Отзыв официального оппонента
на работу Константина Сергеевича Шкляева
Новые тополого-геометрические свойства метрической проекции
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Работа К. С. Шкляева посвящена геометрической теории приближений в нормированных пространствах. Она состоит из введения и трёх глав. Во введение кратко рассмотрена научная проблематика, затрагиваемая в работе, дан обзор библиографии и кратко перечислены основные результаты. Глава 1 посвящена представлению выпуклой оболочки множества через выпуклые оболочки точек из метрических проекций точек пространства на множество и в частности множествам с k-значной метрической проекцией и их свойствам. Глава 2 посвящена доказательству эквивалентности локальной чебышевости и чебышевости связного компактного множества в конечномерном пространстве. В главе 3 дана оценка количества точек на римановом двумерном многообразии, которые имеет проекцию, состоящую из не менее трёх элементов на каждом "материке" (в обозначениях определения 3.1).

Все разделы диссертации посвящены исследованию свойств метрической проекции точки на разные множества и в разных классах пространств. Этим же они идейно связаны. Исследование свойств метрической проекции — давняя и важная проблематика геометрии, а в дальнейшем (выпуклого) анализа, геометрической теории приближений, теории экстремальных задач и оптимизации.

Условно задачи о метрической проекции можно разделить на 2 типа. Первый — это задачи, где по свойству множества в соответствующем пространстве решается вопрос о свойстве метрической проекции: количестве элементов, непрерывности по точке/множеству, устойчивости по разным параметрам и т.д. Задачи этого типа успешно решены для выпуклых множеств в основных классах топологических пространств, а также для некоторых невыпуклых множеств.

Второй тип задач является в некотором смысле обратным к первому: для (обычно замкнутого) множества с определенными свойствами метрической проекции требуется определить свойства этого замкнутого множества. Оказывается, что эти задачи существенно труднее, чем "прямые". Наиболее известная из них — задача Ефимова-Стечкина-Кли о выпуклости чебышевского множества. Однако имеется большое количество других открытых вопросов, причём в разных классах пространств. Задачи второго типа во многом сформировали предмет геометрической теории приближений как один из важных разделов теории функций и функционального анализа. Собственно таким задачам и посвящена диссертация.

Помимо теоретической составляющей, рассматриваемые в работе задачи имеют и определённую практическую значимость, хотя автор вероятно о ней даже не думал. Если мы получаем в некотором смысле конструктивное описание класса множеств с "хорошими" свойствами метрической проекции, то в приложениях мы можем пытаться использовать эти множества с хорошими свойствами проекции вместо, например, обычных выпуклых множеств. Так был получен в своё время класс (невыпуклых) проксимально гладких множеств.

Все это в совокупности говорит о научной актуальности представленной работы.

Основные результаты первой главы — ряд теорем о представлении выпуклой обо-

лочки компактного или ограниченно компактного множества M через объединение и замыкание выпуклых оболочек $P_M(x)$, когда x пробегает всё пространство. В частности доказано, что если для всех x множество $P_M(x)$ состоит из не более чем k элементов, выпуклую оболочку M из гладкого пространства, например $\mathbb{R}^n$, можно представить как объединение всех симплексов с k вершинами из M. Этот результат является новым интересным способом определения числа Каратеодори для множества M. Отмечу, что основные результаты этой главы "односторонние": если $|P_M(x)| \leq k$, то $\mathrm{conv}_k M = \mathrm{conv} M$.

Вторая глава посвящена доказательству теоремы 2.1: локальная чебышевость и чебышевость связного компактного множества в конечномерном нормированном пространстве эквивалентны. Также формулируется некоторое утверждение про границу множества. Несмотря на интуитивную (и в подобных ситуациях иногда ошибочную) уверенность в справедливости утверждения, по аналогии с теоремой B, его доказательство потребовало от автора заметных усилий. По мнению рецензента, доказательство теоремы 2.1 является достаточно тяжелым и заставляющим автора прибегнуть к существенной математической изощренности. Вероятно самым трудным в доказательстве было понять, какие топологические аргументы использовать и в какой последовательности. Продемонстрированная автором техника подтверждает его высокий математический уровень.

В главе 3 решается вопрос о количестве особых точек на двумерном римановом многообразии. На многообразии M^2 есть $k \geq 3$ связных непересекающихся замкнутых подмножеств E_i. Точка $x \in M^2$ особая, если $|P_{\cup E_i}(x)| \geq 3$, причём метрическая проекция содержит точки из не менее чем трёх множеств E_i. Расстояние измеряется в смысле метрики на многообразии. В некотором смысле эта задача обобщает задачу о точке Ферма-Торричелли. В теореме 3.1 получена оценка на максимальное число особых точек через k и эйлерову характеристику многообразия M^2.

Новизна исследования и полученных результатов, а также предложенных идей доказательств, несомненна. Результаты — завершённые математические утверждения, логически связанные между собой исследованием связи свойств множества и его метрической проекции. Работа написана чётким и понятным языком, обозначения и порядок изложения достаточно хорошо продуманы. Автореферат верно отражает её содержание.

Работа опубликована в 3-х изданиях, индексируемых в основных математических базах. Она докладывалась на ряде конференций и научных семинаров. При моём чтении к математической части и оформлению в целом вопросов также не возникло. Всё это подтверждает достоверность работы.

Существенных опечаток я не нашел, поэтому не упоминаю их. Тем не менее, традиционно сделаю несколько замечаний. Замечание 3 есть скорее пожелание на будущее.

1. Во введении ничего не сказано об исследовании чебышевских множеств с помощью вариационного принципа Экланда и его обобщаний, см., например, обзор Дж. Борвейна https://carmamaths.org/resources/jon/cheb.pdf.

2. Некоторое уточнение можно дать по поводу ссылки на теорему B. Более общий результат для линейных паратопологических пространств содержится в работе B. Кли Convex sets in linear spaces, DOI: 10.1215/S0012-7094-51-01835-2, утв. (5.2). Еще раньше, в начале 20 века, аналогичные результаты рассматривались в конечномерном евклидовом пространстве в работах Tietze и Nakajima

(1) H. Tietze, Uber Konvexheit im kleinen und im groβen und uber gewisse den Punkten einer Menge zugeordnete Dimensionszahlen, Math. Z. 28 (1) (1928) 697–707.

(2) H. Tietze, Bemerkungen uber konvexe und nicht-konvexe Figuren, J. Reine Angew. Math. 160 (1929) 67–69.
(3) S. Nakajima, Uber konvexe Kurven und Flachen, Tohoku Math. J. 29 (1928) 227–230.

3. Результаты по поводу k-выпуклой оболочки conv_k представляют не только теоретический, но и практический интерес, например, в задачах, которые используют "триангуляцию" , т.е. подразбиение на симплексы. Однако, в работе совсем не обсуждается вопрос о структуре (топологической, геометрической и т.п.) множества M, для которого $\mathrm{conv}_k M = \mathrm{conv} M$ или $|P_M(x)| \leq k$. Нет сравнения результатов с результатами из [37] и т.п. Например, хорошо известно, что если компактное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ линейно связно, то $\mathrm{conv}_n M = \mathrm{conv} M$ и т.д. При этом метрическая проекция для такого множества не обязательна n-значна и даже конечна, например в случае единичной евклидовой сферы. Результаты о conv_k связываются с k-значностью метрической проекции, но не с геометрическими (или какими-то еще) свойствами множества M. Таким образом, указанные результаты, как Следствие 1.5, носят достаточный характер. Вопрос о необходимости k-значности проекции для их справедливости для разных классов множеств M не ясен.

В целом, работа является красивым и сильным исследованием. Соискателю удалось существенно продвинуться в понимании свойств метрической проекции в первую очередь в связи с чебышевостью множества. В частности, им предложен новый технический аппарат, который без сомнения найдет применение в дальнейшем.

Работа может найти применение в МГУ, МИ РАН им. В. А. Стеклова, ИММ УрО РАН. Диссертация соответствует критериям «Положения о порядке присуждения учёных степеней». Её автор, Шкляев К.С., безусловно достоин присуждению ему учёной степени кандидата физ.-мат. наук.

Д.ф.-м.н., доцент,
в. н. с. ИПУ РАН _____ М. В. Балашов

Балашов Максим Викторович
Институт им. В. А. Трапезникова проблем управления РАН, 117997, Москва, ул. Профсоюзная 65
ведущий научный сотрудник лаборатории 7
специальность 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика
тел. +7 977 648 39 18
e-mail: balashov73@mail.ru

12.07.2023
Подпись М. В. Балашова заверяю

Балашова М.В
ПОДПИСЬ
ЗАВЕР
ЗАВ. ОБЩИМ
ДЫСЕНКО А.