_{p,q}(\gamma)$ (при $\gamma \in A^{loc}_{\infty}$).

Внимательный анализ рассуждений, приведённых в доказательстве теоремы 6.5.1 приводит к следующему интересному наблюдению. Мы не будем приводить простые детали.

Теорема 6.5.5. *Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $r \in (0, p]$, $\sigma_1 \ge rp'_r$, $\sigma_2 \ge p$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \ge 0$ и $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Предположим, что $\varphi_0 \in D$ такова, что $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$ и $\alpha_2 < 1 + L_\varphi$ при $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. Тогда $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\}) = \mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{\bar{t}_k\})$, и соответствующие квазинормы эквивалентны.*

Замечание 6.5.6. Теорема 6.5.5 позволяет избавиться от точек сингулярности и точек вырождения весов в последовательности $\{t_k\}$. Этот факт будет полезен в последующих применениях пространств $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$. В частности, если $p, q \in (0, \infty]$, $p \ne \infty$, $\gamma^p \in A^{\mathrm{loc}}_{\infty}$, $L_\varphi \ge [s]$, то $\mathrm{B}^{s}_{p,q}(\gamma)$ и $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{\gamma_k\})$ совпадают как линейные пространства, при условии, что $\gamma_k(x) = 2^{ks+\frac{kn}{p}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \chi_{\widetilde{Q}_{k,m}}(x)\|\gamma\|_{L_p(\widetilde{Q}_{k,m})}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}^n$. При этом соответствующие квазинормы эквивалентны. Следовательно, весовые пространства Бесова можно интерпретировать как пространства Бесова переменной гладкости.

6.6. Сплайн разложения функций в пространствах $\tilde{\mathrm{B}}^{l}_{p,q,r}(\{t_k\})$

В данном параграфе мы получим теорему о так называемом атомарном разложении функций из пространства $\widetilde{\mathrm{B}}^{l}_{p,q,r}(\{t_k\})$. Эта теорема будет для нас важнейшим инструментом для исследования вопроса о совпадении пространств $\widetilde{\mathrm{B}}^{l}_{p,q,r}(\{t_k\})$ и $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$, которому будет посвящён следующий параграф. В наших построениях мы модифицируем некоторые методы и идеи статьи [40], где они были разработаны для получении теоремы об атомарном разложении классических пространств Бесова постоянной гладкости.

Предположения. На протяжении всего параграфа предполагаем, что $\{\alpha^i_k\} = \{2^{k\alpha_i}\}$ $(i = 1, 2)$ при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. В действительности все результаты могут быть легко обобщены на случай произвольных последовательностей положительных чисел $\{\alpha^i_k\}$, $i = 1, 2$, но это потребует дополнительных технических деталей.

6.6.1. **Сплайны.** При $l \in \mathbb{N}_0$ через N^l обозначим *одномерный B - сплайн* степени l с узлами в точках $t_i = i$, $i \in \{0, 1, .., l + 1\}$. Более точно, положим

$$N^l(t) := [0, 1, .., l, l + 1](t - \cdot)^l_+,$$

где использовано стандартное в теории приближений обозначение разделённой разности (см. гл.7 в [11]). При $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$N^l_{k,m}(x) := \prod_{i=1}^{n} N^l\Big(2^k(x_i - \frac{m_i}{2^k})\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Функции $N^l_{k,m}$ впервые были введены Карри и Шёнбергом в [34].

Отметим некоторые свойства B - сплайнов $N^l_{k,m}$, которые нам понадобятся в дальнейшем. Доказательства этих свойств можно найти, например, в [34, 39].

(S1) При любых $l, k \in \mathbb{N}_0$ сплайны $N^l_{k,m}$ образуют разбиение единицы на $\mathbb{R}^n$, то есть, $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} N^l_{k,m}(x) = 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, при любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ имеем включение $\operatorname{supp} N^l_{k,m} \subset \prod_{i=1}^n [m_i/2^k, (m_i + l + 1)/2^k]$ и $N^l_{k,m}(x) \in (0, 1]$ при $x \in \prod_{i=1}^n (m_i/2^k, (m_i + l + 1)/2^k)$.

Из (S1), очевидно, следует существование такой константы $C > 0$, что при любом $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\mathrm{MULT}(\{\operatorname{supp} N^l_{k,m} : m \in \mathbb{Z}^n\}) \le C. \tag{6.6.1}$$

(S2) На каждом двоичном кубе $Q_{k,m}$ функция $N^l_{k,m}$ является полиномом координатной степени $\le l$ по каждой переменной.

(S3) Сплайн N^l имеет непрерывные частные производные вплоть до порядка $l - 1$. При этом в узлах $t_i = i$, $i \in \{0, 1, \dots, l + 1\}$ сплайн N^l имеет конечные односторонние производные порядка l, а на каждом интервале t_i, t_{i+1} при $i \in \{0, ..., l\}$ – непрерывные производные

порядка l. Поэтому, с помощью незначительной модификации теоремы Лагранжа о среднем при любом $l' \geq l$ имеем

$$\Delta^l(h)N^{l'}_{k,m}(x) \leq C(2^k|h|)^l, \qquad x, h \in \mathbb{R}^n. \tag{6.6.2}$$

(S4) При любом $k \in \mathbb{N}_0$, для любого семейства чисел $\{\beta_{k,m}\} = \{\beta_{k,m} \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n\}$ сплайн $S = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \beta_{k,m}N^l_{k,m}$ может быть разложен в ряд по сплайнам $N^l_{j,m}$ при любом $j \geq k$, то есть

$$S(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\beta}_{j,m}(S)N^l_{j,m}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

При $k, l \in \mathbb{N}_0$ символом Σ^l_k будем обозначать множество всех сплайнов S вида

$$S(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \beta_{k,m}(S)N^l_{k,m}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.6.3}$$

При $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ через $\xi_{k,m} = (\xi_{k,m_1}, ..., \xi_{k,m_n})$ обозначим центр двоичного куба $Q_{k,m}$. Следуя работе [39], введём следующее понятие.

Определение 6.6.4. Пусть $l \in \mathbb{N}_0$ и все частные производные $D^\nu f$, $\nu_j \leq l$, $j \in \{1, .., n\}$ функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны в каждой точке $\xi_{k,m}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$. При $k \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\mathrm{Q}^l_k(f) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(f)N^l_{k,m},$$

где при каждом $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\alpha_{k,m}(f) := \sum_{\substack{0\leq\nu_j\leq l \\ j\in\{1,..,n\}}} a_{k,\nu,m}D^\nu f(\xi_{k,m}), \quad a_{k,m,\nu} := \prod_{i=1}^n \frac{(-1)^{l-\nu_i}}{l!} D^{l-\nu_i}\psi_{m_i}(\xi_{k,m_i})$$

$$\psi_{m_i}(t) := \prod_{j=1}^l \Big(\frac{m_i + j}{2^k} - t\Big) \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оператор Q^l_k называется *квазиинтерполянтом.*

Зафиксируем до конца параграфа константу $A \geq 1$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$, $r \in (0, +\infty]$, Q – куб в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что многочлен P_Q является многочленом почти наилучшего приближения функции $\varphi \in L^{loc}_r$ в метрике $L_r(Q)$ полиномами степени ниже l на кубе Q с константой $A \geq 1$, если

$$\|\varphi - P_Q\|_{L_r(Q)} \leq AE_l(f, Q)_r.$$

Аналогичным образом определяется понятие многочлена почти наилучшего приближения функции $\varphi \in L^{loc}_r$ в метрике $L_r(Q)$ полиномами координатной степени ниже l на кубе Q с константой $A \geq 1$.

При $r \in (0,\infty]$ пусть $P_{Q_{k,m}}$ – многочлен почти наилучшего приближения функции $\varphi \in L_r^{loc}$ в метрике $L_r(Q_{k,m})$ полиномами *координатной степени* не выше l на кубе $Q_{k,m}$ с константой A. Положим $g_k(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} P_{Q_{k,m}}(x)\chi_{\widetilde{Q}_{k,m}}(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$. Наконец, следуя работе [40], при $l \in \mathbb{N}_0$ и $r \in (0,\infty]$ положим

$$\begin{aligned} &T_k^l(\varphi,r)(x) := \mathrm{Q}_k^l(g_k)(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_0, \\ &T_{-1}^l(\varphi,r)(x) := \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{6.6.5}$$

Замечание 6.6.6. При $l \in \mathbb{N}_0$ оператор Q_k^l является проектором из пространства кусочно полиномиальных функций на пространство Σ_k^l (см., например, в [39]), поэтому

$$T_k^l(\varphi,r)(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{k,m}(T_k^l(\varphi,r))N_{k,m}^l(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма 6.6.7. *Пусть $r \in (0,\infty]$ и $l \in \mathbb{N}$. Для любой функции $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ при $k \in \mathbb{N}_0$ справедлива оценка*

$$\|\varphi - T_k^{l-1}(\varphi,r)\|_{L_r(Q_{k,m})} \le C\widehat{E}_l(\varphi,(1+l)Q_{k,m})_r \le CE_l(\varphi,(1+l)Q_{k,m})_r. \tag{6.6.8}$$

Константа C в (6.6.8) *зависит только от l,n,r,A.*

Доказательство. Первое неравенство в (6.6.8) следует из оценки (4.25) статьи [40]. Второе неравенство очевидно. □

Пусть $p,r \in (0,\infty]$, $\varphi \in L_r^{loc}$, $\alpha_3 \ge 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i \in (0,\infty]$, $i = 1,2$. При $l \in \mathbb{N}$ для кратной последовательности $\{t_{k,m}\}$, $p-$ассоциированной с последовательностью $\{t_k\} \in \mathcal{X}_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$, положим

$$\begin{aligned} &s_k^l := s_k^l(\varphi,t_k)_{r,p} := \inf_{S\in\Sigma_k^{l-1}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p\Big(2^{\frac{kn}{r}}\|\varphi - S\|_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \text{ при } k \in \mathbb{N}_0, \\ &s_{-1}^l := s_{-1}^l(\varphi,t_0)_{r,p} = \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p\|\varphi\|_{L_r(Q_{0,m})}^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{6.6.9}$$

Отметим, что $s_k^l(\varphi,\{t_{k,m}\})_{r,p} < \infty$, если $\varphi \in \widetilde{\mathrm{B}}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^n,\{t_k\})$. Действительно, в силу (6.6.8) и теоремы 6.3.9 при $k \in \mathbb{N}_0$ имеем оценку

$$\begin{aligned} &\inf_{S\in\Sigma_k^{l-1}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p\Big(2^{\frac{kn}{r}}\|\varphi - S\|_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p\Big(2^{\frac{kn}{r}}\|\varphi - T_k^{l-1}(\varphi)\|_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}_{p,q,r}^l(\{t_k\})} < \infty. \end{aligned} \tag{6.6.10}$$

Определение 6.6.11. Пусть $p,r \in (0,+\infty]$, $l \in \mathbb{N}$ и $s_k^l(\varphi,t_k)_{r,p} < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. При $k \in \mathbb{N}_0$ будем говорить, что $U_k^{l-1} := U_k^{l-1}(\varphi,t_k,p) \in \Sigma_k^{l-1}$ – *сплайн почти наилучшего приближения функции $\varphi \in L_r^{loc}$ с константой A*, если

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p\Big(2^{\frac{kn}{r}}\|\varphi - U_k^{l-1}\|_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le As_k^l(\varphi,t_k)_{r,p}. \tag{6.6.12}$$

Для доказательства следующей леммы нужно незначительно модифицировать доказательство леммы 4.2 из работы [40]. Мы опускаем детали.

Лемма 6.6.13. *Пусть $l \in \mathbb{N}_0$ и пусть сплайн $S = \sum\limits_{m\in Z^n} \beta_{k,m} N^l_{k,m} \in \Sigma^l_k$. Тогда для любых $r_1, r_2 \in (0, +\infty]$ и любого куба $Q_{k,m}$ справедливы неравенства*

$$C_1 \|S\|_{L_{r_1}(Q_{k,m})} \le \Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{k,m}\cap \operatorname{supp} N^l_{k,\widetilde{m}} \neq \emptyset}} |\beta_{k,\widetilde{m}}|^{r_1} 2^{-kn} \Big)^{\frac{1}{r_1}} \le C_2 2^{kn(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1})} \|S\|_{L_{r_2}(C_3 Q_{k,m})}, \tag{6.6.14}$$

в которых константы $C_1, C_2, C_3 > 0$ не зависят ни от $Q_{k,m}$, ни от сплайна S.

Напомним элементарный факт, вытекающий из монотонности l_q-нормы по q.

Лемма 6.6.15. *Пусть $r \in (0, +\infty]$ и $\{f_j\}_{j=0}^{\infty} \subset L^{loc}_r$. Тогда для любого $\mu \le \min\{1, r\}$*

$$\Big\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \Big\|_{L_r} \le \Big(\|f_j\|^{\mu}_{L_r} \Big)^{\frac{1}{\mu}}. \tag{6.6.16}$$

Для доказательства основного результата данного параграфа нам понадобится установить две ключевые теоремы. *Первая ключевая теорема* формулируется следующим образом.

Теорема 6.6.17. *Пусть $p, r, \sigma_1 \in (0, \infty]$, $\sigma_2 \ge p$. Пусть также $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, а $\alpha_3 \in [0, +\infty)$. Пусть $\{t_{k,m}\}$ – кратная последовательность, $p-$ассоциированная с последовательностью $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Тогда для любого $\mu \le \min\{1, r, p\}$ и любого $l' \ge l$ существует такая константа $C > 0$, что для любой функции $\varphi \in L^{loc}_r$ и любого $k \in \mathbb{N}_0$ (с очевидными модификациями при $p, \mu = \infty$)*

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m} [\delta^l_r(Q^n_{k,m})\varphi]^p \Big)^{\frac{1}{p}} \le C 2^{-k(l-\alpha_2)} \Big(\sum_{j=-1}^{k} 2^{j\mu(l-\alpha_2)} \Big(s^{l'+1}_j(\varphi, t_j)_{r,p} \Big)^{\mu} \Big)^{\frac{1}{\mu}}, \tag{6.6.18}$$

где мы полагаем формально $t_{-1} \equiv t_0$.

Доказательство. В силу замечания 6.2.10 можно считать, что $\sigma_2 = p$. Фиксируем $\varphi \in L^{loc}_r$, $k \in \mathbb{N}_0$ и разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Пусть $U^{l'}_j := U^{l'}_j(\varphi, \{t_{k,m}\}, p)$ – сплайн почти наилучшего приближения функции $\varphi \in L^{loc}_r$ с константой $A \ge 1$. При $j \in \mathbb{N}_0$ положим $u^{l'}_j := U^{l'}_j - U^{l'}_{j-1}$ ($U^{l'}_{-1} \equiv 0$). Тогда, очевидно,

$$\Delta^l(h)\varphi(x) = \Delta^l(h)[\varphi - U^{l'}_k](x) + \sum_{j=0}^{k} \Delta^l(h) u^{l'}_j(x) \quad \text{при} \quad x, h \in \mathbb{R}^n. \tag{6.6.19}$$

Из (6.6.19) и леммы 6.6.15 при $\mu \le \min\{1, r, p\}$ для любого куба $Q_{k,m}$ имеем неравенство

$$\delta^l_r(Q_{k,m})\varphi \le \Big([\delta^l_r(Q^n_{k,m})(\varphi - U^{l'}_k)]^{\mu} + \sum_{j=0}^{k} [\delta^l_r(Q_{k,m}) u^{l'}_j]^{\mu} \Big)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Шаг 2. Учитывая, что $\frac{p}{\mu} \geq 1$, с помощью неравенства Минковского получаем

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}^n)\varphi]^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \Big([\delta_r^l(Q_{k,m})(\varphi - U_k^{l'})]^\mu + \sum_{j=0}^{k} [\delta_r^l(Q_{k,m}^n) u_j^{l'}]^\mu\Big)^{\frac{p}{\mu}}\Big)^{\frac{\mu}{p}\frac{1}{\mu}}$$

$$\leq \Big(\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m})(\varphi - U_k^{l'})]^p\Big)^{\frac{\mu}{p}} + \sum_{j=0}^{k}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}) u_j^{l'}]^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} \tag{6.6.20}$$

$$= \Big((R^1)^{\frac{\mu}{p}} + \sum_{j=0}^{k} (R_j^2)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Шаг 3. Очевидно, что для любого куба $Q_{k,m}$ неравенство $\delta_r^l(Q_{k,m})g \leq C 2^{\frac{kn}{r}} \|g\|_{L_r((1+2l)Q_{k,m})}$ справедливо для любой функции $g \in L_r^{loc}$ (при этом константа $C > 0$ зависит лишь от r и l). Отсюда, учитывая предложение 4.1.1 и (6.2.9), нетрудно получить оценку

$$(R^1)^{\frac{\mu}{p}} \leq C\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{r}} \|\varphi - U_k^{l'}\|_{L_r((1+2l)Q_{k,m})}^p\Big)^{\frac{\mu}{p}} \leq C\Big(s_k^{l'+1}(\varphi, t_k)_{r,p}\Big)^\mu. \tag{6.6.21}$$

Шаг 4. Из (6.6.2) очевидно, что при $j \in \mathbb{N}_0$, $\widetilde{m} \in \mathbb{Z}^n$ для любого куба $Q_{k,m} \subset Q_{j,\widetilde{m}}$ справедлива оценка

$$\delta_r^l(Q_{k,m}) N_{j,\widetilde{m}}^{l'} \leq C 2^{(j-k)l}. \tag{6.6.22}$$

Далее, при каждом $j \in \mathbb{N}_0$ функция $u_j^{l'}$ может быть разложена по B-сплайнам $N_{j,m}^{l'}$(см. свойство (S4) выше), то есть

$$u_j^{l'}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{j,m}(u_j^{l'}) N_{j,m}^{l'}(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.6.23}$$

Отсюда, учитывая лемму 6.6.13, заключаем, что, если для двоичных кубов $Q_{j,m'}$ и $Q_{k,m}$ имеет место включение $Q_{j,m'} \supset Q_{k,m}$, то

$$\delta_r^l(Q_{k,m}) u_j^{l'} \leq C 2^{(j-k)l}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{k,m}\cap \operatorname{supp} N_{j,\widetilde{m}}^{l'} \neq \emptyset}} |\alpha_{j,m}(u_j^{l'})|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leq C 2^{(j-k)l} 2^{\frac{jn}{r}} \|u_j^l\|_{L_r(CQ_{j,m'})}.$$

Поэтому, используя (6.2.17), условие (6.2.9), а также предложение 4.1.1, выводим

$$R^j \leq \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m}) u_j^{l'}]^p \leq C 2^{(j-k)pl} 2^{\frac{jnp}{r}} \sum_{m'\in\mathbb{Z}^n} \|u_j^{l'}\|_{L_r(CQ_{j,m'})}^p \Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{k,m}\subset Q_{j,m'}}} t_{k,m}^p\Big)$$

$$\leq C 2^{p(j-k)(l-\alpha_2)} 2^{\frac{jnp}{r}} \sum_{m'\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m'}^p \|u_j^{l'}\|_{L_r(CQ_{j,m'})}^p \leq C 2^{p(j-k)(l-\alpha_2)} 2^{\frac{jnp}{r}} \sum_{m'\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m'}^p \|u_j^{l'}\|_{L_r(Q_{j,m'})}^p. \tag{6.6.24}$$

Шаг 5. Заметим, что при $j \in \mathbb{N}_0$ имеем (мы учитываем оценки $t_{j,m} \approx t_{j+1,m'}$, справедливые при условии $Q_{j+1,m'} \subset Q_{j,m}$, что легко следует из замечания 6.2.16)

$$\sum_{m'\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m'}^p \Big(2^{\frac{jn}{r}} \|u_j^{l'}\|_{L_r(Q_{j,m'})}\Big)^p \leq C \sum_{m'\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m'}^p \Big(2^{\frac{jn}{r}} \|\varphi - U_j^{l'}\|_{L_r(Q_{j,m'})}\Big)^p$$

$$+ C \sum_{m'\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m'}^p \Big(2^{\frac{jn}{r}} \|\varphi - U_{j-1}^{l'}\|_{L_r(Q_{j,m'})}\Big)^p \leq C\Big(s_j^{l'+1}(\varphi, t_j)_{r,p} + s_{j-1}^{l'+1}(\varphi, t_{j-1})_{r,p}\Big). \tag{6.6.25}$$

В итоге, собирая вместе оценки (6.6.20), (6.6.21), (6.6.24), (6.6.25), получаем (6.6.18), завершая доказательство. □

Следствие 6.6.26. *Пусть $p,q,r\in(0,\infty]$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\alpha_3\in[0,\infty)$, $\sigma_1\in(0,\infty]$, $\sigma_2\geq p$. Пусть $\{t_k\}\in\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, а $\{t_{k,m}\}$ – кратная последовательность, $p-$ассоциированная с последовательностью $\{t_k\}$. Если $l,l'\in\mathbb{N}$, $l>\alpha_2$ и $l'\geq l$, то функция φ принадлежит пространству $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ в том и только том случае, если (с соответствующими модификациями при $p,q=\infty$)*

$$N_1(\varphi,l'+1):=\Big(\sum_{j=-1}^{\infty}(s_j^{l'+1}(\varphi,t_j)_{r,p})^q\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty. \tag{6.6.27}$$

Кроме того,

$$N_1(\varphi,l'+1)\approx N_2(\varphi,l'+1)\approx\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}, \tag{6.6.28}$$

где мы полагаем

$$N_2(\varphi,l'+1):=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{k,m}^p2^{\frac{knp}{r}}\|\varphi-T_k^{l'}(\varphi,r)\|^p_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}+\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{0,m}^p\|\varphi\|^p_{L_r(Q_{0,m})}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Очевидно, что $N_1(\varphi,l'+1)\leq N_2(\varphi,l'+1)$ и $N_1(\varphi,l'+1)\leq N_1(\varphi,l+1)$. В силу леммы 6.6.7 и теоремы 6.3.9 имеем $N_2(\varphi,l+1)\leq C\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}$. Наконец, в силу теорем 1.2.120, 6.6.17 и условия $l>\alpha_2$ имеем оценку

$$\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}\leq CN_1(\varphi,l'+1).$$

Следствие доказано. □

Следствие 6.6.26 позволяет сразу заключить, что по аналогии с классическим пространством Бесова, определение пространства $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ не зависит от выбора l.

Следствие 6.6.29. *Пусть $p,q,r\in(0,\infty]$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\alpha_3\in[0,+\infty)$, $\sigma_1\in(0,\infty]$, $\sigma_2\geq p$, $\{t_k\}\in\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Тогда если $l\in\mathbb{N}$ и $l>\alpha_2$, то для любого $l'>l$*

$$\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^{l'}_{p,q,r}(\{t_k\})}\approx\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}.$$

Вторая ключевая теорема данного параграфа звучит следующим образом.

Теорема 6.6.30. *Пусть $p,q,r\in(0,\infty]$ и $\theta\in(0,\min\{p,r\}]$. Пусть также $\sigma_1=\theta p'_\theta$, $\alpha_1>n(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{r})$, $\sigma_2\in(0,\infty]$, $\alpha_3\in[0,\infty)$ и $\{t_k\}\in\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Пусть последовательность $\{V_k\}_{k=0}^{\infty}\subset L_r^{loc}$ такая, что (с очевидными модификациями при $p=\infty$ или $q=\infty$)*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{k,m}^p2^{\frac{knp}{r}}\|v_k\|^p_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty, \tag{6.6.31}$$

где $v_k := V_k - V_{k-1}$*(мы полагаем* $V_{-1} \equiv 0$*) при* $k \in \mathbb{N}_0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ *сходится в* $L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *к некоторой функции* $\varphi \in L_r^{loc}$ *и справедливо неравенство (с очевидными модификациями при* $p = \infty$ *или* $q = \infty$*)*

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{r}} \|\varphi - V_k\|^p_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi\|^p_{L_r(Q_{0,m})}\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{\theta}} \|v_k\|^p_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{6.6.32}$$

в котором константа $C > 0$ *не зависит от* $\{V_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Доказательство. Будем рассматривать случай $p, q \neq \infty$, поскольку остальные случаи рассматриваются аналогично и технически проще.

Шаг 1. Покажем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится в L_r^{loc} к некоторой функции $\varphi \in L_r^{loc}$. Достаточно показать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится в $L_r(Q_{0,m})$ для любого $m \in \mathbb{Z}^n$ к некоторой функции φ_m, а затем положить $\varphi(x) = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^n} \chi_{\widetilde{Q}_{0,m}}(x)\varphi_m(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Шаг 2. Зафиксируем куб $Q_{0,m}$. При $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$, $j_1 \le j_2$ и $\mu \le \min\{1, \theta\}$ из леммы 6.6.15 имеем (по условию теоремы $0 < \theta \le r$)

$$\begin{aligned} &\|V_{j_1} - V_{j_2}\|_{L_r(Q_{0,m})} \le \Big(\sum_{j=j_1}^{\infty} \|v_j\|^{\mu}_{L_r(Q_{0,m})}\Big)^{\frac{1}{\mu}} = \\ &= \Big(\sum_{j=j_1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} \|v_j|L_r(Q_{j,\widetilde{m}})\|^{\theta}\Big)^{\frac{\mu}{\theta}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} = K_{j_1,m}. \end{aligned} \tag{6.6.33}$$

Применим неравенство Гёльдера к внутренней сумме (по $\widetilde{m}$) с показателями p_θ и p'_θ и воспользуемся (6.2.18) при $\sigma_1 = \theta p'_\theta$. При любом $\mu \le \min\{1, \theta\}$ имеем

$$\begin{aligned} \Big(K_{j_1,m}\Big)^{\mu} &= \sum_{j=j_1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q^n_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} \frac{t^{\theta}_{j,\widetilde{m}}}{t^{\theta}_{j,\widetilde{m}}} \|v_j\|^{\theta}_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}\Big)^{\frac{\mu}{\theta}} \le \\ &\le C\sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{jn\mu}{r}}} \frac{t^{\mu}_{0,m}}{t^{\mu}_{0,m}}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} \Big[\frac{1}{t_{j,\widetilde{m}}}\Big]^{\theta p'_\theta}\Big)^{\frac{\mu}{\theta p'_\theta}}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} 2^{\frac{jnp}{r}} t^p_{j,\widetilde{m}} \|v_j\|^p_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}\Big)^{\frac{\mu}{p}} \le \\ &\le C\sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{2^{j\mu n(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{r})}}{2^{j\mu\alpha_1}}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} 2^{\frac{jnp}{r}} t^p_{j,\widetilde{m}} \|v_j\|^p_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}\Big)^{\frac{\mu}{p}}. \end{aligned} \tag{6.6.34}$$

Выберем $\mu \le \min\{1, q, \theta\}$ и положим $q_\mu := \frac{q}{\mu} \ge 1$. Применив к правой части (6.6.34) неравенство Гёльдера с показателями q_μ и q'_μ, будем иметь

$$K_{j_1,m} \le C\Big(\sum_{j=j_1}^{\infty} \frac{1}{2^{j\mu q'_\mu(\alpha_1-(\frac{n}{\theta}-\frac{n}{r}))}}\Big)^{\frac{1}{\mu q'_\mu}}\Big(\sum_{j=j_1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} 2^{\frac{jnp}{r}} t^p_{j,\widetilde{m}} \|v_j\|^p_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{6.6.35}$$

Отметим, что при фиксированном j_1 правая часть неравенства (6.6.35) стремится к бесконечности, когда α_1 стремится к $\frac{n}{\theta}-\frac{n}{r}$.

Из (6.6.33), (6.6.35) и полноты пространства $L_r(Q_{0,m})$ вытекает нужная нам сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ в $L_r(Q_{0,m})$ к некоторой функции $\varphi_m \in L_r(Q_{0,m})$.

Шаг 3. Применим лемму 6.6.15, полагая $f_j = 0$ при $j < k$ и $f_j := v_j \chi_{Q_{k,m}}$ при $j \geq k$, затем воспользуемся неравенством Минковского (так как $\frac{p}{\mu} \geq 1$). Имеем цепочку неравенств

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} 2^{\frac{nkp}{r}} t_{k,m}^p \|\varphi - V_k\|_{L_r(Q_{k,m})}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{nk}{r}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \Big[\sum_{j=k}^{\infty} \|v_j\|_{L_r(Q_{k,m})}^{\mu}\Big]^{\frac{p}{\mu}}\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{nk}{r}} \Big(\sum_{j=k}^{\infty} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \|v_j\|_{L_r(Q_{k,m})}^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} \qquad (6.6.36) \\
&\leq 2^{\frac{nk}{r}} \Big(\sum_{j=k}^{\infty} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \Big[\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{k,m}^n}} \|v_j\|_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}^{\theta}\Big]^{\frac{p}{\theta}}\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} =: R_k.
\end{aligned}
$$

Рассуждая как при выводе оценки (6.6.34), при $j \geq k+1$ получим

$$
\begin{aligned}
&2^{\frac{nkp}{r}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \Big[\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{k,m}^n}} \|v_j\|_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}^{\theta}\Big]^{\frac{p}{\theta}} \leq \\
&\leq 2^{\frac{nkp}{r}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{k,m}^n}} \Big[\frac{1}{t_{j,\widetilde{m}}}\Big]^{\theta p'_\theta}\Big)^{\frac{p}{\theta p'_\theta}} \Big[\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{k,m}^n}} t_{j,\widetilde{m}}^p \|v_j\|_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}^p\Big] \qquad (6.6.37) \\
&\leq C 2^{(k-j)p(\alpha_1-(\frac{n}{\theta}-\frac{n}{r}))} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{njp}{r}} \|v_j\|_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}^p.
\end{aligned}
$$

Выберем $\mu \leq \min\{1, \theta, q\}$. Поскольку $\alpha_1 > \frac{n}{\theta} - \frac{n}{r}$ по условию леммы, пользуясь теоремой 1.2.120, из (6.6.36), (6.6.37) будем иметь

$$
\Big(\sum_{k=0}^{\infty} R_k^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{jnp}{r}} \|v_j|L_r(Q_{j,m})\|^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}. \qquad (6.6.38)
$$

Из (6.6.34) и (6.6.38) получаем оценку для первого слагаемого в левой части (6.6.32).

Шаг 4. Оценим второе слагаемое в левой части (6.6.32). Аналогично (6.6.33) получим $\|\varphi\|_{L_r(Q_{0,m})} \leq C K_{0,m}$ при любом $m \in \mathbb{Z}^n$. Отсюда и из (6.6.35) вытекает оценка

$$
\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{0,m}^p \|\varphi|L_r(Q_{0,m})\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\Big[\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p 2^{\frac{jnp}{r}} \|v_j\|_{L_r(Q_{j,m})}^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big]^{\frac{1}{q}}. \qquad (6.6.39)
$$

Теорема доказана. □

Пусть для $\varphi \in L_r^{loc}(\mathbb{R}^n)$ имеем $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} v_k^l$ в L_r^{loc}, где

$$
v_k^l(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N_{k,m}^l(x) \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}^n.
$$

Положим при $p,q,r\in(0,\infty]$ (с модификациями в случае $p=\infty$ или $q=\infty$)

$$N_3(\varphi,l+1):=\inf\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{k,m}^p|\beta_{k,m}|^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}},\tag{6.6.40}$$

где нижняя грань в (6.6.40) взята по всем сходящимся в L_r^{loc} к функции φ рядам $\sum_{k=0}^{\infty}v_k^l$.

При $\varphi\in L_r^{loc}$ положим также (с модификациями в случае $p=\infty$ или $q=\infty$)

$$N_4(\varphi,l+1):=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{k,m}^p|\alpha_{k,m}(T_k^l(\varphi,r)-T_{k-1}^l(\varphi,r))|^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}},\tag{6.6.41}$$

где мы формально полагаем $T_{-1}^l(\varphi,r)\equiv 0$.

Теперь мы готовы сформулировать и доказать *основной результат* данного параграфа об "атомарном разложении" функций из пространств $\widetilde{B}_{p,q,r}^l(\{t_k\})$.

Теорема 6.6.42. *Пусть $p,q,r\in(0,\infty]$, $\theta\in(0,\min\{p,r\}]$. Пусть $\alpha_1>\frac{n}{\theta}-\frac{n}{r}$, $l>\alpha_2$, $\alpha_3\geq 0$, $\sigma_1\geq\theta p'_\theta$, $\sigma_2\geq p$, а весовая последовательность $\{t_k\}$ принадлежит классу $\mathcal{X}_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Каждая функция $\varphi\in\widetilde{\mathrm{B}}_{p,q,r}^l(\{t_k\})$ может быть разложена в ряд из сплайнов, сходящийся в L_r^{loc}. Более точно,*

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}v_k^l(\varphi)\quad\text{в смысле сходимости в }\ L_r^{\mathrm{loc}},\quad\text{где}$$

$$v_k^l(\varphi)=T_k^l(\varphi,r)-T_{k-1}^l(\varphi,r)\quad\text{при}\quad k\in\mathbb{N}_0.\tag{6.6.43}$$

и для некоторой константы $C_1>0$ справедливы неравенства

$$N_3(\varphi,l+1)\leq N_4(\varphi,l+1)\leq C_1\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}_{p,q,r}^l(\{t_k\})}.\tag{6.6.44}$$

2) *Если для некоторого семейства чисел $\{\beta_{k,m}\}$ имеем*

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{k,m}^p|\beta_{k,m}|^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

то ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\beta_{k,m}N_{k,m}^l$ сходится в L_r^{loc} к некоторой функции $\varphi\in\widetilde{\mathrm{B}}_{p,q,r}^l(\{t_k\})$ и существует константа $C_2>0$ такая, что

$$\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}_{p,q,r}^l(\{t_k\})}\leq C_2N_3(\varphi,l+1)\leq C_2N_4(\varphi,l+1).\tag{6.6.45}$$

Доказательство. Мы докажем теорему при $p,q\neq\infty$, поскольку остальные случаи технически проще, но идейно не отличаются. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Заметим, что оценка $N_3(\varphi,l+1)\leq N_4(\varphi,l+1)$ очевидна из определений функционалов $N_3(\varphi,l+1)$ и $N_4(\varphi,l+1)$.

Шаг 2. Заметим, что если $g_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \beta_{k,m} N^l_{k,m}$ при $k \in \mathbb{N}_0$, то используя лемму 6.6.13 и условие (6.2.9), выводим существование такой не зависящей от k константы $C > 0$, что

$$\frac{1}{C}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}|\beta_{k,m}|^p \le \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m} 2^{\frac{knp}{r}} \|g_k\|^p_{L_r(Q_{k,m})} \le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m}|\beta_{k,m}|^p. \tag{6.6.46}$$

Шаг 3. Фиксируем $\varphi \in \widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ и положим $v^l_k(\varphi) := T^l_k(\varphi, r) - T^l_{k-1}(\varphi, r)$ при $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда, очевидно, если $Q_{k,m} \subset Q_{k-1,m'}$, то при $k \in \mathbb{N}$ используя замечание 6.2.16, получим

$$\begin{aligned} t_{k,m}\|v^l_k(\varphi)\|_{L_r(Q_{k,m})} &\le t_{k,m}\|\varphi - T^l_k(\varphi, r)\|_{L_r(Q_{k,m})} + t_{k,m}\|\varphi - T^l_{k-1}(\varphi, r)\|_{L_r(Q_{k,m})} \\ &\le t_{k,m}\|\varphi - T^l_k(\varphi, r)\|_{L_r(Q_{k,m})} + t_{k-1,m'}\|\varphi - T^l_{k-1}(\varphi, r)\|_{L_r(Q_{k-1,m'})}. \end{aligned}$$

Учитывая, что аналогичные оценки справедливы и при $k = 0$, используя следствие 6.6.26, получаем

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{k,m} 2^{\frac{knp}{r}} \|v^l_k(\varphi)\|^p_{L_r(Q_{k,m})}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}. \tag{6.6.47}$$

Но тогда, в силу теоремы 6.6.30, заключаем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v^l_k(\varphi)$ сходится в L^{loc}_r к некоторой функции $\widetilde{\varphi}$.

Заметим, что рассуждения, аналогичные использованным при выводе оценки (6.6.34) позволяют установить для любого куба $Q_{0,m}$

$$\begin{aligned} \|\varphi - T^l_j(\varphi, r)\|_{L_r(Q_{0,m})} &\le \Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} \|\varphi - T^l_j(\varphi, r)\|^\theta_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}\Big)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\le C\frac{2^{jn(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{r})}}{2^{j\alpha_1}}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} t^p_{j,\widetilde{m}} 2^{\frac{jnp}{r}} \|\varphi - T^l_j(\varphi, r)\|^p_{L_r(Q_{j,\widetilde{m}})}\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая условие $\alpha_1 > \frac{n}{\theta} - \frac{n}{r}$ и следствие 6.6.26, выводим

$$\|\varphi - T^l_k(\varphi, r)\|_{L_r(Q_{0,m})} \le C\frac{2^{jn(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{r})}}{2^{j\alpha_1}}\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})} \to 0, \quad j \to \infty.$$

Следовательно, $\varphi = \widetilde{\varphi}$ в смысле L^{loc}_r. А значит ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v^l_k(\varphi)$ сходится в L^{loc}_r к φ.

Остаётся заметить, что второе неравенство в (6.6.44) вытекает из (6.6.46) и (6.6.47).

Шаг 4. Комбинируя теорему 6.6.30, следствие 6.6.26 и оценку (6.6.46), получаем утверждение 2) теоремы.

Теорема полностью доказана.

□

6.7. Сравнение пространств $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ и $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$.

Хорошо известно, что (см., например § 2.5.3 в [15]), что при $\{t_k\} = \{2^{ks}\}$ и $p, q \in (0, \infty]$ пространства $\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,p}(\{t_k\})$ и $\mathrm{B}^{\{t_k\}}_{p,q}$ совпадают при условии $s > n\max\{\frac{1}{p} - 1, 0\}$. Однако, если

$s < n\max\{\frac{1}{p}-1,0\}$, то пространство $\mathrm{B}^{\{t_k\}}_{p,q}$ (в отличие от пространства $\widetilde{\mathrm{B}}^{l}_{p,q,p}(\{t_k\})$) содержит дельта функцию Дирака (см. § 2.5.3, замечание 3 в [15]). В этом параграфе мы установи взаимосвязи между пространствами $\widetilde{\mathrm{B}}^{l}_{p,q,r}(\{t_k\})$ и $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ при минимальных ограничениях на последовательность $\{t_k\}$.

Предположения. На протяжении всего параграфа предполагаем, что $\{\alpha^i_k\} = \{2^{k\alpha_i}\}$ $(i = 1,2)$ при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. В действительности все результаты могут быть легко обобщены на случай произвольных последовательностей $\{\alpha^i_k\}$, $i = 1,2)$, но это потребует дополнительных технических деталей.

Зафиксируем до конца параграфа такую функцию $\varphi_0 \in D$, что $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$ и положим $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. При любом $j \in \mathbb{N}$ положим, как обычно, $\varphi_j := 2^{jn}\varphi(2^j\cdot)$.

Мы начнем с простой теоремы вложения, которая тем не менее представляет и самостоятельный интерес. Положим $p_\theta = \frac{p}{\theta}$.

Теорема 6.7.1. *Пусть $p,q,\sigma_2 \in (0,\infty]$, $r \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,\min\{p,r\}]$ и $\sigma_1 \geq \theta p'_\theta$. Пусть $\alpha_1 > \frac{n}{\theta} - \frac{n}{r}$, $\alpha_2 \geq \alpha_1$ и $\alpha_3 \in [0,+\infty)$. Предположим, что $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Тогда $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\}) \subset L^{\mathrm{loc}}_r$.*

Доказательство. Приведем доказательство для случая $p,q \neq \infty$, поскольку остальные случаи аналогичны по смыслу, но технически проще. В силу замечания 6.2.10, без ограничения общности можем предположить, что $\sigma_1 = \theta p'_\theta$. Зафиксируем $f \in \mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$.

Из монотонности ℓ_q-нормы по q при $\mu \leq \min\{1,q,\theta\}$ для любого $m \in \mathbb{Z}^n$ имеем

$$
\begin{aligned}
I_m &:= \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\int\limits_{Q_{0,m}} |\varphi_j * f(y)|^r\,dy\Big)^{\frac{1}{r}} \leq \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\int\limits_{Q_{0,m}} |\varphi_j * f(y)|^r\,dy\Big)^{\frac{\mu}{r}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} \leq \\
&\leq \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}}\Big(\int\limits_{Q_{j,\widetilde{m}}} |\varphi_j * f(y)|^r\,dy\Big)^{\frac{\theta}{r}}\Big)^{\frac{\mu}{\theta}}\Big)^{\frac{1}{\mu}}.
\end{aligned}
\tag{6.7.2}
$$

Заметим, что при любом $A \geq 0$ справедлива оценка

$$
\sup_{y\in Q_{j,\widetilde{m}}} |\varphi_j * f(y)|^\theta \leq \Big(M_A(m,j,c)[f]\Big)^\theta.
$$

Используя этот факт и лемму 6.4.7 (с заменой r на θ), выводим

$$
\begin{aligned}
R_{j,m} &:= \sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}}\Big(\int\limits_{Q_{j,\widetilde{m}}} |\varphi_j * f(y)|^r\,dy\Big)^{\frac{\theta}{r}} \leq 2^{-nj\frac{\theta}{r}} \sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} \sup_{y\in Q_{j,\widetilde{m}}} |\varphi_j * f(y)|^\theta \\
&\leq C2^{j\theta(A-\frac{n}{r})} \sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{j,\widetilde{m}}\subset Q_{0,m}}} \sum_{k=j}^{\infty} 2^{k\theta(\frac{n}{\theta}-A)} \int\limits_{cQ_{j,\widetilde{m}}} |\varphi_k * f(z)|^\theta\,dz \qquad (6.7.3)\\
&\leq C2^{j\theta(A-\frac{n}{r})} \sum_{k=j}^{\infty} 2^{k\theta(\frac{n}{\theta}-A)} \int\limits_{cQ_{0,m}} |\varphi_k * f(z)|^\theta\,dz.
\end{aligned}
$$

Используя условие (6.2.7) и применяя неравенство Гёлдера для интегралов, будем иметь

$$\int\limits_{cQ_{0,m}} |\varphi_k * f(z)|^\theta\,dz \le \Big(\int\limits_{cQ_{0,m}} t_0^p(z)\,dz\Big)^{\frac{\theta}{p}}\Big(\int\limits_{cQ_{0,m}} (t_k(z))^{-\theta p'_\theta}\,dz\Big)^{\frac{1}{p'_\theta}}\Big(\int\limits_{cQ_{0,m}} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{\theta}{p}}$$
$$\le C2^{-k\alpha_1}\Big(\int\limits_{cQ_{0,m}} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{\theta}{p}}.$$

В результате получаем

$$R_{j,m} \le C2^{j\theta(A-\frac{n}{r})}\sum_{k=j}^{\infty} 2^{k\theta(\frac{n}{\theta}-A)}2^{-k\alpha_1\theta}\Big(\int\limits_{cQ_{0,m}} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{\theta}{p}}. \tag{6.7.4}$$

Сначала подставим (6.7.4) в (6.7.2). Затем при $\mu \le \theta$, $A > \frac{n}{r}$, используем монотонность ℓ_q-нормы по q и поменяем порядок суммирования. Имеем

$$I_m^q \le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{2^{kn(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{r})}}{2^{\alpha_1 k}}\Big)^\mu\Big[\int\limits_{cQ_{0,m}} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big]^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{q}{\mu}}.$$

Теперь применим неравенство Гёльера для сумм с показателями q_μ, q'_μ (где $q_\mu := \frac{q}{\mu}$) и учтём условие $\alpha_1 > (\frac{n}{\theta} - \frac{n}{r})$. Следовательно,

$$I_m^q \le C\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int\limits_{cQ_{0,\widetilde{m}}} t_k^p(z)|\varphi_k * f(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{q}{p}}. \tag{6.7.5}$$

Из (6.7.5) вытекает, что ряд $\sum_{j=0}^\infty \varphi_j * f$ сходится в смысле L_r^{loc} к некоторой функции $g \in L_r^{\mathrm{loc}}$. Так как $r \ge 1$, это означает, что ряд $\sum_{j=0}^\infty \varphi_j * f$ сходится к g в L_1^{loc}, а значит и в D'. Но тогда $f = g \in L_r^{\mathrm{loc}}$, поскольку, очевидно, ряд $\sum_{j=0}^\infty \varphi_j * f$ сходится к f в D'.

Теорема доказана. □

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основной результат данного параграфа.

Теорема 6.7.6. *Пусть $p, q \in (0,\infty]$, $r \in (0,p]$, $\sigma_1 \ge rp'_r$, $\sigma_2 \ge p$. Пусть $\alpha_1 > \max\{\frac{n}{r} - n, 0\}$, $\min\{L_\varphi + 1, l\} > \alpha_2$, $\alpha_3 \in [0,+\infty)$ и $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Тогда $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ и $\widetilde{\mathrm{B}}^{l}_{p,q,r}(\{t_k\})$ совпадают как линейные пространства, а соответствующие квазинормы эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство приведём для случая $p, q \ne \infty$, поскольку при $p = \infty$ или $q = \infty$ оно аналогично. В силу замечания 6.2.10 мы можем считать, что $\sigma_1 = rp'_r$, $\sigma_2 = p$. На протяжении всего доказательства зафиксируем $\mu \in (0, \min\{1, r, q\}]$.

Шаг 1. В силу условий $\alpha_1 > \max\{n(\frac{1}{r} - 1), 0\}$ и $\sigma_1 \ge rp'_r$ мы можем воспользоваться теоремой 6.7.1, в которой θ заменено на r, а r заменено на 1. Следовательно, если распределение f принадлежит $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$, то $f \in L_1^{loc}$. Комбинируя это наблюдение с теоремой 6.4.4, заключаем, что $f = \sum_{j=0}^\infty \psi_j * \varphi_j * f$ не только в смысле D', но и в смысле L_1^{loc}.

При $k \in \mathbb{N}_0$ положим $f_{1,k} := \sum_{j=0}^{k} \psi_j * \varphi_j * f$ и $f_{2,k} := f - f_{1,k}$. Имеем

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m})f]^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m})f_{1,k}]^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &+ C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m})f_{2,k}]^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} =: S_1 + S_2. \end{aligned} \tag{6.7.7}$$

Из монотонности ℓ_q-нормы по q следует, что

$$S_2 \le \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p \Big\{\sum_{j=k}^{\infty} [\delta_r^l(Q_{k,m})\psi_j * \varphi_j * f]^\mu\Big\}^{\frac{p}{\mu}}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.7.8}$$

Для оценки правой части (6.7.8) воспользуемся неравенством Минковского для сумм (это возможно, поскольку $\frac{p}{\mu} \ge 1$). Используя очевидную оценку (где c и C зависят лишь от r и l)

$$\delta_r^l(Q_{k,m})\psi_j * \varphi_j * f \le C 2^{\frac{kn}{r}} \|\psi_j * \varphi_j * f\|_{L_r(cQ_{k,m})},$$

имеем

$$\begin{aligned} S_2 &\le \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=k}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p [\delta_r^l(Q_{k,m})\psi_j * \varphi_j * f]^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{q}{\mu}}\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=k}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{\frac{knp}{r}} \|\psi_j * \varphi_j * f\|_{L_r(cQ_{k,m})}^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{q}{\mu}}\Big)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{6.7.9}$$

где константы $c, C > 0$ зависят только от l и r.

Применяя неравенство Гёльдера для интегралов с показателями $p_r := \frac{p}{r}$ и p_r', используя замечание 6.2.13, условие (6.2.9) и предложение 4.1.1, при каждом $j \ge k$ получаем (мы также учитываем, что $\operatorname{supp}\psi_j \subset [-\frac{\theta}{2^j}, \frac{\theta}{2^j}]$ при некотором $\theta \ge 1$ и $\psi_j = 2^{jn}\psi(2^j\cdot)$)

$$\begin{aligned} &\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} 2^{\frac{knp}{r}} t_{k,m}^p \|\psi_j * \varphi_j * f\|_{L_r(cQ_{k,m})}^p \le C \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} 2^{\alpha_1(k-j)p} \int\limits_{cQ_{k,m}} t_j^p(x) |\varphi_j * \psi_j * f(x)|^p \, dx \\ &\le C 2^{\alpha_1(k-j)p} \sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n \\ Q_{j,\widetilde{m}}\cap cQ_{k,m}\neq\emptyset}} t_{j,\widetilde{m}}^p \sup_{y\in\widetilde{c}Q_{j,\widetilde{m}}} |\varphi_j * f(y)|^p \\ &\le C 2^{\alpha_1(k-j)p} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \sup_{y\in Q_{j,m}} |\varphi_j * f(y)|^p. \end{aligned} \tag{6.7.10}$$

Далее вставляя (6.7.10) в (6.7.9), используя теорему 1.2.120 и применяя лемму 6.4.20 при $A > \frac{n}{r} + \max\{0, -\alpha_1\}$, получим (напомним, что $\sup_{y\in Q_{j,m}} |\varphi_j * f(y)| \le M_A(j,m,c)[f]$)

$$\begin{aligned} S_2 &\le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \sup_{y\in cQ_{j,m}} |\varphi_j * f(y)|^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(M_A(j,m,c)[f]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})}. \end{aligned} \tag{6.7.11}$$

В силу монотонности ℓ_q-нормы по q (поскольку $0<\mu\le r$)

$$S_1\le\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{k,m}^p\Big\{\sum_{j=0}^{k}[\delta_r^l(Q_{k,m})\psi_j*\varphi_j*f]^\mu\Big\}^{\frac{p}{\mu}}\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac1q}. \tag{6.7.12}$$

При $j\le k$ пусть $Q_{j,\widetilde m}$ – единственный двоичный куб, содержащий куб $Q_{k,m}$. Используя теорему Лагранжа о среднем, при $x\in Q_{j,m}$ и $h\in 2^{-k}I$, будем иметь

$$\begin{aligned}&|\Delta^l(h)[\psi_j*\varphi_j*f](x)|\le C|h|^l\sup_{y\in[x,x+hl]}|D^\alpha(\psi_j*\varphi_j*f)(y)|\\&\le C2^{(j-k)l}\sup_{z\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha\psi(z)|\sup_{y\in cQ_{j,m}}|\varphi_j*f(y)|.\end{aligned} \tag{6.7.13}$$

Воспользуемся неравенством Минковского для сумм (это возможно, поскольку $\frac{p}{\mu}\ge1$), а затем применим оценку (6.7.13) и замечание 6.2.16. Имеем

$$\begin{aligned}S_1&\le\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}\Big\{\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{k,m}^p[\delta_r^l(Q_{k,m})\psi_j*\varphi_j*f]^p\Big\}^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{q}{\mu}}\Big)^{\frac1q}\\&\le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}\Big\{\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{k,m}^p2^{(j-k)pl}\sup_{y\in cQ_{j,\widetilde m}}|\varphi_j*f(y)|^p\Big\}^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{q}{\mu}}\Big)^{\frac1q}\\&\le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\Big(\frac{2^{k\alpha_2}}{2^{kl}}\Big)^\mu\sum_{j=0}^{k}\Big(\frac{2^{jl}}{2^{j\alpha_2}}\Big)^\mu\Big\{\sum_{\widetilde m\in\mathbb{Z}^n}t_{j,m}^p\sup_{y\in cQ_{j,\widetilde m}}|\varphi_j*f(y)|^p\Big\}^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{q}{\mu}}\Big)^{\frac1q}.\end{aligned} \tag{6.7.14}$$

Учитывая, что $l>\alpha_2$ применим теорему 1.2.120 при $s=q_\mu$ и лемму 6.4.20 (взяв $A>\frac{n}{r}$). В результате имеем

$$S_1\le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\Big(M_A(j,m,c)[f]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac1q}\le C\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})}. \tag{6.7.15}$$

Используя аналогичные рассуждения, нетрудно показать, что $f=\sum_{j=0}^\infty\psi_j*\varphi_j*f$ и в смысле L_r^{loc}. Кроме того, справедлива оценка

$$\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}t_{0,m}^p\|f\|^p_{L_r(Q_{0,m})}\Big)^{\frac1p}\le C\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})}. \tag{6.7.16}$$

Комбинируя (6.7.7), (6.7.15) и (6.7.16), заключаем, что $f\in\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ и, кроме того, $\|f\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}\le C\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})}$ с некоторой не зависящей от f константой $C>0$.

Шаг 2. Пусть теперь $f\in\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$. Пользуясь теоремой 6.6.42 при $\theta=r$, учитывая условие $\alpha_1>\max\{0,\frac{n}{r}-n\}$, разложим $f\in\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})$ в сходящийся одновременно в L_r^{loc} и L_1^{loc} ряд по сплайнам. Более точно, представим f в виде

$$\begin{aligned}&f=\sum_{j=0}^{\infty}v_j^l(f)\quad\text{в смысле }L_r^{\mathrm{loc}}\text{ и }L_1^{\mathrm{loc}},\qquad\text{где}\\&v_j^l(f)(x):=v_j^l(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\beta_{j,m}(v_j^l)N_{j,m}^l(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{6.7.17}$$

Пусть $\omega \in C_0^\infty(I)$, $\int \omega(x)\,dx = 1$. Положим $\Omega_0(x) := (-1)^{l+1}\sum\limits_{i=1}^{l}(-1)^{l-i}C_l^i \frac{1}{i^n}\omega(\frac{x}{i})$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Легко видеть, что $\int \Omega_0(x)\,dx = 1$ (мы используем тождество $0 = (1-1)^l = \sum\limits_{i=0}^{l}(-1)^{l-i}C_l^i$). Положим $\Omega := \Omega_0 - 2^{-n}\Omega_0(\frac{\cdot}{2})$. Следовательно (мы полагаем $\Omega_j := 2^{jn}\Omega(2^j\cdot)$ при $j \in \mathbb{N}$), делая замену переменной $z = \frac{x-y}{i}$ при каждом фиксированном i, получаем

$$
\begin{aligned}
(-1)^{l+1}\Omega_j * f &= \sum_{i=1}^{l}(-1)^{l-i}C_l^i \int \frac{2^{jn}}{i^n}\Big[\omega\Big(2^j\Big(\frac{x-y}{i}\Big)\Big) - 2^{-n}\omega\Big(2^{j-1}\Big(\frac{x-y}{i}\Big)\Big)\Big] f(y)\,dy \\
&= \sum_{i=1}^{l}(-1)^{l-i}C_l^i\Big(2^{jn}\int \omega(2^j z) f(x-iz)\,dz - 2^{(j-1)n}\int \omega(2^{j-1}z) f(x-iz)\,dz\Big) \qquad (6.7.18)\\
&= \int 2^{jn}\omega(2^j z)\Delta^l(-z) f(x)\,dz - \int 2^{(j-1)n}\omega(2^{(j-1)}z)\Delta^l(-z) f(x)\,dz.
\end{aligned}
$$

Свертку можно понимать в классическом смысле, поскольку $f \in L_1^{\mathrm{loc}}$.

Последующие оценки весьма близки по смыслу с тем, которые были использованы на предыдущем шаге, поэтому мы дадим лишь набросок доказательства, опуская некоторые детали. Мы также предполагаем, что $0 < r \le 1$, поскольку случай $r > 1$ не отличается по сути, но проще технически.

Положим $V_{1,k}^l := \sum\limits_{j=0}^{k} v_j^l$, $V_{2,k}^l := f - V_{1,k}^l$. По теореме 6.5.1 (мы можем использовать теорему 6.5.1 без ограничений на моменты функций Ω)

(6.7.19)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int t_k^p(x)|\varphi_k * f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} \le C\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int t_k^p(x)|\Omega_k * f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}\\
&\le C\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int t_k^p(x)|\Omega_k * V_{1,k}^l(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} + C\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int t_k^p(x)|\Omega_k * V_{2,k}^l(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}} =: (S_1)^q + (S_2)^q.
\end{aligned}
$$

Используя неравенство Минковского для сумм, имеем

$$
S_2 \le C\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\sum_{j=k}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{knp}\|v_j^l\|_{L_1(cQ_{k,m})}^p\Big\}^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{q}{\mu}}\Big)^{\frac{1}{q}}. \qquad (6.7.20)
$$

Применим неравенство Гёльдера с показателями p_r, p_r' к сумме по m, учтём (6.2.18) и используем равенство $\alpha_1 + n - \frac{n}{p} - \frac{n}{rp_r'} = \alpha_1 + n - \frac{n}{r}$. В итоге получим (напомним, что $0 < r \le 1$),

(6.7.21)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{knp}\|v_j^l\|_{L_1(cQ_{k,m})}^p \le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{knp}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{j,\widetilde{m}}\cap cQ_{k,m}\neq\emptyset}}\|v_j^l\|_{L_1(Q_{j,\widetilde{m}})}\Big)^p\\
&\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{k,m}^p 2^{knp}\Big(\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{j,\widetilde{m}}^n\cap cQ_{k,m}\neq\emptyset}}\|v_j^l\|_{L_1(Q_{j,\widetilde{m}})}^r\Big)^{\frac{p}{r}}\\
&\le C\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n} 2^{(\alpha_1-(\frac{n}{rp_r'}-\frac{n}{p})(k-j)p}2^{knp}t_{j,\widetilde{m}}^p\|v_j^l\|_{L_1(cQ_{j,\widetilde{m}})}^p \le C\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n} 2^{(k-j)(\alpha_1+n-\frac{n}{r})}2^{jnp}t_{j,\widetilde{m}}^p\|v_j^l\|_{L_1(cQ_{j,\widetilde{m}})}^p.
\end{aligned}
$$

Подставляя (6.7.21) в (6.7.20), используя теорему 1.2.120 (поскольку $\alpha_1 > n(\frac{1}{r}-1)$), а затем лемму 6.6.13 и теорему 6.6.42, получаем

$$S_2 \le C\|f\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}. \tag{6.7.22}$$

Из оценки (6.6.2), леммы 6.6.13, равенства (6.7.18) и конечной, не зависящей от j, кратности перекрытия носителей сплайнов $N^l_{j,m}$ при каждом фиксированном j и переменном m, следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\int t_k^p(x)|\Omega_k * v_j^l|^p\,dx &\le C\int t_k^p(x)\Big[\fint\limits_{\frac{I}{2^{(k-1)}}}|\Delta^l(h)v_j^l(x)|\,dh + \fint\limits_{\frac{I}{2^k}}|\Delta^l(h)v_j^l(x)|\,dh\Big]^p dx\\ &\le C2^{(j-k)lp}\int t_k^p(x)\Big[\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ x\in\operatorname{supp}N^l_{j,m}}}|\beta_{j,m}|\Big]^p dx \le C2^{(j-k)lp}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\Big[\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{k,\widetilde{m}}\cap\operatorname{supp}N^l_{j,m}\neq\emptyset}} t^p_{k,\widetilde{m}}\Big]|\beta_{j,m}|^p.\end{aligned} \tag{6.7.23}$$

Используя (6.7.23), в силу замечаний 6.2.13 и 6.2.16, будем иметь

$$\begin{aligned}\Big(\int t_k^p(x)|\Omega_k * V^l_{1,k}(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} &\le \Big(\int t_k^p(x)\Big(\sum_{j=0}^k|\Omega_k * v_j^l(x)|^\mu\Big)^{\frac{p}{\mu}}dx\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le 2^{k(\alpha_2-l)}\Big(\sum_{j=0}^k 2^{j\mu(l-\alpha_2)}\Big(\int t_k^p(x)|\Omega_k * v_j^l(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}}\\ &\le C2^{k(\alpha_2-l)}\Big(\sum_{j=0}^k 2^{j\mu(l-\alpha_2)}\Big(\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n} t^p_{j,m}|\beta_{j,m}|^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}}.\end{aligned} \tag{6.7.24}$$

Применяя оценку (6.7.24) в комбинации с теоремами 1.2.120 и 6.6.42, получим

$$S_1 \le C\|f\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}. \tag{6.7.25}$$

Поскольку $f \in L_1^{loc}$, рассуждая как при доказательстве леммы 6.4.27 нетрудно показать, что $f \in S'_e$. Теперь из (6.7.19), (6.7.22), (6.7.25) вытекает, что $f \in \mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ и с некоторой, не зависящей от f, константой $C>0$ справедливо неравенство $\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})} \le C\|f\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l_{p,q,r}(\{t_k\})}$.

Теорема полностью доказана. □

6.8. Приложения к проблеме следа

В качестве одного из наиболее ярких приложений результатов данной главы мы дадим эквивалентное описание пространства следов весового пространства Соболева.

На протяжении всего параграфа фиксируем параметры $d, n \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,\infty)$. Точку пространства $\mathbb{R}^{n+d} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ будем записывать как пару $x = (x', x'')$. При $s \in \mathbb{N}$ символом Q^s всюду в данном параграфе будем обозначать куб в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^s$ с ребрами параллельными координатным осям.

Дадим стандартное определение весового пространства Соболева с весом из класса Макенхаупта. Как обычно, если Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^{n+d}$, то при $F \in L_1^{loc}(\Omega)$ через $D^\alpha F$ будем обозначать обобщённую по Соболеву производную F на Ω порядка α (см. детали, например, в гл. 1 [32] или гл. 2 [124]). При этом мы используем стандартные мультииндексные обозначения, то есть $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_{n+d}^{\alpha_{n+d}}}$, где α -вектор из $\mathbb{N}_0^{n+d}$, при этом $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{n+d}|$.

Определение 6.8.1. Пусть $l \in \mathbb{N}$, а Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^{n+d}$. При $\gamma^p \in A_p^{loc}(\mathbb{R}^{n+d})$ определим *весовое пространство Соболева* $W_p^l(\Omega, \gamma)$ как линейное пространство всех $F \in L_p^{loc}(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|F\|_{W_p^l(\Omega,\gamma)} := \sum_{|\alpha| \le l} \|\gamma D^\alpha F\|_{L_p(\Omega)}. \tag{6.8.2}$$

При $\gamma \equiv 1$ будем использовать символ $W_p^l(\Omega)$ вместо $W_p^l(\Omega, 1)$.

Замечание 6.8.3. Из неравенства Гёльдера и определения 1.2.108 следует, что для любого куба Q^{n+d} в пространстве $\mathbb{R}^{n+d}$ при $r \in [1, p]$ и $\gamma \in A_{\frac{p}{r}}^{loc}(\mathbb{R}^{n+d})$ имеем $W_p^l(Q^{n+d}, \gamma) \subset W_r^l(Q^{n+d})$.

Определение 6.8.4. Элемент $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ называется *следом элемента* $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$ на плоскости $\mathbb{R}^n$ и обозначается $\operatorname{tr}|_{\mathbb{R}^n} F = \varphi$, если для любого куба Q^n в $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{\|x''\| \to 0} \int\limits_{Q^n} |\varphi(x') - F(x', x'')|\, dx' = 0. \tag{6.8.5}$$

Замечание 6.8.6. Напомним определения 1.3.17 и 1.3.19. Аналогичные определения можно дать и для пространств Соболева $W_r^{l,loc}(\mathbb{R}^{n+d})$, $r \in [1, \infty)$. Мы не будем вдаваться в детали. Отметим лишь, что, пользуясь результатами параграфа 6.1 монографии [14], можно показать, что при $l > \max\{1, \frac{d}{r}\}$, $r > 1$ для любого элемента $F \in W_r^{l,loc}(\mathbb{R}^{n+d})$ существует корректно определённый $\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}$-след, то есть такой элемент $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, что

$$\lim_{r \to 0} \fint\limits_{B_r^{n+d}((x',0))} |f(x') - F(y', y'')|\, dy'\, dy'' = 0 \quad \text{для } \mathcal{H}^n\text{-п.в.} \quad x' \in \mathbb{R}^n.$$

Соответствующий оператор $\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}$-следа обозначим символом $\operatorname{Tr}|_{\mathbb{R}^n}$. Кроме того, можно показать, что при $l > \frac{d}{r}$, $r > 1$ каждый элемент $F \in W_r^{l,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+d})$ имеет след на плоскости $\mathbb{R}^n$ в смысле определения 6.8.4 (см. детали в §5.2 [32]). Таким образом, пользуясь замечанием 6.8.3, заключаем, что при $\gamma^p \in A_{\frac{p}{r}}^{loc}(\mathbb{R}^{n+d})$, $r \in (1, p]$ и $l > \frac{d}{r}$ каждый элемент $F \in W_p^l(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$ имеет одновременно и корректно определённый $\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}$-след на плоскости $\mathbb{R}^n$ и след на плоскости $\mathbb{R}^n$ в смысле определения 6.8.4.

В случае $r = 1$ ситуация более тонкая. В силу результатов §5.2 монографии [32] при любом $l \in \mathbb{N}$ каждый элемент $F \in W_1^{l,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ имеет след на плоскости $\mathbb{R}^n$ в смысле определения 6.8.4. С другой стороны, из результатов §4.8 монографии [45] и очевидного вложения $W_1^{l,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}) \subset W_1^{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, справедливого при любом $l \in \mathbb{N}$, вытекает существование корректно определённого $\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}$-следа на гиперплоскости $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ любого элемента $F \in W_1^{l,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$. Таким образом, пользуясь замечанием 6.8.3, заключаем, что при $\gamma \in A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $l \in \mathbb{N}$ каждый элемент $F \in W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ имеет одновременно и корректно определённый $\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}$-след на гиперплоскости $\mathbb{R}^n$ и след на гиперплоскости $\mathbb{R}^n$ в смысле определения 6.8.4.

Связь между определением $\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}$-следа и определением 6.8.4 установлена в следующем предложении.

Предложение 6.8.7. *Пусть либо $r \in (1,\infty)$, $l \in \mathbb{N}$, $l > \frac{d}{r}$, либо $l \in \mathbb{N}$, $r = d = 1$. Пусть φ – след некоторого элемента $F \in W_r^{l,loc}(\mathbb{R}^{n+d})$ на плоскости $\mathbb{R}^n$. Тогда, если f является $\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}$-следом F на $\mathbb{R}^n$, то f и φ совпадают как элементы $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Фиксируем куб Q^n и число $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда для некоторого $\delta(Q^n,\varepsilon) \in (0,1)$

$$\int\limits_{2Q^n} |\varphi(x') - F(x',x'')|\,dx' < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad \|x''\| \in (0,\delta(Q,\varepsilon)).$$

Фиксируем $r \in (0, \min\{\delta(Q^n,\varepsilon), \frac{l(Q^n)}{2}\})$. Для любого куба $Q_r^n(x') \subset 2Q^n$ имеем (далее B_r^d – шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ с центром в 0 и радиуса r)

$$\begin{aligned} R(x',r) &= \frac{1}{(2r)^n \mathcal{L}^d(B_r^d)} \iint\limits_{Q_r(x)\times B_r^d} |F(y',y'') - \varphi(x')|\,dy'\,dy'' \\ &\le \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{Q_r(x)} |\varphi(y') - \varphi(x')|\,dy' + \sup_{0<\|y''\|<r} \frac{1}{(2r)^n} \int\limits_{Q_r^n(x)} |\varphi(y') - F(y',y'')|\,dy' \\ &=: R_1(x',r) + R_2(x',r). \end{aligned} \tag{6.8.8}$$

Поскольку $\mathcal{L}^n$-почти каждая $x' \in \mathbb{R}^n$ является точкой Лебега функции φ, имеем $\lim_{r\to 0} R_1(x',r)$ при $\mathcal{L}^n$-п.в. $x' \in Q^n$. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int\limits_{Q^n} R_2(x',r)\,dx' \le \sup_{0<\|x''\|<r} \int\limits_{2Q^n} |\varphi(x') - F(x',x'')|\,dx' < \varepsilon.$$

Поэтому, существует строго возрастающая последовательность $\{k_s\} \subset \mathbb{N}_0$ такая, что для $\mathcal{L}^n$-п.в. $x' \in Q^n$ будем иметь $R_2(x', 2^{-k_s}) \to 0$, $s \to \infty$. В результате при $\mathcal{L}^n$-п.в. $x' \in Q^n$ имеем $\lim_{s\to\infty} R(x', 2^{-k_s}) = 0$. Остаётся учесть, что куб Q^n был выбран произвольно, а мера $\mathcal{L}^n$ совпадает с мерой $\mathcal{H}^n\lfloor_{\mathbb{R}^n}$ с точностью до универсальной константы. □

Замечание 6.8.9. Пусть $l, d \in \mathbb{N}$. Пусть либо $r \in (1,p)$, $r > \frac{d}{l}$ и $\gamma^p \in A^{loc}_{\frac{p}{r}}(\mathbb{R}^{n+d})$, либо $d = 1$ и $\gamma \in A^{loc}_1(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда, в силу замечания 6.8.6 и предложения 6.8.7, мы получаем корректное определение пространства следов на $\mathbb{R}^n$ весового пространства Соболева $W^l_p(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$, полагая

$$W^l_p(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)|_{\mathbb{R}^n} := \{\operatorname{tr}|_{\mathbb{R}^n} F : F \in W^l_p(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)\}. \tag{6.8.10}$$

Норма в $W^l_p(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)|_{\mathbb{R}^n}$ определяется как соответствующая фактор-норма (факторизация производится по подпространству элементов с нулевым следом).

Определение 6.8.11. Пусть $\gamma^p \in A^{loc}_p(\mathbb{R}^{n+d})$. Определим *переменную гладкость* $\{\gamma_k\}$, *p-асоциированную с весом* γ, полагая при каждом $k \in \mathbb{N}_0$ (для краткости положим $B^d := B^d_1(0)$, в также $Q^n_{k,m} := \prod_{i=1}^n [\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k}]$ и $\widetilde{Q}^n_{k,m} := \prod_{i=1}^n [\frac{m_i}{2^k}, \frac{m_i+1}{2^k})$ при $(k,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$)

$$\gamma^p_k(x') := 2^{klp+kn} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\widetilde{Q}^n_{k,m}}(x') \iint\limits_{Q^n_{k,m} \times (\frac{B^d}{2^k} \setminus \frac{B^d}{2^{k+1}})} \gamma(y', y'')\, dy' dy'', \quad x' \in \mathbb{R}^n. \tag{6.8.12}$$

Напомним определение 6.3.1.

Теорема 6.8.13. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $r \in (1,p)$ и $\gamma^p \in A_p(\mathbb{R}^{n+d})$. Если $l > \frac{d}{r}$, то существует канонический изоморфизм пространства $W^l_p(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)|_{\mathbb{R}^n}$ на пространство $\mathrm{B}^{\{\gamma_k\}}_{p,p}(\mathbb{R}^n)$. Более того, существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\frac{1}{C}\|\varphi\|_{W^l_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}} \le \|\varphi\|_{\mathrm{B}^{\{\gamma_k\}}_{p,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\varphi\|_{W^l_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}} \quad \text{при всех} \quad \varphi \in W^l_p(\mathbb{R}^{n+d},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}. \tag{6.8.14}$$

Наконец, существует ограниченный линейный оператор $\mathcal{H}^n$-продолжения Ext *из пространства $\mathrm{B}^{\{\gamma_k\}}_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $W^l_p(\mathbb{R}^{n+d}, \gamma)$.*

Доказательство. Достаточно скомбинировать результаты работы [16] с теоремой 6.7.6, замечаниями 6.2.20, 6.8.6 и предложением 6.8.7. □

Замечание 6.8.15. Стоит отметить, что теорема 6.8.13 является новым результатом и не могла быть получены с помощью известных ранее методов. Действительно, предшествующие исследования пространств Бесова переменной гладкости опирались на несложные модификации методов, разработанных для классических пространств Бесова постоянной гладкости. Эти модификации были основаны на достаточно грубых поточечных оценках последовательностей, определяющих переменную гладкость.

6.9. Пространства $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ на липшицевых областях

В этом параграфе мы займёмся построением теории пространств $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(U, \{t_k\})$ на открытых множествах $U \subset \mathbb{R}^n$. Однако, основные результаты мы сможем доказать лишь для

случая, когда U – либо специальная липшицева область, либо ограниченная область с липшицевой границей. В таких случаях мы сможем построить непрерывный линейный оператор продолжения из пространства Бесова переменной гладкости на U в пространство Бесова переменной гладкости на $\mathbb{R}^n$, обобщая тем самым некоторые результаты Рычкова [103].

Перейдем к более строгим формулировкам.

Предположения. На протяжении всего параграфа при упоминании весового класса $\mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$ считаем, что $\{\alpha^1_k\} = 2^{k\alpha_1}$ и $\{\alpha^2_k\} = 2^{k\alpha_2}$ при некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Будем также считать фиксированными параметры $p, q \in (0, +\infty]$, $\sigma_2 \geq p$.

Определение 6.9.1. Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть также $p, q, r, \sigma_1, \sigma_2 \in (0, \infty]$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 \geq 0$, а весовая последовательность $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$. Определим пространство $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(U, \{t_k\})$ как *след пространства* $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$ на U с соответствующей квазинормой факторпространства. Более точно, распределение $f \in D'(U)$ принадлежит $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(U, \{t_k\})$, если существует такое распределение $g \in \mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$, что $g|_U = f$ в смысле $D'(U)$. При этом

$$\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(U,\{t_k\})} := \inf\{\|g\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})} : g|_U = f \text{ в смысле } D'(U)\}.$$

Первая теорема, которую мы докажем, интересна сама по себе, но даёт лишь промежуточный результат.

Теорема 6.9.2. *Пусть* $\varphi_0 \in D(-K)$, $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$, $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. *Пусть* ψ_0, ψ *– те же, что и в теореме 6.4.4. Тогда, если* $1 + L_\psi > \frac{n}{r} + \max\{0, -\alpha_1\}$, $\sigma_2 \geq p$, $L_\varphi + 1 > \alpha_2$ *и* $\{t_k\} \in \mathcal{X}^{\alpha_3}_{\alpha,\sigma,p}$, *то отображение* $\mathrm{Ext} : D'(G) \mapsto D'$, *определённое по формуле*

$$\mathrm{Ext}[f] = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j * (\varphi_j * f)_G \tag{6.9.3}$$

определяет линейный ограниченный оператор продолжения из пространства $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(G, \{t_k\})$ *в пространство* $\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(\{t_k\})$.

Кроме того, имеет место следующая эквивалентность квазинорм (с соответствующими модификациями в случаях $p = \infty$ *или* $q = \infty$*)*

$$\|f\|_{\mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(G,\{t_k\})} \approx \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t^p_{j,m}\Big(M^G_A(j,m,c)[f]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{6.9.4}$$

Доказательство. Если $f \in \mathrm{B}^{\varphi_0}_{p,q}(G, \{t_k\})$, то по определению 6.9.1 существует распределение $g \in S'_e$, удовлетворяющее условию $g = f$ на G в смысле $D'(G)$. При любых $c \geq 1$, $A > 0$ имеем

$$M^G_A(j,m,c)[f] \leq M_A(j,m,c)[g], \quad j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n.$$

Следовательно, используя замечание 6.4.25 и определение 6.9.1, получим

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\Big(M_A^G(j,m,c)[f]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(G,\{t_k\})}.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно установить противоположную оценку. Для этого заметим, что при $\{g^k\} = \{(\varphi_k * f)_G\}$ (символ $(\varphi_k * f)_G$ означает продолжение $\varphi_k * f$ нулём вне G) имеем

$$M_A(j,m,1)[\{g^k\}] = M_A^G(j,m,1)[f], \quad j\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}^n$$

Поэтому, используя теорему 6.4.31 и определение 6.9.1, получаем

$$\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(G,\{t_k\})} \le \|\operatorname{Ext}[f]\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})} \le C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p\Big(M_A^G(j,m,c)[f]\Big)^p\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема полностью доказана. □

Теорема 6.9.2 легко позволяет установить основной результат данного параграфа, который звучит следующим образом.

Теорема 6.9.5. *Пусть $\varphi_0 \in D(-K)$, $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$ и $\varphi := \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. Тогда, если $\sigma_2 \ge p$, $L_\varphi + 1 > \alpha_2$ и $\{t_k\} \in \mathcal{X}_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$, то существует константа $C > 0$ такая, что для всех $f \in D'(G)$, являющихся ограничениями на G распределений $\widetilde{f} \in S_e'$, справедливы неравенства*

$$\frac{1}{C}\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(G,\{t_k\})} \le \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\int_G t_j^p(x)|\varphi_j * f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(G,\{t_k\})}. \tag{6.9.6}$$

Доказательство. Оценка '$\le$' следует из непосредственно из определения нормы в пространстве $\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(G,\{t_k\})$. Обратная оценка $\ge$ вытекает из замечания 6.4.25 и теоремы 6.9.2. □

В действительности аналог теоремы 6.9.5 справедлив для ограниченной области с липшицевой границей, а не только для специальной липшицевой области. Чтобы осуществить этот переход достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 6.9.7. *Пусть $\omega \in D$, $\varphi_0 \in D(-K)$, $\int \varphi_0(x)\,dx = 1$ и $\varphi(x) = \varphi_0 - 2^{-n}\varphi_0(\frac{\cdot}{2})$. Пусть $1 + L_\varphi > \alpha_2$ и $\{t_k\} \in \mathcal{X}_{\alpha,\sigma,p}^{\alpha_3}$. Тогда, если $f \in \mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})$, то $\omega f \in \mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})$. Более того, существует такая константа $C > 0$, что*

$$\|\omega f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})} \le C\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})} \quad \textit{при} \quad f \in S_e'. \tag{6.9.8}$$

Доказательство. Мы дадим лишь набросок доказательства, поскольку многие детали аналогичны тем, что использованы в доказательстве теоремы 2.21 работы [103].

Шаг 1. Прежде всего в силу теоремы 6.5.1 мы можем предположить без ограничения общности, что функция φ_0 выбрана таким образом, что φ имеет достаточно большое число нулевых моментов (это число будет уточнено в конце доказательства). Также можно считать, что $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\psi \subset I$.

Шаг 2. Предположим сначала, что $f \in L_1^{\mathrm{loc}}$. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме к функции ω, получим

$$\begin{aligned}\varphi_j * (\omega f)(x) = \sum_{|\beta|\le T-1} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!} D^\beta\omega(x) \int y^\beta \varphi_j(y) f(x-y)\,dy + \\ + \sum_{|\beta|=T} \frac{(-1)^T}{\beta!} \int y^\beta \varphi_j(y) \Big[\int_0^1 D^\beta\omega(x-\tau y)(1-\tau)^{T-1}\,d\tau\Big] f(x-y)\,dy.\end{aligned} \tag{6.9.9}$$

Шаг 3. Пусть теперь $f \in S_e'$, ψ_0, ψ – те же, что в теореме 6.4.4. Положим $f^l := \psi_l * \varphi_l * f$ при $l \in \mathbb{N}_0$. Используя теорему 6.4.4, заключаем, что $\sum_{l=0}^k f^l \to f$ в D', $k \to \infty$. Следовательно, учитывая, что $\sum_{l=0}^k f^l \in C^\infty \subset L_1^{\mathrm{loc}}$, поскольку оператор умножения на гладкую функцию в D' непрерывен, из (6.9.9) выводим

$$\begin{aligned}\varphi_j * (\omega f)(x) = \sum_{l=1}^\infty \sum_{|\beta|\le T-1} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!} D^\beta\omega(x) \int y^\beta \varphi_j(y) f^l(x-y)\,dy + \\ + \sum_{l=1}^\infty \sum_{|\beta|=T} \frac{(-1)^T}{\beta!} \int y^\beta \varphi_j(y) \Big[\int_0^1 D^\beta\omega(x-\tau y)(1-\tau)^{T-1}\,d\tau\Big] f^l(x-y)\,dy = \\ = \Sigma_{j,1}(x) + \Sigma_{j,2}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{6.9.10}$$

Шаг 4. Делая очевидную замену переменных, из теоремы Фубини получаем

$$|\Sigma_{j,2}(x)| \le C \sum_{l=0}^\infty \sum_{|\beta|=T} \int \Big| \int y^\beta \varphi_j(y) J_\beta(x,y) \psi_l(z-y) \varphi_l * f(x-z)\,dy \Big|\,dz, \tag{6.9.11}$$

где $J_\beta(x,y)$ выражение в квадратных скобках (6.9.10).

Если $l \le j$, то, используя включения $\operatorname{supp}\psi_l \subset 2^{-l}I$, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset 2^{-j}I$ и оценку $\sup\limits_y |J_\beta(x,y)\psi_l(z-y)| \le C2^{ln}$, получим, что

$$\sum_{|\beta|=T} \int\int |y^\beta \varphi_j(y) J_\beta(x,y) \psi_l(z-y)| |\varphi_l * f(x-z)|\,dy\,dz \le C2^{-jT} \sup_{x' \in x + c2^{-l}I} |\varphi_l * f(x')|. \tag{6.9.12}$$

Если $l > j$, то модуль внутреннего интеграла в правой части (6.9.11) оценивается сверху $C2^{-jT}2^{L_\psi(j-l)}2^{jn}\sup_{x' \in x+c2^{-j}I} |\varphi_l * f(x')|$ (детали смотри в выводе оценки (2.50) из [101]). Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{|\beta|=T} \int \Big| \int y^\beta \varphi_j(y) J_\beta(x,y) \psi_l(z-y) \varphi_l * f(x-z)\,dy \Big|\,dz \\ \le C2^{-jT}2^{L_\psi(j-l)} \sup_{x' \in x + c2^{-j}I} |\varphi_l * f(x')|.\end{aligned} \tag{6.9.13}$$

Используя (6.9.12) и (6.9.13), получим с некоторой константой $c' \geq c$

$$
\begin{aligned}
&t_{j,m}^p \sup_{x\in Q_{j,m}} |\Sigma_{j,2}(x)|^p \leq C t_{j,m}^p \Big(\sum_{l=0}^{j} 2^{-jT} \sup_{x\in c'Q_{l,\widetilde{m}}} |\varphi_l * f(x)|\Big)^p + \\
&+ C t_{j,m}^p 2^{-jpT} \Big(\sum_{l=j}^{\infty} 2^{(L_\psi - A)(j-l)}\Big)^p \Big(M_A(j,m,c')[f]\Big)^p,
\end{aligned} \tag{6.9.14}
$$

при условии, что $L_\psi > A$. Отсюда, рассуждая как при выводе оценки (6.4.40), получим

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \sup_{x\in Q_{j,m}} |\Sigma_{j,2}(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\Big(\sum_{l=0}^{j} 2^{\mu(l-j)T}\Big(\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n} t_{l,\widetilde{m}}^p \sup_{x\in c'Q_{l,\widetilde{m}}} |\varphi_l * f(x)|^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} \\
&+ C 2^{-jT}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(M_A(j,m,c')[f]\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{6.9.15}
$$

Рассуждая как в (6.4.41), из (6.9.15), леммы 6.4.20 и теоремы 1.2.120 заключаем, что

$$
\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \sup_{x\in Q_{j,m}} |\Sigma_{j,2}(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})}, \tag{6.9.16}
$$

при условии, что $T > \alpha_2$.

Шаг 5. Для оценки $\Sigma_{1,j}(x)$ заметим, что

$$
|\Sigma_{1,j}(x)| \leq C \sum_{|\beta|\leq T-1} 2^{-j|\beta|} |\zeta_j^\beta * f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.9.17}
$$

где $\zeta^\beta(y) = y^\beta \varphi(y)$ при $y \in \mathbb{R}^n$. Рассуждая как при выводе оценки (6.4.40), имеем

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \sup_{x\in Q_{j,m}} |\Sigma_{j,1}(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq C \sum_{|\beta|\leq T-1} \Big(\sum_{l=0}^{j} 2^{\mu(l-j)(L_{\zeta^\beta}+1-|\beta|)}\Big(\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n} t_{l,\widetilde{m}}^p \sup_{x\in cQ_{l,\widetilde{m}}} |\varphi_l * f(x)|^p\Big)^{\frac{\mu}{p}}\Big)^{\frac{1}{\mu}} + \\
&+ C \sum_{|\beta|\leq T-1} 2^{-j|\beta|}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \Big(M_A(j,m,c)[f]\Big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{6.9.18}
$$

Если φ имеет нулевые моменты вплоть до порядка L, то функция ζ^β имеет нулевые моменты вплоть до порядка $L - |\beta|$. Если $L_\varphi > T + \alpha_2$, то аналогично (6.9.16), получим

$$
\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{j,m}^p \sup_{x\in Q_{j,m}} |\Sigma_{j,1}(x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|_{\mathrm{B}_{p,q}^{\varphi_0}(\{t_k\})}. \tag{6.9.19}
$$

Собирая вместе оценки (6.9.16) и (6.9.19), завершаем доказательство леммы.

□

Глава 7. СЛЕДЫ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ

Напомним определения 6.8.1. Целью данной главы является решение проблемы точного описания следа пространства $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ на гиперплоскости $\mathbb{R}^n\times\{0\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ при $n,l\in\mathbb{N}$ и условии, что $\gamma\in A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$. Результаты главы разбиты на два параграфа. В §7.2 рассматривается более простой случай $l>1$ и показывается, что след пространства $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ на $\mathbb{R}^n$ является пространством Бесова переменной гладкости. При этом мы докажем существование линейного оператора продолжения из соответствующего пространства следов в пространство $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$. Случай $l=1$ существенно труднее и рассматривается отдельно в §7.3. Действительно, при $\gamma\equiv 1$ соответствующее пространство следов теряет какое-либо сходство с пространствами Бесова и оказывается "равным" $L_1(\mathbb{R}^n)$. В таком случае Э. Гальярдо [55] построил нелинейный оператор продолжения из $L_1(\mathbb{R}^n)$ в $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Более того, как показал затем Я. Петре [97] (см. также [98]), не существует линейного оператора продолжения из $L_1(\mathbb{R}^n)$ в $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1})$. С другой стороны, в работе [10] было показано, что, если $\lim_{x_{n+1}\to 0}\gamma(x_{n+1})=+\infty$ для некоторого непрерывного веса $\gamma=\gamma(x_{n+1})$, то пространство следов можно отождествить с некоторым пространством Бесова так называемой обобщённой гладкости, и при этом существует линейный оператор продолжения из этого пространства в $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$. Поэтому, в случае, когда вес зависит от всех переменных и сильно меняет характер поведения от точки к точке, соответствующее пространство следов должно хитрым образом "подстраиваться" под вес и менять свою природу в окрестностях различных точек гиперплоскости, а соответствующий оператор продолжения, вообще говоря, нелинейный.

7.1. Соглашения об обозначениях

На протяжении всей главы будем считать фиксированным число $n\in\mathbb{N}$, которое будет зарезервировано для обозначения пространства $\mathbb{R}^n$. Точку пространства $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x=(x_1,\dots,x_n)$, а точку пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ – как пару (x,t) ($x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$). Пространство $\mathbb{R}^n$ *отождествим с гиперплоскостью* $\mathbb{R}^n\times\{0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Символом $\mathbb{R}^{n+1}_+$ будем обозначать верхнее полупространство, то есть $\mathbb{R}^{n+1}_+:=\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$. Напомним определения 1.2.20, 1.3.19, 1.3.22 и положим для краткости $W_p^l(\mathbb{R}^{n+1})|_{\mathbb{R}^n}:=W_p^l(\mathbb{R}^{n+1})|_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{H}^n\lfloor\mathbb{R}^n}$, а также $\operatorname{Tr}|_{\mathbb{R}^n}:=\operatorname{Tr}|_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{H}^n\lfloor\mathbb{R}^n}$. При $d=n,n+1$, $k\in\mathbb{N}_0$ и $m=(m_1,\dots,m_d)\in\mathbb{Z}^d$ пусть $Q_{k,m}^d:=\prod_{i=1}^d[\frac{m_i}{2^k},\frac{m_i+1}{2^k}]$. Положим также $I:=\prod_{i=1}^n[-1,1]$. Под кубом Q^d в $\mathbb{R}^d$ всегда понимаем замкнутый куб с ребрами параллельными координатным осям, и обозначаем через $l(Q^d)$ его длину ребра. Напомним определение 1.2.111 и *зафиксируем на протяжении всей главы* $\mathcal{L}^{n+1}$*-вес* $\gamma\in A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$.

7.2. Случай $l > 1$

Зафиксируем до конца параграфа параметр $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$. Напомним (6.3.3) и для упрощения обозначений положим $\delta^l(Q)\varphi := \delta_1^l(Q)\varphi$ для любого куба Q в $\mathbb{R}^n$. Напомним определения 6.3.4, 6.8.11 и для упрощения обозначений положим $\widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\}) := \widetilde{\mathrm{B}}^l_{1,1,1}(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})$. Наконец, напомним замечания 6.8.6, 6.8.9 и предложение 6.8.7.

Теорема 7.2.1. *Элемент $\varphi \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)|_{\mathbb{R}^n}$ в том и только том случае, если φ принадлежит пространству $\widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})$. Кроме того, существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\frac{1}{C}\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})} \leq \|\varphi\|_{W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}} \leq C\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})}. \tag{7.2.2}$$

Наконец, существует ограниченный линейный оператор $\mathrm{Ext} : \widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\}) \to W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ такой, что $\mathrm{Tr}\,|_{\mathbb{R}^n} \circ \mathrm{Ext} = \mathrm{Id}$ на пространстве $\widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})$.

Доказательство. Разобьём доказательство на несколько шагов. Положим

$$\gamma_{k,m} := 2^{kl} \iint\limits_{Q_{k,m}\times(0,2^{-k})} \gamma(x,t)\,dx\,dt \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n. \tag{7.2.3}$$

Шаг 1. Фиксируем $F \in W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$. В силу замечания 6.8.6 элемент F имеет след $\varphi := \mathrm{tr}\,|_{\mathbb{R}^n} F$ на $\mathbb{R}^n$. Более того, используя замечание 6.8.3 и теорему 2.1.4 книги [124] легко видеть, что существует представитель $\overline{F}$ элемента F, для которого

$$\varphi(x) = \lim_{t\to+0} \overline{F}(x,t) \quad \text{и} \quad \overline{F}(x,t) - \varphi(x) = \int\limits_0^t D_t F(x,\tau)\,d\tau \quad \text{для } \mathcal{L}^n\text{-п.в.} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.2.4}$$

Шаг 2. Пусть вектор $m \in \mathbb{Z}^n$ фиксирован. Тогда из (7.2.4) и определения 1.2.111 выводим

$$\begin{aligned} \gamma_{0,m} \int\limits_{Q_{0,m}} |\varphi(x)|\,dx &\leq \gamma_{0,m} \int\limits_{Q_{0,m}} \Big(\int\limits_0^1 |\overline{F}(x,\tau) - \varphi(x)| + |\overline{F}(x,\tau)|\,d\tau \Big)\,dx \\ &\leq C_{\gamma,1}\Big(\int\limits_{Q_{0,m}} \int\limits_0^1 \gamma(x,\tau)|D_t F(x,\tau)|\,dx\,d\tau + \int\limits_{Q_{0,m}} \int\limits_0^1 \gamma(x,\tau)|F(x,\tau)|\,dx\,d\tau \Big). \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

Суммируя оценку (7.2.5) по всем $m \in \mathbb{Z}^n$ заключаем, что

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \gamma_{0,m} \int\limits_{Q_{0,m}} |\varphi(x)|\,dx \leq C_{\gamma,1}\|F\|_{W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)}. \tag{7.2.6}$$

Шаг 3. Рассуждая как при выводе оценки (3.4) леммы 3.1 статьи [16] (анализ доказательства этой леммы показывает, что если не заботиться об анизотропности производных, то те

же рассуждения позволяют рассмотреть и случай $p = 1$), выводим существование констант C, C_1, C_2, зависящих только от l, n, что при любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\delta^l(Q_{k,m})\varphi \le C2^{kn} \int\limits_{C_1 Q_{k,m}} \int\limits_0^{C_2 2^{-k}} g(x,t)\,dx\,dt, \tag{7.2.7}$$

где мы для краткости положили $g(x,t) := \sum_{|\alpha|=l} t^{l-1}|D^\alpha F(x,t)|$ при $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Шаг 4. Фиксируем наименьшее число $k_0 \in \mathbb{N}_0$ для которого $2^{k_0} > C_2$ (константа C_2 та же, что и в правой части (7.2.7)). Следующее равенство справедливо при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\int\limits_{Q_{k,m}} \int\limits_0^{\frac{2^{k_0}}{2^k}} g(x,t)\,dx\,dt = \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{\substack{m' \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,m'} \subset Q_{k,m}}} \int\limits_{Q_{j,m'}} \int\limits_{2^{-j-1}}^{2^{-j}} g(x,t)\,dx\,dt + \sum_{j=k-k_0}^{k-1} \int\limits_{Q_{k,m}} \int\limits_{2^{-j-1}}^{2^{-j}} g(x,t)\,dx\,dt. \tag{7.2.8}$$

Шаг 5. Используя определение 1.2.111, обозначение (7.2.3) и учитывая, что $l > 1$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,m'} \subset Q_{k,m}}} 2^{kn}\gamma_{k,m} &= \sum_{k=1}^{j} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,m'} \subset Q_{k,m}}} 2^{k(l-1)} 2^{k(n+1)} \iint\limits_{Q_{k,m} \times (0,2^{-k})} \gamma(x,t)\,dx\,dt \\ &\le C_{\gamma,1} \sum_{k=1}^{j} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,m'} \subset Q_{k,m}}} 2^{k(l-1)} \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t) \in Q_{k,m} \times (0, \frac{1}{2^k})} \gamma(x,t) \le C_{\gamma,1} 2^{(j+1)(l-1)} \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t) \in Q_{j,m'} \times (0, \frac{1}{2^j})} \gamma(x,t). \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

С другой стороны, используя замечание 1.2.117 и обозначение (7.2.3), выводим

$$\sum_{k=j+1}^{j+k_0} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \\ Q_{j,m'} \supset Q_{k,m}}} 2^{kn}\gamma_{k,m} \le C2^{jn}\gamma_{j,m'}. \tag{7.2.10}$$

Шаг 6. Очевидно, при любых $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ имеем оценку

$$\delta^l(Q_{k,m})\varphi \le 2^{2kn} \|\varphi\|_{L_1(C(n,l)Q_{k,m})}.$$

Следовательно, используя предложение 4.1.1 и замечание 1.2.117, из (7.2.6) заключаем, что

$$S_1 := \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \gamma_{k,m}\delta^l(Q_{k,m})\varphi \le C \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \gamma_{0,m} \|\varphi\|_{L_1(Q_{0,m})} \le C\|F\|_{W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)}. \tag{7.2.11}$$

Шаг 7. Используя предложения 4.1.1 и 1.2.118 из (7.2.7) выводим

$$S_2 := \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \gamma_{k,m}\delta^l(Q_{k,m})\varphi \le C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{kn}\gamma_{k,m} \int\limits_{Q_{k,m}} \int\limits_0^{\frac{2^{k_0}}{2^k}} g(x,t)\,dx\,dt. \tag{7.2.12}$$

Подставляя (7.2.8) в правую часть (7.2.12), меняя порядок суммирования (по k и j), используя оценки (7.2.9), (7.2.10) получаем цепочку неравенств

$$S_2 \le C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m'\in\mathbb{Z}^n}\int\limits_{Q_{j,m'}}\int\limits_{2^{-j-1}}^{2^{-j}} g(x,t)\,dx\,dt\Big(\sum_{k=1}^{j}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{j,m'}\subset Q_{k,m}}} 2^{kn}\gamma_{k,m}+\sum_{k=j+1}^{j+k_0}\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{j,m'}\supset Q_{k,m}}} 2^{kn}\gamma_{k,m}\Big)$$

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m'\in\mathbb{Z}^n} 2^{j(l-1)}\operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q_{j,m'}\times(0,\frac{1}{2^j})}\gamma(x,t)\iint\limits_{Q_{j,m'}\times(\frac{1}{2^{j+1}},\frac{1}{2^j})} g(x,t)\,dx\,dt \tag{7.2.13}$$

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m'\in\mathbb{Z}^n}\iint\limits_{Q_{j,m'}\times(\frac{1}{2^{j+1}},\frac{1}{2^j})}\gamma(x,t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha F(x,t)|\,dx\,dt \le C\|F\|_{W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)}.$$

Константа $C>0$ в (7.2.13) зависит только от n, l, C_γ, k_0.

Шаг 8. Собирая вместе оценки (7.2.6) – (7.2.13), получаем неравенство

$$\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})} \le C\|F\|_{W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)}, \tag{7.2.14}$$

в котором константа $C>0$ не зависит от F.

Шаг 9. Конструкция оператора продолжения $\mathrm{Ext} : \widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\}) \to W_1^l(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ и доказательство его ограниченности с небольшими изменениями повторяют соответствующие рассуждения из параграфа 4 статьи [16]. Для полноты картины приведём некоторые детали.

Пусть $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ – разбиение единицы, построенное для интервала $B^1 := (-1,1)$, то есть $\psi_k(t)\ge 0$ при $k\in\mathbb{N}_0$, $t\in B^1$ и $\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)=1$ при $t\in B^1$. Кроме того, можно считать, что $\psi_0\in C^\infty(B^1\setminus\frac{1}{2}B^1)$, $\psi_k\in C_0^\infty(\frac{1}{2^{k-1}}B^1\setminus\frac{1}{2^{k+1}}B^1)$ при $k\in\mathbb{N}$, и для некоторой константы $C>0$ неравенство $|D^\beta\psi_k(t)|\le C2^{k|\beta|}$ справедливо при любом $k\in\mathbb{N}_0$ и всех $t\in B^1$. Наконец, предположим, что при каждом $k\in\mathbb{N}_0$, лишь две функции ψ_k и ψ_{k+1} не обращаются в нуль на $2^{-k}B^1\setminus 2^{-k-1}B^1$. Следовательно, $D^\beta\psi_k(t) = -D^\beta\psi_{k+1}(t)$ при $t\in 2^{-k}B^1\setminus 2^{-k-1}B^1$. Существование последовательности $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющую вышеприведённым требованиям устанавливается аналогично тому, как это сделано, например в § 4.5 книги [32] при доказательстве теоремы о следе невесового пространства Соболева. Положим

$$\mathrm{Ext}[\varphi](x,t) := F(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)\,\mathrm{E}_{2^{-k}}[\varphi](x) \quad\text{при}\quad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}, \tag{7.2.15}$$

где оператор $\mathrm{E}_\varepsilon : L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)\to L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon>0$ определяется равенством

$$\mathrm{E}_\varepsilon[\varphi](x) := \frac{1}{\varepsilon^{2n}}\sum_{j=1}^{l}\mu_j\int_{\mathbb{R}^n}\Theta\Big(\frac{y-x}{\varepsilon}\Big)\int_{\mathbb{R}^n}\Theta\Big(\frac{z-y}{j\varepsilon}\Big)\varphi(z)\,dz\,dy, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{7.2.16}$$

Мы не будем выписывать точные значения констант μ_j и функций Θ из (7.2.16), которые могут быть найдены в статье автора [16]. Важное для нас заключается в том, что $\Theta\in$

$C_0^\infty(B^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Theta(x)\,dx = 1$, и следующие оценки, доказательства которых можно найти в [16] (лемма 4.2). Запишем мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ как пару (α', α_{n+1}). Для любого $\varepsilon > 0$, мультииндекса $\alpha' = (\alpha_1, .., \alpha_n)$, $|\alpha'| = l$, и точки $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|D^{\alpha'} \mathrm{E}_\varepsilon[\varphi](x)| \le \frac{C}{\varepsilon^l}\, \delta^l(x + \varepsilon I)\varphi. \tag{7.2.17}$$

Более того, для любых чисел $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, мультииндекса $\beta' = (\beta_1, .., \beta_n)$ и точки $x \in \mathbb{R}^n$, (в действительности в [16] рассмотрен лишь случай $\beta' = 0$, однако общий случай может быть рассмотрен аналогично)

$$|D^{\beta'} \mathrm{E}_{\varepsilon_1}[\varphi](x) - D^{\beta'} \mathrm{E}_{\varepsilon_2}[\varphi](x)| \le C \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{1}{t^{1+|\beta|}}\, \delta^l(x + tI)\varphi\, dt. \tag{7.2.18}$$

Шаг 10. Для дальнейших целей заметим, что по построению функция F обращается в нуль на множестве $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus B^1)$. Положив $\Xi_{k,m}^{n,1} := Q_{k,m} \times (2^{-k}B^1 \setminus 2^{-k-1}B^1)$ при $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$, очевидно, получим равенство

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\mathbb{R}^n \times \frac{1}{2}B^1} \gamma(x,t)\Big\{ \sum_{|\alpha|=l,\, \alpha_{n+1}=0} |D^\alpha f(x,t)| + \sum_{|\alpha|=l,\, \alpha_{n+1}>0} |D^\alpha f(x,t)| \Big\}\, dx\, dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \iint\limits_{\Xi_{k,m}^{1,n}} \gamma(x,t)\Big\{ \sum_{|\alpha|=l,\, \alpha_{n+1}=0} |D^\alpha f(x,t)| + \sum_{|\alpha|=l,\, \alpha_{n+1}>0} |D^\alpha f(x,t)| \Big\}\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{7.2.19}$$

Учитывая свойства функций ψ_k и применяя оценку (7.2.18), для любых $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=l,\, \alpha_{n+1}>0} \iint\limits_{\Xi_{k,m}^{n,1}} \gamma(x,t)|D^\alpha F(x,t)|\, dx\, dt \\ &= \sum_{|\alpha|=l,\, \alpha_{n+1}>0} \iint\limits_{\Xi_{k,m}^{n,1}} \gamma(x,t)\big|D^{\alpha_{n+1}}\psi_k(t) D^{\alpha'} \mathrm{E}_{\frac{1}{2^k}}\varphi(x) + D^{\alpha_{n+1}}\psi_{k+1}(t) D^{\alpha'} \mathrm{E}_{\frac{1}{2^{k+1}}}\varphi(x)\big|\, dx\, dt \\ &\le C \sum_{|\alpha'|=l-\alpha_{n+1}} 2^{k\alpha_{n+1}} \iint\limits_{\Xi_{k,m}^{n,1}} \gamma(x,t)|D^{\alpha'} \mathrm{E}_{\frac{1}{2^k}}\varphi(x) - D^{\alpha'} \mathrm{E}_{\frac{1}{2^{k+1}}}\varphi(x)|\, dx\, dt \\ &\le C 2^{2nk} \gamma_{k,m} \Big[\int\limits_{\widetilde{C}Q_{k,m}} \int\limits_{\frac{1}{2^k}I} |\Delta^l(h)\varphi(z)|\, dh\, dz \Big]\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{7.2.20}$$

Константа $\widetilde{C} \ge 1$, которая является коэффициентом растяжения кубов $Q_{k,m}$ зависит только от l, n и диаметра носителя функции Θ из (7.2.16).

Аналогично, из (7.2.17) заключаем, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}^n$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha'|=l} \iint\limits_{\Xi^{n,1}_{k,m}} \gamma(x,t)|D^{\alpha'}F(x,t)|\,dx\,dt \\
&\le C \sum_{|\alpha'|=l} \iint\limits_{\Xi^{n,1}_{k,m}} \gamma(x,t)\max\bigl\{|D^{\alpha'}E_{2^{-k}}\varphi(x)|, |D^{\alpha'}E_{2^{-k-1}}\varphi(x)|\bigr\}\,dx\,dt \qquad (7.2.21)\\
&\le C2^{2nk}\gamma_{k,m}\Bigl[\int\limits_{\widetilde{C}Q_{k,m}}\int\limits_{I/2^k} |\Delta^l(h)\varphi(z)|\,dh\,dz\Bigr].
\end{aligned}
$$

Шаг 11. Используя предложение 4.1.1 и определение функции F, при $|\alpha| = l$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=l} \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus(\mathbb{R}^n\times\frac{1}{2}B^1)} \gamma(x,t)|D^{\alpha}F(x,t)|\,dx\,dt \qquad (7.2.22)\\
&\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\gamma_{0,m}\|\varphi\|_{L_1(C'Q_{0,m})} \le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\gamma_{0,m}\|\varphi\|_{L_1(Q_{0,m})}.
\end{aligned}
$$

Шаг 12. Суммируя (7.2.20), (7.2.21) по k и m, учитывая предложение 4.1.1, получаем

$$
\sum_{|\alpha|=l}\|D^{\alpha}f\|_{L_1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)} \le C\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})}. \qquad (7.2.23)
$$

Шаг 13. Фиксируем мультииндекс α, для которого $|\alpha| < l$. Для оценки обобщённых производных $D^{\alpha}F$ запишем при $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times B^1$ интегральное представление функции $D^{\alpha}F$ по конусу $V(x,t) = \{(x,t)(1-\xi)+\xi(x',t') : \xi \in [0,1],\ (x',t') \in B^{n+1}_{\frac{1}{2}}((x,t+3))\}$ (смотри § 3.4, [32]), и используем замечание 16 из § 3.5 книги [32]. Поскольку $F(x,t) = 0$ при $|\alpha| < l$ для любого $|t| > 1$, будем иметь

$$
|D^{\alpha}F(x,t)| \le C\sum_{|\beta|=l}\iint\limits_{(x,0)+(I\times B^1)} |D^{\beta}F(\widetilde{x},\widetilde{t})|\,d\widetilde{x}\,d\widetilde{t} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times B^1.
$$

Применяя неравенство Гёльдера, и, используя замечание 1.2.114, при $m \in \mathbb{Z}^n$ получим

(7.2.24)

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{Q_{0,m}\times B^1} \gamma(x,t)|D^{\alpha}F(x,t)|\,dx\,dt\\
&\le C\sum_{|\beta|=l}\Bigl(\iint\limits_{\widetilde{C}Q_{0,m}\times B^1}\gamma(x,t)\,dxdt\Bigr)\Bigl(\operatorname*{ess\,inf}_{(\widetilde{x},\widetilde{t})\in\widetilde{C}Q_{0,m}\times B^1}\gamma(\widetilde{x},\widetilde{t})\Bigr)^{-1}\iint\limits_{\widetilde{C}Q_{0,m}\times B^1}\gamma(\widetilde{x},\widetilde{t})|D^{\beta}F(\widetilde{x},\widetilde{t})|\,d\widetilde{x}\,d\widetilde{t}\\
&\le C\sum_{|\beta|=l}\iint\limits_{\widetilde{C}Q_{0,m}\times B^1}\gamma(\widetilde{x},\widetilde{t})|D^{\beta}F(\widetilde{x},\widetilde{t})|\,d\widetilde{x}\,d\widetilde{t}.
\end{aligned}
$$

Суммируя (7.2.24) по всем $m \in \mathbb{Z}^n$, учитывая предложение 4.1.1 и оценки (7.2.22), (7.2.23), получим ключевую оценку

$$
\|\operatorname{Ext}[\varphi]\|_{W^l_1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)} = \|F\|_{W^l_1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)} \le C\|\varphi\|_{\widetilde{\mathrm{B}}^l(\mathbb{R}^n,\{\gamma_k\})}. \qquad (7.2.25)
$$

Шаг 14. Остаётся показать, что $\varphi = \operatorname{tr}|_{\mathbb{R}^n} F$. Фиксируем произвольный куб Q в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, имеем $\omega_\delta(\varphi, Q) := \operatorname{ess\,sup}_{h\in\delta I} \int_Q |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dx \to 0$ при $\delta \to +0$. Отсюда, используя (7.2.16) и меняя порядок интегрирования, при любых достаточно малых $\delta > 0$ получим

$$(7.2.26)\quad \int\limits_Q |\varphi(x) - \mathrm{E}_\delta[\varphi](x)|\, dx \le \int\limits_Q \fint\limits_{\widetilde{\delta} I} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|\, dh\, dx \le C\omega_{\widetilde{\delta}}(\varphi, 2Q) \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0.$$

В правой части (7.2.26) мы положили $\widetilde{\delta} := C(n, l, \Theta)\delta$. Из (7.2.26) и определения функции F легко следует, что $\varphi = \operatorname{tr}|_{\mathbb{R}^n} F$.

Теорема полностью доказана.

□

Замечание 7.2.27. В случае $l = 1$, $\gamma(x_1, .., x_{n+1}) = |x_{n+1}|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ все аргументы, использованные при доказательстве теоремы 7.2.1 продолжают работать. Через $\mathrm{B}_{1,1}^{l-1+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ обозначим классическое пространство Бесова. Заметим, что в силу определения 6.8.11 имеем $\{\gamma_k\} = \{2^{k(l-1+\alpha)}\}$. Следовательно, пользуясь равенством $\widetilde{\mathrm{B}}_{1,1}^{l}(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\}) = \mathrm{B}_{1,1}^{l-1+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, которое следует из замечания 6.3.12 (это замечание стоит применять для невесового случая) и теоремы 6.7.6, заключаем, что в таких предположениях наши результаты согласуются с теми, что получены в теоремах 1.1, 1.2 статьи [94].

7.3. Случай $l = 1$

В этом параграфе мы сосредоточимся на проблеме точного описания следа весового пространства Соболева $W_1^l(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$ при $l = 1$. Отметим прежде всего, что эта задача эквивалентна проблеме точного описания следа пространства $W_1^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \gamma)$ на $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Действительно, нетрудно показать, что чётное относительно гиперплоскости $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ продолжение функций даёт непрерывный линейный оператор из $W_1^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \gamma)$ в $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}, \gamma)$.

Прежде чем переходить к строгим формулировкам, нам бы хотелось дать краткое неформальное пояснение сути задачи.

К сожалению, пространство $\widetilde{\mathrm{B}}^1(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})$ является плохим кандидатом на роль пространства следов, если относительно веса γ предполагать лишь его принадлежность классу $A_1^{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$. В самом деле, не трудно видеть, что при $l = 1$ оценка (7.2.9) вообще говоря неверна. Поэтому, нельзя ожидать оценку типа (7.2.13). Но, кроме технических обстоятельств, существуют и более глубокие идеологические предпосылки для непригодности пространства $\widetilde{\mathrm{B}}^1(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\})$ в роли следов пространств $W_1^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \gamma)$. В самом деле, даже в случае $\gamma \equiv 1$ из результата Гальярдо [55] следует равенство $W_1^1(\mathbb{R}_+^{n+1})|_{\mathbb{R}^n} = L_1(\mathbb{R}^n)$. Но в таком

случае, пространство $\widetilde{\mathrm{B}}^1(\mathbb{R}^n, \{\gamma_{k,m}\})$ совпадает с пространством Бесова нулевой гладкости $\mathrm{B}^{0,1}_{1,1}(\mathbb{R}^n)$, которые ввёл Бесов в [5, 6]. При этом из леммы 2 статьи [6] следует, в частности, что $\mathrm{B}^{0,1}_{1,1}(\mathbb{R}^n) \neq L_1(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, пространство следов может содержать функции, не обладающие надлежащими свойствами гладкости. Напомним также, что согласно результату Петре [97], оператор продолжения $\mathrm{Ext} : L_1(\mathbb{R}^n) \to W^1_1(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ (который является правым обратным к оператору следа) не может быть линеен. С другой стороны, для веса $\gamma = \gamma(x,t) = |t|^{-\varepsilon}$ при $\varepsilon \in (0,1)$, методы из §5.1 работают! Для этого достаточно лишь слегка модифицировать оценку (7.2.9). Несмотря на то, что $l - 1 = 0$, мы можем получить скорость геометрической прогрессии, учитывая тот факт, что $\inf_{t\in(0,2^{-k})} t^{-\varepsilon} \geq 2^{\varepsilon} \inf_{t\in(0,2^{-k+1})} t^{-\varepsilon}$.

При $l > 1$ достаточно быстро растущая геометрическая прогрессия $\{2^{kl}\}$ в некотором смысле компенсирует неоднородность веса. Однако, в предельном случае $p = l = 1$ требуется существенно более тонкий анализ локального поведения веса в окрестности точек гиперплоскости, на которой рассматривается след. Важным шагом для соответствующего анализа является построение специальной системы укладок пространства $\mathbb{R}^n$.

В этом параграфе символом Q будем обозначать *замкнутый куб* в $\mathbb{R}^n$ с ребрами параллельными координатным осям, а через $l(Q)$ длину его ребра.

Определение 7.3.1. При $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$ множество двоичных замкнутых кубов $T = \{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ будем называть *укладкой пространства* $\mathbb{R}^n$, если различные кубы в нём имеют непересекающиеся внутренности и при этом $\mathbb{R}^n = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} Q_\alpha$.

Определение 7.3.2. Будем говорить, что укладка $T' = \{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}'}$ *следует за укладкой* $T = \{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ и писать $T' \preceq T$, если каждый куб $Q_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{A}'$ укладки T' содержится в некотором кубе Q_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ укладки T.

Определение 7.3.3. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}_0$ задана укладка $T^s = \{Q^s_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}^s}$, $\mathcal{A}^s \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим также, что $T^{s+1} \preceq T^s$ при всех $s \in \mathbb{N}_0$. Тогда множество $T = \{T^s\} = \{T^s\}_{s=0}^{\infty}$ назовём *системой укладок пространства* $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства основных теорем для нас будет полезным следующий результат.

Лемма 7.3.4. *Пусть $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ – укладка пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $\widetilde{Q}_\alpha := 2\operatorname{int} Q_\alpha$ при $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда существует множество $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, обладающее свойствами:*

($\mathcal{A}1$) $\mathbb{R}^n = \cup_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}} \widetilde{Q}_\alpha$;

($\mathcal{A}2$) *кратность покрытия* $\mathrm{MULT}(\{\widetilde{Q}_\alpha\}_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}}) \leq (n+1)2^n$;

($\mathcal{A}3$) *если* $\widetilde{Q}_\alpha \cap \widetilde{Q}_{\alpha'} \neq \emptyset$, *то* $\mathcal{L}^n(\widetilde{Q}_\alpha \cap \widetilde{Q}_{\alpha'}) \geq C(n,\lambda) \min\{\mathcal{L}^n(Q_{\alpha'}), \mathcal{L}^n(Q_\alpha)\}$;

($\mathcal{A}4$) *каждый куб* $\widetilde{Q}_\alpha, \alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}$ *не содержится в* $\cup_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}},\alpha'\neq\alpha} \widetilde{Q}_{\alpha'}$.

Доказательство. Поскольку множество $\mathcal{A}$ счетно, мы можем перенумеровать все кубы $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ натуральными числами, то есть $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} = \{Q_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Положим $S^0 := \mathcal{A}$. Пусть α_{i_1} – первый индекс, для которого $\widetilde{Q}_{\alpha_{i_1}} \subset \cup_{i\in\mathbb{N}, i\neq i_1}\widetilde{Q}_{\alpha_i}$. Если таких индексов нет, то положим $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ и завершим построение. Иначе, исключим куб Q_{α_1} из нашей системы и рассмотрим индексное множество $S^1 := \mathcal{A}\setminus\{\alpha_{i_1}\}$. Ясно, что $\mathbb{R}^n = \cup_{\alpha\in S^1}\widetilde{Q}_\alpha$. Предположим, что мы уже выбрали индексы $i_1 < ... < i_k$ и построили множества $S^1 \supset .. \supset S^k$. Пусть $i_{k+1} > i_k$ – первое натуральное число, для которого $\widetilde{Q}_{\alpha_{i_{k+1}}} \subset \cup_{\alpha\in S^k, \alpha\neq\alpha_{i_{k+1}}}\widetilde{Q}_\alpha$. Если таких чисел нет, то положим $\widetilde{\mathcal{A}} = S^k$ и завершим построение. Иначе, исключим куб $\widetilde{Q}_{\alpha_{i_{k+1}}}$ из нашей системы и рассмотрим индексное множество $S^{k+1} := S^k\setminus\{\alpha_{i_{k+1}}\}$. Легко проверить, что $\mathbb{R}^n = \cup_{\alpha\in S^{k+1}}\widetilde{Q}_\alpha$. В итоге, либо множество $\widetilde{\mathcal{A}}$ будет построено за конечное число шагов, либо мы построим возрастающую последовательность чисел $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность $S^1 \supset \cdots \supset S^k \supset \ldots$ индексных множеств. В последнем случае положим $\widetilde{\mathcal{A}} = \cap_{k=1}^{\infty} S^k$. Мы утверждаем, что $\widetilde{\mathcal{A}}$ – искомое индексное множество. Проверку свойств $(\mathcal{A}1)$ – $(\mathcal{A}4)$ разобьём на 4 шага.

Шаг 1. По построению $\mathbb{R}^n = \cup_{\alpha\in S^k}\widetilde{Q}^s_\alpha$ при каждом $k\in\mathbb{N}$. Отсюда вытекает свойство $(\mathcal{A}1)$.

Шаг 2. Проверим свойство $(\mathcal{A}4)$. Предположим, что существует куб $\widetilde{Q}_{\alpha^*}$ при $\alpha^*\in\widetilde{\mathcal{A}}$, для которого $\widetilde{Q}_{\alpha^*} \subset \cup_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}\setminus\{\alpha^*\}}\widetilde{Q}_\alpha$. Из построения множества $\widetilde{\mathcal{A}}$ следует существование наибольшего числа $k^*\in\mathbb{N}_0$ и множества $S^{k^*} \supset \widetilde{\mathcal{A}}$, для которых $\widetilde{Q}_{\alpha^*} \subset \cup_{\alpha\in S^{k^*}}\widetilde{Q}_\alpha$. По построению $S^{k^*+1} := S^{k^*}\setminus\{\alpha^*\}$, а значит $\alpha^*\notin\widetilde{\mathcal{A}}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Шаг 3. Проверим свойство $(\mathcal{A}2)$. Для этого фиксируем произвольную точку $x\in\mathbb{R}^n$ и проведём 2^n замкнутых октантов F_j, $j\in\{1,...,2^n\}$, (то есть F_j – подмножества $\mathbb{R}^n$, заключенные между плоскостями, которые параллельны плоскостям $x_i = 0$, $i\in\{1,...,n\}$, и проходят через точку x) с вершиной в точке x. Фиксируем произвольный октант F_j. Если $y\in F_j$, то без ограничения общности считаем, что $y_i \geq x_i$ при всех $i\in\{1,...,n\}$ (если это не так, то поменяем направления осей).

Пусть для краткости $x(\alpha)$ – центр куба Q_α, а l_α – длина его ребра. Пусть

$$\widetilde{\mathcal{A}}_j(x) := \{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}} : x_i(\alpha) \geq x_i \text{ при } i = 1,...,n \text{ и } x\in\widetilde{Q}_\alpha\}.$$

Иными словами, $\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}_j(x)$ в том и только том случае, если центр куба $\widetilde{Q}_\alpha$ лежит в F_j, а куб $\widetilde{Q}_\alpha$ содержит точку x. Достаточно показать, что

$$\#\widetilde{\mathcal{A}}_j(x) \leq n+1. \tag{7.3.5}$$

Для доказательства (7.3.5) сделаем *ключевые наблюдения*. Пусть $\alpha,\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}_j(x)$ и $l_\alpha \geq l_{\alpha'}$. Тогда, учитывая, что куб в $\mathbb{R}^n$ является шаром в $\|\cdot\|_\infty$-норме, нетрудно видеть, что $x(\alpha')\in\widetilde{Q}_\alpha$. Очевидно, что $l_\alpha \neq l_{\alpha'}$, поскольку в силу выбора наших кубов, мы имели бы совпадение

$\widetilde{Q}_\alpha = \widetilde{Q}_{\alpha'}$, что противоречит процедуре построения $\widetilde{\mathcal{A}}$. Следовательно, $l_{\alpha'} \le \frac{l_\alpha}{2}$. Заметим, наконец, что в силу вышесказанного замкнутый куб $Q_{\alpha'}$ не может целиком содержаться в открытом кубе $\widetilde{Q}_\alpha$, потому что иначе мы получили бы включение $\widetilde{Q}_{\alpha'} \subset \widetilde{Q}_\alpha$, которое противоречит построению $\widetilde{\mathcal{A}}$. Но тогда будем иметь

$$x_i(\alpha') - \frac{l_{\alpha'}}{2} = x_i(\alpha) - l_\alpha \quad \text{при некотором} \quad i \in \{1, ..., n\}. \tag{7.3.6}$$

Пусть теперь $\overline{\alpha} \in \widetilde{\mathcal{A}}_j(x)$ – такой индекс, что $l_{\overline{\alpha}} = \max\{l_\alpha : \alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}_j(x)\}$. Фиксируем некоторое $i \in \{1, ..., n\}$. Предположим, что существуют различные $\alpha, \alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}_j(x)$, для которых

$$x_i(\alpha') - \frac{l_{\alpha'}}{2} = x_i(\alpha) - l_\alpha \quad \text{и} \quad x_i(\alpha') - \frac{l_{\alpha'}}{2} = x_i(\overline{\alpha}) - l_{\overline{\alpha}}.$$

Отсюда, учитывая предыдущие наблюдения, будем иметь

$$x_i(\alpha) - l_\alpha = x_i(\overline{\alpha}) - l_{\overline{\alpha}} \quad \text{и} \quad l_\alpha \le \frac{l_{\overline{\alpha}}}{2}.$$

Но это означает, что на числовой прямой существует два таких двоичных открытых интервала I_1, I_2, что $l(I_2) \le \frac{1}{2} l(I_1)$ и при этом левый конец интервала $2I_1$ совпадает с левым концом интервала $2I_2$. Очевидно, что такое невозможно. Полученное противоречие означает, что для любого $i \in \{1, ..., n\}$ существует не более одного индекса α^i с условием $x_i(\alpha^i) - \frac{l_{\alpha^i}}{2} = x_i(\overline{\alpha}) - l_{\overline{\alpha}}$. Отсюда и из (7.3.6) легко вытекает (7.3.5).

Шаг 4. Проверим теперь свойство (3). Предположим, что $\widetilde{Q}_\alpha \cap \widetilde{Q}_{\alpha'} \ne \emptyset$. Пусть $l_0 = \frac{1}{2}\min\{l_\alpha, l_{\alpha'}\}$. Тогда кубы $\widetilde{Q}_\alpha$ и $\widetilde{Q}_{\alpha'}$ могут быть представлены как объединение двоичных кубов (возможно, содержащими лишь части своих границ) с длиной ребра l_0. Но двоичные кубы с одинаковой длиной ребра либо имеют непересекающиеся внутренности, либо совпадают. Следовательно, существует по меньшей мере один куб с длиной ребра l_0, который содержится и в кубе $\widetilde{Q}_\alpha$, и в кубе $\widetilde{Q}_{\alpha'}$ (поскольку пересечение этих кубов непусто). Отсюда легко вытекает требуемая оценка.

□

Обозначения. Для куба Q в $\mathbb{R}^n$ положим $\widetilde{Q} := 2Q$. При $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ положим

$$\Pi_{k,m} := Q_{k,m} \times (0, 2^{-k}), \qquad \widetilde{\Pi}_{k,m} := \widetilde{Q}_{k,m} \times (0, 2^{-k}),$$
$$\widehat{\gamma}_{k,m} := 2^{k(n+1)} \iint\limits_{\Pi_{k,m}} \gamma(x,t)\, dx\, dt, \qquad \gamma_{k,m} := \iint\limits_{\Pi_{k,m}} \gamma(x,t)\, dx\, dt.$$

Если $T = \{Q_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ – укладка пространства $\mathbb{R}^n$, то через $\widetilde{\mathcal{A}}$ всегда будем обозначать индексное множество, построенное в лемме 7.3.4.

Пусть $T = \{T^s\}$ – система укладок пространства $\mathbb{R}^n$. Применяя лемму 7.3.4 при каждом $s \in \mathbb{N}_0$ к укладке T^s, получим покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ кубами $\mathcal{Q}^s := \{\widetilde{Q}^s_\alpha\}_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s}$.

В случаях, когда нам известно, что $\alpha = (k,m) \in \mathcal{A}^s \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$, то вместо символов $\Pi_{k,m}$, $\widetilde{\Pi}_{k,m}$, $\widehat{\gamma}_{k,m}$ и $\gamma_{k,m}$ будем использовать символы Π^s_α, $\widetilde{\Pi}^s_\alpha$, $\widehat{\gamma}^s_\alpha$ и γ^s_α соответственно.

Для функции $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и заданной системы укладок $T = \{T^s\}$ положим

$$\varphi^s_\alpha = \fint\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} \varphi(x)\,dx \quad \text{при} \quad s \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s.$$

Через q обозначим наименьшее число $C \geq 1$, для которого выполнены следующие условия:

(q1) при любых $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $Q_{k,m'} \subset 8Q_{k,m}$ справедливо неравенство

$$2^{k(n+1)} \iint\limits_{8Q_{k,m}\times(0,\frac{1}{2^k})} \gamma(x,t)\,dt\,dx \leq C\widehat{\gamma}_{k,m'};$$

(q2) при любом $k \in \mathbb{N}_0$ и любых $m, m' \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющих условию $\|m - m'\|_\infty \leq 1$,

$$\widehat{\gamma}_{k,m} \leq \frac{C}{2}\widehat{\gamma}_{k,m'}; \tag{7.3.7}$$

(q3) для любых $k, j \in \mathbb{N}_0$ и $m, m', m'' \in \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющих условию $Q_{k+j,m'} \subset Q_{k,m}$, $Q_{k+1,m''} \subset Q_{k,m}$ справедливы неравенства

$$\widehat{\gamma}_{k,m} \leq \frac{C}{2}\widehat{\gamma}_{k+j,m'}, \qquad \widehat{\gamma}_{k+1,m'} \leq \frac{C}{2}\widehat{\gamma}_{k,m}. \tag{7.3.8}$$

Роль параметра q станет ясна на шаге 1 доказательства теоремы 7.3.10.

Определение 7.3.9. Пусть $c_1, c_2 \geq 1$. Система укладок $T = \{T^s\} = \{T^s\}_{s=0}^\infty(c_1,c_2)$ пространства $\mathbb{R}^n$ ($T^s = \{Q^s_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}^s}$, где $s \in \mathbb{N}_0$), называется *допустимой для веса* γ если при любом $s \in \mathbb{N}_0$ выполнены следующие условия:

(T1) если $\widetilde{Q}^s_\alpha \cap \widetilde{Q}^s_{\alpha'} \neq \varnothing$, то $\widehat{\gamma}^s_\alpha \leq c_1\widehat{\gamma}^s_{\alpha'}$ при $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}^s$;

(T2) если $Q^{s+1}_{\alpha'} \subset Q^s_\alpha$, то $\widehat{\gamma}^s_\alpha \leq c_2\widehat{\gamma}^{s+1}_{\alpha'}$ и $\widehat{\gamma}^{s+1}_{\alpha'} \leq c_2\widehat{\gamma}^s_\alpha$ при $\alpha \in \mathcal{A}^s$, $\alpha' \in \mathcal{A}^{s+1}$;

(T3) $\max\{l(Q^{s+1}_{\alpha'}) : x \in \widetilde{Q}^{s+1}_{\alpha'}\} \leq \frac{1}{2}\min\{l(Q^s_\alpha) : x \in \widetilde{Q}^s_\alpha\}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

(T4) $l(Q^s_\alpha) \geq 2^{-l_s}$, $\alpha \in \mathcal{A}^s$, для некоторой последовательности $\{l_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathbb{N}_0$ при $l_0 = 0$.

Докажем сначала так называемую "прямую теорему о следах". Напомним замечание 6.8.6.

Теорема 7.3.10. *Существуют константы $c_1 = c_1(n, C_\gamma), c_2 = c_2(n, C_\gamma) \geq 1$ такие, что для любого элемента $F \in W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}_+, \gamma)$ найдётся допустимая для веса γ система укладок $T = \{T^s\}(c_1,c_2)$ пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что (мы полагаем $\varphi := \operatorname{tr}|_{\mathbb{R}^n} F$)*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\gamma}_{0,m}\|\varphi\|_{L_1(Q_{0,m})} + \sum_{s=1}^\infty \sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s} \widehat{\gamma}^s_\alpha \fint\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi^s_\alpha - \varphi(x)|\,dx \leq C\|F\|_{W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)}. \tag{7.3.11}$$

Константа $C > 0$ в (7.3.11) зависит только от $n, C_\gamma, \lambda, c_1, c_2$.

Доказательство. Фиксируем элемент $F \in W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}_+, \gamma)$ и положим $\varphi := \operatorname{tr}|_{\mathbb{R}^n} F$. Остаток доказательства разобьём на несколько шагов.

Шаг 1. Фиксируем произвольную функцию $F \in W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}_+, \gamma)$ и построим допустимую для веса γ систему укладок пространства $\mathbb{R}^n$. Для этого мы сперва построим вспомогательную систему укладок $\{\mathring{T}^s\}$, удовлетворяющую условиям (T1), (T2) и (T4) определения 7.3.9, а затем при подходящем $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$ выберем подсистему $\{T^s\} := \{\mathring{T}^{rs}\}$ системы $\{\mathring{T}^s\}$.

Пусть $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ – такая строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, что $l_0 = 0$ и при каждом $j \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\|F\|_{W_1^1(\mathbb{R}^n \times (0, 2^{-l_{j+1}}))} \le \frac{1}{2} \|F\|_{W_1^1(\mathbb{R}^n \times (0, 2^{-l_j}))}. \tag{7.3.12}$$

Построим требуемую систему укладок $\{\mathring{T}^s\}$ по индукции. Напомним, что все двоичные кубы по умолчанию считаются замкнутыми.

База индукции. Сначала построим укладку $\mathring{T}^0$. Для этого положим $\mathring{T}^0 := \{Q_{0,m}\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$, $\mathring{\mathcal{A}}^0 := \{0\} \times \mathbb{Z}^n$, и при каждом $m \in \mathbb{Z}^n$ покрасим куб $Q_{0,m}$ в желтый цвет.

Шаг индукции. Предположим, что при некотором $s \in \mathbb{N}_0$ построена укладка $\mathring{T}^s = \{Q^s_\alpha\}_{\alpha \in \mathring{\mathcal{A}}^s}$. Построим укладку $\mathring{T}^{s+1}$. Фиксируем куб Q^s_α при некотором $\alpha \in \mathring{\mathcal{A}}^s$. Предположим, что $\widehat{\gamma}^s_\alpha \in [q^j, q^{j+1})$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$. Разобьем куб Q^s_α на двоичные кубы (скажем $Q_{k,m}$) с вдвое меньшей длиной ребра. Среди этих кубов отберём те, для которых $\widehat{\gamma}_{k,m} > q^{j+1}$ и покрасим их в синий цвет. Заметим, что в силу оценки (7.3.8) имеем $\widehat{\gamma}_{k,m} \in (q^{j+1}, \frac{q^{j+2}}{2}]$ (здесь важно, что параметр q достаточно большой!). Разобьём оставшиеся кубы на кубы $Q_{k+1,m'}$, выберем те из них, для которых $\widehat{\gamma}_{k+1,m'} > q^{j+1}$ и покрасим их в синий цвет. Этот процесс мы продолжаем до тех пор, пока длины рёбер соответствующих кубов не станут равны $2^{-l_{s+1}}$. В этом случае мы либо получим укладку куба Q^s_α, состоящую только из синих кубов, либо найдутся кубы $Q_{l_{s+1},m''} \subset Q^s_\alpha$, для которых $\widehat{\gamma}_{l_{s+1},m''} \le q^{j+1}$. В последнем случае мы покрасим такие кубы в желтый цвет. В итоге укладка куба Q^s_α будет состоять из таким образом отобранных синих кубов и оставшихся желтых кубов. Объединяя укладки кубов Q^s_α по всем $\alpha \in \mathring{\mathcal{A}}^s$, получим укладку $\mathring{T}^{s+1}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Наконец, через $\mathring{\mathcal{A}}^{s+1}$ обозначим множество всех пар $(k, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$, для которых $Q_{k,m} \in \mathring{T}^{s+1}$.

Очевидно, для любого $s \in \mathbb{N}_0$ укладка $\mathring{T}^s$ из счетного семейства двоичных кубов. Если мы применим лемму 7.3.4 при каждом $s \in \mathbb{N}$ к укладке $\mathring{T}^s$, то получим покрытие $\mathcal{Q}^s := \{\widetilde{Q}^s_\alpha\}_{\alpha \in \widetilde{\mathring{\mathcal{A}}}^s}$.

Теперь проверим, что система укладок $\{\mathring{T}^s\}$ удовлетворяет условиям (T1), (T2) и (T4) определения 7.3.9 (в этих условиях индексные множества $\mathcal{A}^s$ должны быть заменены на $\mathring{\mathcal{A}}^s$).

Сделаем **ключевое наблюдение**, заключающееся в следующем: если Q^s_α – желтый, то $l(Q^s_\alpha) = 2^{-l_s}$, а если Q^s_α – синий, то $l(Q^s_\alpha) \ge 2^{-l_s}$.

Условие (T4), очевидно, выполнено по построению.

Мы утверждаем, что условие (T1) определения 7.3.9 удовлетворено с константой $c_1 = q^3$. Пусть $\widetilde{Q}^s_\alpha \cap \widetilde{Q}^s_{\alpha'} \neq \emptyset$ при $\alpha, \alpha' \in \mathring{\mathcal{A}}^s$. Предположим, что $\widehat{\gamma}^s_{\alpha'} > q^3 \widehat{\gamma}^s_\alpha$. Для любого куба Q^s_α пусть $b(Q^s_\alpha)$ обозначает количество синих кубов $Q^j_{\alpha'} \supset Q^s_\alpha$ (при $j \leq s$ и $\alpha' \in \mathring{\mathcal{A}}^j$). Из наших предположений следует, что существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 > 1$, что $b(Q^s_{\alpha'}) = k_0 + b(Q^s_\alpha)$. Но тогда существуют синий куб $Q^{s_0}_{\alpha'_0} \supset Q^s_{\alpha'}$ и желтый куб $Q^{s_0}_{\alpha_0} \supset Q^s_\alpha$ такие, что $\widehat{\gamma}^{s_0}_{\alpha'_0} \geq q^{k_0 - 1} \widehat{\gamma}^{s_0}_{\alpha_0}$. В силу ключевого наблюдения имеем $l(Q^{s_0}_{\alpha_0}) \leq l(Q^{s_0}_{\alpha'_0})$. Кроме того, $\widetilde{Q}^{s_0}_{\alpha_0} \cap \widetilde{Q}^{s_0}_{\alpha'_0} \neq \emptyset$, потому что $\widetilde{Q}^s_\alpha \cap \widetilde{Q}^s_{\alpha'} \neq \varnothing$. Но тогда $Q^{s_0}_{\alpha_0} \subset 3Q^{s_0}_{\alpha'_0}$, а следовательно, $\widehat{\gamma}^{s_0}_{\alpha_0} \geq \frac{2}{q} \widehat{\gamma}^{s_0}_{\alpha'_0}$. Мы пришли к противоречию.

Проверим условие (T2). Пусть Q^s_α – родитель для куба $Q^{s+1}_{\alpha'}$. По построению системы укладок имеем $\widehat{\gamma}^s_\alpha \leq \widehat{\gamma}^{s+1}_{\alpha'}$ и $\widehat{\gamma}^{s+1}_{\alpha'} \leq q \widehat{\gamma}^s_\alpha$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 5$. Рассмотрим систему укладок $\{T^s\} := \{\mathring{T}^{rs}\}$ и положим $\mathcal{A}^s := \mathring{\mathcal{A}}^{rs}$. Очевидно, система укладок $\{T^s\}$ удовлетворяет условиям (T1), (T2) (с константами $c_1 = q^3$, $c_2 = q^r$) и (T4) определения 7.3.9.

Проверим теперь условие (T3) определения 7.3.9. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\widetilde{Q}^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}} \ni x$ – куб с наибольшей длиной ребра среди множества тех кубов из $\{\widetilde{Q}^{r(s+1)}_\alpha\}_{\alpha \in \mathring{\mathcal{A}}^{r(s+1)}}$, которые содержат точку x (такой куб может быть не единственный). Пусть $\widetilde{Q}^{rs}_{\underline{\alpha}} \ni x$ – куб с наименьшей длиной ребра среди все кубов из семейства $\{\widetilde{Q}^{rs}_\alpha\}_{\alpha \in \mathring{\mathcal{A}}^{rs}}$, каждый из которых содержит точку x (такой куб также может быть не единственным). Рассмотрим следующую цепочку вложенных друг в друга двоичных кубов $Q^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}} \subset \ldots. \subset Q^{rs}_{\alpha^*}$, в которой каждый следующий куб – единственный двоичный куб из соответствующего семейства T^j при некотором $j \in \{rs, ..., r(s+1)\}$.

Если эта цепочка содержит хотя бы один желтый куб, то мы получаем требуемый результат. Действительно, по построению, для любого куба Q^{rs}_α при $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ (а значит и для $Q^{rs}_{\alpha'}$) имеем оценку $l(Q^{rs}_\alpha) \geq 2^{-l_{rs}}$. Если куб $Q^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}}$ – желтый, то $l(Q^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}}) = 2^{-l_{r(s+1)}} < \frac{1}{2} 2^{-l_{rs}} \leq \frac{1}{2} l(Q^{rs}_{\underline{\alpha}})$. Если есть ещё другой желтый куб в этой цепочке, то длина ребра этого куба, очевидно, меньше либо равна $2^{-l_{rs}}$. Куб $Q^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}}$ лежит строго внутри него и поэтому $l(Q^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}}) \leq \frac{1}{2} 2^{-l_{rs}} \leq \frac{1}{2} l(Q^{rs}_{\underline{\alpha}})$. В обоих случаях условие (T3) выполнено.

Предположим теперь, что все кубы в цепочке синие. Предположим, что $\widetilde{Q}^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}} \cap \widetilde{Q}^{rs}_{\underline{\alpha}} \neq \varnothing$ и $r(Q^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}}) \geq \frac{1}{2} r(Q^{rs}_{\underline{\alpha}})$. Тогда $Q^{rs}_{\underline{\alpha}} \subset 8Q^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}}$, и следовательно, $\widehat{\gamma}^{rs}_{\underline{\alpha}} \geq \frac{2}{q} \widehat{\gamma}^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}}$. С другой стороны, поскольку все кубы в цепочке $Q^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}} \subset \ldots. \subset Q^{rs}_{\alpha^*}$ синие и $r \geq 5$, имеем оценку $\widehat{\gamma}^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}} \geq q^4 \widehat{\gamma}^{rs}_{\alpha^*}$. Следовательно, поскольку $x \in \widetilde{Q}^{rs}_{\alpha^*} \cap \widetilde{Q}^{rs}_{\underline{\alpha}}$ в силу условия (T1) применённого при $c_1 = q^3$ имеем $\widehat{\gamma}^{rs}_{\underline{\alpha}} \leq q^3 \widehat{\gamma}^{rs}_{\alpha^*}$, а значит $\widehat{\gamma}^{r(s+1)}_{\overline{\alpha}} \geq q \widehat{\gamma}^{rs}_{\underline{\alpha}}$. Это противоречие завершает проверку условия (T3).

Шаг 2. Мы утверждаем, что справедлива оценка (7.3.11). Её вывод будет занимать последующие шаги. При каждом $s \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\widetilde{\mathcal{A}}^s(y) := \{\alpha \in \mathcal{A}^s : Q^s_\alpha - \text{жёлтый}\}, \quad \widetilde{\mathcal{A}}^s(b) := \{\alpha \in \mathcal{A}^s : Q^s_\alpha - \text{синий}\}.$$

Шаг 3. Рассуждая как при доказательстве леммы 3.1 из [16], заключаем, что при каждом $s \in \mathbb{N}_0$ и любом $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ справедливы неравенства

$$\int\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi^s_\alpha - \varphi(x)|\,dx \le \frac{1}{\mathcal{L}^n(\widetilde{Q}^s_\alpha)} \int\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha}\int\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi(x) - \varphi(y)|\,dx\,dy \le \iint\limits_{\widetilde{\Pi}^s_\alpha} |\nabla F(x,t)|\,dx\,dt. \tag{7.3.13}$$

Из (7.3.13) следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s} \widehat{\gamma}^s_\alpha \int\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi^s_\alpha - \varphi(x)|\,dx \le \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s} \widehat{\gamma}^s_\alpha \iint\limits_{\widetilde{\Pi}^s_\alpha} |\nabla F(x,t)|\,dx\,dt \le \\ &\le \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s(y)} \widehat{\gamma}^s_\alpha \iint\limits_{\widetilde{\Pi}^s_\alpha} |\nabla F(x,t)|\,dxdt + \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s(b)} \widehat{\gamma}^s_\alpha \iint\limits_{\widetilde{\Pi}^s_\alpha} |\nabla F(x,t)|\,dx\,dt = S_1 + S_2. \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

Шаг 4. Сумма S_1 легко оценивается сверху с помощью (7.3.12). Используя факт конечной (не зависящей от j и m) кратности перекрытия множеств $\widetilde{\Pi}_{l_j,m}$ (когда индекс j фиксирован, а m переменный) и предложение 1.2.38, приходим к оценке

$$\begin{aligned} &S_1 \le C\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s(y)} \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in\widetilde{\Pi}^s_\alpha} \gamma(x,t) \iint\limits_{\widetilde{\Pi}^s_\alpha} |\nabla F(x,t)|\,dt\,tx \le \\ &\le C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \iint\limits_{\widetilde{\Pi}_{l_j,m}} \gamma(x,t)|\nabla F(x,t)|\,dx\,dt \le C\sum_{j=0}^{\infty} \|F\|_{W^1_1(\mathbb{R}^n\times(0,\frac{1}{2^{l_j}}),\gamma)} \le C\|F\|_{W^1_1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)}. \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

Заметим, что константа $C > 0$ в правой части (7.3.15) зависит только от λ, n, C_γ.

Шаг 5. При $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ положим

$$G^s_\alpha := \widetilde{\Pi}^s_\alpha \setminus \Big(\bigcup_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s+1}} \widetilde{\Pi}^s_{\alpha'}\Big).$$

В силу проверенного выше свойства (T3), имеем $G^s_\alpha \ne \emptyset$. Кроме того, нетрудно видеть, что

$$\operatorname{MULT}(\{G^s_\alpha : s \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s\}) < +\infty. \tag{7.3.16}$$

Действительно, если $G^s_\alpha \cap G^{s'}_{\alpha'} \ne \emptyset$, то $s = s'$. Но тогда $\widetilde{Q}^s_\alpha \cap \widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'} \ne \emptyset$. В силу выбора индексного множества $\widetilde{\mathcal{A}}^s$ в соответствии с леммой 7.3.4 завершаем доказательство (7.3.16).

Сумма S_2 оценивается сверху следующим образом (мы меняем порядок суммирования по (s,α) и (j,α'), соответственно)

$$
\begin{aligned}
S_2 &\le \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s(b)} \widehat{\gamma}_\alpha^s \sum_{j=s}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j \\ \widetilde{Q}_\alpha^s\cap\widetilde{Q}_{\alpha'}^j\neq\emptyset}} \iint\limits_{G_{\alpha'}^j} \|\nabla F(x,t)\|_2\,dx\,dt \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j} \sum_{s=0}^{j} \sum_{\substack{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s(b) \\ \widetilde{Q}_\alpha^s\cap\widetilde{Q}_{\alpha'}^j\neq\emptyset}} \widehat{\gamma}_\alpha^s \|F\|_{W_1^1(G_{\alpha'}^j\cap\widetilde{\Pi}_\alpha^s)}.
\end{aligned}
\tag{7.3.17}
$$

Шаг 6. Основная идея, которую нужно использовать для продолжения оценки (7.3.17) близка той, что использована в (7.2.13). Однако, здесь мы сталкиваемся с некоторыми существенными техническими трудностями. Во-первых, диаметры множеств $\widetilde{\Pi}_\alpha^s$ (в правой части (7.3.17)) могут существенно отличаться друг относительно друга при фиксированном s и переменном α. Следовательно, количество кубов $\widetilde{Q}_\alpha^s$, пересекающий фиксированный куб $\widetilde{Q}_{\alpha'}^j$, может быть весьма велико. Во-вторых, требуется более деликатный анализ поведения чисел $\widehat{\gamma}_\alpha^s$. В отличие от (7.2.13), мы не можем работать с этими числами, как с элементами геометрической прогрессии. Действительно, взяв числа $\widehat{\gamma}_{\alpha_1}^{s_1}$, $\alpha_1\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s_1}$ и $\widehat{\gamma}_{\alpha_2}^{s_2}$, $\alpha_2\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s_2}$ так, что $\widetilde{Q}_{\alpha_1}^{s_1}\cap\widetilde{Q}_{\alpha'}^j\neq\emptyset$ и $\widetilde{Q}_{\alpha_2}^{s_2}\cap\widetilde{Q}_{\alpha'}^j\neq\emptyset$, мы не можем гарантировать, что хотя бы одно из включений $Q_{\alpha_1}^{s_1}\subset Q_{\alpha_2}^{s_2}$ или $Q_{\alpha_2}^{s_2}\subset Q_{\alpha_1}^{s_1}$ имеет место. Основная идея состоит в том, чтобы построить цепочку кубов $Q_{\alpha'}^j\subset\ldots\subset Q_{\alpha''}^0$ и заботиться только о числах $\widehat{\gamma}_{\alpha'}^j,..,\widehat{\gamma}_{\alpha''}^0$. Эти числа играют роль "скелета", на котором "держатся" оставшиеся числа $\widehat{\gamma}_\alpha^s$. Далее мы разбиваем множество $\{\widehat{\gamma}_{\alpha'}^j,..,\widehat{\gamma}_{\alpha''}^0\}$ на два подмножества. Первое из них будет содержать те числа, которые ведут себя как геометрическая прогрессия. Второе содержит те числа, которые, неформально говоря, не ведут себя как члены геометрической прогрессии. Во втором случае будет снова полезна оценка (7.3.12). Перейдём теперь к формальным рассуждениям.

Чтобы продолжить (7.3.17) нам нужно следующее важное наблюдение. Фиксируем число $j\in\mathbb{N}_0$ и индекс $\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j$. При $s\in\{0,\ldots,j\}$ пусть $Q_{\beta_s(\alpha')}^s$ ($\beta_s(\alpha')\in\mathcal{A}^s$) обозначает единственный двоичный куб из укладки T^s, который содержит куб $Q_{\alpha'}^j$.

Далее используем тот факт, что система укладок $T=\{T^s\}$ является допустимой для веса γ (условие (T1)), применим утверждение $(\mathcal{A}2)$ леммы 7.3.4, и наконец воспользуемся предложением 1.2.38, поскольку при каждом фиксированном s

$$
\mathrm{MULT}(\{\widetilde{\Pi}_\alpha^s:\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s\})\le\mathrm{MULT}(\{\widetilde{Q}_\alpha^s:\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s\})\le(n+1)2^n.
$$

В итоге имеем

$$\sum_{s=0}^{j}\sum_{\substack{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s(b)\\ \widetilde{Q}^s_\alpha\cap\widetilde{Q}^j_{\alpha'}\neq\emptyset}}\widehat{\gamma}^s_\alpha\|F\|_{W^1_1(G^j_{\alpha'}\cap\widetilde{\Pi}^s_\alpha)}\le c_1\sum_{s=0}^{j}\widehat{\gamma}^s_{\beta_s(\alpha')}\sum_{\substack{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s\\ \widetilde{Q}^s_\alpha\cap\widetilde{Q}^j_{\alpha'}\neq\emptyset}}\|F\|_{W^1_1(G^j_{\alpha'}\cap\widetilde{\Pi}^s_\alpha)}$$
$$\le C(c_1,n)\sum_{s=0}^{j}\widehat{\gamma}^s_{\beta_s(\alpha')}\|F\|_{W^1_1(G^j_{\alpha'})}. \tag{7.3.18}$$

Далее разобьём множество $\{0,\dots,j\}$ на два непересекающихся подмножества, то есть $\{0,\dots,j\}={}^1\Gamma^j_\alpha\cup{}^2\Gamma^j_\alpha$, где мы полагаем

$${}^1\Gamma^s_{\alpha'}:=\{s=0,\dots,j\mid Q^s_{\beta_s(\alpha)}-\text{синий}\},\quad {}^2\Gamma^j_{\alpha'}:=\{s=0,\dots,j\mid Q^s_{\beta_s(\alpha)}-\text{желтый}\}.$$

Продолжим работать с (7.3.17). Используя (7.3.18), имеем

$$S_2\le\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j}\Big(\sum_{s\in{}^1\Gamma^j_{\alpha'}}\widehat{\gamma}^s_{\beta_s(\alpha')}\Big)\|F\|_{W^1_1(G^j_{\alpha'})}$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j}\Big(\sum_{s\in{}^2\Gamma^j_{\alpha'}}\widehat{\gamma}^j_{\beta_j(\alpha')}\Big)\|F\|_{W^1_1(G^j_{\alpha'})}=:S_{2,1}+S_{2,2}. \tag{7.3.19}$$

Шаг 7. В силу построения синих кубов имеем (константа $C>0$ зависит лишь от q):

$$\sum_{s\in{}^1\Gamma^j_{\alpha'}}\widehat{\gamma}^s_{\beta_s(\alpha')}\le C\widehat{\gamma}^j_{\alpha'}. \tag{7.3.20}$$

Из (7.3.20), используя (7.3.16), предложение 1.2.38, замечание 1.2.117 и предложение 1.2.118, выводим цепочку неравенств

$$S_{2,1}\le C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j}\widehat{\gamma}^j_{\alpha'}\|F\|_{W^1_1(G^j_{\alpha'})}\le C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j}\|F\|_{W^1_1(G^j_{\alpha'},\gamma)}\le C\|F\|_{W^1_1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)}. \tag{7.3.21}$$

Шаг 8. При $i\in\mathbb{N}_0$, $m\in\mathbb{Z}^n$ положим

$$U_{l_i,m}:=\Pi_{l_i,m}\setminus\bigcup_{m'\in\mathbb{Z}^n}\Pi_{l_{i+1},m'}.$$

Для дальнейшего изложения полезно напомнить, что любой желтый куб имеет вид $Q_{l_j,m}$ при некоторых $j\in\mathbb{N}_0$ и $m\in\mathbb{Z}^n$. Для оценки $S_{2,2}$ нам потребуется следующее ключевое наблюдение. Фиксируем $j\in\mathbb{N}_0$ и $\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j$. Пусть $U_{l_i,m}\cap G^j_{\alpha'}\neq\emptyset$ для некоторых $i\in\mathbb{N}_0$ и $m\in\mathbb{Z}^n$. Мы утверждаем, что $l(Q_{l_i,m})\le l(Q^{s_0}_{\beta_{s_0}(\alpha')})$, где $s_0=\max\{s|s\in{}^2\Gamma^j_{\alpha'}\}$. Действительно, в противном случае $l(Q_{l_i,m})>l(Q^{s_0}_{\beta_{s_0}(\alpha')})$, и следовательно, $l(Q_{l_{i+1},m})\ge l(Q^{s_0}_{\beta_{s_0}(\alpha')})$, поскольку куб $Q^{s_0}_{\beta_{s_0}(\alpha')}$ – желтый. Но тогда имеем включение $G^j_{\alpha'}\subset\cup_{m'\in\mathbb{Z}^n}\Pi_{l_{i+1},m'}$, которое противоречит условию $U_{l_i,m}\cap G^j_{\alpha'}\neq\emptyset$. Кроме того, если куб $Q^j_{\alpha'}\subset Q^s_{\beta_s(\alpha')}$ при $s\in{}^2\Gamma^j_{\alpha'}$, то поскольку $Q^s_{\beta_s(\alpha')}$-желтый и как показано выше $l(Q_{l_i,m})\le l(Q^s_{\beta_s(\alpha')})$, найдется куб $Q_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}}\supset Q_{l_i,m}$ при $\widetilde{s}\in\{0,...,i\}$,

для которого $l(Q^s_{\beta_s(\alpha')}) = l(Q_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}})$. Нетрудно видеть, что куб $Q_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}}$ имеет общие граничные точки с кубом $Q^s_{\beta_s(\alpha')}$. Это наблюдение в комбинации с (7.3.8) позволяет получить оценку

$$\sum_{s\in{}^2\Gamma^j_{\alpha'}} \widehat{\gamma}^s_{\beta_s(\alpha')} \le q\sum_{\widetilde{s}=0}^{i}\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{l_i,m}\subset Q_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}}}} \widehat{\gamma}_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}} =: Ct_{l_i,m}. \tag{7.3.22}$$

Используя (7.3.22), (7.3.16) и предложение 1.2.38, мы два раза меняем порядок суммирования (сперва по (j,α') и (i,m), а затем по (i,m) и $(\widetilde{s},\widetilde{m})$) и учтём равенство $\Pi_{l_j,m'} = \cup\{U_{l_i,m} : Q_{l_i,m}\subset Q_{l_j,m'}\}$, оценку (1.2.112) и оценку (7.3.12). В итоге имеем

$$\begin{aligned} S_{2,2} &\le C\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^j}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} t_{l_i,m}\|F\|_{W^1_1(G^j_{\alpha'}\cap U_{l_i,m})}\\ &\le C\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\Big(\sum_{\widetilde{s}=0}^{i}\sum_{\substack{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n\\ Q_{l_i,m}\subset Q_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}}}}\widehat{\gamma}_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}}\Big)\|F\|_{W^1_1(U_{l_i,m})} \le C\sum_{\widetilde{s}=0}^{\infty}\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\gamma}_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}}\|F\|_{W^1_1(\Pi_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}})}\\ &\le C\sum_{\widetilde{s}=0}^{\infty}\sum_{\widetilde{m}\in\mathbb{Z}^n}\|F\|_{W^1_1(\Pi_{l_{\widetilde{s}},\widetilde{m}},\gamma)} \le C\sum_{s=0}^{\infty}\|F\|_{W^1_1(\mathbb{R}^n\times(0,2^{-l_s}),\gamma)} \le C\|F\|_{W^1_1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)}. \end{aligned} \tag{7.3.23}$$

Комбинируя оценки (7.3.19), (7.3.21), (7.3.23), получаем, что

$$S_2 \le C\|F\|_{W^1_1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)}, \tag{7.3.24}$$

где константа $C>0$ зависит только от $C_\gamma, n, \lambda, c_1, c_2, q$.

Шаг 9. Теперь оценка (7.3.11) следует из (7.2.5), (7.3.14), (7.3.15), (7.3.24). Этим доказательство теоремы завершено.

□

Для дальнейшего нам потребуется специальное разбиение единицы на $\mathbb{R}^n\times(0,2)$. Пусть $T=\{T^s\}_{s=0}^{\infty}(c_1,c_2)$ – допустимая для веса γ система укладок пространства $\mathbb{R}^n$. При этом, если $T^s=\{Q^s_\alpha : \alpha\in\mathcal{A}^s\}$, то индексное множество $\widetilde{\mathcal{A}}^s$ строится по лемме 7.3.4. Напомним, что $\widetilde{Q}_{k,m} = 2Q_{k,m}$ при $(k,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{Z}^n$. Аналогично, $\widetilde{Q}^s_\alpha = 2Q^s_\alpha$ при $s\in\mathbb{N}_0$ и $\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s$.

Нам будет удобно ввести некоторые операции, связывающие двоичные кубы в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n+1}$, соответственно. Если $Q_{k,m}$ – двоичный куб в $\mathbb{R}^n$, то определим *его поднятие* $\hat{Q}_{k,m}$, полагая

$$\hat{Q}_{k,m} := Q_{k,m}\times\Big[\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k-1}}\Big].$$

Если же Q – двоичный куб в $\mathbb{R}^{n+1}$, то через $\check{Q}$ обозначим *его ортогональную проекцию на* $\mathbb{R}^n\times\{0\}$. Заметим, что в таком случае $\check{Q}$ является двоичным кубов в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем счётное семейство функций $\{\theta_{k,m}\}_{k\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}^n}\subset C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ такое, что:

(θ1) Для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ неравенства $0 < \theta_{k,m}(x) \leq 1$ справедливы при всех $x \in \widetilde{Q}_{k,m}$, а равенство $\theta_{k,m}(x) = 0$ справедливо при всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \widetilde{Q}_{k,m}$.

(θ2) Существует константа $C_\theta > 0$ такая, что для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ неравенство $\|\nabla \theta_{k,m}(x)\|_\infty \leq C_\theta 2^k$ справедливо при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

(θ3) Для любого $k \in \mathbb{N}_0$ равенство $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \theta_{k,m}(x) = 1$ справедливо при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Далее, зафиксируем счётное семейство функций $\{\psi_k\} \subset C_0^\infty((0,\infty))$ такое, что:

(ψ1) Для любого $k \in \mathbb{N}_0$ неравенства $0 < \psi_k(t) \leq 1$ выполнены при всех $t \in (\frac{7}{8}2^{-k}, \frac{9}{8}2^{-k+1})$, а равенство $\psi_k(t) = 0$ при всех $t \in (0,+\infty) \setminus (\frac{7}{8}2^{-k}, \frac{9}{8}2^{-k+1})$.

(ψ2) Существует константа $C_\psi > 0$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}_0$ неравенство $|\frac{d\psi_k}{dt}(t)| \leq C_\psi 2^k$ справедливо при всех $t \in (0,+\infty)$.

(ψ3) Для любого $k \in \mathbb{N}_0$ равенство $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \psi_k(t) = 1$ справедливо при всех $t \in (0,2)$.

Наконец, положим

$$\Theta_{k,m} = \theta_{k,m}\psi_k \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n.$$

Из (θ1)–(θ3) и (ψ1)–(ψ3) ясно, что $\Theta_{k,m} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \Theta_{k,m}(x,t) = 1, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,2). \tag{7.3.25}$$

Кроме того, для любой пары $(k,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n$ имеем

$$\|\nabla \Theta_{k,m}(x,t)\|_\infty \leq C_\theta C_\psi 2^k, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+. \tag{7.3.26}$$

Для дальнейшего нам потребуются некоторые комбинаторные рассуждения. Для любого $s \in \mathbb{N}_0$ и любого $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ определим *болт* $\mathcal{B}^s_\alpha$, полагая

$$\mathcal{B}^s_\alpha := \{(k,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n : Q_{k,m} \subset \widetilde{Q}^s_\alpha\}. \tag{7.3.27}$$

Термин "болт" использован нами потому, что, если изобразить схематически множество $\cup_{(k,m) \in \mathcal{B}^s_\alpha} \hat{Q}_{k,m}$ в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, то оно будет иметь вид болта. При этом самый большой куб Q^s_α назовём *"шляпкой болта"*, а остальные кубы отнесем к *"ножке болта"*.

Непосредственно из условия (T4) определения 7.3.9 вытекает следующее утверждение.

Предложение 7.3.28. *Для любого $s \in \mathbb{N}_0$ существует число $t(s) \in \mathbb{N}$ и семейство множеств $\{\widetilde{\mathcal{A}}^{s,k}\}_{k=1}^{t(s)}$ такие, что:*

(A1) $\cup_{k=1}^{t(s)} \widetilde{\mathcal{A}}^{s,k} = \widetilde{\mathcal{A}}^s$;

(A2) $l(Q^s_\alpha) = l(Q^s_{\alpha'})$ *для каждого* $k \in \{1,...,t(s)\}$ *и любых* $\alpha, \alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s,k}$;

(A3) $l(Q^s_\alpha) < l(Q^s_{\alpha'})$ *для каждого* $k \in \{1,...,t(s)\}$ *и любых* $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s,k}$, $\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s,k+1}$.

Теперь при любых фиксированных $s \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \{1, ..., t(s)\}$ занумеруем кубы $\{\widetilde{Q}^s_\alpha\}_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s,k}}$ натуральными числами, то есть, $\{\widetilde{Q}^s_\alpha\}_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s,k}} = \{\widetilde{Q}^s_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ (для каждых s и k процедура нумерации, вообще говоря, отличается, но для нас это несущественно). Положим $\mathfrak{D}^s_{\alpha_1} = \mathcal{B}^s_{\alpha_1}$. Если при некотором $\underline{j} \in \mathbb{N}$ уже построены индексные множества $\mathfrak{D}^s_{\alpha_j}$, $j \in \{1, .., \underline{j}\}$, то полагаем $\mathfrak{D}^s_{\alpha_{\underline{j}+1}} := \mathcal{B}^s_{\alpha_{\underline{j}+1}} \setminus \cup_{j=1}^{\underline{j}} \mathfrak{D}^s_{\alpha_j}$. Таким образом по индукции при каждом $j \in \mathbb{N}$ мы построим индексное множество $\mathfrak{D}^s_{\alpha_j}$. В итоге мы построим множества $\mathfrak{D}^s_\alpha$ при всех $s \in \mathbb{N}_0$ и всех $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$.

Замечание 7.3.29. Непосредственно из построения следует, что

$$\mathfrak{D}^s_\alpha \neq \emptyset \quad \text{при всех} \quad s \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и всех} \quad \alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s.$$

Для доказательства этого факта нужно лишь заметить, что из определению индексного множества $\widetilde{\mathcal{A}}^s$ следует, что, если $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s,k}$ при некотором $k \in \{1, ..., t(s)\}$, то куб Q^s_α не покрывается кубами из семейства $\widetilde{\mathcal{A}}^{s,k} \setminus \{\alpha\}$. Поэтому, $\alpha \in \mathfrak{D}^s_\alpha$ при любом $s \in \mathbb{N}_0$ и всех $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$. Неформально говоря, $\mathfrak{D}^s_\alpha$ всегда содержит индекс, отвечающий "шляпке болта" $\mathcal{B}^s_\alpha$.

Наконец, для любого $s \in \mathbb{N}_0$ и любого $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ определим *гриб* $\mathcal{M}^s_\alpha$, полагая

$$\mathcal{M}^s_\alpha := \mathfrak{D}^s_\alpha \setminus \bigcup_{\substack{s' \geq s, \alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'} \\ l(Q^{s'}_{\alpha'}) < l(Q^s_\alpha)}} \mathcal{B}^{s'}_{\alpha'}. \tag{7.3.30}$$

Термин "гриб" использован нами потому, что, если схематически изобразить множество $\cup_{(k,m) \in \mathcal{M}^s_\alpha} Q_{k,m} \times (2^{-k}, 2^{1-k})$ в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, то оно будет иметь напоминать форму гриба. При этом самый большой куб Q^s_α назовём *"шляпкой гриба"*, а остальные кубы отнесем к *"ножке гриба"*.

Предложение 7.3.31. *Если* $(s, \alpha) \neq (s', \alpha')$, *то* $\mathcal{M}^s_\alpha \cap \mathcal{M}^{s'}_{\alpha'} = \emptyset$. *Кроме того,*

$$\bigcup_{s \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s} \mathcal{M}^s_\alpha = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^n. \tag{7.3.32}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что при любых фиксированных $s \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \{1, .., t(s)\}$ различные множества $\mathfrak{D}^s_\alpha$, $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s,k}$ попарно не пересекаются. При этом мы не утверждаем, что $\mathfrak{D}^s_\alpha \cap \mathfrak{D}^s_{\alpha'} = \emptyset$ при различных $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}^s$ (в действительности это даже и неверно), поскольку может оказаться $\alpha \in \mathcal{A}^{s,k}$ и $\alpha' \in \mathcal{A}^{s,k'}$ при $k \neq k'$. Поэтому, учитывая (7.3.30) и очевидное включение $\mathfrak{D}^s_\alpha \subset \mathcal{B}^s_\alpha$, получим требуемое. Далее, легко проверить, что для любого $s \in \mathbb{N}_0$ и любого индекса $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ имеем включение

$$\mathcal{B}^s_\alpha \subset \bigcup_{\substack{s' \geq s, \alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'} \\ l(Q^{s'}_{\alpha'}) \leq l(Q^s_\alpha)}} \mathfrak{D}^{s'}_{\alpha'}. \tag{7.3.33}$$

Поэтому, из определения множеств $\mathcal{M}^s_\alpha$ и условия (T3) определения 7.3.9 получаем (7.3.32).

□

Для любых $s \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ положим

$$g^s_\alpha(x,t) := \sum_{(k,m)\in\mathcal{M}^s_\alpha} \Theta_{k,m}(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+. \tag{7.3.34}$$

Следующая лемма вытекает из предложения 7.3.31, (7.3.25), (7.3.26) и (7.3.34).

Лемма 7.3.35. *Функции g^s_α обладают следующими свойствами:*

(g1) $g^s_\alpha \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *при* $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$;

(g2) $\sum_{s=0}^\infty \sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s} g^s_\alpha(x,t) = 1$ *при* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,2)$;

(g3) *при* $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ *существует такое* $C(n) \in \mathbb{N}$, *что* $\#\{g^s_\alpha : g^s_\alpha(x,t) > 0\} \le C(n)$;

(g4) *при любых* $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ *и* $(k,m) \in \mathcal{M}^s_\alpha$

$$\|\nabla g^s_\alpha(x,t)\|_\infty \le C2^k, \qquad (x,t) \in \hat{Q}_{k,m}. \tag{7.3.36}$$

Константа $C > 0$ в правой части (7.3.36) *зависит только от n, C_ψ, C_θ.*

Следующее утверждением является ключевым для дальнейшего.

Лемма 7.3.37. *Пусть $c_1, c_2 > 0$, а $T = \{T^s\}_{s=0}^\infty(c_1,c_2)$ – допустимая для веса γ система укладок $\mathbb{R}^n$. Тогда для любых $s \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ справедливо неравенство*

$$\iint\limits_{\operatorname{supp} g^s_\alpha} \gamma(x,t)\|\nabla g^s_\alpha(x,t)\|_\infty \, dxdt \le C\widehat{\gamma}^s_\alpha \mathcal{L}^n(Q^s_\alpha), \tag{7.3.38}$$

в котором константа $C > 0$ зависит только от $n, c_1, c_2, C_\psi, C_\theta, C_\gamma$.

Доказательство. До конца доказательства зафиксируем $s \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$. Остаток доказательства разобьём на несколько шагов.

Шаг 1. Рассмотрим только те индексы $(k,m) \in \mathcal{M}^s_\alpha$, для которых вектор-функция ∇g^s_α не обращается тождественно в нуль на $2\hat{Q}_{k,m}$. Очевидно, количество $n(s,\alpha)$ таких индексов конечно, но, вообще говоря, зависит от s и α. Пусть $\{Q_{k_j,m_j}(s,\alpha)\}_{j=1}^{n(s,\alpha)}$ – соответствующие кубы, занумерованные произвольным образом. Поскольку s и α остаются фиксированными на протяжении доказательства, положим для краткости $Q_j := \hat{Q}_{k_j,m_j}(s,\alpha)$ при $j \in \{1,...,n(s,\alpha)\}$.

Шаг 2. Заметим, что при любом $j \in \{1,...,n(s,\alpha)\}$ возможны лишь два варианта:

(A) $Q_j \cap \hat{Q}^{s'}_{\alpha'}$ для некоторых $s' = s, s+1$ и $\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'}$ и при этом $2^{-1}l(Q^{s'}_{\alpha'}) \le l(Q_j) \le 2l(Q^{s'}_{\alpha'})$;

(B) $\partial\check{Q}_j \cap \partial\widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'}$ для некоторых $s' \in \{s, s+1\}$, $\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'}$ и при этом $l(Q_j) \le 2^{-1}l(Q^{s'}_{\alpha'})$.

Действительно, неформально говоря, ненулевые градиенты у функции g^s_α возникают в "приграничных кубах" гриба $\mathcal{M}^s_\alpha$ (то есть таких кубах $Q_{k,m}$, что $(k,m) \in \mathcal{M}^s_\alpha$ и при этом $\partial\hat{Q}_{k,m} \cap \partial(\cup_{(k',m')\in\mathcal{M}^s_\alpha}\hat{Q}_{k',m'}) \ne \emptyset$). При этом приграничные кубы в грибе $\mathcal{M}^s_\alpha$ должны по построению иметь общие граничные точки с приграничными кубами в каком-то грибе $\mathcal{M}^{s'}_{\alpha'}$ при

$s' = s, s+1$ и $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'}$. И здесь как раз возникают два случая. Первый случай соответствует наличию общих граничных точек у Q_j и шляпки какого-то гриба $\mathcal{M}^{s'}_{\alpha'}$ при $\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'}$ и соответствует варианту (A). Во втором случае куб Q_j принадлежит ножке гриба $\mathcal{M}^s_\alpha$ и имеет общие граничные точки с кубами из ножек гриба $\mathcal{M}^{s'}_{\alpha'}$ при некоторых $s' = s, s+1$ и $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'}$. Но тогда либо $\partial \check{Q}_j \cap \partial \widetilde{Q}^s_\alpha \neq \emptyset$, либо $\partial \check{Q}_j \cap \partial \widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'}$, что в любом случае соответствует варианту (B).

Пусть $\mathcal{I}_A$ – все те индексы $j \in \{1, ..., n(s,\alpha)\}$, для которых реализуется случай (A). Пусть $\mathcal{I}_B$ – все те индексы $j \in \{1, ..., n(s,\alpha)\}$, для которых реализуется случай (B). Возможен случай, когда реализуются оба варианта, то есть множество $\mathcal{I}_A \cap \mathcal{I}_B$ может быть не пусто.

Шаг 3. Из (7.3.34), (7.3.36) следует, что для любых $s \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s$ и $j \in \{1, ..., n(s,\alpha)\}$

$$\|\nabla g^s_\alpha(x,t)\|_\infty \leq \frac{C(n, C_\psi, C_\theta)}{l(Q_j)}, \qquad (x,t) \in 2Q_j.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\operatorname{supp} g^s_\alpha} \gamma(x,t) \|\nabla g^s_\alpha(x,t)\| \, dxdt \leq C \sum_{j=1}^{n(s,\alpha)} \frac{\mathcal{L}^n(\check{Q}_j)}{\mathcal{L}^{n+1}(Q_j)} \iint\limits_{2Q_j} \gamma(x,t) \, dxdt. \tag{7.3.39}$$

Шаг 4. Заметим, что для любого $j \in \{1, .., n(s,\alpha)\}$ найдётся индекс $\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s+1}$, для которого $\check{Q}_j \cap \widetilde{Q}^{s+1}_{\alpha'} \neq \emptyset$ и при этом $l(Q_j) \geq l(Q^{s+1}_{\alpha'})$. Действительно, в противном случае $2l(Q_j) \leq l(Q^{s+1}_{\alpha'})$ для всех $\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s+1}$, для которых $\check{Q}_j \cap \widetilde{Q}^{s+1}_{\alpha'} \neq \emptyset$. Но тогда в силу (7.3.30) и (7.3.34) куб Q_j не может содержаться во множестве $\operatorname{supp} g^s_\alpha$. Это противоречит процедуре построения кубов $\{Q_j\}_{j=1}^{n(s,\alpha)}$. Следовательно, имеем

$$Q^{s+1}_{\alpha'} \times (0, l(Q^{s+1}_{\alpha'})) \subset 5Q_j \subset 5Q^s_\alpha \times \Big[-\frac{5}{2} l(Q^s_\alpha), \frac{5}{2} l(Q^s_\alpha)\Big].$$

Поэтому, используя замечание 1.2.117 и условия (T1), (T2) определения 7.3.9, выводим существование такой константы $C = C(q, n, c_1, c_2) > 0$, что

$$\frac{1}{C} \widehat{\gamma}^s_\alpha \leq \frac{1}{\mathcal{L}^{n+1}(Q_j)} \iint\limits_{2Q_j} \gamma(x,t) \, dxdt \leq C \widehat{\gamma}^s_\alpha. \tag{7.3.40}$$

Шаг 5. Заметим, что по построению $\check{Q}_j \subset \widetilde{Q}^s_\alpha$. Поэтому, если $Q_j \cap \hat{Q}^{s'}_{\alpha'} \neq \emptyset$ и при этом $j \in \mathcal{I}_A$, то заведомо $\check{Q}_j \subset 5Q^{s'}_{\alpha'}$ и $Q^{s'}_{\alpha'} \subset 5Q^s_\alpha$. Отсюда, учитывая, что при фиксированном s' различные кубы $Q^{s'}_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{A}^{s'}$ имеют непересекающиеся внутренности, заключаем, что

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_A} \mathcal{L}^n(\check{Q}_j) \leq \sum_{s'=s}^{s+1} \sum_{\substack{\alpha' \in \mathcal{A}^{s'} \\ Q^{s'}_{\alpha'} \subset 5Q^s_\alpha}} \mathcal{L}^n(5Q^{s'}_{\alpha'}) \leq C(n) \mathcal{L}^n(Q^s_\alpha). \tag{7.3.41}$$

Шаг 6. Для каждого $j \in \mathcal{I}_B$ выберем и зафиксируем произвольные индексы $s'_j \in \{s, s+1\}$ и $\alpha'_j \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'_j}$ так, что $\partial\check{Q}_j \cap \partial\widetilde{Q}^{s'_j}_{\alpha'_j} \neq \emptyset$ и $l(Q_j) < l(Q^{s'_j}_{\alpha'_j})$. Кроме того, если $s'_j = s$, то $l(Q^{s'_j}_{\alpha'_j}) \leq l(Q^s_\alpha)$, что следует из алгоритма построения индексных множеств $\mathfrak{D}^s_\alpha$ и формулы (7.3.30). Элементарные вычисления, основанные на объёмах многомерных кубов, позволяют установить при заданных $s' \in \{s, s+1\}$, $\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'}$ и $r \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\#\{j \in \mathcal{I}_B : (s'_j, \alpha'_j) = (s', \alpha') \text{ и } \frac{l(\check{Q}_j)}{l(Q^{s'_j}_{\alpha'_j})} = 2^{-r}\} \leq \frac{(2+2^{-r})^n - (2-2^{-r})^n}{2^{-rn}} \leq C2^{r(n-1)}.$$

Поэтому, учитывая, что при фиксированном $s' \in \mathbb{N}_0$ кубы $Q^{s'}_{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{A}^{s'}$ имеют непересекающиеся внутренности, получим

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathcal{I}_B} \mathcal{L}^n(\check{Q}_j) &\leq \sum_{s'=s}^{s+1} \sum_{\substack{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s'}\\ \widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'}\cap\widetilde{Q}^s_\alpha\neq\emptyset\\ l(Q^{s'}_{\alpha'})\leq l(Q^s_\alpha)}} \sum_{\substack{j\in\mathcal{I}_B\\ (s'_j,\alpha'_j)=(s',\alpha')}} \mathcal{L}^n(\check{Q}_j)\\ &\leq C\sum_{s'=s}^{s+1} \sum_{\substack{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s'}\\ \widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'}\cap\widetilde{Q}^s_\alpha\neq\emptyset\\ l(Q^{s'}_{\alpha'})\leq l(Q^s_\alpha}} \sum_{r=1}^{\infty} 2^{r(n-1)}\Big(2^{-r}l(Q^{s'}_{\alpha'})\Big)^n \leq C\sum_{s'=s}^{s+1} \sum_{\substack{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s'}\\ \widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'}\cap\widetilde{Q}^s_\alpha\neq\emptyset\\ l(Q^{s'}_{\alpha'})\leq l(Q^s_\alpha}} \mathcal{L}^n(Q^{s'}_{\alpha'}) \leq C\mathcal{L}^n(Q^s_\alpha).\end{aligned} \tag{7.3.42}$$

Из (7.3.41), (7.3.42) вытекает оценка

$$\sum_{j=1}^{n(s,\alpha)} \mathcal{L}^n(\check{Q}_j(s,\alpha)) \leq C\mathcal{L}^n(Q^s_\alpha), \tag{7.3.43}$$

в которой константа $C > 0$ зависит только от n.

Шаг 7. Комбинируя (7.3.39), (7.3.40) и (7.3.43), получаем (7.3.38).

Лемма полностью доказана. □

Теорема 7.3.44. *Пусть $c_1, c_2 \geq 1$. Предположим, что для $\varphi \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ существует такая допустимая для веса γ укладка $T = \{T^s\}(c_1, c_2)$, что*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\gamma}_{0,m}\varphi_{0,m} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s} \widehat{\gamma}^s_\alpha \int\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi^s_\alpha - \varphi(x)|\,dx < \infty.$$

Тогда существует функция $F \in W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}_+, \gamma)$ такая, что $\varphi = \operatorname{tr}|_{\mathbb{R}^n} F$, и, более того,

$$\|F\|_{W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)} \leq C\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\gamma}_{0,m}\|\varphi\|_{L_1(Q_{0,m})} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s} \widehat{\gamma}^s_\alpha \int\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi^s_\alpha - \varphi(x)|\,dx\Big). \tag{7.3.45}$$

Константа $C > 0$ в (7.3.45) зависит только от n, C_γ, c_1, c_2.

Доказательство. Нам будет удобно разбить доказательство на несколько шагов.

Шаг 1. Положим

$$F(x,t)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s} g_\alpha^s(x,t)\varphi_\alpha^s,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+. \tag{7.3.46}$$

Очевидно, что $F\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Шаг 2. Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} J&:=\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\gamma(x,t)\|\nabla F(x,t)\|\,dx\,dt\\ &=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^2\gamma(x,t)\|\nabla F(x,t)\|\,dx\,dt+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_2^\infty\gamma(x,t)\|\nabla F(x,t)\|\,dx\,dt=:J_1+J_2. \end{aligned}$$

Шаг 3. Из леммы 7.3.35 имеем

$$\|\nabla F(x,t)\|\le C\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^0}|\varphi_\alpha^0|\chi_{\widetilde{Q}_\alpha^0}(x)\quad\text{при всех}\quad x\in\mathbb{R}^n, t\ge 2.$$

Отсюда, используя предложение 4.1.1, замечание 1.2.117 и предложение 1.2.118, выводим

$$J_2\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\gamma}_{0,m}\Bigg(\sum_{\substack{m'\in\mathbb{Z}^n\\ \widetilde{Q}_{0,m'}\cap\widetilde{Q}_{0,m}\neq\varnothing}}|\varphi_{0,m'}|\Bigg)\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\gamma}_{0,m}\|\varphi\|_{L_1(Q_{0,m})}. \tag{7.3.47}$$

Константа $C>0$ в (7.3.47) зависит только от n, C_γ.

Шаг 4. Теперь оценим более сложный интеграл J_1. Поскольку справедливо включение $\mathbb{R}^n\times(0,2)\subset\cup_{s\in\mathbb{N}_0}\cup_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s}\operatorname{supp} g_\alpha^s$, заключаем, что

$$J_1\le\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s}\iint\limits_{\operatorname{supp} g_\alpha^s\cap\mathbb{R}^n\times(0,2)}\gamma(x,t)\|\nabla F(x,t)\|\,dx\,dt. \tag{7.3.48}$$

Шаг 5. Фиксируем $s\in\mathbb{N}_0$ и $\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s$. Воспользуемся леммой 7.3.35 (утверждения (g1), (g2), (g3)) и напомним, что система укладок T допустима для γ (условие (T3) в определении 7.3.9). Имеем (если $s=0$, то формально полагаем $\mathcal{A}^{s-1}=\emptyset$)

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\operatorname{supp} g_\alpha^s\cap\mathbb{R}^n\times(0,2)}\gamma(x,t)\|\nabla F(x,t)\|\,dx\,dt\\ &=\iint\limits_{\operatorname{supp} g_\alpha^s\cap\mathbb{R}^n\times(0,2)}\gamma(x,t)\Big\|\sum_{s'=0}^{\infty}\sum_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s'}}\nabla g_{\alpha'}^{s'}(x,t)\varphi_{\alpha'}^{s'}\Big\|\,dx\,dt\\ &=\iint\limits_{\operatorname{supp} g_\alpha^s\cap\mathbb{R}^n\times(0,2)}\gamma(x,t)\Big\|\sum_{s'=0}^{\infty}\sum_{\alpha'\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s'}}\nabla g_{\alpha'}^{s'}(x,y)(\varphi_{\alpha'}^{s'}-\varphi_\alpha^s)\Big\|\,dx\,dt\\ &\le\sum_{s'=s-1}^{s+1}\sum_{\substack{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^{s'}\\ \operatorname{supp} g_{\alpha'}^{s'}\cap\operatorname{supp} g_\alpha^s\neq\varnothing}}\Big(\iint\limits_{\operatorname{supp} g_\alpha^s\cap\mathbb{R}^n\times(0,2)}\gamma(x,t)\|\nabla g_{\alpha'}^{s'}(x,t)\|\,dx\,dt\Big)|\varphi_{\alpha'}^{s'}-\varphi_\alpha^s|. \end{aligned} \tag{7.3.49}$$

Шаг 6. Оценим $\|\nabla g^{s'}_{\alpha'}(x,t)\|$ на множестве $\operatorname{supp} g^s_\alpha \cap \mathbb{R}^n \times (0,2)$. Используя лемму 7.3.37 и условия (T1), (T2) определения 7.3.9, заключаем, что при любом $s' \in \{s-1, s, s+1\}$ справедливо неравенство

(7.3.50)
$$\iint\limits_{\operatorname{supp} g^{s'}_{\alpha'} \cap \operatorname{supp} g^s_\alpha} \gamma(x,t)\|\nabla g^{s'}_{\alpha'}(x,t)\|\,dx\,dt \le C\widehat{\gamma}^s_\alpha \min\{\mathcal{L}^n(Q^{s'}_{\alpha'}), \mathcal{L}^n(Q^s_\alpha)\} \le C\widehat{\gamma}^s_\alpha \mathcal{L}^n(\widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'} \cap \widetilde{Q}^s_\alpha).$$

Шаг 7. Подставим (7.3.50) в (7.3.49). Учитывая (T1), (T2) в определении 7.3.9, получим

(7.3.51)
$$\iint\limits_{\operatorname{supp} g^s_\alpha \cap \mathbb{R}^n \times (0,2)} \gamma(x,t)\|\nabla f(x,t)\|\,dx\,dt \le C \sum_{s'=s-1}^{s+1} \sum_{\substack{\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'} \\ \operatorname{supp} g^{s'}_{\alpha'} \cap \operatorname{supp} g^s_\alpha \ne \varnothing}} \widehat{\gamma}^s_\alpha \mathcal{L}^n(\widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'} \cap \widetilde{Q}^s_\alpha)|\varphi^{s'}_{\alpha'} - \varphi^s_\alpha|$$
$$\le C \sum_{s'=s-1}^{s+1} \sum_{\substack{\alpha' \in \widetilde{\mathcal{A}}^{s'} \\ \operatorname{supp} g^{s'}_{\alpha'} \cap \operatorname{supp} g^s_\alpha \ne \varnothing}} \Big(\widehat{\gamma}^{s'}_{\alpha'} \int\limits_{\widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'} \cap \widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi(x) - \varphi^s_\alpha|\,dx + \widehat{\gamma}^s_\alpha \int\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha \cap \widetilde{Q}^{s'}_{\alpha'}} |\varphi(x) - \varphi^s_\alpha|\,dx \Big).$$

Шаг 8. Просуммируем оценку (7.3.51) по всем s, α, учитывая условия (T1), (T2) определения 7.3.9. Используем также утверждение $(\mathcal{A}2)$ леммы 7.3.4 и учтём предложение 1.2.38. В итоге получим

(7.3.52)
$$J_1 \le C\Big(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s} \widehat{\gamma}^s_\alpha \int\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi^s_\alpha - \varphi(x)|\,dx + \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\gamma}_{0,m} \|\varphi\|_{L_1(Q_{0,m})} \Big).$$

Шаг 9. Рассуждая как на шаге 13 доказательства теоремы 7.2.1, получаем оценку

(7.3.53)
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \gamma(x,t)|F(x,t)|\,dx\,dt \le C \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \gamma(x,t)\|\nabla F(x,t)\|\,dx\,dt.$$

Теперь (7.3.45) следует из (7.3.47), (7.3.52), (7.3.53).

Шаг 10. Проверим, наконец, что $\varphi = \operatorname{tr}|_{\mathbb{R}^n} F$. При любом фиксированном $t \in (0,1)$ из утверждения (g2) леммы 7.3.35, условия (T3) определения 7.3.9 и из (7.3.34) выводим оценку

(7.3.54)
$$|F(x,t) - \varphi(x)| = \Big| \sum_{s=s(t)-1}^{s=s(t)+1} \sum_{\substack{\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s \\ x \in \widetilde{Q}^s_\alpha}} g^s_\alpha(x,t)(\varphi^s_\alpha - \varphi(x)) \Big| \le \sum_{s=s(t)-1}^{s=s(t)+1} \sum_{\substack{\alpha \in \widetilde{\mathcal{A}}^s \\ x \in \widetilde{Q}^s_\alpha}} \fint\limits_{\widetilde{Q}^s_\alpha} |\varphi(y) - \varphi(x)|\,dy.$$

Заметим, что множество кубов $\widetilde{Q}^s_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}^s$, содержащих точку x, образует регулярное семейство в смысле § 1.8 из [119]. Комбинируя аргументы из § 1.8 книги [119] с условием (T3) в определении 7.3.9, и, принимая во внимание $(\mathcal{A}2)$ леммы 7.3.4, из (7.3.54) выводим

(7.3.55)
$$\varphi(x) = \lim_{t \to +0} F(x,t) \quad \text{при } \mathcal{L}^n\text{-п.в.} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Используя замечание 6.8.3 и теорему 2.1.4 книги [124], из (7.3.55) заключаем, что

$$F(x,t)-\varphi(x)=\int\limits_0^t D_tF(x,\tau)\,d\tau \quad \text{при } \mathcal{L}^n\text{-п.в.} \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{7.3.56}$$

Далее, в силу (7.3.56) и замечания 6.8.3 для любого куба Q имеем

$$\int\limits_Q |F(x,t)-\varphi(x)|\,dx\le\int\limits_Q\int\limits_0^t\Big|D_tf(x,\tau)\,d\tau\Big|\le C\|F\|_{W_1^1(Q\times(0,t),\gamma)}\to 0,\qquad t\to+0. \tag{7.3.57}$$

Теорема полностью доказана. □

Напомним обозначение (6.3.7) и положим $E(\varphi,Q):=E_1(\varphi,Q)_1$ для любого куба Q.

Определение 7.3.58. Пусть $c_1,c_2\ge 1$. Через $Z=Z(\{\gamma_{k,m}\},c_1,c_2)$ обозначим линейное пространство всех $\varphi\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\|\varphi\|_Z:=\inf_T\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s}\widehat{\gamma}_\alpha^s E(\varphi,\widetilde{Q}_\alpha^s)+\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\gamma}_{0,m}\|\varphi\|_{L_1(Q_{0,m})}, \tag{7.3.59}$$

где мы полагаем $E(\varphi,\widetilde{Q}_\alpha^s):=E_1(\varphi,\widetilde{Q}_\alpha^s)_1$, а инфимум в правой части (7.3.59) взят по всем допустимым для веса γ укладкам $T=\{T^s\}_{s=0}^{\infty}(c_1,c_2)$ пространства $\mathbb{R}^n$.

Замечание 7.3.60. Из доказательств теорем 7.3.10, 7.3.44 следует, что при $c_1\ge q^3$ $c_2\ge q^5$ пространство $Z(\{\gamma_{k,m}\},c_1,c_2)$ не зависит от выбора констант c_1,c_2, а соответствующие нормы эквивалентны. Конечно, параметры q^3, q^5 могут быть достаточно велики. Для нас однако важно, что они полностью определяются последовательностью $\{\gamma_{k,m}\}$. Поэтому в дальнейшем пространство $Z(\{\gamma_{k,m}\},c_1,c_2)$ будем обозначать символом $Z(\{\gamma_{k,m}\})$.

Следующий результат является основным в данном параграфе и сразу следует из теорем 7.3.10, 7.3.44 и элементарной оценки

$$E(\varphi,\widetilde{Q}_\alpha^s)\le\int\limits_{\widetilde{Q}_\alpha^s}|\varphi(x)-\varphi_\alpha^s|\,dx\le 2E(\varphi,\widetilde{Q}_\alpha^s),\qquad s\in\mathbb{N}_0,\alpha\in\widetilde{\mathcal{A}}^s.$$

Следствие 7.3.61. *Существуют такие числа $c_1,c_2\ge 1$, что элемент $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\gamma)|_{\mathbb{R}^n}$ в том и только том случае, если f принадлежит пространству $Z=Z(\{\gamma_{k,m}\},c_1,c_2)$. Кроме того, существует константа $C>0$ такая, что*

$$\frac{1}{C}\|f\|_Z\le\|f\|_{W_1^1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)|_{\mathbb{R}^n}}\le C\|f\|_Z.$$

Наконец, существует ограниченное (вообще говоря нелинейное) отображение Ext *из Z в $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1},\gamma)$ такое, что* $\mathrm{Tr}\,|_{\mathbb{R}^n}\circ\mathrm{Ext}=\mathrm{Id}$ *на пространстве Z.*

Установим некоторые элементарные свойства пространства $Z(\{\gamma_{k,m}\})$.

Лемма 7.3.62. *Если $c_1 \geq q^3$, $c_2 \geq q^5$, то для пространства $Z = Z(\{\gamma_{k,m}\})$, имеем следующие непрерывные вложения:*

$$\widetilde{\mathrm{B}}^1(\mathbb{R}^n, \{\gamma_k\}) \subset Z(\{\gamma_{k,m}\}) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Доказательство непрерывности вложения $\widetilde{\mathrm{B}}^1(\mathbb{R}^n, \{\gamma_{k,m}\}) \subset Z(\{\gamma_{k,m}\})$ очевидно. Второе вложение вытекает из следствия 7.3.61, замечания 6.8.3 и простой оценки

$$\|\mathrm{tr}\ |_{\mathbb{R}^n} f\|_{L_1(Q)} \leq \|f\|_{W_1^1(Q\times(0,1))},$$

где Q – куб в $\mathbb{R}^n$. □

Доказательство следующего утверждения напрямую вытекает из следствия 7.3.61 и полноты пространства $W_1^1(\mathbb{R}^{n+1}_+, \gamma)$.

Лемма 7.3.63. *Пусть $c_1 \geq q^3$, $c_2 \geq q^5$. Тогда пространство $Z(\{\gamma_{k,m}\})$ – полное квазинормированное пространство.*

Замечание 7.3.64. Мы утверждаем, что при $\gamma \equiv 1$ результат Гальярдо легко вытекает из следствия 7.3.61. Вложение $L_1(\mathbb{R}^n) \supset Z(\{\gamma_{k,m}\}, c_1, c_2)$ при $c_1 \geq q^3$, $c_2 \geq q^5$ очевидно. Для доказательства обратного вложения заметим, что

$$\|\varphi\|_{Z(\{\gamma_{k,m}\})} \leq \inf_{\{l_j\}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} E(\varphi, \widetilde{Q}_{l_j,m}) \leq C\|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

где инфимум взят по всем таким $\{l_j\} \subset \mathbb{N}_0$, что $l_0 = 0$, а соответствующий ряд сходится.

Список литературы

[1] Бесов О. В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. МИАН СССР. – 1961. – Т. 60. – С. 42–81.

[2] Бесов О. В. Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости // Тр. МИАН. – 1997. – Т. 214. – С. 25–58.

[3] Бесов О. В. Эквивалентные нормировки пространств функций переменной гладкости // Тр. МИАН. – 2003. – Т. 243. – С. 87–95.

[4] Бесов О. В. Интерполяция, вложение и продолжение пространств функций переменной гладкости // Тр. МИАН. – 2005. – Т. 248. – С. 52–63.

[5] Бесов О. В. О пространствах функций нулевой гладкости // Матем. сб. – 2012. – Т. 203. – №8. – С. 3–16.

[6] Бесов О. В. К теореме вложения Соболева для предельного показателя // Тр. МИАН. – 2014. – Т. 284. – С. 89–104.

[7] Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. ММО. – 1971. – Т. 24. – С. 69–132.

[8] Водопьянов С. К., Пупышев И. М. Следы бесселевых потенциалов на регулярных подмножествах групп Карно // Матем. тр. – 2007. – Т. 10. – №2. – С. 19–61.

[9] Водопьянов С. К., Пупышев И. М. Следы функций из пространства Соболева на множествах Альфорса групп Карно // Сиб. матем. журн. – 2007. – Т. 48. – №6. – С. 1201–1221.

[10] Гинзбург А. С. О следах функций из весовых классов // Изв. вузов. Матем. – 1984. – №4. – С. 61–64.

[11] Де Бор К., Практическое руководство по сплайнам, Радио и связь, М., 1985.

[12] Долженко Е. П. Граничные свойства произвольных функций // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1967. – Т. 31. – №1. – С. 3–14.

[13] Ю.В. Нетрусов Ю. В. Спектральный синтез в пространстве Соболева, порожденном интегральной метрикой // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1994. – Т. 217. – С. 92–111.

[14] Adams D.R., Hedberg L.I. Function Spaces and Potential Theory. Grundlehren Math. Wiss. 314, Springer, Berlin, 1996.

[15] Трибель Х. Теория функциоальных пространств, Москва, Мир, 1986.

[16] Тюленев А. И. Описание следов функций из пространства Соболева с весом из класса Макенхаупта // Тр. МИАН. – 2014.– Т. 284. – С. 288–303.

[17] Тюленев А. И. Задача о следах для пространств Соболева с весами типа Макенхаупта // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – №5. – С. 720–732.

[18] Alvarado R., Wang F., Yang D., Yuan W. Pointwise characterization of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on spaces of homogeneous type // Studia Math. – 2023. – Vol. 268. – №2. – P. 121–166.

[19] Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. Functions of Bounded Variations and Free Discontinuity Problems. Oxford University Press, Oxford, 2000.

[20] Ambrosio L. Fine properties of sets of finite perimeter in doubling metric measure spaces // Set Valued Analysis. – 2002. – Vol. 10. – P. 111–128.

[21] Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Density of Lipschitz functions and equivalence of weak gradients in metric measure spaces // Rev. Mat. Iberoam. – 2013. – Vol. 29. – №3. – P. 969–996.

[22] Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below // Invent. Math. – 2014. – Vol. 195. – P. 289–391.

[23] Ambrosio L., Colombo M., Di Marino S. Sobolev spaces in metric measure spaces: reflexivity and lower semicontinuity of slope, Variational methods for evolving objects // Adv. Stud. Pure Math. – 2015. – Vol. 67. – P. 1–58.

[24] Ambrosio L. Calculus, heat flow and curvature-dimension bounds in metric measure spaces // Proceedings of the ICM 2018. – 2018. – Vol. 1. – P. 301–340.

[25] Azzam J., Schul R. An analyst's traveling salesman theorem for sets of dimension larger than one // Math. Ann. – 2018. – Vol. 370. – №3-4. – P. 1389–1476.

[26] Azzam J., Villa M. Quantitative comparisons of multiscale geometric properties // Anal. PDE. – 2021. – Vol. 14. – №6. – P. 1873–1904.

[27] Bennet G. Some elementary inequalities // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1987. – Vil. 38. – №2. – P. 401–425.

[28] Bishop, C. J., Peres Y. Fractals in probability and analysis. - Cambridge Stud. Adv. Math. 162, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2017.

[29] Björn A., Björn J. Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces, Vol. 17 of EMS Tracts in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011.

[30] Bony J.-M. Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations, in: Taniguchi Symp., HERT, Katata, 1984, pp.11–49.

[31] Bruno T., Peloso M. M., Vallarino M. Besov and Triebel–Lizorkin spaces on Lie groups // Math. Ann. – 2020. – Vol. 377, №1-2. – P. 335–377.

[32] Burenkov V. I. Sobolev Spaces on Domains. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.

[33] Calderón A. P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Studia Math. – 1972. – Vol. 44. – P. 563–582.

[34] Curry H. B., Schoenberg I. J. On Poĺya frequency functions. IV. The fundamental spline functions and their limits // J. Analyse Math. – 1966. – Vol.17. – №1. – P. 71–107.

[35] Cascante C., Ortega J. M., Verbitsky I. E. Nonlinear potentials and two weight trace inequalities for general dyadic and radial kernels // Indiana Univ. Math. J. – 2004. – Vol. 53. – №3. – P. 845–882.

[36] Cheeger J. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces // Geom. Funct. Anal. – 1999. – Vol.9. – №3. – P. 428–517.

[37] Christ M. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral // Colloc. Math. – 1990. – Vol. 60-61. – №2. – P. 601–628.

[38] Denjoy A. Sur une propriété de séries trigonométriques // Amst. Ak. Versl. – 1920. – Vol.29.– P. 628–639.

[39] De Boor C., Fix G. F. Spline approximation by quasiinterpolants // J. Approximation Theory. – 1973. – Vol.8. – №1. – P. 19–45.

[40] DeVore R. A., Popov V. A. Interpolation of Besov spaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1988. – Vol. 305. – №1. – P. 397–414.

[41] Di Marino S., Speight G. The $p-$Weak Gradient Depends on p // Proc. Amer. Math. Soc. – 2015. – Vol. 143. – №12. – P. 5239–5252.

[42] Drihem D. Atomic decomposition of Besov spaces with variable smoothness and integrability // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – Vol. 389. – P. 15–31.

[43] Eriksson-Bique S., Giovannardi G., Korte R., Shanmugalingam N., Speight G. Regularity of solutions to the fractional Cheeger-Laplacian on domains in metric spaces of bounded geometry // J. Differential Equations.– 2022. – Vol. 306. – P. 590–632.

[44] Falconer K. J. The geometry of fractal sets. Cambridge Tracts Math. 85, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[45] Evans L.C., Gariepy R.F. Measure Theory and Fine Properties of Functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[46] Farkas W., Leopold H.-G. Characterisations of function spaces of generalised smoothness // Ann. Mat. Pura Appl. – 2006. – Vol. 185. – №1. – P. 1–62.

[47] Fefferman C. L. A sharp form of Whitney's extension theorem // Ann. of Math. – 2005.– Vol. 161. – №1. – P. 509–577.

[48] Fefferman C. L. A generalized sharp Whitney theorem for jets // Rev. Mat. Iberoam. – 2005. – Vol. 21. – №2. – P. 577–688.

[49] Fefferman C. L. Whitney's extension problem for C^m // Ann. of Math. – 2006. – Vol. 164. – №1. – P. 313–359.

[50] Fefferman C. L. C^m-extension by linear operators // Ann. of Math. – 2007. – Vol. 166. – №3. – P. 779–835.

[51] Fefferman C. L., Israel A., Luli G. K. Sobolev extension by linear operators // J. Amer. Math. Soc. – 2014. – Vol. 27. – №1. – P. 69–145.

[52] Fefferman C. L., Israel A., Luli G. K. The structure of Sobolev extension operators // Rev. Mat. Iberoam. – 2014. – Vol. 30. – №2. – P. 419–429.

[53] Fefferman C. L., Israel A., Luli G. K. Fitting a Sobolev function to data I // Rev. Mat. Iberoam. – 2016. – Vol. 32. – №1. – P. 275–376.

[54] Fefferman C. L., Israel A., Luli G. K. Fitting a Sobolev function to data II // Rev. Mat. Iberoam. – 2016. – Vol. 32. – №2. – P. 649–750.

[55] Gagliardo E. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1957. – Vol. 27. – P. 284–305.

[56] García-Bravo M., Ikonen T. and Zhu Z. Extensions and approximations of Banach-valued Sobolev functions //arXiv:2208.12594. – 2022.

[57] Gibara R., Korte R., Shanmugalingam N. Solving a Dirichlet problem on unbounded domains via a conformal transformation // arXiv:2209.09773. – 2022.

[58] Gibara R., Shanmugalingam N. Trace and extension theorems for homogeneous Sobolev and Besov spaces for unbounded uniform domains in metric measure spaces // arXiv:2211.12708. – 2022.

[59] Gigli N., On the differential structure of metric measure spaces and applications // Mem. Amer. Math. Soc. –2015. – Vol. 236. – №1113.

[60] Gigli N. Nonsmooth differential geometry - An approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below // Mem. Amer. Math. Soc. – 2018. – Vol. 251. – №1196.

[61] Gigli N., Tyulenev A. Korevaar-Schoen's energy on strongly rectifiable spaces // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2021. – Vol. 60. – №6. – P. 1–54.

[62] Gigli N., Pasqualetto E. Lectures on Nonsmooth Differential Geometry. SISSA Springer Series 2, 2020.

[63] Gogatishvili A., Koskela P., Shanmugalingam N. Interpolation properties of Besov spaces defined on metric spaces // Math. Nachr. – 2010. – Vol. 283, №2. – P. 215–231.

[64] Goncalves H. F., Moura S. D., Neves J. S. On traces of 2-microlocal type spaces // J. Funct. Anal. – 2014. – Vol. 267. – P. 3444–3468.

[65] Hajłasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. – 1996. – Vol. 5. – №4. – P. 403–415.

[66] Hajlasz P., Martio O. Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains // J. Funct. Anal. – 1997. – Vol. 143. – P. 221–246.

[67] Hajłasz P. Sobolev mappings, co-area fromula and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry, Sobolev Instinute Press, Novosibirsk. – 2000, C.227–254.

[68] Hajłasz P., Koskella P. Sobolev met Poincaré // Mem. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 145. – №688.

[69] Hebey E. Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities. Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[70] Hedberg L.I., Netrusov Y. An axiomatic approach to function spaces, spectral synthesis, and Luzin approximation // Mem. Amer. Math. Soc. –2007. – Vol. 188. – №882. – 97P.

[71] Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam N., Tyson J. Sobolev spaces on metric measure spaces: An approach based on upper gradients. Cambridge University Press, United States, 2015.

[72] Ihnatsyeva L., Vähäkangas A. V. Characterization of traces of smooth functions on Ahlfors regular sets // J. Funct. Anal. – 2013. – Vol. 265. – №9. – P. 1870–1915.

[73] Israel A. A bounded linear extension operator for $L^2_p(\mathbb{R}^2)$ // Ann. of Math. – 2013. – Vol. 178. – №1. – P. 183–230.

[74] Jaffard S. Pointwise smoothness, two microlocalization and wavelet coefficients // Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. – 1991. – Vol. 35. – P. 155–168.

[75] Jaffard S., Meyer Y. Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions // Mem. Amer. Math. Soc. – 1996. – Vol. 123.

[76] Järvenpää E., Järvenpää M., Käenmäki F., Rajala T., Rogovin S., Suomala V. Packing dimension and Ahlfors regularity of porous sets in metric spaces // Math. Z. – 2010. – Vol. 266. – №1. – P. 83–105.

[77] Jonsson A. Atomic decomposition of Besov spaces on closed sets. Function spaces, differential operators and nonlinear analysis Stuttgart Teubner 1993 285–289 Teubner-Texte Math. Bd. 133

[78] Jonsson A., Wallin H. Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$. Harwood Acad. Publ., London, 1984.

[79] Kempka H., Vybíral J. Spaces of variable smoothness and integrability: characterizations by local means and ball means of differences // J. Fourier Anal. Appl. – 2012. – Vol.18. – №4 – P. 852–891.

[80] Kempka H. Atomic, molecular and wavelet decomposition of generalized 2-microlocal Besov spaces // J. Funct. Spaces Appl. – 2010. – Vol.8. – №2. – P. 129–165.

[81] Goncalves H., Kempka H. Non-smooth atomic decomposition of 2-microlocal spaces and application to pointwise multiplier // J. Math. Anal. Appl. – 2016. Vol. 434. – P. 1875–1890.

[82] Kempka H. Generalized 2-microlocal Besov spaces, Thesis, Jena, 2008, 97 p.

[83] Korevaar N. J., Schoen R. M. Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets // Calc. Commun. Anal. Geom. – 1993. – Vol. 1. – №3-4. – P. 561–659.

[84] Koskela P., Rohde S. Hausdorff dimension and mean porosity // Math. Ann. – 1997. – Vol. 309. – №4. – P. 593–609.

[85] Lahti P., Li X., Wang Z. Traces of Newton-Sobolev, Hajlasz-Sobolev, and BV functions on metric spaces // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) – 2021. – Vol. 22. – №3. – P. 1353 – 1383.

[86] Lahti P., Malý L., Shanmugalingam N. An analog of the Neumann problem for the 1-Laplace equation in the metric setting: existence, boundary regularity, and stability // Anal. Geom. Metr. Spaces. – 2018. – Vol. 6. – №1. – P. 1–31.

[87] Laakso T. J. Ahlfors Q-regular spaces with arbitrary $Q > 1$ admitting weak Poincaré inequality // Geom. Funct. Anal. – 2000. – Vol. 10. – №1. – P. 111–123.

[88] Lin F., Yang X. Geometric measure theory: an introduction. - Advanced Mathematics (Beijing/Boston), 1. Science Press, Beijing, International Press, Boston, 2002.

[89] Luukkainen J. Assouad dimension: Antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures // J. Korean Math. Soc. – 1998. – Vol. 35. – №1. – P. 23–76.

[90] Malý L. Trace and extension theorems for Sobolev-type functions in metric spaces // arXiv:1704.06344 – 2017.

[91] Malý L., Shanmugalingam N., Snipes M. Trace and extension theorems for functions of bounded variation // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. – 2018. – Vol. 18. – №1. – P. 313–341.

[92] Martín J., Ortiz W. A. A Sobolev type embedding theorem for Besov spaces defined on doubling metric spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 479. – P. 2302–2337.

[93] Mattila P. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 44. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[94] Mironescu P. and Russ. E. Traces of weighted Sobolev spaces. Old and new // Nonlinear Analysis: TMA. – 2015. – Vol. 119. – P. 354–381.

[95] Mitsuo I., Sawano Y. Atomic decomposition for weighted Besov and Triebel–Lizorkin spaces // Math. Nachr. – 2012. – Vol. 285. – №1. – P. 103–126.

[96] Nieminen T. Generalized mean porosity and dimension // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2006. – Vol. 31. – №1. – P. 143–172.

[97] Peetre J. A counterexample connected with Gagliardo's trace theorem // Comment. Math. Special Issue 2, 277—282 (1979).

[98] Pelczynski A., Wojciechowski M. Sobolev spaces in several variables in L_1-type norms are not isomorphic to Banach lattices // Ark. Mat. – 2002. – Vol 40. – P. 363–382.

[99] Rajala T. Local Poincaré inequalities from stable curvature conditions on metric spaces // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2012. – Vol. 44. – P. 477–494.

[100] Rudin W. Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1991.

[101] Rychkov V. S. Linear extension operators for restrictions of function spaces to irregular open sets // Studia. Math. – 2000. – Vol. 140. – №2. – P. 141–162.

[102] Rychkov V. S. Littlewood–Paley theory and function spaces with A_p^{loc}-weights // Math. Nachr. – 2001. – Vol. 224. – P. 145–180.

[103] Rychkov V. S. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains // J. Lond. Math. Soc. – 1999. – Vol. 60. – №2. – P. 237–257.

[104] Saksman E., Soto T. Traces of Besov, Triebel-Lizorkin and Sobolev spaces on metric spaces // Anal. Geom. Metr. Spaces. – 2017. – Vol. 5. – №1. – P. 98–115.

[105] Salli A. On the Minkowski dimension of strongly porous fractal sets in $\mathbb{R}^n$ // Proc. London Math. Soc. – 1991.– Vol. 62. – №2. – P. 353–372.

[106] Schott T. Function spaces with exponential weights I // Math. Nachr. – 1998. – Vol. 189. – P. 221–242.

[107] Sawyer E. A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operators // Studia Math. – 1982. – Vol. 75. – №1. – P. 1–11.

[108] Seuret S., Vehel J. L. The 2-microlocal formalism, in: Fractal Geometry and Applications // A Jubilee of Benoit Mandelbrot, in: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. – 2004. – Vol. 72. – P. 153–215.

[109] Shanmugalingam N. Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces // Rev. Mat. Iberoamericana. – 2000. – Vol. 16. – №2. – P. 243–279.

[110] Shmerkin P. Porosity, dimension, and local entropies: a survey, arXiv:1110.5682, 2011.

[111] Shvartsman P. On extensions of Sobolev functions defined on regular subsets of metric measure spaces // J. Approx. Theory. – 2007. – Vol. 144. – №2. – P. 139–161.

[112] Shvartsman P. Sobolev W_p^1-spaces on closed subsets of $\mathbb{R}^n$ // Adv. Math. – 2009. – Vol. 220. – №6. – P. 1842–1922.

[113] Shvartsman P. Sobolev L_p^2-functions on closed subsets of $\mathbb{R}^2$ // Adv. Math. – 2014. – Vol. 252. – P. 22–113.

[114] Shvartsman P. Whitney-type extension theorems for jets generated by Sobolev functions // Adv. Math. – 2017. – Vol. 313. – 379–469.

[115] Shvartsman P. Local approximations and intrinsic characterizations of spaces of smooth functions on regular subsets of $\mathbb{R}^n$ // Math. Nachr. – 2006. – Vol. 279. – №11. – P. 1212–1241.

[116] Shvartsman P. Sobolev functions on closed subsets of the real line // J. Approx. Theory. –2020. – Vol. 250. – P.

[117] Stein E. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[118] Triebel H. The structure of functions, Basel, Birkhäuser, 2001, Monogr. Math. 97.

[119] Stein E. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[120] Tolsa X. Restrictions of Sobolev BMO, H^1 and Calderón-Zygmund operators for non doubling measures // Math. Ann. – 2001. – Vol. 319. – №1. – P. 89–149.

[121] Väisälä J. Porous sets and quasisymmetric maps // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – Vol. 299. – №2. – P. 525–533.

[122] Whitney H. Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. – 1934. – Vol. 36. – №1. – P. 63–89.

[123] Whitney H. Differentiable functions defined in closed sets. I // Trans. Amer. Math. Soc. – 1934.– Vol. 36. – №2. – P. 369–387.

[124] Ziemer W. P. Weakly differentiable functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation, Springer, New Orc, 1989.

Работы автора по теме диссертации

(1) Тюленев А.И. О некоторых новых пространствах функций переменной гладкости // Матем. сб. – 2015. – Т. 206. – №6. – С. 85–128.

(2) Tyulenev A.I. Traces of weighted Sobolev spaces with Muckenhoupt weight. The case $p = 1$ // Nonlinear Anal. – 2015. – Vol. 128. – P. 248–272.

(3) Tyulenev A.I. Besov-type spaces of variable smoothness on rough domains // Nonlinear Anal. – 2016. – Vol. 145. – P. 176–198.

(4) Tyulenev A.I. On various approaches to Besov-type spaces of variable smoothness // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – Vol. 451. – №1. – P. 371–392.

(5) Водопьянов С.К., Тюленев А.И. О проблеме Уитни для весовых пространств Соболева // Докл. РАН. – 2017. – Т.472. – №6. – С. 634–638.

(6) Водопьянов С.К., Тюленев А.И. Пространства Соболева W^1_p на d-толстых замкнутых подмножествах $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. – 2020. – Т. 211. – №6. – С. 40–94.

(7) Тюленев А.И. О почти точном описании следов пространств Соболева на компактах // Матем. заметки. – 2021. – Т. 110. – №6. – С. 948–953.

(8) Tyulenev A.I. Restrictions of Sobolev $W^1_p(\mathbb{R}^2)$-spaces to planar rectifiable curves // Ann. Fenn. Math. – 2022. – Vol. 47. – №1. – P. 507–531.

(9) Тюленев А.И. Некоторые свойства множеств типа пористости, связанные с d-обхватом по Хаусдорфу // Тр. МИАН. – 2022. – Т. 319. – С. 298–323.

(10) Тюленев А.И. Следы пространств Соболева на нерегулярных подмножествах метрических пространств с мерой // Матем. сб. – 2023. – Т. 214. – №9. – С. 58–143.

(11) Тюленев А.И. Следы пространств Соболева на кусочно регулярных по Альфорсу–Давиду множествах // Матем. заметки. – 2023. – Т. 114. – №3. – С. 404–434.