Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

*На правах рукописи*

*УДК* 517.982.256

Шкляев Константин Сергеевич

# Новые тополого-геометрические свойства метрической проекции

1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор П.А.Бородин

Москва — 2023

# Оглавление

**Введение** **3**

**Глава 1. Выпуклые оболочки метрических проекций** **17**

1.1 Обозначения и определения . . . . . 17

1.2 Вспомогательные леммы . . . . . 18

1.3 Результаты для звездных областей . . . . . 20

1.4 Результаты для выпуклых областей . . . . . 27

1.5 Бесконечномерные результаты . . . . . 31

1.6 Результаты для шаров в банаховых пространствах . . . . . 38

**Глава 2. Локально чебышевские множества** **40**

2.1 Определения и основной результат . . . . . 40

2.2 Схема доказательства . . . . . 41

2.3 Предварительные рассуждения . . . . . 42

2.4 Вспомогательные леммы . . . . . 43

2.5 Утверждения о поднятии пути . . . . . 50

2.6 Доказательство основного результата . . . . . 52

**Глава 3. Метрическая проекция на двумерных поверхностях** **56**

3.1 Определения и основной результат . . . . . 56

3.2 Верхняя оценка числа особых точек . . . . . 56

3.3 Точность верхней оценки . . . . . 63

3.4 Случай размерности больше 2 . . . . . 68

**Заключение** **69**

**Список литературы** **70**

# Введение

Диссертация посвящена вопросам геометрической теории приближений в нормированных пространствах, связанных с исследованием новых геометрических и топологических свойств оператора метрического проектирования: представление выпуклой оболочки множества в виде объединения выпуклых оболочек метрических проекций на это множество; доказательство того, что локально чебышевское множество является чебышевским; оценка числа особых точек метрической проекции на двумерных римановых многообразиях.

**Актуальность темы.** Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство, $M$ — непустое подмножество $X$. Метрической проекцией элемента $x \in X$ на множество $M$ называется множество $P_M(x) = \{y \in M : \rho(x, M) = \|x - y\|\}$, где $\rho(x, M) = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$ — функция расстояния от $x$ до множества $M$. Оператор $P_M$, ставящий в соответствие элементу $x$ его метрическую проекцию на множество $M$, называется *оператором метрического проектирования*. Множество $M$ называется *множеством существования*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ непусто, и *множеством единственности*, если для любого $x \in X$ множество $P_M(x)$ состоит из не более чем одного элемента. Если множество $M$ является одновременно и множеством существования и множеством единственности, то есть для любого $x \in X$ метрическая проекция на $M$ однозначна, то $M$ называется *чебышевским* [18].

Оператор метрического проектирования — один из основных объектов, исследуемых в геометрической теории приближений. В современном понимании геометрическая теория приближений изучает взаимосвязи между различными аппроксимативными свойствами множеств (чебышевость, единственность, существование и т.д.) с их тополого-геометрическими свойствами (линейность, выпуклость, связность и т.д.) при различных условиях (строгая выпуклость, гладкость и т.д.) на нормированное пространство.

Свое начало геометрическая теория приближений (как, впрочем, и теория

приближений в целом) берет в классической работе П. Л. Чебышева [35], в которой впервые было введено понятие наилучшего приближения и, в частности, было установлено, что чебышевскими являются множества $P_n$ алгебраических многочленов степени не выше $n$ и множества $R_{mn}$ рациональных функций со степенью числителя не выше $m$ и степенью знаменателя не выше $n$ в пространстве $C[a,b]$ действительнозначных функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. В своей работе П. Л. Чебышев фактически описал оператор метрического проектирования на множества $P_n$ и $R_{mn}$ (теорема об альтернансе). Окончательное становление геометрической теории приближений как самостоятельной ветви теории приближений произошло в 60-е годы XX века благодаря, в первую очередь, работам В. Кли на Западе и работам наших соотечественников Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина, а затем работам В. И. Бердышева, Л. П. Власова, А. Л. Гаркави, Е. В. Ошмана, Э. Асплунда, Х. Беренса, Д. Борвейна, Д. Брааесса, А. Брауна, А. Брондстеда, Д. Вулберта, Ч. Данхэма, Ф. Дойча, Л. Зайичека, И. Зингера, Й. Линденштраусса, Р. Фелпса, Э. Чини, М. Эдельстейна и др.

Большая часть исследований по геометрической теории приближений в нашей стране была проведена представителями научной школы С. Б. Стечкина, внесшими существенный вклад в дальнейшее развитие теории: А. Р. Алимовым, П. В. Альбрехтом, В. И. Андреевым, В. С. Балаганским, А. А. Васильевой, В. И. Ивановым, М. И. Карловым, С. В. Конягиным, В. А. Кощеевым, Е. Д. Ливши цем, Ю. В. Малыхиным, А. В. Мариновым, К. С. Рютиным, Г. Ф. Устиновым, И. Г. Царьковым и др., а также М. В. Балашовым, П. А. Бородиным, Г. Е. Ивановым, В. П. Фонфом и многими другими математиками.

Изучение геометрии чебышёвских множеств в конечномерных линейных нормированных пространствах было начато Л. Бунтом [49], Г. Манном [60] и Т. Моцкиным [61], [62]. В своей диссертации Л. Бунт [49] (1934 г.) доказал, что в строго выпуклых (на сфере пространства нет отрезков) конечномерных банаховых пространствах с модулем гладкости второго порядка (в том числе в

евклидовых) всякое чебышёвское множество выпукло, причем в двумерном случае он показал, что от условия строгой выпуклости можно избавиться. Таким образом, было, в частности, показано, что в конечномерных евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ классы чебышёвских и выпуклых замкнутых множеств совпадают. В дальнейшем Т. Моцкин установил [61], что в двумерном случае условие гладкости пространства (т.е. единственности опорной гиперплоскости в каждой точке единичной сферы пространства) является необходимым и достаточным для выпуклости любого чебышёвского множества в этом пространстве. В. Кли в своих ранних работах [58], [59] обобщил теоремы Бунта и Моцкина, доказав следующий результат.

**Теорема А.** *Всякое чебышевское множество в гладком конечномерном нормированном пространстве выпукло.*

Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин одними из первых стали изучать чебышевские множества в бесконечномерных банаховых пространствах. В дальнейшем были получены многие результаты по описанию чебышевских множеств в различных пространствах, наиболее важные из них отражены в обзорах [4], [10], [12], [13], [32]. На сегодняшний день самой известной нерешенной задачей геометрической теории приближений является проблема Кли-Ефимова-Стечкина, также известная как «проблема выпуклости чебышевских множеств»: всякое ли чебышевское множество в гильбертовом пространстве выпукло? Проблема выпуклости чебышёвских множеств в конкретных и абстрактных банаховых пространствах рассматривалась многими авторами (см., например, Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [18], В. Кли [58], [59], В. И. Бердышев [8], А. Брондстед [45], А. Л. Браун [47], [46], Л. П. Власов [12], В. С. Балаганский и Л. П. Власов [10], И. Г. Царьков [33], [34], А. Р. Алимов [5], [6]). Таким образом, чебышевские множества активно исследовались рядом крупных математиков.

В сравнении с чебышевскими множествами, множества с многозначной и, в частности, конечнозначной метрической проекцией мало изучались. Истори-

чески изучение таких множеств началось с размерностного анализа множества точек неединственности. Именно, будем обозначать через $T = T(M)$ множество $\{x \in X : |P_M(x)| \leq 1\}$. Множеством точек неединственности называется множество $X \setminus T$. С. Б. Стечкин [25] заложил основы направления геометрической теории приближений по изучению плотностных и категорных свойств точек существования, единственности и неединственности для множеств с достаточно произвольной структурой. В частности, он построил пример такого множества в евклидовой плоскости, что множество точек неединственности $X \setminus T$ плотно в некотором круге. Размерностные характеристики множеств неединственности в конечномерных пространствах были исследованы в работах Х. Паука [63] и П. Эрдеша [55]. Бесконечномерные аналоги этих результатов были получены С. В. Конягиным [21], доказавшим, что множество точек единственности произвольного замкнутого множества в сепарабельном банаховом пространстве имеет II категорию, и Л. Зайичеком, который, в частности, доказал [65], что в строго выпуклом сепарабельном пространстве множество неединственности покрывается счетным числом липшицевых гиперповерхностей. Л. Зайичек [19] и М. И. Карлов [57] построили примеры множеств в евклидовой плоскости, представляющих собой различные уточнения результатов Стечкина о мере точек неединственности. Более детальный анализ множества неединственности начался сравнительно недавно. Для заданного множества $M \subset X$ положим $T_n = T_n(M) = \{x \in X : |P_M(x)| = n\}$. Ф. де Бласи и др. авторами [39], [40], [41] для различных значений $n$ исследовалась мера множества $T_n$ при некоторых ограничениях на структуру множества $M$ и условиях на пространство $X$. К. Бартке и Х. Беренс [38] исследовали множество $T_n$ для множеств $M$ в конечномерных евклидовых пространствах. В их работе, в частности, доказано, что множество $\mathbb{R}^n \setminus T(M)$ есть объединение счетного числа замкнутых множеств, имеющих хаусдорфову размерность $n-1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, причем для $n = 2$ множество $\mathbb{R}^2 \setminus T(M)$ представляется в виде счетного объединения спрямляемых кривых в случае, когда множество $M$ компактно. Следует отдельно отме-

тить существование ряда работ [42], [43], [54], [64], в которых изучается вопрос о конечности множества элементов наилучшего или локально наилучшего приближения посредством рациональных функций, экспоненциальных сумм и других специальных аппроксимирующих множеств в различных функциональных пространствах. Работы такого типа наиболее интересны с точки зрения непосредственных приложений теорем о множествах с конечнозначной метрической проекцией.

Сформулируем еще один примечательный результат, связанный со множествами с конечнозначной метрической проекцией. Для этого нам понадобятся несколько определений. Последовательность $\{y_n\} \subset M$ называется минимизирующей для элемента $x \in X$, если $\|y_n - x\| \to \rho(x, M)$ при $n \to \infty$. Множество $M$ называется аппроксимативно компактным, если для любого $x \in X$ всякая минимизирующая последовательность $\{y_n\} \subset M$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из $M$. П. А. Бородин и И. А. Пятышев [11] установили, что в любом банаховом пространстве $X$ из достаточно широкого класса, в частности, во всех пространствах $l_p$, $1 \leq p < \infty$, существует такое не аппроксимативно компактное ограниченное множество $M$, что метрическая проекция $P_M(x)$ непуста и конечна для любого $x \in X$. Неизвестно, можно ли построить такое множество с дополнительным условием $|P_M(x)| \leq k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in X$. В случае $k = 1$ и $X = l_2$ построение такого множества означало бы отрицательное решение проблемы выпуклости.

Упомянем также о работах А. Брауна [46], [47], А. Н. Дранишникова [16], [17] и В. В. Федорчука [26], [27], посвященных изучению конечнозначных и многозначных ретракций. Взаимосвязь конечнозначных ретракций с геометрической теорией приближений и, в частности, с исследованием множеств с многозначной метрической проекцией, рассмотрена, например, в работе А. Р. Алимова [2] и в обзоре А. Р. Алимова и И. Г. Царькова [4]. При исследовании множеств с конечнозначной метрической проекцией, как обобщений чебышевских множеств, естественно возникает следующая задача: можно ли доказать какие-

либо аналоги теоремы $A$, если в ее формулировке заменить чебышевское множество на такое множество $M$, что для всякого $x \in X$ имеет место неравенство $1 \leq |P_M(x)| \leq n$, где $n \geq 2$ — фиксированное натуральное число или $n = \infty$. Для множества $M \subset X$ и натурального числа $k$ определим множество, состоящее из всевозможных выпуклых оболочек $k$ точек множества $M$:

$$\operatorname{conv}_k M := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \quad x_i \in M, \quad \lambda_i \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

По теореме Каратеодори о выпуклой оболочке для всякого множества $M$ в $d$-мерном нормированном пространстве его выпуклая оболочка $\operatorname{conv} M$ совпадает с множеством $\operatorname{conv}_{d+1} M$. Также нетрудно заметить, что

$$M = \operatorname{conv}_1 M \subseteq \operatorname{conv}_2 M \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{conv}_{d+1} M = \operatorname{conv} M.$$

*Числом Каратеодори множества* $M$ называется такое наименьшее натуральное $k$, что $\operatorname{conv}_k M = \operatorname{conv} M$. В частности, множество $M$ выпукло тогда и только тогда, когда его число Каратеодори равно 1. В 2010 году П. А. Бородиным была поставлена

**Задача А.** *Доказать, что в $d$-мерном гладком пространстве $X_d$ всякое замкнутое множество $M \subset X_d$ с непустой и не более чем $k$-значной метрической проекцией $P_M$ имеет число Каратеодори не более $k$.*

Очевидно, что в случае $k = 1$ утверждение задачи в точности совпадает с теоремой $A$, а при $k \geq d + 1$ оно следует из теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке. В нетривиальном случае $k = d = 2$ задача $A$ была полностью решена А. А. Флеровым [28]. В главе I диссертации исследуется задача $A$ для произвольных натуральных $k$ и $d$, а также ее естественные обобщения на случай, когда $k$ и $d$ бесконечны. В частности, она полностью решена для ограниченных множеств $M$. Отметим, что известен ряд других дополнительных условий на множество $M$, при которых верхняя оценка на его число Каратеодори может быть улучшена. Результаты этого типа получили В. Фенхель [56], И. Барань и

Р. Н. Карасёв [37] и другие. Более подробный обзор имеющихся результатов о числе Каратеодори можно найти в [37].

Другой класс множеств с, как правило, конечнозначной метрической проекцией, исследуемый в диссертации, — класс так называемых локально чебышевских множеств. Данное понятие было предложено М. В. Балашовым в 2012 году по аналогии с локально выпуклыми множествами: множество $M$ в нормированном пространстве $X$ называется локально чебышевским, если для всякого $y \in M$ существует такое $r(y) > 0$, что пересечение $M$ с замкнутым шаром $\overline{B}\big(y, r(y)\big)$ является чебышевским множеством. Взаимосвязь локально выпуклых и выпуклых множеств в банаховых пространствах в неявном виде исследовалась в работе А. В. Арутюнова [7], в которой, в частности, был установлен следующий результат:

**Теорема В.** *Всякое связное замкнутое локально выпуклое множество в банаховом пространстве является выпуклым.*

Отметим, что из выпуклости замкнутого множества его локальная выпуклость следует очевидным образом. В 2012 году М. В. Балашов поставил следующую задачу.

**Задача В.** *Верно ли, что всякое замкнутое связное локально чебышевское множество в банаховом пространстве является чебышевским?*

Эту задачу также исследовал А. А. Флеров. В работе [29] он доказал, что это верно для множеств на нормированной плоскости, а в кандидатской диссертации [30] указал пример замкнутого, связного, локально чебышевского, но не чебышевского множества (этот пример идейно восходит к известному примеру Ч. Данхэма несвязного чебышевского множества в $C[0, 1]$). Очевидно, что пересечение выпуклого множества с любым замкнутым шаром выпукло, однако пересечение чебышевского множество с замкнутым шаром может не быть чебышевским, поскольку сам замкнутый шар в не строго выпуклом банаховом

пространстве не является чебышевским множеством. В связи с этим во II главе диссертации вводится более общее определение локально чебышевского множества и доказывается, что всякое компактное связное локально чебышевское множество в конечномерном нормированном пространстве является чебышевским.

В III главе диссертации рассматриваются комбинаторные свойства метрической проекции на подмножества двумерных поверхностей. На Московской математической олимпиаде 2015 г. была предложена следующая

**Задача** (11 класс, П. А. Бородин). *На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделенные друг от друга океаном. Назовем точку океана особой, если для нее найдутся не менее трех ближайших (находящихся от нее на равных расстояниях) точек суши, причем все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете?*

В главе III исследуется обобщение этой задачи на случай произвольного числа «материков» (связных попарно непересекающихся замкнутых множеств) $E_j$, $j = 1, \ldots, n$, на произвольном компактном связном двумерном римановом многообразии $M^2$. Пусть $E$ — объединение всех «материков» $E_j$. Получена точная оценка сверху на количество тех точек $x$ поверхности $M^2$, метрическая проекция $P_E(x)$ которых содержит точки не менее чем трех «материков» $E_1, \ldots, E_n$. Данная оценка получена в терминах эйлеровой характеристики поверхности $M^2$ и числа $n$. Аналогичный результат получен для метрической проекции $P_E$ на произвольной нормированной плоскости.

**Цель работы.** Исследование геометрических и топологических свойств оператора метрического проектирования, в частности, представление выпуклой оболочки множества в виде объединения выпуклых оболочек метрических проекций на это множество, исследование локально чебышевских множеств в конечномерных пространствах и комбинаторных свойств метрической проекции

на подмножества двумерных поверхностей.

**Положения, выносимые на защиту. Научная новизна.** В диссертация автором самостоятельно получены следующие новые результаты.

1) Доказано, что в гладком банаховом пространстве замыкание выпуклой оболочки компакта совпадает с замыканием объединения выпуклых оболочек метрических проекций на него (Теорема 1.6).

2) Доказано, что всякое компактное связное локально чебышевское множество в конечномерном пространстве является чебышевским (Теорема 2.1).

3) Получена точная оценка сверху на количество точек двумерной поверхности, метрическая проекция которых на подмножество этой поверхности содержит точки не менее трех компонент связности данного подмножества (Теорема 3.1).

**Методы исследования.** В работе используются методы топологии, выпуклого анализа, функционального анализа, а также методы современной геометрической теории приближений и геометрии банаховых пространств.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории функций, функциональном анализе, теории приближений, топологии и геометрии.

**Апробация диссертации.** Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар по геометрической теории приближений в МГУ под руководством профессора П. А. Бородина (неоднократно, 2015–2022);
- семинар “Теория приближений” в МГУ под руководством профессора И. Г. Царькова, доцента А. С. Кочурова, д.ф.-м.н. А. А. Васильевой и д.ф.-м.н. А. Р. Алимова (2019, 2021);

- семинар по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН Б. С. Кашина, академика РАН С. В. Конягина, профессора Б. И. Голубова, профессора М. И. Дьяченко (2021).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- на международной конференции «Вероятность, анализ и геометрия» в МГУ (2016);
- на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (2019);
- на международной конференции «Теория приближений и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения С. Б. Стечкина (2021).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора [66], [67], [68] в журналах из баз данных Web of Science и Scopus. Список этих работ приведен в конце диссертации.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 70 наименований. Общий объем диссертации — 76 страниц. Результаты, доказанные в диссертации, нумеруются двумя арабскими цифрами (первая цифра указывает на номер главы), а ранее известные используемые результаты — латинскими буквами.

**Краткое содержание диссертации.** Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

Во введении дан исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, а также изложены основные результаты диссертации.

В главе I исследуется вопрос о представлении выпуклой оболочки множества в гладком банаховом пространстве в виде объединения выпуклых оболочек метрических проекций $\operatorname{conv} P_M(x)$. Обозначим через $\operatorname{ri} M$ относительную внутренность множества $M$, то есть внутренность множества $M$ в аффинной оболочке $M$. Напомним, что подмножество нормированного пространства называется ограниченно компактным, если его пересечение со всяким замкнутым шаром компактно. Получена

**Теорема 1.6.** *Пусть $X$ — банахово пространство, $M \subset X$.*

*1) Если $X$ — гладкое конечномерное пространство, $M$ — замкнутое множество, то* $\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) \subset \bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{conv}\big(P_M(x)\big)$;

*2) Если $X$ — равномерно гладкое пространство, $M$ — ограниченно компактное множество, то* $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{conv}\big(P_M(x)\big)}$;

*3) Если $X$ — гладкое пространство, $M$ — компакт, то* $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{conv}\big(P_M(x)\big)}$.

Из этой теоремы выводится следствие о множествах с конечной метрической проекцией.

**Следствие 1.5.** *1) Пусть $X$ — гладкое банахово пространство, $M \subset X$ — компакт и метрическая проекция $P_M$ не более чем $k$-значна. Тогда* $\operatorname{conv} M = \operatorname{conv}_k M$.

*2) Пусть $X$ — равномерно гладкое банахово пространство, $M \subset X$ — ограниченно компактное множество и метрическая проекция $P_M$ не более чем $k$-значна. Тогда* $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\operatorname{conv}_k M}$.

Таким образом, утверждение задачи $A$ для ограниченного множества $M$ непосредственно вытекает из пункта 1) следствия 1.5. В случае, когда множество $M$ из задачи $A$ не ограничено, равенство $\operatorname{conv} M = \operatorname{conv}_k M$ не вытекает из следствия 1.5, однако по пункту 2) этого следствия выполнено $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\operatorname{conv}_k M}$. Нетрудно видеть, что из пункта 1) теоремы 1.6 следует более сильное

утверждение $\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) \subset \operatorname{conv}_k M$. То есть множество $\operatorname{conv}_k M$ содержит в себе множество $\operatorname{conv} M$ за исключением, быть может, его границы в аффинной оболочке $M$. Отметим, что в теореме 1.6 и следствии 1.5 гладкость пространства $X$ существенна, поскольку в негладких пространствах могут существовать невыпуклые чебышевские множества $M$, для которых $M = \operatorname{conv}_1 M \subsetneq \operatorname{conv} M$, а следовательно $\overline{\operatorname{conv}_1 M} \subsetneq \overline{\operatorname{conv} M}$, поскольку всякое чебышевское множество замкнуто. Отсюда $\overline{\bigcup\limits_{x\in X} \operatorname{conv}\big(P_M(x)\big)} \subsetneq \overline{\operatorname{conv} M}$.

В главе II вводится новое определение локально чебышевских множеств и определение множеств с локально чебышевской границей.

**Определение 2.1.** *Множество $A$ называется локально чебышевским, если для каждой точки $x \in A$ существуют такие число $r(x) > 0$ и чебышевское множество $F_x \subset X$, что $A \cap B(x, r(x)) \subset F_x \subset A$.*

Обозначим через $(x, y\rangle$ луч $\{x + t(y - x) : t > 0\}$.

**Определение 2.2.** *Множество $A$ имеет локально чебышевскую границу, если для каждой точки $x \in \partial A$ существуют такое число $r(x) > 0$, что метрическая проекция $P_A$ однозначна на $B(x, r(x))$ и лучи из семейства $\{(P_A(y), y\rangle : y \in B(x, r(x)) \setminus A\}$ попарно не пересекаются.*

Для них доказана

**Теорема 2.1.** *Для компактного связного множества $A$ в конечномерном нормированном пространстве следующие условия эквивалентны:*

1) *$A$ — чебышевское множество;*

2) *$A$ — локально чебышевское множество;*

3) *$A$ имеет локально чебышевскую границу.*

Тем самым задача $B$ решается положительно для ограниченных множеств в конечномерных пространствах.

Отметим, что если ослабить определение 2.2, потребовав, чтобы лучи из семейства $\{(P_A(y), y\rangle : y \in B(x, r(x)) \setminus A\}$ не пересекались лишь в некоторой окрестности множества $A$, то теорема 2.1 перестанет быть справедливой. Действительно, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, сфера $S^{d-1}$ радиуса $r$ с центром в точке 0 очевидно не является чебышевским множеством, однако лучи $\{(P_{S^{d-1}}(y), y\rangle : y \in \mathbb{R}^d\}$ не пересекаются в $r$-окрестности сферы $S^{d-1}$ (они могут пересекаться только в точке 0).

В главе III рассматривается метрическая проекция на замкнутое подмножество римановой двумерной поверхности $M^2$, состоящее из $k \geq 3$ компонент связности. Вводится определение особой точки.

**Определение 3.1.** *Пусть на замкнутом римановом двумерном многообразии $M^2$ расположено множество $E$, состоящее из $k \geq 3$ связных попарно непересекающихся замкнутых множеств («материков») $E_1, \ldots, E_k$. Назовем точку $x \in M^2$ особой, если метрическая проекция $P_E(x)$ содержит точки не менее трех различных множеств $E_j$.*

Получена точная оценка сверху на число особых точек.

**Теорема 3.1.** *Пусть на замкнутом римановом двумерном многообразии $M^2$ расположено множество $E$, состоящее из $k \geq 3$ материков $E_1, \ldots, E_k$. Тогда максимально возможное число особых точек равно $2k - 2\chi(M^2)$, где $\chi(M^2)$ — эйлерова характеристика многообразия $M^2$.*

Также показано, что для многообразий размерности больше 2 число особых точек может быть любым даже для $k = 3$.

**Благодарности.** Автор благодарен своим родителям и близким за их поддержку. Также автор благодарен своему научному руководителю П. А. Бородину за постановку задач и внимание к работе. Кроме того, автор приносит благодарность А. Р. Алимову и И. Г. Царькову за обсуждение результатов, во-

шедших в диссертацию, и ценные замечания, а также А. А. Флерову за интересные доклады, которые привлекли внимание к задачам $A$ и $B$.

# Глава 1. Выпуклые оболочки метрических проекций

## 1.1 Обозначения и определения

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — действительное банахово пространство. Расстояние от элемента $x \in X$ до множества $M \subset X$ обозначим

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Обозначим замкнутый, открытый шар и сферу пространства $X$ с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$ через $\overline{B}(x, r)$, $B(x, r)$ и $S(x, r)$ соответственно. Обозначим $\operatorname{ri} M$ относительную внутренность множества $M \subset X$, то есть внутренность множества $M$ в его аффинной оболочке

$$\operatorname{aff} M := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \quad k \in \mathbb{N},\ x_i \in M,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Напомним, что *метрической проекцией* точки $x$ на множество $M$ называется множество

$$P_M(x) = \big\{ y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M) \big\}.$$

Множество $M$ называется *чебышевским*, если метрическая проекция $P_M(x)$ состоит ровно из одного элемента для всех $x \in X$. Выпуклую оболочку множества $M$ обозначим $\operatorname{conv} M$.

**Определение 1.1.** *Для множества $M \subset X$ и натурального числа $k$ положим*

$$\operatorname{conv}_k M := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \quad x_i \in M, \quad \lambda_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

**Определение 1.2.** *Числом Каратеодори множества $M$ называется такое наименьшее натуральное $k$, что* $\operatorname{conv}_k M = \operatorname{conv} M$.

## 1.2 Вспомогательные леммы

Далее через $X_d$ обозначается нормированное пространство размерности $d$.

**Лемма 1.1.** *Пусть $a, b \in X_d$, $r > 0$, $a \in B(b,r)$ и $f : \overline{B}(b,r) \to X_d$ — такое непрерывное отображение, что $a \notin [x, f(x)]$ для всех $x \in S(b,r)$. Тогда существует такая точка $x_* \in B(b,r)$, что $f(x_*) = a$.*

*Доказательство.* Не ограничивая общности, можно считать, что $b = 0$, $r = 1$. Предположим, что $f(x) \neq a$ для всех $x \in B(0,1)$. Поскольку $a \notin [x, f(x)]$ для всех $x \in S(0,1)$, то в силу непрерывности $f$ существует такое число $\tau \in (0,1)$, что $a \notin [x, f(tx)]$ для всех $x \in S(0,1)$ и всех $t \in [1-\tau, 1]$. Поэтому

$$g(x,t) := \frac{t+\tau-1}{\tau}x + \frac{1-t}{\tau}f(tx) \neq a \tag{1.1}$$

для всех $x \in S(0,1)$ и всех $t \in [1-\tau, 1]$. Введем автоморфизм сферы $S(0,1)$

$$u : x \mapsto \frac{x-a}{\|x-a\|}$$

Из (1.1) вытекает, что корректно определено следующее отображение $\widetilde{f} : \overline{B}(0,1) \to S(0,1)$, заданное формулой

$$\widetilde{f}(tx) := \begin{cases} u^{-1}\left(\frac{f(tx)-a}{\|f(tx)-a\|}\right), & x \in S(0,1),\ t \in [0, 1-\tau) \\ u^{-1}\left(\frac{g(x,t)-a}{\|g(x,t)-a\|}\right), & x \in S(0,1),\ t \in [1-\tau, 1]. \end{cases}$$

Кроме того, для всех $x \in S(0,1)$ выполнено

$$\frac{g(x,1-\tau)-a}{\|g(x,1-\tau)-a\|} = \frac{f((1-\tau)x)-a}{\|f((1-\tau)x)-a\|}, \quad \frac{g(x,1)-a}{\|g(x,1)-a\|} = \frac{x-a}{\|x-a\|}.$$

Поэтому $\widetilde{f}$ непрерывно и $\widetilde{f}|_{S(0,1)} \equiv \mathrm{id}$, то есть $\widetilde{f}$ — ретракция шара $\overline{B}(0,1)$ на его границу $S(0,1)$, что невозможно [9, § 38].

Лемма доказана.

□

Пусть $(X, \rho_X)$, $(Y, \rho_Y)$ — метрические пространства. Многозначное отображение $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ называется полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in B(x_0, \delta)$ выполнено

$$F(x) \subset B_\varepsilon\big(F(x_0)\big) := \Big\{y \in Y : \rho_Y\big(y, F(x_0)\big) := \inf_{z \in F(x_0)} \rho_Y(y, z) < \varepsilon\Big\}.$$

Графиком многозначного отображения $F : X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ называется множество

$$\Gamma_F := \big\{(x, y) :\ x \in X,\ y \in F(x)\big\}$$

с заданным на нем расстоянием

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \max\big(\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\big).$$

Для линейного пространства $Y$ обозначим $\mathrm{Conv}(Y)$ множество всех его непустых замкнутых выпуклых подмножеств.

**Лемма 1.2.** *Пусть $a, b \in X_d$, $r > 0$, $a \in B(b, r)$ и $F : \overline{B}(b, r) \to \mathrm{Conv}(X_d)$ — такое полунепрерывное сверху отображение, что $a \notin \mathrm{conv}\,(\{x\} \cup F(x))$ для всех $x \in S(b, r)$. Тогда $a \in F(x_*)$ для некоторого $x_* \in B(b, r)$.*

*Доказательство.* Не ограничивая общности, будем считать, что $b = 0$, $r = 1$. Предположим, что $a \notin F(x)$ для всех $x \in \overline{B}(0, 1)$. Тогда в силу полунепрерывности сверху отображения $F$ существует такое $\varepsilon \in (0, (1 - \|a\|)/2)$, что для всех $x \in \overline{B}(0, 1)$ и всех $y \in \overline{B}(0, 1) \setminus B(0, 1 - \varepsilon)$ выполнено

$$B(a, 2\varepsilon) \cap F(x) = \varnothing, \qquad B(a, \varepsilon) \cap \mathrm{conv}\,\big(\{y\} \cup F(y)\big) = \varnothing. \tag{1.2}$$

Далее нам потребуется следующая

**Теорема С.** *[51, теорема 1]. Пусть $S$ — компактное метрическое пространство, $Y$ — линейное нормированное пространство, $\Phi : S \to \mathrm{Conv}(Y)$ – полунепрерывное сверху отображение. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует однозначная $\varepsilon$-аппроксимация отображения $\Phi$, то есть такое непрерывное однознач-*

*ное отображение* $\varphi : S \to \operatorname{conv}\Phi(S)$, *что для графиков* $\Gamma_\Phi$ *и* $\Gamma_\varphi$ *отображений* $\Phi$ *и* $\varphi$ *выполнено* $\rho^*(\Gamma_\varphi, \Gamma_\Phi) := \sup\limits_{y\in\Gamma_\varphi} \rho(y, \Gamma_\Phi) < \varepsilon$.

По теореме $C$ существует однозначная $\varepsilon$-аппроксимация $f : \overline{B}(0,1) \to X$ многозначного отображения $F$. Поскольку $\rho^*(\Gamma_f, \Gamma_F) < \varepsilon$, из (1.2) вытекает

$$B(a,\varepsilon) \cap f(\overline{B}(0,1)) = \varnothing. \tag{1.3}$$

Кроме того, $a \notin [y, f(y)]$ для $y \in S(0,1)$. Действительно, в противном случае найдется такое $\lambda \in [0,1]$, что

$$a = \lambda y + (1-\lambda) f(y). \tag{1.4}$$

Поскольку $\rho^*(\Gamma_f, \Gamma_F) < \varepsilon$, найдутся такие $z \in B(y,\varepsilon) \cap \overline{B}(0,1)$ и $w \in B(f(y),\varepsilon)$, что $w \in F(z)$. Поэтому в силу (1.4) выполнена оценка

$$\big\|\lambda z + (1-\lambda)w - a\big\| \le \big\|\lambda(z-y)\big\| + \big\|(1-\lambda)(w-f(y))\big\| < \varepsilon,$$

то есть $B(a,\varepsilon) \cap \operatorname{conv}\big(\{z\} \cup F(z)\big) \neq \varnothing$, что противоречит (1.2). Таким образом, отображение $f$ удовлетворяет условиям леммы 1.1, поэтому существует такой $x_* \in B(0,1)$, что $f(x_*) = a$. Последнее невозможно в силу (1.3).

Лемма доказана. □

## 1.3 Результаты для звездных областей

Результаты этого параграфа относятся к комбинаторной геометрии и близки к результатам работы [14]. Напомним, что область $U \subset \mathbb{R}^d$ называется *звездной относительно точки* 0, если $\lambda U \subset U$ для всех $\lambda \in (0,1)$ и $0 \in U$. Обозначим $p_u$ функционал Минковского звездной относительно нуля области $U$, то есть отображение

$$p_u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+, \qquad x \mapsto \sup\big\{\lambda \ge 0 : \lambda x \in U\big\}.$$

По аналогии с [44, Замечание 2] введем

**Определение 1.3.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная звездная область относительно точки 0. Для точки $x \in \mathbb{R}^d$ и замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^d$ положим*

$$U(x,r) := x + rU, \quad \overline{U}(x,r) := \overline{U(x,r)}, \quad \rho_u(x,M) = \inf\big\{p_u(y-x) : y \in M\big\},$$

$$P_M^u(x) := M \cap \overline{U}\big(x, \rho_u(x,M)\big).$$

Отметим, что хотя в силу замкнутости $M$ и открытости $U$, выполнено

$$P_M^u(x) \neq \varnothing, \quad M \cap U\big(x, \rho_u(x,M)\big) = \varnothing,$$

но вообще говоря неверно, что $M \cap \overline{U}(x,\lambda) = \varnothing$ для всех $\lambda \in (0, \rho_u(x,M))$.

Напомним, что функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху на* $\mathbb{R}^d$, если $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) \le f(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

**Лемма 1.3.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная звездная область с центром в нуле, $M$ — непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^d$. Тогда*

*1) функция $\rho_u(\,\cdot\,, M)$ полунепрерывна сверху на $\mathbb{R}^d$;*

*2) многозначное отображение $P_M^u$ полунепрерывно сверху на $\mathbb{R}^d$.*

*Доказательство.* 1) Пусть $x \in \mathbb{R}^d$. Докажем, что функция $\rho_u(\,\cdot\,, M)$ полунепрерывна сверху в точке $x$, то есть для всякой последовательности $x_n \to x$ выполнено неравенство

$$\rho_u(x,M) \ge \overline{\lim_{n\to\infty}} \rho_u(x_n, M) =: r.$$

В противном случае $\rho_u(x,M) < r$, поэтому $M \cap U(x,r) \neq \varnothing$. Выберем $y \in M \cap U(x,r)$ и положим $z := (y-x)/r \in U$. Тогда $y = x + rz$. Найдем такое $\varepsilon > 0$, что

$$B(x+rz, 4r\varepsilon) \subset U(x,r) = x + rU,$$

положим $r_n := \rho_u(x_n, M)$. Предыдущее включение остается верным при гомотетии и сдвиге, поэтому

$$B(x_n + r_n z, 4r_n\varepsilon) \subset (x_n + r_n U) = U(x_n, r_n). \tag{1.5}$$

Возьмем такое $n$, что

$$\|x - x_n\| < r\varepsilon, \quad |r - r_n| < \min\left(\frac{r\varepsilon}{\|z\| + 1}, \frac{r}{4}\right).$$

Тогда выполнена оценка

$$\|x + rz - (x_n + r_n z)\| \leq \|x - x_n\| + \|(r - r_n)z\| < 2r\varepsilon, \qquad r_n > \frac{3r}{4}.$$

В силу двух последних неравенств и (1.5) выполнено включение

$$B(y, r\varepsilon) = B(x + rz, r\varepsilon) \subset B\big(x_n + r_n z, 3r\varepsilon\big) \subset B\big(x_n + r_n z, 4r_n\varepsilon\big) \subset U\big(x_n, r_n\big).$$

Отсюда

$$M \cap B(y, r\varepsilon) \subset M \cap U\big(x_n, r_n\big) = \varnothing,$$

однако $y \in M \cap B(y, r\varepsilon)$, поскольку $y$ выбирался из множества $M \cap U(x, r)$. Следовательно, $M \cap U(x, r) = \varnothing$, а значит $\rho_u(x, M) \geq r$. Тем самым первая часть часть леммы доказана.

2) Докажем, что многозначное отображение $P^u_M$ полунепрерывно сверху в точке $x$. Для этого достаточно показать, что для всякой последовательности $x_n \to x$ и всякой такой последовательности $y_n \in P^u_M(x_n)$, что $y_n \to y$, выполнено $y \in P^u_M(x)$. Не ограничивая общности будем считать, что $r_n := \rho_u(x_n, M) \to r$ (в противном случае можно выбрать соответствующую подпоследовательность из последовательности $y_n$). Тогда множества $\overline{U}(x_n, r_n)$ стремятся в метрике Хаусдорфа к $\overline{U}(x, r)$. Поэтому $y \in \overline{U}(x, r)$. Кроме того, $y \in M$, поскольку $y_n \in M$ и $M$ замкнуто. С другой стороны, в силу полунепрерывности сверху функции $\rho_u(\cdot, M)$ имеем $R := \rho_u(x, M) \geq r$. Следовательно, $y \in \overline{U}(x, R) \cap M$, то есть $y \in P^u_M(x)$.

Лемма доказана. □

Из лемм 1.2 и 1.3 непосредственно вытекает следующая

**Теорема 1.1.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная звездная область с центром в нуле, $M \subset \mathbb{R}^d$ — замкнутое множество, $a, b \in \mathbb{R}^d$ и $r > 0$ таковы, что*

*$a \in B(b,r)$ и $a \notin \operatorname{conv}\big(\{x\} \cup P_M^u(x)\big)$ для всех $x \in S(b,r)$. Тогда существует такое $x_* \in \mathbb{R}^d$, что $a \in \operatorname{conv}\big(P_M^u(x_*)\big)$.*

При дополнительных условиях на множество $M$ и область $U$ это утверждение можно уточнить.

**Теорема 1.2.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная звездная область с центром в нуле, $\partial U$ — $C^1$-гладкая гиперповерхность, $M \subset \mathbb{R}^d$ — компакт. Тогда* $\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) \subset \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)$ *и* $\operatorname{conv} M = \overline{\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)}$.

*Доказательство.* 1) Докажем включение $\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) \subset \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)$. Рассмотрим случай $\operatorname{aff} M = \mathbb{R}^d$. Тогда

$$\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) = \operatorname{int}(\operatorname{conv} M).$$

Пусть $a \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) \setminus M$. Найдем элементы $a_1, \dots, a_\nu \in M$ и число $\delta \in (0,1)$, для которых

$$B(a,3\delta) \subset \operatorname{conv}\big(\{a_1,\dots,a_\nu\}\big), \quad B(a,3\delta) \cap M = \varnothing. \tag{1.6}$$

Докажем, что существует такой элемент $x_* \in \mathbb{R}^d$, что $a \in \operatorname{conv}\big(P_M^u(x_*)\big)$. По теореме 1.1 для доказательства существования точки $x_*$ достаточно найти такое $R > 0$, что

$$a \notin \operatorname{conv}\big(\{x\} \cup P_M^u(x)\big) \quad \forall\, x \in S(0,R).$$

Пусть $V \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная звездная область, $\partial V$ — $C^1$-гладкая гиперповерхность. Для точки $y \in \partial V$ обозначим через $N_{\partial V}(y)$ единичный вектор внешней нормали к $V$ в точке $y$. Также введем замкнутое полупространство

$$\Pi_{\partial V}(y,t) := \Big\{x \in \mathbb{R}^d : \big\langle x, N_{\partial V}(y)\big\rangle \le \big\langle y, N_{\partial V}(y)\big\rangle - t\Big\}. \tag{1.7}$$

Диаметр множества $M$ обозначим

$$\operatorname{diam}(M) = \sup\{\|y - y'\| :\ y, y' \in M\}.$$

Поскольку $\partial U$ — $C^1$-гладкая и компактная гиперповерхность, для всякого $y \in \partial U$ угол между вектором $z - y$, $z \in \partial U$, и касательным пространством $T_{\partial U}(y)$ (т.е. границей полупространства $\Pi_{\partial U}(y, 0)$) стремится к нулю при $z \to y$ равномерно по $y$. Поэтому для всякого $r > 0$ при достаточно больших $\lambda$ окрестность границы $\partial(\lambda U) \cap B(\lambda y, r)$ близка в метрике Хаусдорфа к окрестности касательного пространства $T_{\lambda\partial U}(\lambda y) \cap B(\lambda y, r)$ при всех $y \in \partial U$. Значит найдется такое $\lambda_0 > 0$, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и всех $y \in \partial U$ выполнены включения

$$\lambda\overline{U} \cap \overline{B}\big(\lambda y, \operatorname{diam}(M)\big) \subset \Pi_{\lambda\partial U}(\lambda y, -\delta) \cap \overline{B}\big(\lambda y, \operatorname{diam}(M)\big), \tag{1.8}$$

$$\lambda U \cap \overline{B}\big(\lambda y, \operatorname{diam}(M)\big) \supset \Pi_{\lambda\partial U}(\lambda y, \delta) \cap \overline{B}\big(\lambda y, \operatorname{diam}(M)\big). \tag{1.9}$$

Найдем такое $R > 0$, что

$$\rho_u(x, M) \geq \lambda_0 \quad \forall\, x \in S(0, R). \tag{1.10}$$

Докажем, что

$$B(a, \delta) \cap \operatorname{conv}\big(\{x\} \cup P_M^u(x)\big) = \varnothing \quad \forall\, x \in S(0, R).$$

Предположим противное. Возьмем $b \in B(a, \delta) \cap \operatorname{conv}\big(\{x\} \cup P_M^u(x)\big)$. Найдем такие $y_1, \ldots, y_m \in P_M^u(x)$, что $b \in \operatorname{conv}\big(\{x, y_1, \ldots, y_m\}\big)$ и обозначим

$$U' := U(x, \rho_u(x, M)).$$

Очевидно, что $\partial U'$ гомотетично $\partial U$ и $y_1, \ldots, y_m \in \partial U'$. Положим

$$N(y_1) := N_{\partial U'}(y_1), \quad \Pi(y_1, t) := \Pi_{\partial U'}(y_1, t).$$

Поскольку $U'$ — звездная область с центром в точке $x$, выполнено $x \in \Pi(y_1, 0)$ и следовательно $x \in \Pi(y_1, -\delta)$. Подставляя $\lambda U = U' - x$, $\lambda y = y_1 - x$ в соотношения (1.8), (1.9) и прибавляя к ним $x$, получим

$$\overline{U'} \cap \overline{B}\big(y_1, \operatorname{diam}(M)\big) \subset \Pi(y_1, -\delta) \cap \overline{B}\big(y_1, \operatorname{diam}(M)\big), \tag{1.11}$$

$$U' \cap \overline{B}\big(y_1, \operatorname{diam}(M)\big) \supset \Pi(y_1, \delta) \cap \overline{B}\big(y_1, \operatorname{diam}(M)\big). \tag{1.12}$$

Очевидно, что $\|y_1 - y_i\| \leq \operatorname{diam}(M)$ для всех $i = 1, \ldots, m$, поэтому из (1.11) вытекает $y_i \in \Pi(y_1, -\delta)$. Тогда $\operatorname{conv}\{x, y_1, \ldots, y_m\} \subset \Pi(y_1, -\delta)$, а значит $b \in \Pi(y_1, -\delta)$. Отсюда $c := b - 2\delta N(y_1) \in \Pi(y_1, \delta)$. Ясно, что $c \in B(a, 3\delta)$, поэтому из (1.6) следует, что какая-то из точек $a_1, \ldots, a_\nu$ также лежит в $\Pi(y_1, \delta)$. Не ограничивая общности будем далее считать, что $a_1 \in \Pi(y_1, \delta)$. С другой стороны, в силу $M \subset \overline{B}\big(y_1, \operatorname{diam}(M)\big)$ из (1.12) вытекает включение

$$U' \cap M \supset \Pi(y_1, \delta) \cap M,$$

что невозможно, поскольку $U' \cap M = \varnothing$ и $a_1 \in \Pi(y_1, \delta) \cap M$.

Рассмотрим случай $\operatorname{aff} M \neq \mathbb{R}^d$. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in M$, то есть $\operatorname{aff} M = \operatorname{span} M$. Положим $l := d - \dim(\operatorname{span} M) > 0$. Ясно, что найдется такое множество точек $W = \{w_1, \ldots, w_l\}$, где $w_1, \ldots, w_l \in \mathbb{R}^d$, что

$$\operatorname{aff}(M \cup W) = \operatorname{span}(M \cup W) = \mathbb{R}^d. \tag{1.13}$$

Тогда по доказанному ранее для всякой точки $a \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv} M)$ и точки

$$b := \frac{a}{2} + \frac{1}{2l}(w_1 + \ldots + w_l) \in \operatorname{int}\big(\operatorname{conv}(M \cup W)\big) \tag{1.14}$$

существует такое $x_* \in \mathbb{R}^d$, что

$$b \in \operatorname{conv}\big(P^u_{M \cup W}(x_*)\big).$$

Следовательно, имеет место представление

$$b = \lambda y + (1 - \lambda)w, \text{ где}$$

$$\lambda \in [0, 1], \quad y \in \operatorname{conv}\big(P^u_{M \cup W}(x_*) \cap M\big), \quad w \in \operatorname{conv}\big(P^u_{M \cup W}(x_*) \cap W\big).$$

Поскольку $\dim(\operatorname{span} M) + \dim(\operatorname{span} W) = n$, имеем $\operatorname{span} M \cap \operatorname{span} W = \{0\}$. Поэтому из (1.14) вытекает

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad y = a, \quad w = \frac{w_1 + \ldots + w_l}{l}.$$

Таким образом,

$$a \in \operatorname{conv}\left(P^u_{M\cup W}(x_*) \cap M\right) = \operatorname{conv}\left(P^u_M(x_*)\right),$$

что и требовалось доказать.

2) Докажем равенство $\operatorname{conv} M = \overline{\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\left(P^u_M(x)\right)}$. Поскольку $M$ компактно, имеем $\operatorname{conv} M = \overline{\operatorname{ri}\left(\operatorname{conv} M\right)} \subset \overline{\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\left(P^u_M(x)\right)}$. Ясно, что выполнено и обратное включение, поскольку $\operatorname{conv}\left(P^u_M(x)\right) \subset \operatorname{conv} M$ для всех $x \in \mathbb{R}^d$.

Теорема доказана. □

**Замечание 1.1.** *В условиях теоремы* 1.2 *для всякого* $d \geq 2$ *существует такой компакт* $M \subset \mathbb{R}^d$, *что* $\operatorname{conv} M \neq \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\left(P^u_M(x)\right)$.

*Доказательство.* Возьмем в качестве $U$ евклидов шар $B(0,1)$ пространства $\mathbb{R}^d$. Пусть $e_1, \ldots, e_d$ — ортонормированный базис $\mathbb{R}^d$, $M = \overline{B}\left(e_2, 1\right) \cup \overline{B}(-e_2, 1)$. Тогда $P^u_M$ — это метрическая проекция $P_M$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Ясно, что $(e_1 \pm e_2) \in M$, поэтому $e_1 \in \operatorname{conv} M$. Нетрудно видеть, что если $e_1 \in \operatorname{conv}\left(P_M(x)\right)$, то $P_M(x) = \{e_1+e_2, e_1-e_2\}$. Тогда шар $\overline{B}(x, \|x-e_2\|-1)$ касается шаров $\overline{B}\left(e_2, 1\right)$ и $\overline{B}(-e_2, 1)$ в точках $e_1 + e_2$ и $e_1 - e_2$ соответственно. Поэтому через каждую тройку точек $\{e_2, e_1 + e_2, x\}$, $\{-e_2, e_1 - e_2, x\}$ проходит прямая (здесь существенно то, что пространство $\mathbb{R}^d$ евклидово). Эти прямые, очевидно, пересекаются в точке $x$. С другой стороны прямые, проходящие через пары точек $\{e_2, e_1 + e_2\}$ и $\{-e_2, e_1 - e_2\}$, параллельны. Противоречие.

Доказательство завершено. □

**Следствие 1.1.** *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная звездная область с центром в нуле,* $\partial U$ *—* $C^1$*-гладкая гиперповерхность и* $M \subset \mathbb{R}^d$ *— компакт. Если* $|P^u_M(x)| \leq k$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^d$, *то* $\operatorname{conv} M = \operatorname{conv}_k M$.

*Доказательство.* По теореме 1.2 имеем

$$\operatorname{ri}\left(\operatorname{conv} M\right) \subset \bigcup_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\left(P^u_M(x)\right),$$

поэтому в силу $|P_M^u(x)| \leq k$ выполнены включения

$$\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M)} \subset \overline{\bigcup_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\left(P_M^u(x)\right)} \subset \overline{\operatorname{conv}_k M}.$$

Обратное включение очевидно. Таким образом, доказано, что $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\operatorname{conv}_k M}$. Поскольку множество $M$ компактно, множества $\operatorname{conv} M$ и $\operatorname{conv}_k M$ замкнуты, поэтому $\operatorname{conv} M = \operatorname{conv}_k M$.

Следствие доказано. □

## 1.4 Результаты для выпуклых областей

Пусть $U$ — ограниченная выпуклая область в банаховом пространстве $X$, $0 \in U$, $p_u$ — функционал Минковского $U$. Ясно, что существуют такие $c_1$, $c_2 > 0$, для которых

$$c_1\|x\| \leq p_u(x) \leq c_2\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Напомним (см. [52, § 2.4.7]), что выпуклая область $U$ называется *гладкой*, если функционал Минковского $p_u$ дифференцируем по Гато на множестве $X \setminus \{0\}$, то есть для всякого $x \in X \setminus \{0\}$ найдется такой непрерывный линейный функционал $p'_u(x;\cdot) \in X^*$, что для всех $h \in X$ существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_u(x+th) - p_u(x)}{t} = p'_u(x;h). \tag{1.15}$$

*Модуль гладкости* выпуклого тела $U$ определяется как

$$\omega_u(t) = \sup\left\{\frac{1}{2}\big(p_u(x+y) + p_u(x-y) - 2\big) :\ x \in \partial U,\ y \in X,\ p_u(y) = t\right\}.$$

Выпуклое тело $U$ называется *равномерно гладким*, если его функционал Минковского $p_u$ равномерно дифференцируем по Фреше на $U$, то есть (1.15) выполненяется равномерно по всем $x \in \partial U$, $h \in U$. Известно (см. [52, § 2.4.7]), что модуль гладкости равномерно гладкого тела $U$ удовлетворяет равенству $\omega_u(t) = o(t)$ при $t \searrow 0$. Пусть $x \in \partial U$ и $\Pi_x$ — опорная гиперплоскость к $U$ в

точке $x$. Тогда $p_u(x+y)-1\geq 0$, $p_u(x-y)-1\geq 0$ для всех $y\in\Pi_x-x$, поэтому

$$\sigma(t):=\sup\Big\{p_u(x+y)-1:\ x\in\partial U,\ y\in\Pi_x-x,\ p_u(y)\leq t\Big\}=o(t)\quad(t\to 0). \tag{1.16}$$

Для $x\in\partial U$ пусть $f_x\in S_{X^*}$ — опорный функционал к $U$ в точке $x$. Докажем, что для всякого $\varepsilon\in(0,c_1)$ существует такое положительное $\delta=o(\varepsilon)$ ($\varepsilon\searrow 0$), что выполнено включение

$$\big\{z\in X: f_x(z)\leq f_x(x)-\delta\big\}\cap\overline{B}(x,\varepsilon)\subset U\cap\overline{B}(x,\varepsilon)\quad\forall\, x\in\partial U. \tag{1.17}$$

Пусть $\varepsilon>0$, $\delta>0$ — некоторые числа. Представим любой такой элемент $z\in B(x,\varepsilon)$, что $f_x(z)\leq f_x(x)-\delta$, в виде

$$z=(1-\tau)x+y,\qquad \tau\geq\frac{\delta}{f_x(x)},\quad y\in(\Pi_x-x).$$

Тогда в силу (1.16) выполнено

$$p_u(z)=p_u\big((1-\tau)x+y\big)=(1-\tau)p_u\Big(x+\frac{y}{1-\tau}\Big)\leq 1-\tau+\sigma\big(p_u(y)\big),$$

$$\tau=\tau p_u(x)\leq\tau p_u\Big(x-\frac{y}{\tau}\Big)=p_u(\tau x-y)=p_u(x-z)\leq c_2\|x-z\|\leq c_2\varepsilon.$$

Поскольку $z\in B(x,\varepsilon)$, имеем $\|y\|\leq\|z-x\|+\tau\|x\|\leq\varepsilon+\tau/c_1$, а следовательно

$$p_u(y)\leq c_2\|y\|\leq c_2\varepsilon+\tau\frac{c_2}{c_1}\leq\Big(c_2+\frac{c_2^2}{c_1}\Big)\varepsilon=:C\varepsilon. \tag{1.18}$$

Ясно, что для всякого $\varepsilon>0$ можно выбрать $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ так, чтобы $c_1\delta>\sigma(C\varepsilon)$ и $\delta=o(\varepsilon)$ ($\varepsilon\searrow 0$). Тогда в силу (1.18) и $f_x(x)\leq\|x\|\leq 1/c_1$ для $\delta=\delta(\varepsilon)$ имеем

$$p_u(z)\leq 1-\tau+\sigma(p_u(y))\leq 1-\frac{\delta}{f_x(x)}+\sigma(C\varepsilon)\leq 1-c_1\delta+\sigma(C\varepsilon)<1,$$

а следовательно $z\in U$. Тем самым (1.17) доказано.

Отметим, что в конечномерном пространстве всякое гладкое выпуклое тело является равномерно гладким.

**Теорема 1.3.** *Пусть $U\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная гладкая выпуклая область, $0\in U$, множество $M\subset\mathbb{R}^d$ замкнуто. Тогда выполнено* $\operatorname{ri}(\operatorname{conv}M)\subset\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}\operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)$ *и* $\overline{\operatorname{conv}M}=\overline{\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}\operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)}$.

*Доказательство.* 1) Докажем включение $\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) \subset \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} \operatorname{conv}\big(P_M(x)\big)$. Рассмотрим случай $\operatorname{aff} M = \mathbb{R}^d$. Тогда

$$\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) = \operatorname{int}(\operatorname{conv} M).$$

Пусть $a \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) \setminus M$. Найдем такие элементы $a_1, \dots, a_\nu \in M$ и число $\delta \in (0,1)$, для которых

$$B(a, 2\delta) \subset \operatorname{conv}\big(\{a_1, \dots a_\nu\}\big), \quad B(a,2\delta) \cap M = \varnothing. \tag{1.19}$$

Докажем, что существует такой элемент $x_* \in \mathbb{R}^d$, что $a \in \operatorname{conv}\big(P_M(x_*)\big)$. По лемме 1.3 отображение $P^u_M$ полунепрерывно сверху. Поэтому из теоремы 1.1 вытекает, что для доказательства существования точки $x_*$ достаточно найти такое $R > 0$, что

$$a \notin \operatorname{conv}\big(\{x, P^u_M(x)\}\big) \quad \forall\, x \in S(0,R).$$

Положим $R_a := \max\limits_{i=1,\dots,\nu} \|a - a_i\|$. Далее мы будем пользоваться обозначениями единичного вектора внешней нормали $N_{\partial V}(y)$ и полупространства $\Pi_Y(y,t)$, введенные в доказательстве теоремы 1.2 (см. (1.7)). В силу равномерной гладкости $U$ выполнено (1.17), поэтому найдется такое $\lambda_0 > 0$, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ и всех $y \in \lambda\partial U$

$$\Pi_{\lambda\partial U}(y,\delta) \cap \overline{B}\big(y, R_a + 1\big) \subset U(0,\lambda) \cap \overline{B}\big(y, R_a + 1\big). \tag{1.20}$$

Возьмем $R > 0$ так, чтобы

$$p_u(a - x) > \lambda_0 + \sup_{z\in B(a,\delta)} p_u(a - z) \quad \forall\, x \in S(0,R)$$

и докажем, что

$$B(a,\delta) \cap \overline{U}(x, \rho_u(x, M)) = \varnothing \quad \forall\, x \in S(0,R). \tag{1.21}$$

Предположим противное. Пусть $b \in B(a,\delta) \cap \overline{U}(x, \rho_u(x,M))$. Ясно, что тогда $U(x, p_u(b-x)) \cap M = \varnothing$. Положим $U' := U(x, p_u(b-x))$. Поскольку

$$p_u(b - x) \geq p_u(a - x) - p_u(a - b) > \lambda_0,$$

из (1.20) следует включение

$$\Pi_{\partial U'}(b,\delta)\cap\overline{B}(b,R_a+1)\subset U'\cap\overline{B}(b,R_a+1).$$

Ясно, что $\overline{B}(a,R_a)\subset\overline{B}(b,R_a+1)$, поэтому

$$\Pi_{\partial U'}(b,\delta)\cap\overline{B}(a,R_a)\subset U'\cap\overline{B}(a,R_a). \tag{1.22}$$

Положим $c:=b-\delta N_{\partial U'}(b)\in\Pi_{\partial U'}(b,\delta)$. Поскольку $b\in B(a,\delta)$, имеем

$$c\in B(a,2\delta)\subset\operatorname{conv}\big(\{a_1,\ldots,a_\nu\}\big),$$

а значит, вместе с точкой $c$ в полупространстве $\Pi_{\partial U'}(b,\delta)$ лежит одна из точек $a_1,\ldots,a_\nu$. Не ограничивая общности будем считать, что $a_1\in\Pi_{\partial U'}(b,\delta)$. Из определения $R_a$ ясно, что $a_1\in\overline{B}(a,R_a)$. Поэтому

$$a_1\in\Pi_{\partial U'}(b,\delta)\cap\overline{B}(a,R_a). \tag{1.23}$$

С другой стороны, $a_1\in M$, поэтому $a_1\notin U'$ и следовательно

$$a_1\notin U'\cap\overline{B}(a,R_a). \tag{1.24}$$

Очевидно, что (1.23) и (1.24) противоречат включению (1.22). Таким образом, соотношение (1.21) доказано. Поэтому $B(a,\delta)\cap\operatorname{conv}\big(\{x\}\cup P_M^u(x)\big)=\varnothing$ для всех $x\in S(0,R)$. Тем самым случай $\operatorname{aff}M=\mathbb{R}^d$ доказан.

Случай $\operatorname{aff}M\neq\mathbb{R}^d$ сводится к случаю $\operatorname{aff}M=\mathbb{R}^d$ так же, как в теореме 1.2.

2) Докажем, что $\overline{\operatorname{conv}M}=\overline{\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}\operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)}$. В силу 1) выполнено включение $\overline{\operatorname{conv}M}=\overline{\operatorname{ri}\,(\operatorname{conv}M)}\subset\overline{\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}\operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)}$. Очевидно, что выполнено и обратное включение, поскольку $\operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)\subset\operatorname{conv}M$ для всех $x\in\mathbb{R}^d$.

Теорема доказана. □

**Замечание 1.2.** *Для замкнутого неограниченного множества $M$ в общем случае* $\operatorname{conv}M\neq\overline{\operatorname{conv}M}$, *а значит* $\operatorname{conv}M\neq\overline{\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}\operatorname{conv}\big(P_M^u(x)\big)}$ *в отличие от теоремы* 1.2.

**Следствие 1.2.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная гладкая выпуклая область, $0 \in U$, множество $M \subset \mathbb{R}^d$ замкнуто. Если метрическая проекция $P_M^u$ не более чем $k$-значна, то $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\operatorname{conv}_k M}$.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.1.

## 1.5 Бесконечномерные результаты

**Определение 1.4.** *Пусть $U$ — ограниченная выпуклая область в банаховом пространстве $X$, $0 \in U$ и $p_u$ — функционал Минковского $U$. Для $Y \subset X$ и $t \geq 0$ определим раздутия*

$$Y_t := \big\{x \in X : \rho(x, Y) \leq t\big\}, \quad Y_t^u := \big\{x \in X : \rho_u(x, Y) \leq t\big\}. \tag{1.25}$$

**Лемма 1.4.** *Пусть $X$ — банахово пространство, $U \subset X$ — ограниченная равномерно гладкая выпуклая область, $0 \in U$, $A = \{a_1, \ldots, a_\nu\} \subset X$, $a \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv} A)$. Тогда для всякого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ существует такое $r > 0$, что $a \notin \overline{U}\big(x, \rho_u(x, A_{2\varepsilon}^u)\big)$ для всех $x \in X \setminus B(0, r)$.*

*Доказательство.* Зафиксируем такие положительные числа $c_1$, $c_2$, $c_1 < c_2$, что

$$c_1\|x\| \leq p_u(x) \leq c_2\|x\| \quad \forall x \in X. \tag{1.26}$$

Без ограничения общности будем считать, что $c_2 = 1$ (иначе заменим норму $\|\cdot\|$ на $c_2\|\cdot\|$). В силу равномерной гладкости $U$ выполнено (1.17), поэтому найдется такое $\lambda_0 > 0$, что для всех $\lambda \geq \lambda_0$, всех $y \in \lambda\partial U$ и опорного функционала $f_y \in S_{X^*}$ к $\lambda U$ в точке $y$ имеет место включение

$$\big\{z \in X : f_y(z) \leq f_y(y) - \varepsilon\big\} \cap \overline{B}\big(y, \operatorname{diam}(A) + 1\big) \subset U(0, \lambda) \cap \overline{B}\big(y, \operatorname{diam}(A) + 1\big). \tag{1.27}$$

Найдем такое $r > 0$, что

$$\rho_u(x, A_{2\varepsilon} \cup \{a\}) \geq \lambda_0 \quad \forall\, x \in X \setminus B(0, r)$$

и докажем, что

$$a \notin \overline{U}\big(x, \rho_u(x, A_{2\varepsilon})\big) \qquad \forall\, x \in X \setminus B(0, r). \tag{1.28}$$

Предположим противное. Тогда

$$U\big(x, p_u(a-x)\big) \subset U\big(x, \rho_u(x, A_{2\varepsilon})\big). \tag{1.29}$$

Обозначим $f_a$ нормированный опорный функционал к области $\overline{U}\big(x, p_u(a-x)\big)$ в точке $a$. Для $t \in \mathbb{R}$ положим

$$\Pi(a, t) = \big\{z \in X : f_a(z) \le f_a(a) - t\big\}.$$

Тогда в силу (1.27) имеем

$$\Pi(a, \varepsilon) \cap \overline{B}\big(a, \operatorname{diam}(A) + 1\big) \subset U(x, p_u(a-x)) \cap \overline{B}\big(a, \operatorname{diam}(A) + 1\big). \tag{1.30}$$

Ясно, что одна из точек множества $A$ также лежит в полупространстве $\Pi(a, 0)$. Не ограничивая общности будем считать, что $a_1 \in \Pi(a, 0)$, то есть $f_a(a_1) \le f_a(a)$. Тогда существует $b_1 \in B(a_1, 2\varepsilon)$, что $f_a(b_1) \le f_a(a) - \varepsilon$. Поскольку

$$\|b_1 - a\| \le \|b_1 - a_1\| + \|a_1 - a\| \le 2\varepsilon + \operatorname{diam}(A) < 1 + \operatorname{diam}(A),$$

имеем $b_1 \in \Pi(a, \varepsilon) \cap \overline{B}(a, \operatorname{diam}(A) + 1)$. С другой стороны, $b_1 \notin U(x, p_u(a-x))$, поскольку $A_{2\varepsilon} \cap U(x, p_u(a-x)) = \varnothing$ в силу включения (1.29). Существование такой точки $b_1$ противоречит включению (1.30). Тем самым соотношение (1.28) доказано. Поскольку $c_2 = 1$, из определения (1.25) получаем $A_{2\varepsilon} \subset A^u_{2c_2\varepsilon} = A^u_{2\varepsilon}$. Поэтому из (1.28) следует, что

$$a \notin \overline{U}\big(x, \rho_u(x, A^u_{2\varepsilon})\big) \qquad \forall\, x \in X \setminus B(0, r). \tag{1.31}$$

Лемма доказана. □

**Определение 1.5.** *Пусть $L$ — конечномерное подпространство банахова пространства $X$, $M \subset X$, $U \subset X$ — ограниченная выпуклая область, $0 \in U$. Для $x \in L$ и $\varepsilon > 0$ положим*

$$D(x, \varepsilon) := \overline{U}\big(x, \rho_u(x, M^u_{2\varepsilon})\big) \cap L. \tag{1.32}$$

**Лемма 1.5.** *Пусть $M$ — ограниченно компактное множество в $X$. Тогда*

*1) Для всякого $\varepsilon > 0$ отображение $x \mapsto P_{D(x,\varepsilon)} \circ P_M(x)$ полунепрерывно сверху;*

*2) Существует такая постоянная $C$, завитсящая только от $X$ и $U$, что $\|y - z\| \le C \max\{\rho(y, L), \varepsilon\}$ для всякого $x \in L$ и всех $y \in P_M(x)$, $z \in P_{D(x,\varepsilon)}(y)$.*

*Доказательство.* 1) Положим $\Phi(x) = P_{D(x,\varepsilon)} \circ P_M(x)$. Достаточно показать, что для всякой последовательности $x_n \to x$ и всякой последовательности $z_n \to z$, где $z_n \in \Phi(x_n)$, выполнено $z \in \Phi(x)$. Из определения $\Phi$ ясно, что найдутся такие $y_n \in M$, что

$$y_n \in P^u_M(x_n), \qquad z_n \in P^u_{D(x_n,\varepsilon)}(y_n).$$

Не ограничивая общности можно считать, что $y_n \to y$ (иначе можно перейти к соответствующей подпоследовательности), причем $y \in P^u_M(x)$, поскольку отображение $P^u_M$ полунепрерывно сверху. Так как функция $\rho_u(\,\cdot\,, M^u_{2\varepsilon})$ непрерывна на $X$, множества $D(x_n, \varepsilon)$ стремятся к $D(x, \varepsilon)$ в метрике Хаусдорфа. Следовательно,

$$z \in D(x, \varepsilon), \qquad p_u(z_n - y_n) = \rho_u(y_n, D(x_n, \varepsilon)) \to \rho_u(y, D(x, \varepsilon)).$$

С другой стороны $p_u(z_n - y_n) \to p_u(z - y)$, поэтому $z \in P^u_{D(x,\varepsilon)}(y)$, а значит $z \in \Phi(x)$, что и требовалось доказать.

2) Зафиксируем такие положительные числа $c_1$, $c_2$, $c_1 < c_2$, что

$$c_1\|x\| \le p_u(x) \le c_2\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Не ограничивая общности будем считать, что $c_2 = 1$. Для всякого $w \in D(x, \varepsilon)$ и всякого $\widetilde{z} \in P^u_L(y)$ выполнена оценка

$$p_u(z - y) \le p_u(w - y) \le p_u(w - \widetilde{z}) + p_u(\widetilde{z} - y) \tag{1.33}$$

Положим $\rho := \max\{\rho(y, L), \varepsilon\}$. Ясно, что

$$p_u(\widetilde{z} - y) = \rho_u(y, L) \le c_2\, \rho(y, L) \le \rho. \tag{1.34}$$

Предположим, что $\widetilde{z} \notin D(x, \varepsilon)$, то есть $p_u(\widetilde{z} - x) > \rho_u(x, M^u_{2\varepsilon})$. Тогда при

$$w = x + \rho_u(x, M^u_{2\varepsilon}) \frac{\widetilde{z} - x}{p_u(\widetilde{z} - x)}$$

имеет место оценка

$$p_u(\widetilde{z} - w) = p_u(\widetilde{z} - x) - p_u(w - x) = p_u(\widetilde{z} - x) - \rho_u(x, M^u_{2\varepsilon}) \le$$

$$p_u(\widetilde{z} - y) + p_u(y - x) - \rho_u(x, M^u_{2\varepsilon}) \le \rho + \rho_u(x, M) - \rho_u(x, M^u_{2\varepsilon}) \le \rho + 2\varepsilon \le 3\rho.$$

Следовательно,

$$p_u(w - \widetilde{z}) \le c_2 \|w - \widetilde{z}\| = c_2 \|\widetilde{z} - w\| \le \frac{c_2}{c_1} p_u(\widetilde{z} - w) \le \frac{3\rho}{c_1}. \tag{1.35}$$

Поэтому из неравенств (1.33), (1.34), (1.35) вытекает оценка

$$\|z - y\| \le \frac{p_u(z - y)}{c_1} \le \frac{p_u(w - \widetilde{z})}{c_1} + \frac{p_u(\widetilde{z} - y)}{c_1} \le \frac{3\rho}{c_1^2} + \frac{\rho}{c_1} \le \frac{4\rho}{c_1^2}.$$

Если $\widetilde{z} \in D(x, \varepsilon)$, то $p_u(z - y) = p_u(\widetilde{z} - y) \le \rho$, отсюда

$$\|z - y\| \le p_u(z - y) \le \frac{\rho}{c_1} < \frac{4\rho}{c_1^2}.$$

Лемма доказана. □

**Теорема 1.4.** *Пусть $X$ — банахово пространство, $U \subset X$ — ограниченная равномерно гладкая выпуклая область, $0 \in U$ и $M \subset X$ ограниченно компактно. Тогда* $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{conv}\big(P^u_M(x)\big)}$.

*Доказательство.* Обозначим $p_u$ функционал Минковского множества $U$. Докажем, что всякий элемент $a \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv} A)$, где $A := \{a_1, \dots, a_\nu\} \subset M$, можно приблизить элементами $\bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{conv}\big(P^u_M(x)\big)$ с любой точностью. По лемме 1.4 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $r > 0$, что

$$a \notin \overline{U}\big(x, \rho_u(x, A^u_{2\varepsilon})\big) \qquad \forall\, x \in X \setminus B(0, r). \tag{1.36}$$

Рассмотрим конечный супремум

$$\sup\bigl\{\|y\| :\ y \in P^u_M(x),\ \|x\| \le r\bigr\} =: R. \tag{1.37}$$

Поскольку $M$ ограниченно компактно, существует $\varepsilon$-сеть $x_1, \dots, x_m \in X$ множества $\overline{B}(0,R) \cap M$. Положим $L := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\}$. Очевидно, что

$$\rho(y, L) \le \varepsilon \qquad \forall\, y \in \overline{B}(0,R) \cap M \tag{1.38}$$

Для $x \in L$ определим отображение $\Phi(x) = P^u_{D(x,\varepsilon)} \circ P^u_M(x)$ (см. 1.32) и рассмотрим многозначное отображение

$$F : L \to \operatorname{Conv}(L), \qquad x \mapsto \operatorname{conv}\Phi(x).$$

Оно полунепрерывно сверху, поскольку по пункту 1) леммы 1.5 отображение $\Phi$ полунепрерывно сверху. Заметим, что для всех $x \in L$

$$\operatorname{conv}\bigl(\{x\} \cup F(x)\bigr) \subset D(x,\varepsilon) = \overline{U}(x, \rho_u(x, M^u_{2\varepsilon})) \cap L \subset \overline{U}(x, \rho_u(x, A^u_{2\varepsilon})),$$

поэтому в силу (1.36) имеем

$$a \notin \operatorname{conv}\bigl(\{x\} \cup F(x)\bigr) \qquad \forall\, x \in L \setminus B(0,r).$$

Отсюда по лемме 1.2 существует такая точка $x_* \in L \cap \overline{B}(0,r)$, что

$$a \in F(x_*) = \operatorname{conv}\Phi(x_*).$$

Выберем такие $z_1, \dots, z_n \in \Phi(x_*)$ и такие $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, что $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$. Поскольку $\Phi(x_*) = P^u_{D(x_*,\varepsilon)} \circ P^u_M(x_*)$, можно найти такие $y_i \in P^u_M(x_*)$, что $z_i \in P^u_{D(x_*,\varepsilon)}(y_i)$. По определению числа $R$ (см. (1.37)) все точки $y_i$ лежат в шаре $B(0,R)$. Поэтому по пункту 2) леммы 1.5 и (1.38) выполняется оценка

$$\|y_i - z_i\| \le C \max\bigl\{\rho(y_i, L), \varepsilon\bigr\} \le C\varepsilon \qquad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, при $b = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i y_i \in \operatorname{conv} P^u_M(x_*)$ имеем

$$\|a - b\| = \Bigl\|\sum_{i=1}^n \lambda_i (z_i - y_i)\Bigr\| \le C\varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i = C\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon$ можно выбрать сколь угодно малым, $a \in \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \operatorname{conv}\left(P_M^u(x)\right)}$ и следовательно $\operatorname{conv} M \subset \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \operatorname{conv}\left(P_M^u(x)\right)}$. Включение $\overline{\operatorname{conv} M} \supset \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \operatorname{conv}\left(P_M^u(x)\right)}$ очевидно.

Теорема доказана. □

**Следствие 1.3.** *Пусть $X$ — банахово пространство, $U \subset X$ — ограниченная равномерно гладкая выпуклая область, $0 \in U$, $M \subset X$ — ограниченно компактное множество с не более чем $k$-значной метрической проекцией $P_M^u$. Тогда $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\operatorname{conv}_k M}$.*

*Доказательство.* По теореме 1.4 выполнено $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \operatorname{conv}\left(P_M^u(x)\right)} \subset \overline{\operatorname{conv}_k M}$. Обратное включение $\overline{\operatorname{conv}_k M} \subset \overline{\operatorname{conv} M}$ очевидно.

Следствие доказано. □

**Теорема 1.5.** *Пусть $X$ — банахово пространство, $U \subset X$ — ограниченная гладкая выпуклая область, $0 \in U$, $M \subset X$ — компакт. Тогда $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \operatorname{conv}\left(P_M^u(x)\right)}$.*

*Доказательство.* Пусть $a_1, \ldots, a_\nu \in M$, $A := \{a_1, \ldots, a_\nu\}$ и $a \in \operatorname{ri}(\operatorname{conv} A)$. Докажем, что можно приблизить $a$ элементами $\bigcup\limits_{x\in X} \operatorname{conv}\left(P_M^u(x)\right)$ с любой точностью. Пусть $x_1, \ldots, x_m \in X$ — $\varepsilon$-сеть множества $M$. Положим $L := \operatorname{span}(A \cup \{x_1, \ldots, x_m\})$. Тогда

$$\rho(y, L) \le \varepsilon \qquad \forall\, y \in M. \tag{1.39}$$

Ясно, что $V := U \cap L$ — равномерно гладкая выпуклая область в конечномерном пространстве $L$, поэтому по лемме 1.4 существует такое $r > 0$, что $a \notin \overline{V}\big(x, \rho_v(x, A_{2\varepsilon}^v)\big)$ для всех $x \in L \setminus B(0, r)$. Ясно, что $A_{2\varepsilon}^v \subset A_{2\varepsilon}^u$, поскольку $V \subset U$. Поэтому $\rho_v(x, A_{2\varepsilon}^v) \ge \rho_u(x, A_{2\varepsilon}^u)$. Тогда

$$a \notin \overline{V}\big(x, \rho_u(x, A_{2\varepsilon}^u)\big) \qquad \forall\, x \in L \setminus B(0, r). \tag{1.40}$$

Для $x \in L$ определим отображение $\Phi(x) = P^u_{D(x,\varepsilon)} \circ P^u_M(x)$ (см. 1.32) и рассмотрим многозначное отображение

$$F : L \to \mathrm{Conv}(L), \qquad x \mapsto \mathrm{conv}\,\Phi(x).$$

Оно полунепрерывно сверху, поскольку по пункту 1) леммы 1.5 отображение $\Phi$ полунепрерывно сверху. Заметим, что для всех $x \in L$ выполнено

$$\mathrm{conv}\big(\{x\} \cup F(x)\big) \subset D(x,\varepsilon) = \overline{V}(x, \rho_u(x, M^u_{2\varepsilon})) \subset \overline{V}(x, \rho_u(x, A^u_{2\varepsilon})),$$

поэтому в силу (1.40) имеем

$$a \notin \mathrm{conv}\big(\{x\} \cup F(x)\big) \qquad \forall\, x \in L \setminus B(0,r).$$

Отсюда по лемме 1.2 существует такая точка $x_* \in L \cap \overline{B}(0,r)$, что

$$a \in F(x_*) = \mathrm{conv}\,\Phi(x_*).$$

Выберем такие $z_1, \ldots, z_n \in \Phi(x_*)$ и такие $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, что $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$. Поскольку $\Phi(x_*) = P^u_{D(x_*,\varepsilon)} \circ P^u_M(x_*)$, можно найти такие $y_i \in P^u_M(x_*)$, что $z_i \in P^u_{D(x_*,\varepsilon)}(y_i)$. Тогда по пункту 2) леммы 1.5 и (1.39) выполняется оценка

$$\|y_i - z_i\| \leq C \max\big\{\rho(y_i, L), \varepsilon\big\} \leq C\varepsilon \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, при $b = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i y_i \in \mathrm{conv}\, P^u_M(x_*)$ имеем

$$\|a - b\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i (z_i - y_i)\Big\| \leq C\varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i = C\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon$ можно выбрать сколь угодно малым, $a \in \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \mathrm{conv}\,\big(P^u_M(x)\big)}$ и следовательно $\mathrm{conv}\, M \subset \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \mathrm{conv}\,\big(P^u_M(x)\big)}$. Включение $\overline{\mathrm{conv}\, M} \supset \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \mathrm{conv}\,\big(P^u_M(x)\big)}$ очевидно.

Теорема доказана. □

**Следствие 1.4.** *Пусть $X$ — банахово пространство, $U \subset X$ — гладкая выпуклая область, $0 \in U$, $M \subset X$ — компакт.*

*1) Если метрическая проекция $P_M^u$ не более чем $k$-значна, то* $\overline{\operatorname{conv} M} = \operatorname{conv} M = \operatorname{conv}_k M$.

*2) Если* $\operatorname{conv} M$ *не замкнута, то для всякого* $k$ *найдется такой элемент* $x_k \in X$, *что* $|P_M^u(x_k)| \geq k$.

*Доказательство.* 1) По предыдущей теореме $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{conv}\left(P_M^u(x)\right)} \subset \overline{\operatorname{conv}_k M}$. Докажем, что множество $\operatorname{conv}_k M$ замкнуто. Действительно, если $x_n \in \operatorname{conv}_k M$, $x_n \to x$, то для всякого натурального $n$ существуют такие $y_n^i \in M$ (некоторые из них могут повторяться) и $\lambda_n^i \geq 0$, где $i = 1, \ldots, k$, что

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_n^i y_n^i, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_n^i = 1.$$

Тогда в силу компактности $M$ существует такая возрастающая подпоследовательность индексов $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, что $y_{n_j}^i \to y^i$, $\lambda_{n_j}^i \to \lambda^i$ $(j \to \infty)$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, что $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda^i y^i \in \operatorname{conv}_k M$, поэтому множество $\operatorname{conv}_k M$ замкнуто. Тогда $\overline{\operatorname{conv} M} \subset \operatorname{conv}_k M$. Включение $\operatorname{conv}_k M \subset \operatorname{conv} M$ очевидно. Из последних двух включений вытекает равенство $\overline{\operatorname{conv} M} = \operatorname{conv} M = \operatorname{conv}_k M$.

2) Непосредственно вытекает из 1).

Следствие доказано. □

## 1.6 Результаты для шаров в банаховых пространствах

Если в банаховом пространстве $X$ взять в качестве области $U$ единичный шар $B(0,1)$, отображение $P_M^u$ станет обычной метрической проекцией $P_M$. Поэтому из теорем 1.3, 1.4, 1.5 непосредственно вытекает

**Теорема 1.6.** *Пусть* $X$ *— банахово пространство,* $M \subset X$. *Тогда*

*1) Если* $X$ *— гладкое конечномерное пространство,* $M$ *— ограниченно компактное множество, то* $\operatorname{ri}(\operatorname{conv} M) \subset \bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{conv}\left(P_M(x)\right)$;

*2) Если* $X$ *— равномерно гладкое пространство,* $M$ *— ограниченно компактное множество, то* $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{conv}\left(P_M(x)\right)}$;

*3) Если $X$ — гладкое пространство, $M$ — компакт, то* $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\bigcup\limits_{x\in X} \operatorname{conv}\big(P_M(x)\big)}$.

Аналогично, из следствий 1.3 и 1.4 вытекает

**Следствие 1.5.** *1) Пусть $X$ — гладкое банахово пространство, $M \subset X$ — компакт и метрическая проекция $P_M$ не более чем $k$-значна. Тогда* $\operatorname{conv} M = \operatorname{conv}_k M$.

*2) Пусть $X$ — равномерно гладкое банахово пространство, $M \subset X$ — ограниченно компактное множество и метрическая проекция $P_M$ не более чем $k$-значна. Тогда* $\overline{\operatorname{conv} M} = \overline{\operatorname{conv}_k M}$.

# Глава 2. Локально чебышевские множества

## 2.1 Определения и основной результат

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – банахово пространство, $A$ — подмножество $X$. Обозначим $\rho(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$ — расстояние от элемента $x \in X$ до $A$, $P_A(x) = \{y \in A : \|x - y\| = \rho(x, A)\}$ — метрическая проекция точки $x$ на множество $A$. Множество $A$ называется *чебышевским*, если для каждого $x \in X$ проекция $P_A(x)$ состоит ровно из одного элемента. Открытый шар и сферу пространства $X$ радиуса $r$ с центром в точке $x$ обозначим $B(x, r)$ и $S(x, r)$ соответственно. Границу множества $A$ обозначим $\partial A$, $\delta$-окрестность множества $A$ обозначим $A(\delta) := \{x \in X : 0 \leq \rho(x, A) < \delta\}$. Луч $\{x + t(y - x) : t > 0\}$ обозначим $(x, y\rangle$, интервал с концами $x, y \in X$ обозначим $(x, y)$.

**Определение 2.1.** *Множество $A$ называется локально чебышевским, если для каждой точки $x \in A$ существуют такие число $r(x) > 0$ и чебышевское множество $F_x \subset X$, что $A \cap B(x, r(x)) \subset F_x \subset A$.*

Понятие локально чебышевского множества в смысле определения 2.1 является обобщением понятия, которое было предложено М. В. Балашовым в 2012 году: множество $A$ называется локально чебышевским, если для каждой точки $x \in \overline{A}$ существует такое положительное $r(x)$, что множество $\overline{B(x, r(x)) \cap A}$ является чебышевским.

**Определение 2.2.** *Множество $A$ имеет локально чебышевскую границу, если для каждой точки $x \in \partial A$ существуют такое число $r(x) > 0$, что метрическая проекция $P_A$ однозначна на $B(x, r(x))$ и лучи из семейства $\{(P_A(y), y\rangle : y \in B(x, r(x)) \setminus A\}$ попарно не пересекаются.*

Цель главы II состоит в доказательстве следующей теоремы

**Теорема 2.1.** *Для компактного связного множества $A$ в конечномерном нормированном пространстве следующие условия эквивалентны:*

1) $A$ — *чебышевское множество;*

2) $A$ — *локально чебышевское множество;*

3) $A$ *имеет локально чебышевскую границу.*

В этом утверждении связность $A$ существенна: двухточечное множество является локально чебышевским, но не чебышевским в любом пространстве $X$. Замкнутость $A$ также нужна, как показывает пример открытого шара в евклидовом пространстве. Условие ограниченности множества $A$, скорее всего, можно убрать, но пока это не удается. Что касается свойства множества $A$ иметь локально чебышевскую границу, то оно введено здесь для возможно большей общности и следует из выполнено для локально чебышевских множеств (см. ниже лемму 2.1), однако автору не известен пример не локально чебышевского множества с локально чебышевской границей.

## 2.2 Схема доказательства

Несложно проверяются переходы 1) $\Rightarrow$ 2) и 2) $\Rightarrow$ 3). Основную трудность представляет переход 3) $\Rightarrow$ 1). Здесь сначала показывается, что для множества $A$ с локально чебышевской границей существует такое $\delta > 0$, что окрестность $\overline{A(2\delta)}$ является чебышевским слоем $A$ (то есть для всех $x \in \overline{A(2\delta)}$ метрическая проекция $P_A(x)$ состоит из одной точки), а граница $\partial A(2\delta)$ состоит из не более чем счетного числа связных компактных $(d-1)$-мерных многообразий без края $M_\nu$, $\nu \in N$. Затем для всякого $\nu \in N$ рассматривается отображение $T_\nu : M_\nu \times [-\delta, +\infty) \to X,\ (x, \tau) \mapsto x + \tau \frac{x - P_A(x)}{\|x - P_A(x)\|}$. Показывается, что для всякого односвязного множества $G \subset X \setminus \overline{A(\delta)}$ отображение $T_\nu : T_\nu^{-1}(G) \to G$ является накрытием. Отсюда выводится, что граница $\partial A(2\delta)$ состоит ровно из одного многообразия $M_1$, гомеоморфного сфере $S^{d-1}$. Далее, с помощью обобщенной теоремы Шёнфлисса доказывается, что $X \setminus A(2\delta)$ гомеоморфно внешности единичного шара $X \setminus B^d$, то есть односвязно (здесь и далее мы считаем, что $d \geq 3$; случай $d = 2$ разбирается схожим образом). Поэтому отображение

$T_1 : T_1^{-1}\big(X \setminus A(2\delta)\big) \to X \setminus A(2\delta)$ является накрытием. Наконец, отсюда с помощью леммы о поднятии путей выводится, что не существует точек $x \in X$ с многозначной метрической проекцией $P_A(x)$.

## 2.3 Предварительные рассуждения

Докажем эквивалентность утверждений $1), 2), 3)$ из теоремы 2.1. В формулировках дальнейших лемм $A$ — это связное компактное подмножество конечномерного пространства $X$ размерности $d$.

$1) \Rightarrow 2)$. Пусть множество $A$ является чебышевским. Для каждого элемента $x \in A$ существует такое $r(x) > 0$, что $B(x, r(x)) \cap A = A$, поэтому множество $A$ является локально чебышевским.

$2) \Rightarrow 3)$.

**Лемма 2.1.** *Если $A$ является локально чебышевским, то оно имеет локально чебышевскую границу.*

*Доказательство.* Пусть $A$ является локально чебышевским множеством. Тогда для каждой точки $x \in \partial A$ существуют такие число $r(x) > 0$ и чебышевское множество $F_x$, что выполнено

$$A \cap B(x, r(x)) \subset F_x \subset A.$$

Для всякого $y \in B(x, r(x)/2)$ имеют место неравенства

$$\rho(y, A \setminus F_x) \geq \rho(y, A \setminus B(x, r(x))) > r(x)/2 > \|y - x\|$$

и $x \in F_x$, поэтому $P_A(y) \in F_x$. Множество $F_x$ является чебышевским, и, следовательно, чебышевским солнцем [12, теорема 4.4], поэтому метрическая проекция $P_A$ однозначна на $B(x, r(x)/2)$ и лучи из семейства $\{(P_A(y), y\rangle : y \in B(x, r(x)/2) \setminus A\}$ попарно не пересекаются.

Лемма доказана. □

## 2.4 Вспомогательные леммы

Для доказательства импликации 3) $\Rightarrow$ 1) потребуются вспомогательные утверждения. Далее будем считать, что множество $A$ имеет локально чебышевскую границу.

**Лемма 2.2.** *Существуют такие точки $x_1, ..., x_k \in \partial A$ и $r > 0$, что для любого $x \in \partial A$ включение $B(x, r) \subset B(x_j, r(x_j))$ выполнено хотя бы для одного $j \in \{1, \dots, k\}$.*

*Доказательство.* Выберем из покрытия компакта $\partial A$ системой шаров $\{B(x, r(x)/2) : x \in \partial A\}$ конечное подпокрытие $\{B(x_j, r(x_j)/2)\}_{j=1}^{k}$. Тогда при $r := \min\{r(x_j)/2 : j = 1, ..., k\}$ для любого $x \in \partial A$ найдется такое $j \in \{1, ..., k\}$, что $\|x - x_j\| < r(x_j)/2$, следовательно для $y \in B(x, r)$ выполнено

$$\|y - x_j\| \leq \|y - x\| + \|x - x_j\| < r + r(x_j)/2 \leq r(x_j).$$

Поэтому выполнено включение $B(x, r) \subset B(x_j, r(x_j))$.

Лемма доказана. □

**Лемма 2.3.** *Для всех $\delta \in (0, r/2)$, где $r$ — число из леммы 2.2, выполнены утверждения:*

1) $\overline{A(2\delta)}$ *— чебышевский слой, то есть $|P_A(x)| = 1$ для всякого $x \in \overline{A(2\delta)}$;*

2) *отображение $P_A : \overline{A(2\delta)} \to A$ непрерывно;*

3) *для всякого $x \in A(\delta) \setminus A$ лучи из семейства $\{(P_A(y), y\rangle : y \in B(x, \delta) \setminus A\}$ попарно не пересекаются;*

4) $A(\delta) \setminus A = \bigsqcup\limits_{y \in \partial A(\delta)} (y, P_A(y))$, *причем если $x \in (y, P_A(y))$, то $P_A(x) = P_A(y)$.*

*Доказательство.* 1) Следует из леммы 2.2.

2) Следует из утверждения 1) см. [3, лемма 1].

3) Пусть $x \in A(\delta) \setminus A$. Тогда для всех $y \in B(x, \delta)$ выполнено

$$\|y - P_A(x)\| \leq \|y - x\| + \|x - P_A(x)\| < 2\delta.$$

Поэтому $B(x,\delta) \subset B(P_A(x), r)$. Тогда утверждение 3) выполнено по лемме 2.2 и определению множества с локально чебышевской границей.

4) Пусть $x \in A(\delta) \setminus A$. Рассмотрим элемент

$$z := P_A(x) + \delta \frac{x - P_A(x)}{\|x - P_A(x)\|}.$$

Поскольку $z \in B(x,\delta) \setminus A$ и $z \in (P_A(x), x\rangle$, лучи $(P_A(z), z\rangle, (P_A(x), x\rangle$ совпадают по утверждению 3), то есть $P_A(z) = P_A(x)$, $z \in \partial A(\delta)$. Если для различных $z_1, z_2 \in \partial A(\delta)$ интервалы $(z_1, P_A(z_2)), (z_2, P_A(x_2))$ пересекаются в точке $y$, то $P_A(z_1) \neq P_A(z_2)$ и $P_A(z_1), P_A(z_2) \in P_A(y)$ в силу [3, утверждение II], что невозможно по пункту 1).

Лемма доказана. □

**Замечание 2.1.** *В последующих рассуждениях мы будем считать, что* $r > 12$ *(множество* $A$ *всегда можно гомотетично растянуть так, чтобы последнее выполнялось).*

**Определение 2.3.** *Положим* $M = \partial A(2)$ *и определим отображение* $T$

$$T : M \times [-1, +\infty) \to X, \qquad T(x,\tau) := x + \tau \frac{x - P_A(x)}{\|x - P_A(x)\|}$$

*а также его сужения* $T_M$, $T_{x,R}$, $T_x$ *для всех* $x \in M$ *и всех* $R > 0$*:*

$$T_M := T|_{M\times[-1,1]}, \qquad T_{x,R} := T|_{(\overline{B(x,1)}\cap M)\times[-1,R]}, \qquad T_x := T|_{(\overline{B(x,1)}\cap M)\times[-1,+\infty)}.$$

**Лемма 2.4.** *Отображение* $T$ *непрерывно, а отображения* $T_M$ *и* $T_x$ *являются гомеоморфизмами на свой образ для всех* $x \in M$*.*

*Доказательство.* Отображение $T$ непрерывно по утверждению 2) леммы 2.3.

Отображение $T_M$ является гомеоморфизмом на свой образ, поскольку оно инъективно в силу утверждения 4) леммы 2.3 и $M \times [-1, 1]$ — компакт.

Отображения $T_{x,R}$ и $T_x$ инъективны в силу утверждения 3) леммы 2.3, $(\overline{B(x,1)}\cap M)\times[-1,R]$ — компакт, поэтому $T_{x,R}$ — гомеоморфизм на свой образ. Пусть $U$ — произвольное ограниченное открытое множество в $T((\overline{B(x,1)}\cap M)\times$

$[-1,+\infty))$. Выберем такое $R = R(U) > 0$, что $M \subset B(0,R/2), A \subset B(0,R/2)$. Тогда для любого $\tau > R$ выполнено

$$\|T(x,\tau)\| \geq \|T(x,\tau) - T(x,0)\| - \|T(x,0)\| > \tau - \frac{R}{2} > \frac{R}{2},$$

а значит $T(x,\tau) \notin B(0,R/2)$, отсюда $T(x,\tau) \notin U$. Поэтому

$$U \subset T\big((\overline{B(x,1)} \cap M) \times [-1,R]\big), \qquad T_x^{-1}(U) = T_{x,R}^{-1}(U),$$

значит множество $T_x^{-1}(U)$ открыто как прообраз открытого множества при непрерывном отображении $T_{x,R}^{-1}$. Поэтому отображение $T_x^{-1}$ непрерывно и, следовательно, $T_x$ является гомеоморфизмом на свой образ. □

**Определение 2.4.** *Обозначим через $U_\nu$, $\nu \in N \subset \mathbb{N}$ компоненты связности открытого множества $X \setminus \overline{A(2)}$, причем неограниченную компоненту обозначим через $U_1$. Границы $\partial U_\nu$ обозначим через $M_\nu$ соответственно.*

Здесь и ниже $\pi : X \times [-1,+\infty) \to X$ — естественная проекция на пространство $X$, $Y_1 \simeq Y_2$ обозначает гомеоморфность $Y_1$ и $Y_2$.

**Лемма 2.5.** *Для каждого $\nu \in N$ выполнены следующие утверждения:*

1) *$M_\nu$ связно;*

2) *$M_\nu(1) \cap U_\nu = T(M_\nu \times (0,1))$, $M = \bigsqcup\limits_{\nu\in N} M_\nu$;*

3) *$M_\nu$ является $(d-1)$-мерным многообразием.*

*Доказательство.* 1) Множество $X \setminus U_\nu$ связно, поскольку все множества $U_j, j \in N$, и $\overline{A(2)}$ связны и объединение семейства пересекающихся связных множеств связно. Поэтому множество $M_\nu$ связно в силу следующей теоремы:

**Теорема D.** *[53] Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $F = \mathbb{R}^n \setminus U$. Тогда $\partial U$ связно тогда и только тогда, когда $F$ связно.*

2) Ясно, что $\bigcup\limits_{\nu\in N} M_\nu \subset M$. Докажем, что $M \subset \bigcup\limits_{\nu\in N} M_\nu$. В силу утверждения 4) леммы 2.3 имеем

$$\rho(T(x,t),A) = 2 + t \quad \forall\, x \in M,\ \forall\, t \in (-1,1) \tag{2.1}$$

Поэтому для фиксированного $x \in M$ все точки интервала $T(\{x\} \times (0,1))$ лежат в некоторой компоненте связности множества $X \setminus \overline{A(2)}$, то есть в некотором множестве $U_\nu$, $\nu \in N$, а значит $x \in M_\nu$.

Множество $T(M_\nu \times (0,1))$ является связным, поскольку $M_\nu$ связно. В силу (2.1) имеем $T(M_\nu \times (0,1)) \subset M_\nu(1) \cap \big(X \setminus \overline{A(2)}\big)$. Следовательно, $T(M_\nu \times (0,1)) \subset M_\nu(1) \cap U_\lambda$ для некоторого $\lambda \in N$. Для $x \in M_\nu(1) \cap U_\nu$ отрезок $[x, P_A(x)]$ пересекает множество $M_\nu$, поскольку $x \in U_\nu, P_A(x) \notin U_\nu$. Пусть $y \in M_\nu \cap [x, P_A(x)]$, тогда $x \in T(\{y\} \times (0,1))$, следовательно $U_\nu \cap M_\nu(1) \subset T(M_\nu \times (0,1))$. Поэтому $\nu = \lambda$ и, значит, $M_\nu(1) \cap U_\nu = T(M_\nu \times (0,1))$.

Теперь покажем, что различные $M_\nu$ не пересекаются: если для некоторых различных $\nu, \lambda \in N$ выполнено $x \in M_\nu \cap M_\lambda$, то по доказанному выше имеем $T(x,1) \in U_\nu \cap U_\mu = \varnothing$. Противоречие.

3) Докажем, что множество $M_\nu$ является $(d-1)$-мерным многообразием в топологии, индуцированной топологией $X$: для произвольной точки $x_0 \in M_\nu$ найдем ее открытую окрестность в множестве $M_\nu$, гомеоморфную $B^{d-1}$ ($n$-мерные евклидовы открытый шар и сферу радиуса 1 с центром в точке 0 будем обозначать $B^n, S^n$ соответственно). Для этого построим такую окрестность $U(x_0) \simeq B^d$, что $U(x_0) \cap M_\nu \simeq B^{d-1}$. Рассмотрим гиперплоскость $\Pi$, проходящую через точку $y_0 := T(x_0, 1/2)$ и перпендикулярную отрезку $[y_0, P_A(y_0)]$. Положим $D(y_0, \tau) := B(y_0, \tau) \cap \Pi$. Выберем $\tau \in (0,1)$ настолько малым, что для всякого $y \in \overline{D(y_0, \tau)}$ выполнено

$$D(y_0, \tau) \subset U_\nu \cap M_\nu(1), \quad (P_A(y), y\rangle \cap \overline{D(y_0, \tau)} = \{y\} \tag{2.2}$$

Это возможно, поскольку $y_0$ принадлежит открытому множеству $U_\nu \cap M_\nu(1)$ по доказанному утверждению 2) леммы 2.5 и угол между лучом $(P_A(y), y\rangle$ и плоскостью $\Pi$ непрерывно зависит от точки $y \in A(3) \setminus A$.

Поскольку $T_M$ — гомеоморфизм на свой образ, имеем $T_M^{-1}(D(y_0, \tau)) \simeq B^{d-1}$. Положим $D_M(x_0, \tau) := \pi \circ T_M^{-1}(D(y_0, \tau))$. Тогда по утверждению 2) леммы 2.5 выполнено $D_M(x_0, \tau) \subset M_\nu$. Отображение $\pi$ непрерывно и инъективно на мно-

жестве $\overline{T_M^{-1}(D(y_0,\tau))}$ в силу (2.2), поэтому $D_M(x_0,\tau) \simeq B^{d-1}$. Тогда по утверждению 4) леммы 2.3 имеем

$$T_M(D_M(x_0,\tau)\times(-1,1))\cap M_\nu = D_M(x_0,\tau),$$

$$T_M(D_M(x_0,\tau)\times(-1,1)) \simeq B^{d-1}\times(-1,1) \simeq B^d.$$

Тогда множество $T_M(D_M(x_0,\tau)\times(-1,1))$ является искомой окрестностью $U(x_0)$. Поэтому множество $D_M(x_0,\tau)$ является искомой окрестностью точки $x_0$ в множестве $M_\nu$, гомеоморфной $B^{d-1}$.

Лемма доказана. □

Для каждого $\nu \in N$ положим $T_\nu := T|_{M_\nu\times[-1,+\infty)}$. Рассмотрим множество лучей $R_\nu := \{(P_A(x), x\rangle : x \in M_\nu\}$. Обозначим $R_\nu(y)$ множество тех лучей из $R_\nu$, которые проходят через точку $y \in X$. Тогда $|R_\nu(y)| \le k$, поскольку по лемме 2.2 выполнено

$$M_\nu \subset A(3)\setminus A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, r(x_j)),$$

а лучи из семейства $\{(P_A(y), y\rangle : y \in B(x_j, r(x_j))\setminus A\}$ попарно не пересекаются, следовательно, не более одного из них проходит через точку $y$.

Напомним, что для метрического пространства $(Y,\rho_Y)$ метрика Хаусдорфа на множестве всех компактных подмножеств $Y$ определяется как

$$\rho_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\rho_Y(a,B), \sup_{b\in B}\rho_Y(b,A)\},$$

где $\rho_Y(z,C) = \inf\{\rho_Y(z,c) : c\in C\}$.

**Определение 2.5.** *[31, гл. 1, § 7] Линейно связное топологическое пространство $Y$ называется накрывающей линейно связного топологического пространства $Z$, если задано отображение $p : Y \to Z$, такое, что у любой точки $z \in Z$ имеется окрестность $U \subset Z$, для которой существует отображение $\varphi$ — гомеоморфизм $p^{-1}(U)$ на $U\times\Gamma$, где $\Gamma$ — дискретное множество, причем*

*$p(z) = \pi \circ \varphi(z)$ при $z \in p^{-1}(U)$, где $\pi$ — естественная проекция $U \times \Gamma$ на $U$, то есть $\pi(x, y) = x$ для $x \in U, y \in \Gamma$. Отображение $p : Y \to Z$ называется в этой ситуации накрытием.*

**Лемма 2.6.** *Пусть $G$ — связное подмножество $X \setminus \overline{A(1)}$, $\nu \in N$. Тогда существует такое $q = q(G, \nu) \in \{0, ..., k\}$, что выполнены утверждения:*

1) *$|R_\nu(x)| = q$ для $x \in G$.*

2) *Если $q > 0$, то отображение $T_\nu : T_\nu^{-1}(G) \to G$ является накрытием.*

*Доказательство.* 1) Пусть $q := \max\{|R_\nu(y)| : y \in G\}$. Выше было показано, что $q \leq k$. Рассмотрим множество $Q := \{x \in G : |R_\nu(x)| = q\}$. Докажем, что множество $Q$ замкнуто в $G$. Пусть $y \in G \cap \overline{Q}$, то есть существует такая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset Q$, что $y_n \to y \in G$. Через каждую точку $y_n$ проходит $q$ лучей $(P_A(y_n^1), y_n^1\rangle, ..., (P_A(y_n^q), y_n^q\rangle$ $(y_n^i \in M_\nu)$ и попарные расстояния между точками $P_A(y_n^1), ..., P_A(y_n^q)$ не меньше $r/2$ по утверждению 3) леммы 2.3. Значит, можно выбрать такую подпоследовательность $\{y_{n_j}\}_{j=1}^\infty$, что $y_{n_j}^i \to y^i \in M_\nu$ для всех $i \in \{1, ..., q\}$. При этом попарные расстояния между точками $P_A(y^i)$ не меньше $r/2$. Ясно, что тогда лучи $(P_A(y^i), y^i\rangle$ проходят через точку $y$, то есть $y \in Q$, следовательно, множество $Q$ замкнуто в $G$.

Докажем, что множество $Q$ открыто в $G$. Пусть $x \in Q$ и через $x$ проходят лучи $(P_A(x^1), x^1\rangle, ..., (P_A(x^q), x^q\rangle$ $(x^i \in M_\nu)$. Шары $\overline{B(x^i, 1)}$ попарно не пересекаются, поскольку для различных $i, j \in \{1, ..., k\}$ выполнено

$$\|x^i - x^j\| \geq \|P_A(x^i) - P_A(x^j)\| - \|x^i - P_A(x^i)\| - \|x^j - P_A(x^j)\| \geq r/2 - 2 - 2 > 2.$$

Поэтому области определения гомеоморфизмов $T_{x^i}$ попарно не пересекаются. Для $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют такие попарно непересекающиеся окрестности $V(x^i) \subset M_\nu \cap B(x^i, \varepsilon)$, что $V(x^i) \simeq B^{d-1}$. Рассмотрим множества

$$V_i := T_{x^i}(V(x^i) \times (-1, +\infty)).$$

Ясно, что $V_i \simeq V(x^i) \times (-1, +\infty) \simeq B^d$ и $x \in V_i$. Поэтому множество $V_i$ открыто по теореме Брауэра об инвариантности области [23, гл. IV, § 14.3], $\bigcap\limits_{i=1}^{q} V_i$ открыто

и существует шар $B(x,\delta) \subset \big(\bigcap\limits_{i=1}^{q} V_i\big)$. Значит, для каждого $y \in B(x,\delta)$ и $i \in \{1,...,q\}$ существуют такие $y^i \in V(x_i)$, $r^i > -1$, что $T(y^i, r^i) = y$. Поэтому для всех $i = 1,...,q$ луч $(P_A(y^i), y^i\rangle$ проходит через точку $y$, причем $y^i \in M_\nu$. Следовательно, $|R_\nu(y)| = q$ для всех $y \in B(x,\delta) \cap G$, поэтому множество $Q$ открыто в множестве $G$.

Итак, $Q$ непусто, открыто и замкнуто в $G$, $G$ связно, поэтому $Q = G$. Следовательно, $|R_\nu(y)| = q$ для всякого $y \in G$.

2) Будем придерживаться обозначений, введенных при доказательстве утверждения 1). Тогда, поскольку выполнено $B(x,\delta) \subset T_{x_i}(V(x^i) \times (-1,+\infty))$ и множества $V(x^i)$ попарно не пересекаются, имеем

$$T_\nu^{-1}(B(x,\delta)) = \bigsqcup_{i=1}^{q} T_{x^i}^{-1}(B(x,\delta)).$$

Следовательно,

$$T_\nu^{-1}(B(x,\delta)) \simeq B(x,\delta) \times \{1,...,q\}.$$

Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi : T_\nu^{-1}(B(x,\delta)) \to B(x,\delta) \times \{1,...,q\}$, заданный следующим образом: $\varphi(z) = (T_\nu(z), i)$ при $z \in T_{x^i}^{-1}(B(x,\delta))$. Тогда $T_\nu(z) = \pi \circ \varphi(z)$ при $z \in T_\nu^{-1}(B(x,\delta))$. Следовательно, $T_\nu$ — накрытие.

Лемма доказана. □

**Лемма 2.7.** *Для всех $\nu \in N$ выполнено $q(U_1,\nu) > 0$ и $q(U_\nu,\nu) > 0$.*

*Доказательство.* Если $q(U_1,\nu) = 0$, то по лемме 2.6 все лучи из семейства $R_\nu$ содержатся в множестве $X \setminus U_1$, что невозможно, поскольку это множество ограничено. Для каждой точки $x \in U_\nu \cap M_\nu(1)$ выполнено $P_A(x) \in M_\nu$ по утверждению 2) леммы 2.5, следовательно $(P_A(x), x\rangle \in R_\nu(x)$, а значит $|R_\nu(x)| > 0$ и $q(U_\nu,\nu) > 0$.

Лемма доказана. □

## 2.5 Утверждения о поднятии пути

Для доказательства теоремы 2.1 понадобятся теорема о накрывающей гомотопии и лемма о поднятии пути.

**Теорема Е.** *[31, гл. 1, § 7] Пусть $Y, Z$ — линейно связные топологические пространства, $p : Y \to Z$ — накрытие, $\widetilde{f}_0 : [0,1] \to Y$ — непрерывное отображение и $\{f_t : [0,1] \to Z\}_{t\in[0,1]}$ — гомотопия, такая, что $f_0 = p \circ \widetilde{f}_0$. Тогда существует единственная гомотопия $\{\widetilde{f}_t : [0,1] \to Y\}_{t\in[0,1]}$, такая, что $f_t = p \circ \widetilde{f}_t$.*

**Лемма А.** *[31, гл. 1, § 7] Пусть $Y, Z$ — линейно связные топологические пространства, $p : Y \to Z$ — накрытие. Тогда для любого пути $s : [0,1] \to Z$ и любой точки $\widetilde{z} \in Y$, такой, что $p(\widetilde{z}) = s(0)$, существует единственное поднятие пути $s$, то есть такой путь $\widetilde{s} = \widetilde{s}[p, \widetilde{z}] : [0,1] \to Y$, что $\widetilde{s}(0) = \widetilde{z}, p \circ \widetilde{s} = s$.*

Из данных утверждений вытекает следующая

**Лемма 2.8.** *Пусть $G$ — односвязное подмножество $X \setminus \overline{A(1)}$ , $\nu \in N$, $q(G,\nu) > 0$, $z_0 \in G$, $\widetilde{z}_0 \in T_\nu^{-1}(z_0)$. Тогда существует такое непрерывное отображение $F = F[G, \nu, \widetilde{z}_0] : G \to T_\nu^{-1}(G)$, что $F(z_0) = \widetilde{z}_0$ и для всех $z \in G$ выполнено $F(z) \in T_\nu^{-1}(z)$. Кроме того, для всякого пути $s : [0,1] \to G, s(0) = z_0$ и его поднятия $\widetilde{s} = \widetilde{s}[T_\nu, \widetilde{z}_0]$ выполнено $\widetilde{s} = F \circ s$.*

*Доказательство.* Покажем, что если такая функция $F(z)$ существует, то она непрерывна в каждой точке $z \in G$. В противном случае существуют такие $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset G$, что $z_k \to z \in G$ и $|F(z_k) - F(z)| > \varepsilon$ для всех натуральных $k$. Рассмотрим такой путь

$$\gamma : [0,1] \to G, \qquad \gamma(0) = z_0, \quad \gamma(k/(k+1)) = z_k,\ k \in \mathbb{N}, \quad \gamma(1) = z.$$

Тогда путь $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}[T_\nu, F(z_0)] = F \circ \gamma$ не является непрерывным, поскольку $|\widetilde{\gamma}(k/(k+1)) - \widetilde{\gamma}(1)| = |F(z_k) - F(z)| > \varepsilon$. Противоречие.

Докажем существование $F(z)$. Если это отображение нельзя определить, то существует точка $z \in G$ и два пути

$$\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to G, \quad \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = z_0, \quad \alpha_1(1) = \alpha_2(1) = z$$

такие, что для поднятых путей

$$\widetilde{\alpha}_1 := \widetilde{\alpha}_1[T_\nu, \widetilde{z}_0], \quad \widetilde{\alpha}_2 := \widetilde{\alpha}_2[T_\nu, \widetilde{z}_0]$$

выполнено $\widetilde{\alpha}_1(1) \neq \widetilde{\alpha}_2(1)$.

Рассмотрим путь $f_0 := \alpha_2^{-1} \cdot \alpha_1$, то есть

$$f_0(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \alpha_2^{-1}(2t-1) & t \in (1/2, 1], \end{cases}$$

где $\alpha_2^{-1}(t) = \alpha_2(1-t)$. Ясно, что $f_0(0) = f_0(1) = z_0$ и для пути

$$\widetilde{f_0} : [0,1] \to T_\nu^{-1}(G), \quad \widetilde{f_0}(0) = \widetilde{z}_0, \quad T_\nu \circ \widetilde{f_0} = f_0,$$

существующего по лемме $A$, в силу леммы 2.6, выполнено $\widetilde{f_0}(1) \neq \widetilde{f_0}(0)$. Так как $G$ односвязно, существует гомотопия

$$\{f_t : [0,1] \to G\}_{t \in [0,1]}, \quad f_t(0) \equiv z_0, \quad f_t(1) \equiv z_0, \quad f_1(\tau) \equiv z_0.$$

По теореме $E$ существует единственная гомотопия

$$\{\widetilde{f_t} : [0,1] \to T_\nu^{-1}(G)\}_{t \in [0,1]}, \quad T_\nu \circ \widetilde{f_t} = f_t.$$

Ясно, что $\widetilde{f_1}(\tau), \widetilde{f_t}(0), \widetilde{f_t}(1) \in T_\nu^{-1}(z_0)$. Поскольку $\widetilde{f_1}(\tau), \widetilde{f_t}(0), \widetilde{f_t}(1)$ непрерывны как функции $\tau$ и $t$, и принимают значения из дискретного множества $T_\nu^{-1}(z_0)$, они постоянны. Из $\widetilde{f_1}(\tau) \equiv \text{const}$ получаем $\widetilde{f_1}(0) = \widetilde{f_1}(1)$, а с другой стороны,

$$\widetilde{f_t}(0) \equiv \widetilde{f_0}(0) \neq \widetilde{f_0}(1) \equiv \widetilde{f_t}(1).$$

Полученное противоречие доказывает существование отображения $F$.

Ясно, что $F \circ s$ является поднятием пути $s$, причем $F \circ s(0) = \widetilde{z}_0$. По лемме $A$ такое поднятие единственно, значит $F \circ s \equiv \widetilde{s}$.

Лемма доказана. $\square$

## 2.6 Доказательство основного результата

Вернемся к доказательству теоремы.

3) $\Rightarrow$ 1). Сначала докажем, что множество $U$ связно, а его замыкание гомеоморфно дополнению открытого шара в пространстве $X$. Затем покажем, что существование точки с многозначной метрической проекцией на множество $A$ противоречит утверждениям о поднятии пути.

**Лемма 2.9.** *Всякое множество $M_\nu$, $\nu \in N$, гомеоморфно сфере $S^{d-1}$.*

*Доказательство.* При $d = 2$ утверждение очевидно, так как все компактные связные замкнутые одномерные многообразия гомеоморфны окружности $S^1$ [1, ч. V, гл. III, § 2]. Пусть $d > 2$. Возьмем такое $R > 0$, что $\overline{A(2)} \subset B(0, R)$. Тогда сфера $S(0, R)$ односвязна, $S(0, R) \subset U_1$, $q(U_1, \nu) > 0$ в силу леммы 2.7, поэтому по лемме 2.8 существует непрерывное отображение

$$F : S(0, R) \to M_\nu \times [-1, +\infty), \quad F(x) \in T_\nu^{-1}(x) \quad \forall\, x \in S(0, R).$$

Каждый луч из множества $R_\nu$ пересекает сферу $S(0, R)$ в единственной точке. Если $\pi \circ F(u) = \pi \circ F(v) =: w$ для некоторых $u, v \in S(0, R)$, то $u, v \in (P_A(w), w\rangle \in R_\nu$, следовательно $u = v$. Поэтому отображение $\pi \circ F : S(0, R) \to M_\nu$ инъективно. Оно непрерывно, сфера $S(0, R)$ компактна, следовательно $\pi \circ F$ является гомеоморфизмом на свой образ $\pi \circ F(S(0, R))$. Поэтому образ $\pi \circ F(S(0, R))$ замкнут и открыт в $M_\nu$. Следовательно, $\pi \circ F(S(0, R)) = M_\nu$ в силу связности $M_\nu$.

Лемма доказана. □

**Лемма 2.10.** *Множество $U$ связно (то есть $N = \{1\}$, $U = U_1$), причём $\overline{U_1} \simeq X \setminus B^d$.*

*Доказательство.* Докажем сначала, что

$$\overline{U_1} \simeq X \setminus B^d, \qquad \overline{U_\nu} \simeq \overline{B}^d \text{ при } \nu > 1. \tag{2.3}$$

Поскольку $T(M_\nu \times [-1,1]) \simeq M_\nu \times [-1,1]$ по утверждению 4) леммы 2.3 и $M_\nu \simeq S^{d-1}$, имеем $T(M_\nu \times [-1,1]) \simeq S^{d-1} \times [-1,1]$. Тогда соотношения (2.3) непосредственно вытекают из обобщенной теоремы Шёнфлиса.

**Теорема F.** *[48] Пусть $h$ — гомеоморфное вложение произведения $S^{n-1} \times [-1,1]$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда замыкания связных компонент $\mathbb{R}^n \setminus h(S^{n-1} \times \{0\})$ гомеоморфны шару $\overline{B}^n$ и дополнению $\mathbb{R}^n \setminus B^n$.*

Теперь докажем, что $U$ связно. Пусть $\nu \in N, \nu > 1$ и $\varphi$ — гомеоморфизм $\overline{U_\nu}$ на $\overline{B}^d$. Зафиксируем точку $x_0 \in M_\nu$. По лемме 2.7 и лемме 2.8 существует такое непрерывное отображение $F := F(\overline{U_\nu}, \nu, (x_0, 0))$,

$$F : \overline{U_\nu} \to T_\nu^{-1}(\overline{U_\nu}), \quad F(x_0) = (x_0, 0),$$

что для любого пути

$$\beta : [0,1] \to \overline{U_\nu}, \quad \beta(0) = x_0,$$

выполнено равенство $\widetilde{\beta}[T_\nu, (x_0, 0)] = F \circ \beta$. Выберем произвольную точку $x \in M_\nu$ и рассмотрим путь

$$\gamma : [0,1] \to M_\nu, \quad \gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = x.$$

Очевидно, что путь

$$\widetilde{\gamma} : [0,1] \to M_\nu \times [-1, +\infty), \quad \widetilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), 0), \quad t \in [0,1]$$

удовлетворяет соотношениям

$$\widetilde{\gamma}(0) = (x_0, 0) \in T_\nu^{-1}(x_0), \quad T_\nu \circ \widetilde{\gamma} = \gamma. \tag{2.4}$$

По лемме A существует только один такой путь, следовательно $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}[T_\nu, \widetilde{x}_0]$ и поэтому $F(x) = (x, 0)$ для всякого $x \in M_\nu$ по лемме 2.8. Тогда отображение $\varphi \circ \pi \circ F \circ \varphi^{-1}$ является ретракцией шара $\overline{B}^d$ на его границу $S^{d-1}$, что невозможно.

Лемма доказана. □

**Лемма 2.11.** *Пусть $x' \in X$, $|P_A(x')| \geq 2$. Тогда найдутся такие односвязное множество $G_d \subset X \setminus A(2)$, замкнутый путь $s : [0,1] \to G_d$, $s(0) = s(1) = x'$ и его поднятие $\widetilde{s}$, что $\widetilde{s}(0) \neq \widetilde{s}(1)$.*

*Доказательство.* Пусть $y, z \in P_A(x')$, $y \neq z$. Обозначим первые точки пересечения лучей $(y, x'\rangle, (z, x'\rangle$ с многообразием $M$ через $y', z'$ соответственно. Ясно, что $y' \neq z'$. Найдем односвязное множество $G_d \subset X \setminus A(2)$, содержащее отрезки $[y', x']$, $[z', x']$ и какую-либо кривую на поверхности $M$ с концами $y'$ и $z'$. При $d \geq 3$ можно взять $G_d := X \setminus A(2)$ в силу (2.3). При $d = 2$ множество $X \setminus A(2)$ уже не является односвязным, поскольку гомеоморфно $X \setminus B^2$. Чтобы получить искомое односвязное множество, сделаем в $X \setminus A(2)$ «разрез»: возьмем любой такой луч $[w', w\rangle \subset X \setminus A(2)$, что

$$[w', w\rangle \cap M = \{w'\}, \quad [w', w\rangle \cap [y', x'] = \varnothing, \quad [w', w\rangle \cap [z', x'] = \varnothing,$$

и положим $G_2 := X \setminus \big(A(2) \cup [w', w\rangle\big)$. Ясно, что данное множество односвязно, а множество $M \cap G_2 = M \setminus \{w'\}$ линейно связно, поэтому $G_2$ — искомое множество.

Теперь построим такой замкнутый путь $s : [0,1] \to G_d$, что $\widetilde{s}(0) \neq \widetilde{s}(1)$ для некоторого его поднятия $\widetilde{s}$ и покажем, что это противоречит утверждениям о поднятии пути. Рассмотрим следующие пути на $G_d$ (см. рис. 1):

$$s_1(t) = (1-t)x' + ty', \quad t \in [0,1],$$

$$s_2 : [0,1] \to M \cap G_d, \quad s_2(0) = y', \quad s_2(1) = z',$$

$$s_3(t) = (1-t)z' + tx', \quad t \in [0,1],$$

$$s(t) = s_3 \cdot (s_2 \cdot s_1)(t) = \begin{cases} s_3(2t) & t \in [0, 1/2) \\ s_2(4t-2) & t \in [1/2, 3/4) \\ s_1(4t-3) & t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

Ясно, что $s(0) = s(1) = x'$, то есть путь $s$ замкнут. Рассмотрим пути на $T^{-1}(G_d)$:

$$\widetilde{s}_1(t) = (y', (1-t)\|x' - y'\|),$$

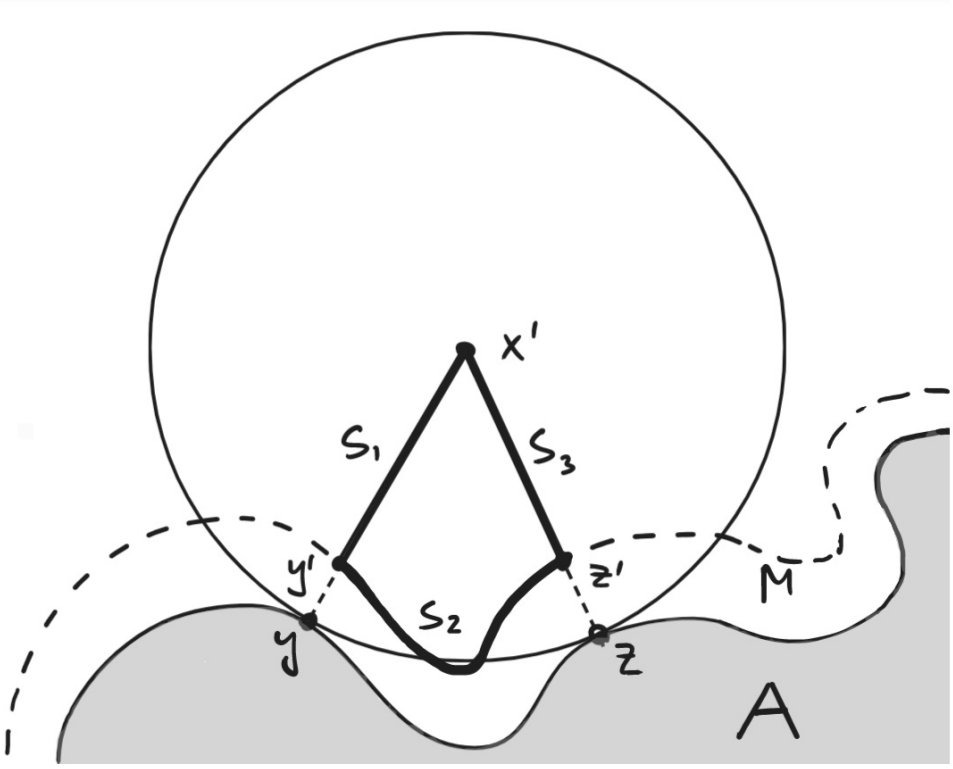



рис. 1

$$\widetilde{s}_2(t) = (s_2(t), 0),$$

$$\widetilde{s}_3(t) = (z', t\|x' - z'\|),$$

Нетрудно видеть, что путь $\widetilde{s} = \widetilde{s}_3 \cdot (\widetilde{s}_2 \cdot \widetilde{s}_1)$ — это поднятие пути $s$, причем из $y' \neq z'$, поэтому $\widetilde{s}(0) \neq \widetilde{s}(1)$

Лемма доказана. □

Для завершения доказательства перехода 3) $\Rightarrow$ 1) остается заметить, что существование точки $x' \in X$ с многозначной метрической проекцией $P_A(x')$ противоречит лемме 2.8. Действительно, рассмотрим множество $G_d$ и пути $s$ и $\widetilde{s}$ из леммы 2.11. Поскольку $G_d$ односвязно, по лемме 2.8 существует такое отображение $F = F[G_d, 1, z_0]$, что $F \circ s = \widetilde{s}$. Тогда $\widetilde{s}(0) = \widetilde{s}(1)$, что противоречит определению поднятия $\widetilde{s}$.

Теорема 2.1 доказана.

# Глава 3. Метрическая проекция на двумерных поверхностях

## 3.1 Определения и основной результат

Пусть $\rho$ — метрика на многообразии. Метрической проекцией $P_N(x)$ точки $x$ на множество $N$ называется множество

$$\big\{y \in N : \rho(x,y) = \inf_{z\in N} \rho(x,z) =: \rho(x,N)\big\}.$$

Метрическая проекция на подмножества многообразий исследовалась сравнительно мало (см., напр., [20]).

**Определение 3.1.** *Пусть на замкнутом римановом двумерном многообразии $M^2$ расположено множество $E$, состоящее из $k \geq 3$ связных попарно непересекающихся замкнутых множеств («материков») $E_1, \ldots, E_k$. Назовем точку $x \in M^2$ особой, если метрическая проекция $P_E(x)$ содержит точки не менее трех различных множеств $E_j$.*

**Теорема 3.1.** *Пусть на замкнутом римановом двумерном многообразии $M^2$ расположено множество $E$, состоящее из $k \geq 3$ материков $E_1, \ldots, E_k$. Тогда максимально возможное число особых точек равно $2k - 2\chi(M^2)$, где $\chi(M^2)$ — эйлерова характеристика многообразия $M^2$.*

Доказательство теоремы 3.1 разобъем на несколько параграфов.

## 3.2 Верхняя оценка числа особых точек

Поскольку многообразие $M^2$ метрически полно, то по теореме Хопфа–Ринова [15, § 5.3] оно геодезически полно, поэтому для любых двух точек $x, y$ многообразия $M^2$ существует по крайней мере одна кратчайшая геодезическая, их соединяющая. Будем обозначать ее $\gamma(x,y)$. Открытый шар радиуса $r$ с центром в точке $x$ будем обозначать $B(x;r)$.

**Лемма 3.1.** *Пусть $x, y$ — различные особые точки, $q \in P_E(y), p, s \in P_E(x), p \neq s$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *если кратчайшие геодезические $\gamma(p,x)$ и $\gamma(q,y)$ пересекаются, то $p = q$ и $\gamma(p,x) \cap \gamma(q,y) = \{p\}$;*

2) $\gamma(p,x) \cap \gamma(s,x) = \{x\}$.

*Доказательство.* 1) Пусть существует $z \in \gamma(p,x) \cap \gamma(q,y), z \neq p$. Покажем, что $p = q$. Обозначим через $\alpha(p,y)$ кривую, составленную из двух дуг — дуги кривой $\gamma(p,x)$ от $p$ до $z$ и дуги кривой $\gamma(q,y)$ от $z$ до $y$. Обозначим через $\alpha(q,x)$ кривую, составленную из двух дуг — дуги кривой $\gamma(q,y)$ от $q$ до $z$ и дуги кривой $\gamma(p,x)$ от $z$ до $x$. Ясно, что

$$|\alpha(p,y)| \geq \rho(y,E) = |\gamma(q,y)| =: r, \qquad |\alpha(q,x)| \geq \rho(x,E) = |\gamma(p,x)| =: R.$$

С другой стороны,

$$|\alpha(p,y)| + |\alpha(q,x)| = |\gamma(p,x)| + |\gamma(q,y)| = R + r.$$

Следовательно, $|\alpha(q,x)| = R$ и $|\alpha(p,y)| = r$. Ясно, что $z \neq x$ или $z \neq y$. Пусть для определенности $z \neq x$. Из равенств $|\alpha(q,x)| = R$ и $|\alpha(p,y)| = r$ следует, что $q \in P_E(x)$ и что $\alpha(q,x)$ — кратчайшая кривая из $x$ в $q$, а значит, геодезическая.

Геодезические $\alpha(q,x)$ и $\gamma(p,x)$ пересекаются по невырожденной дуге с концами $x$ и $z$, т. е. касаются и, значит, вложены одна в другую как касающиеся геодезические [22, гл. 5, § 4]. А поскольку $|\alpha(q,x)| = |\gamma(p,x)| = R$, имеем $p = q$. Так как кривые $\gamma(p,x), \gamma(q,y) = \gamma(p,y)$ совпадают по дуге кривой $\gamma(p,x)$ от $z$ до $p$, то одна из геодезических $\gamma(p,x), \gamma(p,y)$ содержит другую. Для определенности будем считать, что $\gamma(p,x)$ содержит $\gamma(p,y)$.

Поскольку $\rho(x,y) = \rho(x,p) - \rho(y,p) = R - r$, по неравенству треугольника имеем $B(y;r) \subset B(x;R)$. Покажем, что $\partial B(y;r) \cap \partial B(x;R) = p$. Пусть существует такая точка $t \neq p$, что $t \in \partial B(y;r) \cap \partial B(x;R)$. Пусть $\gamma(y,x)$ — дуга кривой $\gamma(p,x)$. Обозначим через $\alpha(t,x)$ кривую, составленную из геодезических

$\gamma(y,x)$ и $\gamma(t,y)$. Так как

$$\rho(t,x) = R = |\gamma(t,y)| + |\gamma(y,x)| = |\alpha(t,x)|,$$

кривая $\alpha(t,x)$ — кратчайшая геодезическая, однако

$$\gamma(y,x) \subset \gamma(p,x) \cap \alpha(t,x), \qquad |\gamma(p,x)| = |\alpha(t,x)|,$$

следовательно, $t = p$. Противоречие. Таким образом, $\partial B(y;r) \setminus B(x;R) = \{p\}$, поэтому не существует точек из трех различных материков на $\partial B(y;r)$, т. е. $y$ — не особая точка, что противоречит условию.

2) Пусть существует такая точка $z \neq x$, что $z \in \gamma(s,x) \cap \gamma(p,x)$. Обозначим через $\beta(p,x)$ кривую, составленную из двух дуг — дуги кривой $\gamma(p,x)$ от $p$ до $z$ и дуги кривой $\gamma(s,x)$ от $z$ до $x$. Обозначим через $\beta(s,x)$ кривую, составленную из двух дуг — дуги кривой $\gamma(s,x)$ от $s$ до $z$ и дуги кривой $\gamma(p,x)$ от $z$ до $x$. Ясно, что

$$|\beta(p,x)| \geq |\gamma(p,x)|, \qquad |\beta(s,x)| \geq |\gamma(s,x)|,$$

$$|\beta(p,x)| + |\beta(s,x)| = |\gamma(p,x)| + |\gamma(s,x)|,$$

следовательно,

$$|\beta(p,x)| = |\gamma(p,x)|, \qquad |\beta(s,x)| = |\gamma(s,x)|.$$

Отсюда так же, как и выше, вытекает, что $s = p$, что невозможно по условию леммы.

Лемма доказана. □

**Определение 3.2.** *Назовем шапочкой особой точки $x$ замкнутый шар $\overline{B}(x;\rho(x,E))$ радиуса $\rho(x,E)$ с центром в точке $x$.*

**Определение 3.3.** *Назовем особую точку $x$ правильной, если в ее шапочке $\overline{B}(x;\rho(x,E))$ лежат ровно три точки материков.*

**Лемма 3.2.** *Пусть для $k$ материков существует $d$ особых точек с шапочками $\overline{B}(x_i; r_i), i = \overline{1,d}$. Тогда можно так перестроить эти материки, что для новых материков будет существовать по крайней мере $d$ правильных особых точек с попарно непересекающимися шапочками одинакового радиуса.*

*Доказательство.* Для каждого $i$ выберем три точки различных материков $p_i^1, p_i^2, p_i^3 \in P_E(x_i)$. Рассмотрим кратчайшие геодезические $\gamma(p_i^j, x_i)$ из точки $p_i^j$ в точку $x_i$ $(j = 1, 2, 3)$. Пусть $G_i$ — граф с вершинами $x_i, p_i^j$ и ребрами $\gamma(p_i^j, x_i), j = 1, 2, 3$. По лемме 3.1, его ребра пересекаются только в точке $x_i$. Также, согласно лемме 3.1, $x_i \notin G_j$ при $i \neq j$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условиям:

1) различные $\overline{B}(x_i; \varepsilon)$ не пересекаются;

2) $\varepsilon < \min r_i$;

3) $\overline{B}(x_i; \varepsilon) \cap G_j = \varnothing$ при $i \neq j$ .

Пусть

$$\gamma(p_i^j, x_i) \cap \partial B(x_i; \varepsilon) = \{q_i^j\}, \qquad i = \overline{1,d}, \quad j = 1, 2, 3.$$

К каждому материку присоединим дуги $\gamma(p_i^j, q_i^j)$ кривых $\gamma(p_i^j, x_i)$, из него выходящие. Достроенные материки не пересекаются, так как $G_j \cap G_k$ может состоять только из точек $p_j^m = p_k^s$ по лемме 3.1. Для новых материков имеется $d$ правильных особых точек с непересекающимися шапочками $\overline{B}(x_i; \varepsilon), i = \overline{1,d}$.

Лемма доказана. □

**Определение 3.4.** *Назовем ломаной на многообразии $M^2$ кривую без самопересечений, состоящую из конечного числа кратчайших геодезических.*

**Лемма 3.3.** *Пусть $U$ — открытое связное множество многообразия $M^2$, $v_i \in U (i = \overline{1,k})$. Тогда существует замкнутая ломаная $L \subset U$, проходящая через все точки $v_i$.*

*Доказательство.* Докажем по индукции, что существует незамкнутая ломаная $L_k \subset U$, проходящая через все $v_i$. В качестве ломаной, проходящей только

через точку $v_1$, возьмем саму точку $v_1$. Пусть для некоторого $i < k$ существует незамкнутая ломаная $L_i$ с концами $v_1, v_i$, последовательно проходящая через $v_1, ..., v_i$ и не проходящая через оставшиеся $v_j$. Покажем, что существует незамкнутая ломаная $L_{i+1}$ с концами $v_1, v_{i+1}$, последовательно проходящая через $v_1, ..., v_{i+1}$ и не проходящая через оставшиеся $v_j$. Найдем $\delta > 0$, такое, что $B(v_i; \delta)$ не пересекается с участком ломаной $L_i$ от $v_1$ до $v_{i-1}$, $v_j \notin B(v_i; \delta)$ при $j > i$. Выберем в $B(v_i; \delta)$ точку $v$, не принадлежащую $L_i$. Поскольку множество $U \setminus (L_i \cup \{v_{i+2}, \dots, v_k\})$ открыто и связно, существует лежащая в нем незамкнутая ломаная $L'_{i+1}$, соединяющая точки $v$ и $v_{i+1}$. Параметризуем ломаные $L_i, L'_{i+1}$ так, чтобы

$$L_i(0) = v_1, \;\; L_i(1) = v_i, \;\; L'_{i+1}(0) = v_{i+1}, \;\; L'_{i+1}(1) = v.$$

Существуют $t_1, t_2 \in [0, 1]$, такие, что

$$L_i([0, t_1]) \cap \partial B(v_i; \delta) = L_i(t_1) =: u_i,$$

$$L'_{i+1}([0, t_2]) \cap \partial B(v_i; \delta) = L'_{i+1}(t_2) =: u_{i+1}.$$

Тогда $L_{i+1} = L_i([0, t_1]) \cup \gamma(u_i, v_i) \cup \gamma(v_i, u_{i+1}) \cup L'_{i+1}([0; t_2])$ — искомая ломаная. Поэтому существует незамкнутая ломаная $L_k$ с концами $v_1, v_k$. Пусть $2\varepsilon < \min_{i \neq j} \rho(v_i, v_j)$. Выберем в $B_\varepsilon(v_1), B_\varepsilon(v_k)$ точки $u, u'$ соответственно. Соединим их кривой $\alpha(u, u') \subset U \setminus L_k$. Параметризуем $L_k, \alpha(u, u')$ отображениями $f, g : f(0) = v_1, f(1) = v_k; g(0) = u, g(1) = u'$. Существуют $t_1, t_2, t'_1, t'_2 \in [0, 1]$, такие, что

$$f([t_1, 1]) \cap \partial B_\varepsilon(v_1) = \{f(t_1)\}, \qquad f([0, t'_1]) \cap \partial B_\varepsilon(v_k) = \{f(t'_1)\},$$

$$g([t_2, 1]) \cap \partial B_\varepsilon(v_1) = \{g(t_2)\}, \qquad g([0, t'_2]) \cap \partial B_\varepsilon(v_k) = \{g(t'_2)\}.$$

Тогда положим

$$L = f([t_1, t'_1]) \cup \gamma(f(t'_1), v_k) \cup \gamma(v_k, g(t'_2)) \cup g([t'_2, t_2]) \cup \gamma(g(t_2), v_1) \cup \gamma(v_1, f(t_1)).$$

Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 3.1. Пусть для материков $N_1, ..., N_k$ на многообразии $M^2$ существует $d$ особых точек. Согласно лемме 3.2, можно считать, что для материков $N_1, ..., N_k$ существует не менее $d$ правильных особых точек с попарно непересекающимися шапочками $\overline{B}(x_i;\varepsilon), i = \overline{1,d}$. Пусть $q_i^1, q_i^2, q_i^3$ — точки материков на границе шапочки $\overline{B}(x_i;\varepsilon)$. Оценим сверху $d$. Для этого будем строить на $M^2$ граф $G$ описанным ниже способом. Пусть

$$V(N_\nu) = \{q_i^j : q_i^j \in N_\nu\}, \qquad \nu = \overline{1,k}.$$

Найдем такое $\delta \in (0, \varepsilon/2)$, что $\delta$-окрестности

$$U_\delta(N_\nu) = \{x \in M^2 : \rho(x, N_\nu) < \delta\}$$

различных материков не пересекаются. В каждой окрестности $U_\delta(N_\nu)$ построим замкнутую ломаную $G(N_\nu)$, проходящую через все точки множества $V(N_\nu)$. Это возможно по лемме 3.3.

Пусть $G(x_i)$ — простой цикл с тремя вершинами, лежащий в $\overline{B}(x_i;\varepsilon/2)$ и содержащий $x_i$ в своей внутренней грани (т. е. в той, где нет точек материков). Тогда на каждой кривой $\gamma(q_i^j, x_i)$ существуют точки $s_i^j, t_i^j$, такие, что для дуги $\gamma(s_i^j, t_i^j)$ кривой $\gamma(q_i^j, x_i)$ выполняются равенства

$$\gamma(s_i^j, t_i^j) \cap G(x_i) = \{t_i^j\}, \qquad \gamma(s_i^j, t_i^j) \cap G(N_\nu) = \{s_i^j\},$$

если $q_i^j \in V(N_\nu)$ (точка $s_i^j$ может совпадать с $q_i^j$). Для каждого $\nu = \overline{1,k}$ будет считать ломаную $G(N_\nu)$ графом с множеством вершин $\{s_i^j : q_i^j \in V(N_\nu)\}$. Вершинами графов $G(x_i)$ будем считать точки $t_i^j$, вершинами ребер $\gamma(s_i^j, t_i^j)$ — точки $s_i^j, t_i^j$. Тогда положим

$$G_l = G(N_l) \cup \{\gamma(s_i^j, t_i^j) : q_i^j \in V(N_l)\}, \qquad G = (\cup_{l=1}^k G_l) \cup (\cup_{i=1}^d G(x_i)).$$

Вершины графа $G$ — это точки $s_i^j, t_i^j$ $(i = \overline{1,d}, j = 1,2,3)$.

Раскрасим ребра графа $G$ следующим образом: ребра каждого подграфа $G_l$ красим в цвет $l$. Непокрашенными останутся только ребра подграфов

$G(x_i), i = \overline{1,d}$. Пусть $V, E, F$ — множества вершин, ребер и граней графа $G$ соответственно. Пусть

$$F' = \{f \in F : \text{среди ребер } f \text{ есть непокрашенное и покрашенное ребра}\}.$$

Отметим, что если при однократном последовательном обходе ребер грани $f \in F$ некоторое ребро встретилось дважды, то это ребро лежит на границе только одной грани графа $G$ — самой грани $f$. Поэтому при однократном последовательном обходе ребер грани $f \in F'$ невозможно пройти по непокрашенному ребру дважды.

Докажем, что каждая грань множества $F'$ содержит хотя бы два непокрашенных ребра. Рассмотрим такие соседние ребра $e_1, e_2, e_3$ грани $f$, что $e_2$ — непокрашенное ребро (если у грани $f'$ только два ребра, будем считать, что ребра $e_1$ и $e_3$ совпадают). Если одно из $e_1, e_3$ непокрашенное, утверждение доказано. Если оба ребра покрашены, то они не могут быть одного цвета, поскольку непокрашенные ребра соединяют только вершины различных графов $G_l$, покрашенных в разные цвета. Рассмотрим однократный последовательный обход ребер грани $f$ в следующим порядке: $e_2$, $e_3$, ... , $e_1$. Видно, что есть цепочка ребер, ведущая из $e_3$ в $e_1$, а значит, проходящая через непокрашенное ребро (ребра разных цветов не могут быть смежными). При этом данное непокрашенное ребро не совпадает с $e_2$, так как при однократном последовательном обходе грани из множества $F'$ невозможно пройти по непокрашенному ребру дважды.

Таким образом, у каждой грани $f \in F'$ на границе имеется по крайней мере два непокрашенных ребра, причем различные $f_1, f_2 \in F'$ не могут иметь общее непокрашенное ребро на границах, так как каждое ребро лежит на границе не более двух граней, а каждое непокрашенное ребро граничит с треугольной гранью, имеющую непокрашенную границу. Ребер, принадлежащих треугольным граням с непокрашенной границей, ровно $3d$. Поэтому верна оценка

$$3d \geq 2|F'| \geq 2(|F| - d - k)$$

(последнее неравенство имеет место в силу того, что число граней, состоящих только из ребер одного цвета, не больше $k$, число граней, состоящих только из непокрашенных ребер, равно $d$). Заметим, что $|V| = 6d, |E| = 9d$. По неравенству Эйлера [24, § 2.2] имеем

$$|F| \geq |E| - |V| + \chi(M^2) = 3d + \chi(M^2),$$

а следовательно

$$3d \geq 2((3d + \chi(M^2)) - d - k) \quad \Longleftrightarrow \quad d \leq 2k - 2\chi(M^2),$$

что и требовалось доказать.

## 3.3 Точность верхней оценки

Теперь для каждого многообразия указанного типа построим такой пример расположения материков на нем, что число особых точек равно верхней оценке в условии теоремы.

Сначала построим на некоторой сфере с $m$ пленками Мёбиуса $k$ материков, для которых имеется $2k + 2m - 4$ особых точек, $m \geq 0$. Рассмотрим сферу $S^2$ радиуса $1/(2\pi)$ в трехмерном пространстве. Пересечем ее плоскостью $\Pi_0$, проходящей через центр сферы. Разобьем $\omega_0 = S^2 \cap \Pi_0$ на $2k + m - 4$ равных дуг точками $x_i$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$|\gamma(x_i, x_{i+1})| = \frac{1}{2k + m - 4}, \qquad i = \overline{1, (2k + m - 3)}.$$

Положим $B_i := B(x_{i+1}; \frac{1}{8k+4m-16})$. Пусть $a_i, b_i$ — точки множества $\partial B_i \cap \omega_0$, причем точки $a_1, b_1, ..., a_{2k+m-4}, b_{2k+m-4}$ расположены на $\omega_0$ в указанном порядке. Окрестности $B_i$ не пересекаются между собой.

Рассмотрим плоскости $\Pi_1, \Pi_2$, параллельные $\Pi_0$ и касающиеся каждого замкнутого шара $\overline{B}_i, i = \overline{1, (2k + m - 4)}$. Пусть

$$\omega_1 = S^2 \cap \Pi_1, \omega_2 = S^2 \cap \Pi_2, \qquad \omega_1 \cap \overline{B}_i = c_i, \qquad \omega_2 \cap \overline{B}_i = d_i.$$

Для $i = \overline{1,m}$ вырежем из сферы открытые диски $B_i$ и приклеим по их границам ленты Мёбиуса $M_1, ..., M_m$. Таким образом получим из $S^2$ сферу с $m$ пленками Мёбиуса. Построим материки $N_1, ..., N_k$ на этой поверхности. В качестве $N_{k-1}, N_k$ возьмем $\omega_1, \omega_2$ (вырезав диски, мы не вырезали точки этих окружностей). В качестве $N_i$ возьмем кратчайшие дуги $\gamma(b_{m+2i-1}, a_{m+2i}), i = \overline{1,k-2}$. На каждой ленте $M_i, i = \overline{1,m}$, построим связные множества $N_i^1, N_i^2, N_i^3$, такие, что $b_i \in N_i^1, c_i \in N_i^2, d_i \in N_i^3, i \in \overline{1,m}$, а также $a_i \in N_i^1, i = \overline{2,m}$. Способ построения таких множеств на развертках лент Мёбиуса $M_i, i = \overline{1,m}$, изображен на рис. 1 для $i = \overline{2,m}$ и на рис. 2 для $i = 1$.

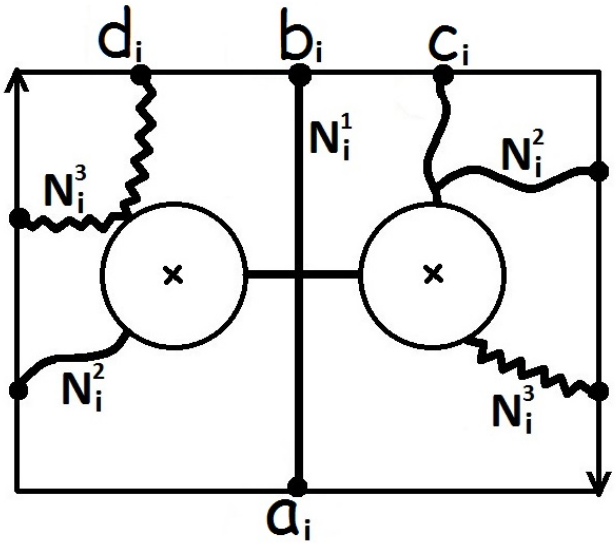



рис. 1

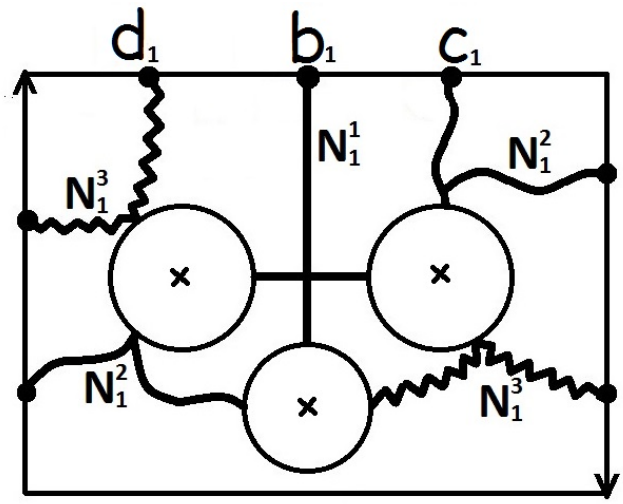



рис. 2

Достроим материк $N_{k-2}$, присоединив к нему $N_i^1$ и дуги $\gamma(b_i, a_{i+1}), i = \overline{2,m+1}$. Достроим материк $N_{k-1}$, присоединив к нему множества $N_i^2$ $(i = \overline{1,m})$. Достроим материк $N_k$, присоединив к нему множество $N_i^3$ $(i \in \overline{1,m})$. Посчитаем количество особых точек получившихся материков. Точки $x_{m+2}, ..., x_{2k+m-4}$ всегда являются особыми. Если $m = 0$, то точка $x_{m+1}$ также является особой. Если $m > 0$, то в каждой ленте Мёбиуса $M_i$ при $i = \overline{2,m}$ существуют 2 особые точки. В $M_1$ всегда 3 особые точки. Таким образом, общее число особых точек равно $2k - 4$ при $m = 0$ и $2k - 5 + 2(m-1) + 3 = 2k + 2m - 4$ при $m > 0$ , что и требовалось.

Теперь построим материки на сфере с $g$ ручками. Для этого рассмотрим

попарно непересекающиеся и не содержащиеся друг в друге многообразия в трехмерном пространстве: торы $T_1^2, ..., T_g^2$ и сферу $S^2$. На каждом торе построим 3 материка $N_i^1, N_i^2, N_i^3$, для которых существует 6 особых точек. Способ этого построения на развертке тора изображен на рис. 3.

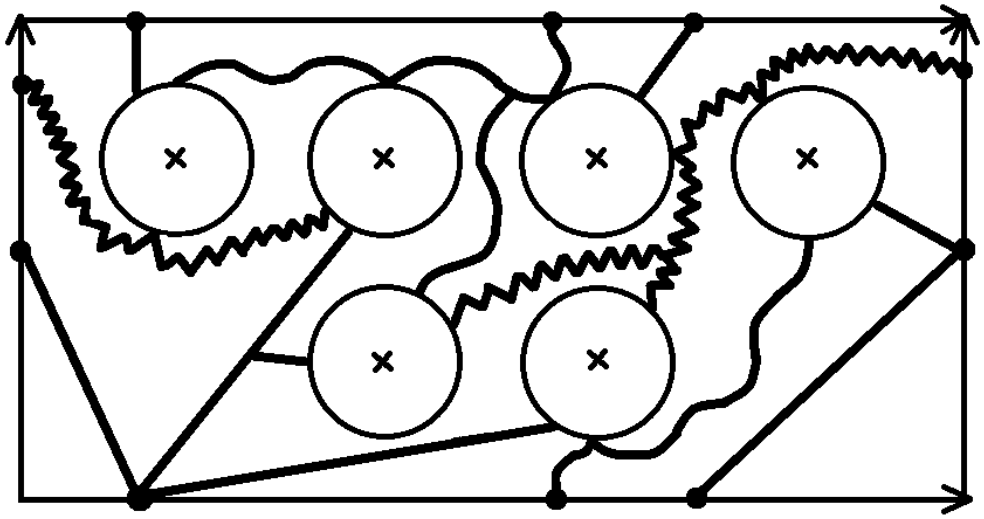


рис. 3

На $S^2$ построим $k$ материков $N_1, ..., N_k$, для которых существует $2k-4$ правильных особых точек с непересекающимися шапочками (выше показано, что на сфере с $m = 0$ пленками Мёбиуса можно построить $k$ материков, для которых существует $2k-4$ правильных особых точек). Можно считать, что на границе шапочки правильной особой точки $x_1$ есть точки материков $N_1, N_2, N_3$. Теперь на сфере и каждом торе выберем по две шапочки особых точек:

$$\overline{B}(x_0; r_0), \overline{B}(x_1; r_1) \subset S^2, \qquad \overline{B}(x_{2i}; r_{2i}), \overline{B}(x_{2i+1}; r_{2i+1}) \subset T_i^2, \quad i = \overline{1, g}.$$

Для каждого $i \in \overline{1, 2g-1}$ вырежем диски $B(x_i; r_i)$. Для $i = \overline{1, g}$ соединим $\partial B(x_{2i-1}; r_{2i-1})$ и $\partial B(x_{2i}; r_{2i})$ трубками так, чтобы трубки не пересекались между собой и не пересекали $S^2, T_1^2, ..., T_g^2$. Таким образом получим сферу с $g$ ручками. На $\partial B(x_{2i-1}; r_{2i-1}), \partial B(x_{2i}; r_{2i})$ — концах каждой трубки — есть по 3 точки материков $N_{i-1}^1, N_{i-1}^2, N_{i-1}^3$ и $N_i^1, N_i^2, N_i^3$ соответственно. Тогда можно соединить по трубке точки материков на разных ее концах между собой тремя непересекающимися кривыми $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3$ так, чтобы каждая точка материка $N_{i-1}^j$ на одном

конце трубки была соединена кривой $\alpha_i^j$ с точкой материка $N_i^{\sigma(j)}$ на другом конце трубки ($\sigma$ — перестановка множества $\{1,2,3\}$) . Можно, переименовав три материка $N_i^j$ $(j=1,2,3)$, считать, что $\alpha_i^j$ соединяет материки $N_{i-1}^j, N_i^j$.

Тогда переобозначим $N_j$: положим

$$N_j = (\cup_{i=0}^g N_i^j) \cup (\cup_{i=1}^g \alpha_i^j), \qquad j=1,2,3.$$

Ясно, что множество $N_j$ связно. Тогда $N_1, ..., N_k$ — это $k$ материков на сфере с $g$ ручками. Посчитаем количество особых точек для них. Заметим, что при построении трубки с концами $\partial B(x_{2i-1}; r_{2i-1}), \partial B(x_{2i}; r_{2i})$ точки $x_{2i-1}, x_{2i}$ перестают быть особыми. Поскольку мы построили $g$ трубок, а всего у нас было $6g$ особых точек на торах и $2k-4$ особых точки на сфере, то число особых точек нашей сферы с $g$ ручками равно

$$2k-4+6g-2g = 2k+4g-4,$$

что и требовалось. Таким образом, мы построили примеры материков, для которых существует максимально возможное количество особых точек, на представителях всех классов гомеоморфных двумерных многообразий.

**Лемма 3.4.** *Пусть $M, \widetilde{M}$ — гомеоморфные многообразия с заданными на них функциями расстояния, $f : M \to \widetilde{M}$ осуществляет гомеоморфизм, и для $k$ материков-графов $N_1, ..., N_k$ на $M$ существует $d$ особых точек с шапочками $B(x_i; r_i), i = \overline{1,d}$, и точками $q_i^j$ $(j=1,2,3)$ из некоторых трех различных материков на границе каждой шапочки. Пусть существуют кривые $\alpha(q_i^j, x_i)$ со следующими свойствами:*

1) $\alpha(q_i^n, x_i) \cap \alpha(q_i^m, x_i) = x_i$ *при* $n \neq m$;

2) *для* $i \neq j$ *выполнено* $\alpha(q_i^n, x_i) \cap \alpha(q_j^m, x_j) = q_i^n$ *при* $q_i^n = q_j^m$ *и* $\alpha(q_i^n, x_i) \cap \alpha(q_j^m, x_j) = \varnothing$ *при* $q_i^n \neq q_j^m$.

*Тогда на $\widetilde{M}$ можно построить $k$ материков-графов $\widetilde{N_1}, ..., \widetilde{N_k}$, для которых существует не менее $d$ особых точек.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — множество, являющееся объединением $k$ материков на $M$ и всевозможных кривых $\alpha(q_i^j, x_i)$. Обозначим через $\beta(q_i^j, x_i)$ образ кривой $\alpha(q_i^j, x_i)$ при отображении $f$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что для каждой точки $y_i = f(x_i)$ выполнено

$$f(G) \cap B(y_i; \varepsilon) = (\cup_{j=1}^{3} \beta(q_i^j, x_i)) \cap B(y_i; \varepsilon).$$

Параметризуем каждую кривую $\beta(q_i^j, x_i)$ отображением

$$f_{ij} : [0, 1] \to \beta(q_i^j, x_i), \qquad f_{ij}(0) = f(q_i^j), \quad f_{ij}(1) = y_i.$$

В силу замкнутости $\partial(B(y_i; \varepsilon))$ и непрерывности $f_{ij}$ существует такая точка $s_{ij} \in [0, 1]$, что

$$f_{ij}([0; s_{ij}]) \cap \partial B(y_i, \varepsilon) = f_{ij}(s_{ij}).$$

Тогда для каждого $i = \overline{1, d}$ построим материк $\widetilde{N_i}$, присоединив к $f(N_i)$ кривые $f_{ij}([0, s_{ij}])$, исходящие из $f(N_i)$. Для материков $\widetilde{N_i}$ на $\widetilde{M}$ имеется $d$ особых точек $y_j$ $(j = \overline{1, d})$.

Лемма доказана. □

Лемма 3.4 завершает доказательство теоремы 3.1. Действительно, так как приведенные примеры на сфере с ручками и сфере с пленками удовлетворяют условиям леммы 3.4, то и на произвольном двумерном замкнутом римановом многообразии существуют примеры расположения $k$ материков с количеством особых точек, равным верхней оценке из условия теоремы.

**Теорема 3.2.** *Пусть на двумерной нормированной плоскости $X$ расположено $k > 1$ материков (связных попарно непересекающихся замкнутых множеств). Тогда максимальное возможное число особых точек равно $2k - 4$.*

*Доказательство.* Ясно, что максимальное количество особых точек для $k$ материков на сфере $S^2$ с выколотой точкой равно $2k - 4$. Она гомеоморфна нормированной плоскости $X$, поэтому утверждение непосредственно вытекает из леммы 3.4. □

## 3.4 Случай размерности больше 2

**Замечание 3.1.** *Для любого натурального $k > 0$ на римановом многообразии и в нормированном пространстве размерности $n \geq 3$ можно построить три материка, для которых существует по крайней мере $2k$ особых точек.*

*Доказательство.* 1. Докажем утверждение для риманова многообразия $M^n$. Найдем такую малую окрестность $B_\varepsilon(x)$ точки $x \in M^n$, что для каждой пары точек $x_1, x_2 \in B_\varepsilon(x)$ существует кратчайшая геодезическая $\gamma(x_1, x_2) \subset B_\varepsilon(x)$, их соединяющая. Шар $B_\varepsilon(x)$ гомеоморфен открытому множеству $U \subset \mathbb{R}^n$. Можно считать, что $0 \in U$. Найдем $\delta$, такое, что $n$-мерный куб $[-\delta; \delta]^n \subset U$. В качестве материков возьмем три прямые $l_i$ $(i = 1, 2, 3)$ , заданные уравнениями $x_1 = t, x_2 = a_i, x_3 = b_i, x_j = 0$ при $j \in \overline{3, m}$ , где $a_1 = \frac{-\delta}{4k}, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = \frac{\delta}{4k}, a_3 = \frac{\delta}{4k}, b_3 = 0$. Тогда ясно, что шары

$$B\left(\left(\frac{(4m-2)\delta}{4k}, 0, ..., 0\right), \frac{\delta}{4k}\right), \qquad m = \overline{-k+1, k},$$

не пересекаются и касаются $l_i$, поэтому для материков $l_i$ существует по крайней мере $2k$ особых точек с непересекающимися шапочками. Значит, по лемме 3.4 на $B_\varepsilon(x) \subset M^n$ можно построить 3 материка, для которых существует $2k$ особых точек. В силу условий на $B_\varepsilon(x)$ особые точки для этих 3 материков на $B_\varepsilon(x)$ будут особыми и на всем $M^n$.

2. Докажем утверждение для нормированного пространства $X^n$. Для $X^n$ с евклидовой нормой соответствующий пример построен в п. 1. Поскольку в $X^n$ любая норма эквивалентна евклидовой, остается применить лемму 3.4. □

# Заключение

Данная работа затрагивает ряд не изучавшихся ранее вопросов о свойствах оператора метрической проекции. Ввиду новизны вопросов, эта тематика богата направлениями для дальнейшего исследования. Отметим самые основные из этих направлений. С одной стороны, возникает вопрос об обобщении теоремы 1.6 и следствия 1.5 на более широкий класс множеств в банаховых пространствах. Такие обобщения без дополнительных ограничений на множество $M$ представляют собой крайне сложную задачу, поскольку уже аналог следствия 1.5 в бесконечномерном пространстве включает в себя как частный случай при $k = 1$ знаменитую «проблему выпуклости чебышевских множеств».

С другой стороны, возникает вопрос, можно ли ослабить условие гладкости пространства в теореме 1.6 и следствии 1.5 в конечномерном случае. Известен следующий классический результат, характеризующий трехмерные и четырехмерные нормированные пространства, в которых любое чебышёвское множество выпукло.

**Теорема G.** *[8], [45], [46] В $d$-мерном $(d = 3, 4)$ нормированном пространстве $X_d$ всякое чебышевское множество выпукло тогда и только тогда, когда всякая достижимая точка является точкой гладкости.*

Предполагается, что данная теорема верна и при $d > 4$. Таким образом, естественно возникает

**Задача C.** *Верно ли, что в $d$-мерном нормированном пространстве $X_d$ всякое замкнутое множество с не более чем $k$-значной метрической проекцией имеет число Каратеодори не более $k$ тогда и только тогда, когда всякая достижимая точка является точкой гладкости?*

Также интересно было бы получить бесконечномерные аналоги теоремы 2.1 при условиях на множество A типа компактности.

# Список литературы


[1] А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, Геометрия, 2-е изд. // БХВ-Петербург, СПб., 2010, 612 с.

[2] А. Р. Алимов, Выпуклость ограниченных чебышевских множеств в конечномерных пространствах с несимметричной нормой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, **14**: 4 (2) (2014), 489–497.

[3] А. Р. Алимов, М. И. Карлов, Множества с внешним чебышевским слоем // Матем. заметки **67**: 2 (2001), 303–307.

[4] А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН, **71**: 1 (427) (2016), 3–84.

[5] А. Р. Алимов, Всякое ли чебышёвское множество выпукло? // Матем. просвещение, сер. 3, **2** (1998), 155–172.

[6] А. Р. Алимов, О структуре дополнения к чебышёвским множествам // Функц. анализ и его прил., **35**: 3 (2001), 19–27.

[7] А. В. Арутюнов, Выпуклые свойства преобразования Лежандра // Матем. заметки, **28**: 2 (1980), 255–264.

[8] В. И. Бердышев, К вопросу о чебышёвских множествах // Докл. АзССР **22**: 9 (1966), 3–5.

[9] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов, Элементарная топология, 3-е изд., // МЦНМО, М., 2010, 446 с.

[10] В. С. Балаганский, Л. П. Власов, Проблема выпуклости чебышёвских множеств // УМН, **51**: 6 (1996), 125–188.

[11] П. А. Бородин, И. А. Пятышев, Пример не аппроксимативно компактного множества существования с конечнозначной метрической проекцией // Матем. заметки, **86**: 2 (2009), 170–174.

[12] Л. П. Власов, Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН, **28**: 6 (1973), 3–66.

[13] А. Л. Гаркави, Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. 1967, ВИНИТИ, М., 1969, 75–132.

[14] М. Л. Громов, О симплексах, вписанных в гиперповерхности // Матем. заметки, **5**: 1 (1969), 81–89.

[15] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, Риманова геометрия в целом // Мир, М., 1971, 343 с.

[16] А. Н. Дранишников, Многозначные абсолютные ретракты и абсолютные экстензоры в размерности 0 и 1 // УМН, **39**:5(239) (1984), 241–242.

[17] А. Н. Дранишников, Абсолютные $F$-значные ретракты и пространства функций в топологии поточечной сходимости // Сиб. матем. журн. **27**:3 (1986), 74–86.

[18] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, Некоторые свойства чебышёвских множеств // Докл. АН СССР, **118**: 1 (1958), 17–19.

[19] Л. Зайичек, Метрическая проекция и метрическая функция в пространствах Банаха // Теория приближения функций. Труды международной конференции по теории приближения функций, Наука, М., 1987, 179–182.

[20] М. И. Карлов, Чебышевские множества на многообразиях // Тр. ИММ УрО РАН, **4** (1996), 157–161.

[21] С. В. Конягин, Аппроксимативные свойства произвольных множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств // ДАН СССР **239**:2 (1978), 261–264.

[22] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, Курс дифференциальной геометрии и топологии // Факториал Пресс, М., 2000, 448 с.

[23] В. В. Прасолов, Элементы теории гомологий // МЦНМО, М., 2016, 448 с.

[24] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения // МЦНМО, М., 2016, 269 с.

[25] С. Б. Стечкин, Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Revue de Math. pures et appl., **8**:1 (1963), 5–18.

[26] В. В. Федорчук, Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // УМН, **41**:6 (252) (1986), 121–159.

[27] В. В. Федорчук, Многозначные ретракции и характеризации $n$-мягких отображений // Тр. ММО, **51**, Издательство Московского университета, М., 1988, 169–207.

[28] А. А. Флеров, Локально чебышевские множества на плоскости // Матем. заметки, **97**: 1 (2015), 142–149.

[29] А. А. Флеров, О множествах с не более чем двузначной метрической проекцией на нормированной плоскости // Матем. заметки, **101**: 2 (2017), 286–301.

[30] А. А. Флеров, Избранные геометрические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией. Канд. дис. // МГУ, М., 2016, 68 с.

[31] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии // Наука, М., 1989, 496 с.

[32] И. Г. Царьков, Геометрическая теория приближения в работах С. Б. Стечкина // Известия Тульского гос. ун-та, Матем., **11**:1 (2005), 236–260.

[33] И. Г. Царьков, Ограниченные чебышевские множества в конечномерных банаховых пространствах // Матем. заметки, **36**:1 (1984), 73–87

[34] И. Г. Царьков, Компактные и слабо компактные чебышёвские множества в линейных нормированных пространствах // Тр. МИАН СССР, **189** (1989), 169–184.

[35] П. Л. Чебышев, Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций // 1859, в кн.: Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., Т.2, М.-Л., АН СССР, 1947, 151–235.

[36] A. R. Alimov, On approximative properties of locally Chebyshev sets // Proc. Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb. **44**:1 (2018), 36–42.

[37] I. Bárány, R. Karasev, Notes about the Caratheodory Number // Discrete and Computational Geometry, **48**:3 (2012), 783—792

[38] K. Bartke, H. Berens, Eine beschreibung der nichteindeutigkeitsmenge für die beste approximation in der Euklidischen ebene // Journal of Approximation Theory, **47**:1 (1986), 54–74.

[39] F. De Blasi, Some geometric properties of typical compact convex sets in Hilbert spaces // Studia Math., **135**:2 (1999), 143–162.

[40] F. De Blasi, T. Zamfirescu, Cardinality of the metric projection on typical compact sets in Hilbert spaces // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **126**:1 (1999), 37–44.

[41] F. De Blasi, N. Zhivkov, Properties of typical bounded closed convex sets in Hilbert space // Abstr. Appl. Anal., **4** (2005), 423–436.

[42] D. Braess, Chebyshev Approximation by $\gamma$-polynomials, II // Journal of Approximation Theory, **11** (1974), 16–37.

[43] D. Braess, On Rational $L_2$-Approximation // Journal of Approximation Theory, **18** (1976), 136–151.

[44] A. Brøndsted, Convex Sets and Chebyshev Sets // Math. Scand., **17** (1965), 5–16.

[45] A. Brøndsted, Convex sets and Chebyshev sets. II // Math. Scand, **18** (1966), 5–15.

[46] A. Brown, Chebyshev Sets and Facial Systems of Convex Sets in Finite-Dimensional Spaces // Proc. London Math. Soc. (3), **41**:2 (1980), 297–339.

[47] A. Brown, Chebyshev sets and the shapes of convex bodies // Methods of Functional Analysis in Approximation Theory, Proc. Int. Conf., Bombay, 1985, Internat. Schriftenreihe Numer. Math., **76**, Birkhaüser, Basel, 1986, 98–121.

[48] M. Brown, A proof of the generalized Schoenflies theorem // Bull. Amer. Math. Soc. **66**:2 (1960), 74–76.

[49] L. Bunt, Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen // Thesis. Univ. Groningen, Amsterdam, 1934.

[50] C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen // Rend. Circ. Mat. Palermo, **32** (1911), 193–217.

[51] A. Cellina, Approximation of set-valued functions and fixed-point theorems // Ann. Mat. Pura Appl., **82** (1969), 17–24

[52] Ş. Cobzaş, Functional analysis in asymmetric normed spaces // Basel, Birkhauser, 2012, 219 p.

[53] A. Czarnecki, M. Kulczycki, W. Lubawski, On the connectedness of boundary and complement for domains // Annales Polonici Mathematici **103**: 2 (2011), 189–191.

[54] I. Diener, On Nonuniqueness in Nonlinear $L_2$-Approximation // Journal of Approximation Theory, **51** (1987), 54–67.

[55] P. Erdős, Some remarks on the measurability of certain sets // Bull. Amer. Math. Soc., **51**:10 (1945), 728–731.

[56] W. Fenchel, Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven // Math. Ann., **101** (1929), 238–252.

[57] M. I. Karlov, Approximative property of compact C-manifolds in Hilbert space // East J. on Appr., **2**:2 (1996), 197–203.

[58] V. Klee, A characterization of convex sets // Amer. Math. Mon., **56** (1949), 247–249.

[59] V. Klee, Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space // Trans. Amer. Maths. Soc, **74** (1953), 10–43.

[60] H. Mann, Untersuchungen über Wabenzellen bei allgemeiner Minkowskischer Metrik // Monatsh. Math. Phys., **42** (1935), 417–424.

[61] Th. Motzkin, Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes // Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**:6 (1935), 562–567.

[62] Th. Motzkin, Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes // Atti Accad. Naz. Lincei Rend., **21**:6 (1935), 773–779.

[63] C. Pauc, Sur la relation entre un point et une de ses projections sur un ensemble // Rev. Sci., **77**:8 (1939), 657–658.

[64] R. Verfürth, On the number of local best approximations by exponential sums // Journal of Approximation Theory, **34** (1982), 306–323.

[65] L. Zajiček, On the points of multivaluedness of metric projections in separable Banach spaces // Comment. Math. Univ. Carolinae, **19**:3 (1978), 513–523.

**Работы автора по теме диссертации:**

[66] К. С. Шкляев, Метрическая проекция на подмножества компактных связных двумерных римановых многообразий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. (2017), № 4, 15—20.

[67] К. С. Шкляев, Связное компактное локально чебышёвское множество в конечномерном пространстве является чебышёвским // Матем. сб., **211**:3 (2020), 455–465.

[68] К. С. Шкляев, Выпуклая оболочка и число Каратеодори множества в терминах метрической проекции // Матем. сб., **213**:10 (2022), 167–184.

*Тезисы конференций:*

[69] К. С. Шкляев, Локально чебышевские множества в конечномерных пространствах // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2019 г., стр. 298.

[70] К. С. Шкляев, Выпуклая оболочка множества в терминах метрической проекции // Abstracts of talks on the International Conference "Approximation Theory and Applications" dedicated to the 100-th anniversary of S.B. Stechkin, http://approx-lab.math.msu.su/files/sbs100/abstracts.pdf, 2021 г., стр. 22.