ОТЗЫВ

официального оппонента Нараленкова Кирилла Михайловича о работе Оганесян Кристины Артаковны «Оценки и неравенства для тригонометрических рядов с монотонными коэфициентами» представленной к защите в качестве диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Работа посвящена изучению классических тригонометрических рядов, а также некоторых классов тригонометрических рядов с нецелыми и полиномиальными гармониками, коэффициенты которых являются монотонными в обобщённом смысле последовательностями.

Различные классы тригонометрических рядов находятся в течение более чем ста лет в центре внимания многих исследований по теории функций, аналитической теории чисел, теории дифференциальных уравнений и другим разделам математики. Таким образом, тематика диссертации связана с весьма актуальным и активно развиваемым направлением исследований.

Автор впервые получила точную оценку сверху меры Лебега множества нулей на отрезке $[0, \pi]$ невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами, а также показала, что в случае достижения указанной оценки почти все множество нулей соответствующей функции должно лежать на отрезке $[2\pi/3, \pi]$. Доказано важное неравенство $nf(x) > f(nx)$, которому удовлетворяет сумма $f(x)$ синус-ряда при любом натуральном $n > 1$ всюду на интервале $(0, 2\pi/n)$, кроме конечного множества точек, в которых $f(x) = f(nx) = 0$. С его помощью автор детально исследовала оценки снизу меры Лебега множества положительности функции $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ в общем случае, а также при выполнении некоторых дополнительных условий на функцию $f(x)$, в том числе получив точную оценку множества положительности функции $f(x)$ на отрезке $[\pi/2, \pi]$. Автор получила необходимые и достаточные для равномерной сходимости нескольких классов синус-рядов с полиномиальными и нецелыми гармониками и коэффициентами монотонного типа. В частности установлено, что для класса синус-рядов с нечётными полиномиальными гармониками и коэффициентами $c_k \searrow 0$ достаточным для равномерной сходимости на $\mathbb{R}$ условием является $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$. Это условие оказывается уже необходимым и достаточным для равномерной сходимости синус-ряда ряда с коэффициентами $c_k \searrow 0$ и гармониками вида k^α, где α есть нечётное натуральное число, на множестве, содержащем дискретную (α, γ)-окрестность нуля при некотором $\gamma \geq 2$. Если $\alpha \in (0, 2)$, то аналогичный критерий справедлив для равномерной сходимости соответствующего синус-ряда на ограниченном множестве. С другой стороны, при чётных натуральных α синус-ряд сходится равномерно на множестве, содержащем точку вида $\pi/2 + 2\pi m$ или $2\pi/3 + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$. Наконец, автор доказала, что при любых натуральных значениях n условие монотонности коэффициентов синус-ряда с гармониками вида k^n может быть ослаблено до условия обобщённой монотонности $RBVS$ с сохранением всех сформулированных выше необходимых и достаточных условий его равномерной сходимости.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Введение содержит весьма обстоятельный и содержательный исторический обзор по

рассматриваемой тематике, а также аннотацию основных результатов диссертации.

В первой главе изучаются множества нулей и множества положительности синус рядов с монотонными коэффициентами. В параграфе 1.1 установлена Теорема 1.1 об точной оценке сверху меры Лебега множества нулей синус-ряда на отрезке $[0, \pi]$ и доказываются вспомогательные утверждения (Леммы 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4), необходимые для её доказательства. Основным результатом параграфа 1.2 является Теорема 1.2, которая обобщает полученное автором в первом параграфе неравенство $2f(x) - f(2x) \geq 0$ (Следствие 1.1) для суммы синус-ряда. Третий параграф первой главы посвящён оценке снизу меры Лебега множества положительности синус-ряда на отрезке $[0, \pi]$ (Теорема 1.3). Для доказательства Теоремы 1.3 автор последовательно получила ряд технических оценок: Замечание 1.1, Лемма 1.7, Следствия 1.5 и 1.7. Завершается параграф доказательством Теоремы 1.3. В заключительном четвертом параграфе первой главы получена точная оценка снизу на меру Лебега множества положительности суммы синус-ряда на отрезке $[\pi/2, \pi]$ (Теорема 1.4 (b)). В Следствиях 1.8 и 1.9 получены в определённом смысле близкие к точным оценки снизу на меру Лебега множества положительности суммы синус-ряда уже на отрезке $[0, \pi]$ при выполнении дополнительных неравенств на первые три коэффициента рассматриваемого ряда.

Во второй главе автор изучает вопросы равномерной сходимости синус-рядов монотонными коэффициентами и гармониками k^α, где $\alpha > 0$, а при нечётном α и более общие ряды с гармониками $f(k)$, где $f(k)$ есть многочлен степени α с рациональными коэффициентами по нечётным степеням k. В отличие от классического случая $\alpha = 1$, исследование этих вопросов при произвольных α потребовало привлечения методов аналитической теории чисел. Первый параграф посвящён получению оценок сумм Вейля в зависимости от параметров рациональных приближений старшего коэффициента многочлена. Основными результатами данного параграфа являются оценки в Следствиях 2.1, 2.2 и 2.3. Эти оценки закладывают основу для доказательства главных результатов второй главы диссертации. Во втором параграфе рассматривается случай натуральных α и доказываются достаточные условия равномерной сходимости синус-ряда с монотонными коэффициентами и чётными (Теорема 2.1 (a)) и нечётными полиномиальными гармониками (Теорема 2.1 (b)). В третьем параграфе изучается случай $\alpha \in (1, 2)$ и приводится доказательство достаточного условия равномерной сходимости (Теорема 2.1 (c)), в котором важную роль играет установленная в Лемме 2.5 вспомогательная оценка. В четвертом параграфе рассматривается наиболее сложный случай $\alpha \in (0, 1)$ пункта (c) Теоремы 2.1. Заключительный пятый параграф посвящён необходимым и достаточным условиям равномерной сходимости синус-ряда (Теорема 2.2). При нечётных α и при $\alpha \in (0, 2)$ основную роль здесь играют специальные свойства множества, на котором изучается равномерная сходимость и для чего автор вводит понятие *дискретной* (α, γ)*-окрестности нуля.*

В заключении автор даёт краткую характеристику всех основных результатов диссертации, а также формулирует некоторые открытые проблемы.

К недостаткам диссертации следует отнести некоторую терминологию и обозначения: для обозначения нестрогих неравенств автор использует как символ бинарного отношения $\geq$ так и символ бинарного отношения $\geqslant$; обозначение $b_n := a_n - a_{n+1}$ для

оператора конечной разности автор вводит дважды на стр. 16 и затем на стр. 19 вместо использования более уместных стандартных обозначений $a_n - a_{n+1} = -\Delta a_n = -\nabla a_{n+1}$, однако не использует его при формулировке Следствий 1.8 и 1.9 на стр. 30; на стр. 27 использовано неформальное обозначение «множество меры$\leq \varepsilon$» для множества интегрирования без детального описания и обозначения рассматриваемого множества. Кроме того, в работе имеются опечатки: стр. 10, 29 в формулировке Теоремы 1.4 (c) непечатно «$[\pi, \pi/2]$» вместо «$[0, \pi/2]$»; на стр. 42 напечатано «Главы 2.1» вместо «параграфа 2.1». Однако указанные недостатки ни в коей мере не снижают ценность диссертации.

Работа свидетельствует об очень хорошем владении автором литературой по исследуемой тематике и методами, применяемыми в этой области. Развивая современные методы исследования, автору удалось существенно усилить некоторые классические результаты.

Результаты отличаются законченностью формулировок, ясностью и полнотой приведённых доказательств.

Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих научных изданиях, а развитые при их получении методы представляют несомненный научный интерес и могут найти применение в различных разделах математики, где используются тригонометрические ряды.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Работа отвечает всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, а её автор Оганесян Кристина Артаковна заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики, эконометрики и информационных технологий
МГИМО МИД России,
119454, Москва, проспект Вернадского, 76

К.М. Нараленков
k.naralenkov@inno.mgimo.ru
+7 (916) 128 18 85

Московский государственный институт международных отношений (Университет) МИД России
Зам. по
В.А. Николаенко
434-92-30