ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации К.С. Шкляева "Новые тополого-геометрические свойства метрической проекции", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация относится к геометрической теории приближений. В ней выявляются новые геометрические и топологические свойства множеств с конечнозначной метрической проекцией, то есть таких множеств, что для всякой точки объемлющего пространства количество ближайших точек в этом множестве конечно.

Геометрические задачи в теории приближений исследуются начиная с классической работы П.Л. Чебышева, в которой доказана теорема об альтернансе. Как самостоятельная область геометрическая теория приближений сформировалась во второй половине XX века в работах В. Кли, Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина, А.Л. Гаркави, В.И. Бердышева, Л.П. Власова, А. Брауна, А. Брондстеда, С.В. Конягина, И.Г. Царькова, И. Зингера, Л. Зайичека, В.С. Балаганского и других выдающихся математиков. Предметом ее исследования являются взаимосвязи между аппроксимативными и тополого-геометрическими свойствами множеств в нормированных пространствах. Современное состояние геометрической теории приближений характеризуется наличием большого числа старых нерешенных проблем и "расползанием" исследований в ширину по тематике и постановкам задач.

Центральной нерешенной проблемой в геометрической теории приближений является проблема выпуклости: верно ли, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве всякое чебышевское множество выпукло? Чебышевским называется множество с однозначной метрической проекцией, то есть множество, в котором ближайшая точка существует и единственна для всякой точки объемлющего пространства. В конечномерном евклидовом пространстве всякое чебышевское множество выпукло, как показали еще Л. Бунт и Т. Моцкин в 1930-х гг. Проблеме выпуклости посвящены сотни работ, и вокруг нее возникают новые постановки задач. Две такие постановки рассматриваются К.С. Шкляевым в диссертации.

В первой главе работы доказывается, в частности, что если метрическая проекция на компакт M в гладком банаховом пространстве не более чем k-значна, то его выпуклая оболочка совпадает с объединением выпуклых оболочек всевозможных наборов k точек из M. При $k = 1$ это известная теорема В. Кли (1949) о выпуклости чебышевского компакта в гладком пространстве. Диссертант выводит свой результат из глубокой теоремы о представлении выпуклой оболочки множества в виде объединения выпуклых оболочек метрических проекций на это множество, которая доказывается в самых общих и разнообразных ситуациях, в том числе в несимметрично нормированных пространствах и для метрических проекций относительно звездообразных тел в смысле Брондстеда.

Во второй главе доказывается, что всякое локально чебышевское связное компактное множество в конечномерном нормированном пространстве является чебышевским. Тем самым решается задача М.В. Балашова, поставленная в 2012 г.

Результаты, полученные в первых двух главах рассматриваемой диссертации, в частном случае двумерного нормированного пространства были доказаны моим учеником А.А. Флеровым и составили основу его кандидатской диссертации (2016).

В третьей главе получена точная оценка количества особых точек метрической проекции на конечносвязное замкнутое множество на двумерном римановом многообразии. В оценке участвуют число компонент связности множества и эйлерова характеристика

многообразия. Эта постановка возникла из одной олимпиадной задачи и имеет потенциал для дальнейшего развития.

При доказательстве своих результатов К.С. Шкляев реализовал яркие идеи и преодолел существенные технические трудности. Так, в обоих первых главах существенную роль играет факт невозможности ретракции конечномерного шара на его сферу, который на первый взгляд никак не связан с постановками задач теории приближений. Уровень сложности доказательств всех основных теорем диссертации значительно выше обычного уровня доказательств в кандидатской диссертации.

Тема диссертации актуальна, полученные результаты новы, интересны и могут быть использованы в научных исследованиях, ведущихся в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте математики и механики УРО РАН (Екатеринбург), Московском физико-техническом институте, Ярославском, Воронежском, Саратовском и Тульском государственных университетах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации; основные результаты диссертации опубликованы и апробированы на различных семинарах и конференциях.

Считаю, что диссертация "Новые тополого-геометрические свойства метрической проекции" удовлетворяет всем требованиям ВАК, а ее автор К.С. Шкляев заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Д.ф.-м.н., профессор РАН П.А. Бородин

22 мая 2023 г.

Подпись П.А. Бородина заверяю