Отзыв официального оппонента на диссертацию Шкляева Константина Сергеевича "Новые тополого–геометрические свойства метрической проекции" на соискание учёной степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена некоторым свойствам метрической проекции $P_M$ — отображения, сопоставляющего точке $x$ метрического пространства $X$ множество ближайших к $x$ элементов во множестве $M \subset X$. Оператор метрической проекции — один из основных объектов геометрической теории приближений. Большая часть современной геометрической теории приближений изучает взаимосвязи между свойствами оператора $P_M$ и тополого-геометрическими свойствами множества $M$ (при различных условиях на пространство $X$). Так, центральным в этой области остаётся проблема Кли-Ефимова-Стечкина: всякое ли чебышевское множество (т.е. для которого $P_M x$ всегда состоит ровно из одного элемента) в гильбертовом пространстве выпукло? В диссертации изучаются некоторые смежные вопросы, в том числе, случай, когда величина $|P_M x|$ ограничена некоторым числом $k$; исследуются свойства локально чебышёвских множеств; рассматривается задача о специальном свойстве метрической проекции на двумерных многообразиях.

Диссертация объёмом 72 страницы состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Во введении даётся краткий исторический обзор тематики, мотивировка результатов и их описание.

В первой главе доказывается, среди прочего, замечательная формула:

$$\overline{\operatorname{conv}} M = \overline{\bigcup_{x \in X} \operatorname{conv} P_M x}.$$

Здесь $X$ — гладкое нормированное пространство, $M$ — его компактное подмножество. Другими словами, каждую точку выпуклой оболочки компакта можно приблизить элементом из выпуклой оболочки некоторого множества ближайших элементов. Это утверждение позволяет ответить (в случае ограниченного $M$) на вопрос П.А. Бородина (2010) о числе Каратеодори для множеств с условием $|P_M(x)| \leqslant k$, $\forall x \in X$.

Вторая глава посвящена локально чебышёвским множествам. Диссертант предлагает определение локально чебышёвского множества (оно

нетривиально!) и доказывает, что в конечномерном нормированном пространстве связное компактное локально чебышёвское множество является чебышёвским. Приведём также оригинальное определение множества с "локально чебышёвской границей": это такие множества, для которых в любой точке границы $x_0 \in \partial M$ найдётся $r > 0$, такое что в $B(x_0, r) \setminus M$ метрическая проекция однозначна и лучи $[P_M x, x\rangle$ попарно не пересекаются. Показано, что для связных компактов это условие также равносильно чебышёвости.

В третьей главе исследуется вопрос о количестве особых точек для системы непересекающихся компактов $E_1, \ldots, E_k$ на двумерном римановом многообразии $M^2$. Точка $x$ называется особой, если в $P_M x$ содержатся точки по меньшей мере трёх из этих множеств. Доказано, что максимальное число особых точек равно $2k - 2\chi(M^2)$.

Замечания.

В работе предлагается оригинальное определение локально чебышёвского множества, при этом даются ссылки лишь на М.В. Балашова (устное сообщение) и работу А.А. Флёрова, где локальная чебышёвость в точке понималась как чебышёвость пересечения множества и некоторого шара с центром в этой точке. Однако, в работе А.Р. Алимова 2018 года рассматривались уже произвольные замкнутые окрестности точки. Было бы целесообразно дать ссылку на эту работу и прояснить соотношение между разными вариантами определения в диссертации.

Лемма 2.7 это частный случай стандартной теоремы о поднятии отображения (и леммы о единственности накрывающего пути), было бы лучше сослаться на "готовый" результат.

Другие мелкие замечания. Ссылки на работы [28] и [29] перепутаны местами. Метрика Хаусдорфа определяется на стр. 43, а используется ранее, на стр. 31. Опечатки: на стр. 37: "... следует из выполнено для локально чебышевских множеств", на стр. 40 вместо $(z_1, P_A(z_2)), (z_2, P_A(x_2))$ должно быть $(z_1, P_A(z_1)), (z_2, P_A(z_2))$, на стр. 41 множества не "попарно пересекающиеся", а пересекающиеся с одним из них.

Приведённые замечания не влияют на общую оценку работы. Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях, доложены на нескольких научных семинарах и конференциях. В диссертации получены новые, содержательные теоремы. Они, безусловно, представляют интерес для специалистов по геометрической теории приближений. При доказательстве автору пришлось преодолевать значительные технические трудно-

сти и придумывать оригинальные конструкции. Используется серьёзный топологический аппарат.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация К.С. Шкляева "Новые тополого–геометрические свойства метрической проекции" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям и её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
к.ф.-м.н. (специальность 01.01.01),
с.н.с. МИАН,
Москва, ул. Губкина д.8,
+79163903973
malykhin@mi-ras.ru

Малыхин Ю.В. 22.08.2023

Подпись Ю.В. Малыхина заверяю
Ученый секретарь МИАН С.А. Толкачев