Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.521

Оганесян Кристина Артаковна

Оценки и неравенства для тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор М.И. Дьяченко

Москва 2023

Оглавление

Введение **3**

Глава I. Множества нулей и множества положительности синус-рядов с монотонными коэффициентами **13**

1.1 Точная верхняя оценка на меру множества нулей на $[0, \pi]$ 13

1.2 Одно неравенство для синус-рядов 16

1.3 Нижняя оценка на меру множества положительности на $[0, \pi]$ 18

1.4 Точная нижняя оценка на меру положительности на $[\pi/2, \pi]$ и некоторые следствия 28

Глава II. Равномерная сходимость синус-рядов с полиномиальными и нецелыми гармониками **31**

2.1 Оценки сумм Вейля в зависимости от параметров рациональных приближений старшего коэффициента многочлена 32

2.2 Случай целых степеней 41

2.3 Случай степени из интервала (1,2) 47

2.4 Случай степени из интервала (0,1) 56

2.5 Доказательство Теоремы 2.2 63

Заключение **66**

Список литературы **67**

Введение

Работа посвящена изучению классических тригонометрических рядов, а также тригонометрических рядов с нецелыми и полиномиальными гармониками, коэффициенты которых удовлетворяют некоторым условиям монотонности. Главным образом, исследуются свойства множеств нулей и множеств положительности сумм таких рядов, а также вопросы равномерной сходимости.

В первой главе исследуется вопрос, поставленный в своё время П.Л. Ульяновым: как велико может быть множество нулей невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами? Оказывается, это множество не только может быть несчётным, но даже может иметь положительную меру. В настоящей работе получена точная оценка на меру такого множества, что даёт окончательный ответ в задаче П.Л. Ульянова. Помимо этого изучаются множества положительности синус-рядов с монотонными коэффициентами.

Во второй главе решается задача, тесно связанная с вопросами аналитической теории чисел и дифференциальных уравнений, о том, какие условия являются необходимыми и достаточными для равномерной сходимости синус-рядов с нецелыми и полиномиальными гармониками и коэффициентами монотонного типа.

Актуальность темы. Пусть

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,\ a_1 > 0,\ a_n \searrow 0, \tag{1.1}$$

и

$$M := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}.$$

Будем обозначать для любого измеримого множества $L \in \mathbb{R}$ $E_L := M \cap L$, $\mu_L := \mu(E_L)$, где под $\mu(A)$ здесь и далее подразумевается классическая мера Лебега множества A.

Изучению свойств множества M посвящено много работ по тригонометрическим рядам с монотонными коэффициентами. В частности, в некоторых из них рассматривался вопрос, "как велико" может быть множество $E_{[0,\pi]}$. Так, в 1979 г. П.Л. Ульянов поставил ряд задач, среди которых следующие:

1) Может ли это множество иметь мощность континуума?

2) Может ли это множество иметь положительную меру?

На первый вопрос В.Ф. Гапошкин [1] дал положительный ответ и в своей работе привёл пример ряда вида (1.1), имеющего на $[0,\pi]$ континуум нулей, в котором $a_k = \sum_{s=m}^{\infty} s^{-1{,}001}$ при $10^{3(m-1)} \leq k < 10^{3m}$.

Позже М.И. Дьяченко [2] показал, что ряд вида (1.1) может сходиться к нулю на множестве положительной меры, построив функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a}, & x \in (0, a], \\ 0, & x \in (a, \pi), \end{cases}$$

которая при $a \in (a_0, \pi)$ имеет ряд Фурье вида (1.1), а постоянная $a_0 \in (2\pi/3,\ 2{,}15)$, находится из уравнения $2a_0 - 4\sin a_0 + \sin 2a_0 = 0$. Также в этой работе было показано, что верна следующая оценка для меры нулей $f(x)$ на $[0,\pi]$:

$$\mu_{[0,\pi]} < \pi - 1.4.$$

Затем А.С. Белов [3] и М.И. Дьяченко [4] независимо показали, что имеет место оценка

$$\mu_{[0,\pi]} \leq \frac{\pi}{2},$$

а в [3] А.С. Беловым также был приведён пример функции $f(x)$ вида (1.1), равной нулю на отрезке $[2\pi/3, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\pi x - 3x^2}{\sin \frac{x}{2}}, & x \in (0, \frac{2\pi}{3}], \\ 0, & x \in (\frac{2\pi}{3}, \pi). \end{cases} \tag{0.1}$$

Долгое время вопрос о том, каково максимальное значение $\mu_{[0,\pi]}$, оставался открытым. В первой главе диссертации получен окончательный ответ на этот вопрос, а именно, показано, что значение $\pi/3$ является максимальным, а пример (0.1) — в определённом смысле оптимальным, так как в случае $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3$, почти всё множество нулей соответствующей функции должно лежать на отрезке $[2\pi/3, \pi]$.

Стоит упомянуть, что для косинус-рядов ситуация совершенно иная: М.И. Дьяченко [5] построил для любого $\varepsilon \in (0, \pi)$ пример такого ненулевого косинус-ряда $g_\varepsilon(x)$ с монотонными коэффициентами, что $\{x \in (0,\pi) : g_\varepsilon(x) = 0\} \supset [\varepsilon, \pi]$.

Также в первой главе получены неравенства, связывающие значения функции вида (1.1) в точках x и nx для натуральных n, и эти неравенства, в частности, позволили получить новую оценку на меру множества положительности такой функции на $[0,\pi]$ и его подотрезках.

Во второй главе рассматриваются ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^\alpha x, \quad c_k \searrow 0, \tag{2.1}$$

где $\alpha > 0$, а при нечётном натуральном α более общие ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin f(k)x, \quad c_k \searrow 0, \tag{2.2}$$

где $f(k)$ — многочлен степени α с рациональными коэффициентами по нечётным степеням k, причём в случае натурального α последовательности $\{c_k\}$ рассматриваются также из более широкого класса. Нас интересуют условия, которые были бы необходимыми и достаточными для равномерной сходимости рядов (2.1) и (2.2).

Для случая $\alpha = 1$ такие условия давно получены Т. Чаунди и А. Джоллифом [6].

Теорема А. *Если неотрицательная последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.*

В [7] Дж.Р. Нуркомбом требование монотонности последовательности было ослаблено до требования квазимонотонности, то есть существования такого неотрицательного числа γ, что $c_k k^{-\gamma}$ не возрастает, а в [8] критерий был распространён на несколько более общие последовательности (стоит отметить, что результаты работы [8] были получены С.Б. Стечкиным в 1953-1954 гг., задолго до указанной публикации). Ещё одно обобщение Теоремы А, полученное Л. Ляйндлером, можно найти в [9], где соответствующий критерий был доказан для последовательностей из класса $RBVS$, то есть таких, что выполняются условия

$$\sum_{k=l}^{\infty} |c_k - c_{k+1}| \le V c_l \quad \text{и} \quad c_k \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty \tag{0.2}$$

для всех l, где V зависит только от $\{c_k\}$.

Для более широкого класса последовательностей, содержащего все упомянутые выше классы, аналогичный результат получил С.Ю. Тихонов [10].

Теорема В. *Если неотрицательная последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу GM, то есть, если существует такая константа A, зависящая лишь от $\{c_k\}$, что*

$$\sum_{k=l}^{2l-1} |c_k - c_{k+1}| \le A c_l$$

для всех l, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.

Также критерии равномерной сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ для последовательностей, удовлетворяющих различным условиям обобщённой монотонности, были получены в [11] и [12].

Случаи $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 2$ для рядов (2.1) были рассмотрены в [13], где было показано, что условие $c_k k \to 0$ является необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда (2.1) на отрезке $[0, \pi]$ при $\alpha = 1/2$, а при $\alpha = 2$ необходимым и достаточным является условие $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

В диссертации показано, что для ряда (2.1) с монотонными коэффициентами и $\alpha \in (0, 2)$ для равномерной сходимости на любом ограниченном множестве достаточно, чтобы $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$, в то время как для нечётных натуральных α это же условие является достаточным для равномерной сходимости на всей числовой прямой, причём для более общего ряда (2.2) и для более общего класса коэффициентов, чем монотонные. Для чётных же α, даже для сходимости в конкретных точках необходима сходимость ряда из коэффициентов. В качестве следствия из этих результатов также получен критерий равномерной сходимости ряда (2.1) при всех натуральных α, а также при $\alpha \in (0, 2)$.

В доказательстве упомянутых результатов для случая ряда (2.2) мы имеем дело с вопросами распределения дробных частей значений многочлена (см., например, [14],[15]) и с оценками сумм Вейля (см. также [16],[17] и [18]), играющими важную роль в теории чисел, в частности, в решении проблемы Варинга о представлении натурального числа в виде суммы одинаковых степеней натуральных чисел и для оценки сумм, возникающих в теории дзета-функции Римана. Хорошо известны следующие теоремы, полученные соответственно Г. Вейлем и И.М. Виноградовым и дающие оценки сумм Вейля в точках специального вида.

Теорема C. *([19, T.14, §11]) Пусть* $n \geq 2$, $h(x) = \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$ *и*

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Если $0 < \varepsilon_1 < 1$ *и* $P^{\varepsilon_1} \leq q \leq P^{n-\varepsilon_1}$, *то при любом* $0 < \varepsilon < 1$ *выполняется оценка*

$$\Big| \sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i h(k)} \Big| \leq C(n, \varepsilon, \varepsilon_1) P^{1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{2^{n-1}}}.$$

Теорема D. *([19, T.17, §14]) Пусть* $n > 2$, $h(x) = \alpha_1 x + ... + \alpha_n x^n$ *и*

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \leq 1.$$

Если $P \leq q \leq P^{n-1}$, *то справедлива оценка*

$$\Big| \sum_{k=1}^{P} e^{2\pi i h(k)} \Big| \leq e^{3n} P^{1 - \frac{1}{9n^2 \ln n}}.$$

Однако в этих теоремах длина суммы P сильно связана со знаменателями рациональных приближений к старшему коэффициенту многочлена h.

Мы получаем оценки сумм Вейля в зависимости от того, насколько хорошо старший коэффициент многочлена приближается рациональными дробями со знаменателями, меньшими некоторой малой степени числа P. Наиболее хорошие оценки получатся в точках, которые таким образом приближаются достаточно плохо. Такие оценки представляют интерес потому, что когда старший коэффициент "близок" к рациональному числу, то суммы Вейля ведут себя в некотором смысле похоже на рациональные суммы, которые изучены достаточно хорошо и с которыми легче работать.

Из доказательства упомянутых результатов второй главы диссертации также следует, что при $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$ имеет место равномерная сходимость ряда $\sum_{m=1}^{\infty}(c_m - c_{m+1})\left|\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{m} e^{if(k)x}\right|$. Это в частности означает, при $c_m := m^{-1}\ln^{-1}(m+1)$, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2\ln(m+1)}\left|\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{m} e^{if(k)x}\right|$ сходится равномерно, а значит, для любого $a>0$ число таких m, что $|\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{m} e^{if(k)x}| \geq am$, равномерно мало.

Стоит отметить, что К.И. Осколковым [20] была приведена оценка симметричных частичных сумм ряда $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{2\pi i h(k)}}{k}$ для многочлена $h(x)$ с действительными коэффициентами. Этот результат использовался для оценки снизу констант Лебега и доказательства следующей теоремы.

Теорема E. *Пусть $r \geq 2$, $P_r(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + ... + \alpha_r y^r$ — многочлен с целыми коэффициентами, принимающий различные целые значения при $y \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда $\{P_r(n)\}$ не является спектром равномерной сходимости.*

Здесь под спектром равномерной сходимости подразумевается такая последовательность $\mathfrak{K} = \{k_n\}$ попарно различных целых чисел, что для любой непрерывной функции, имеющей нулевые коэффициенты Фурье при $k \notin \mathfrak{K}$, частичные суммы ее ряда Фурье сходятся равномерно.

В [21] Г.И. Архиповым и К.И. Осколковым была доказана равномерная ограниченность симметричных частичных сумм $\sum_{1\leq|k|\leq m}\frac{e^{2\pi i h(k)}}{k}$ по $m \in \mathbb{N}$ и $\deg h \leq r$ при фиксированном r. В частности, из этого результата они получили следующую теорему.

Теорема F. *Пусть $P^+(x)$, $P^-(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, причём $P^+(-x) \equiv P^+(x)$, $P^-(-x) \equiv -P^-(x)$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i P^+(n)}\sin 2\pi P^-(n)}{n}$$

сходится и его частичные суммы ограничены сверху по модулю величиной, зависящей лишь от степеней многочленов P^+ и P^-, но не от их коэффициентов.

Можно заметить, что из Теоремы F с помощью преобразования Абеля вытекает справедливость полученного в настоящей работе достаточного условия равномерной сходимости рядов (2.2) в случае $c_k k \searrow 0$.

Цель работы. Исследование тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, в частности, множеств их нулей и множеств их положительности, а также вопросов равномерной сходимости для более общих рядов с полиномиальными и нецелыми гармониками.

Положения, выносимые на защиту. Научная новизна. В диссертация получены следующие новые результаты.

1) Получена точная верхняя оценка на меру множества нулей невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0, \pi]$ (Теорема 1.1).

2) Для невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами получено неравенство $nf(x) \geq f(nx)$, справедливое всюду на интервале $(0, 2\pi/n)$ при всех натуральных $n > 1$ (Теорема 1.2).

3) Получены новые нижние оценки на меру множества положительности невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0, \pi]$ (Теорема 1.3), а также точная нижняя оценка на меру множества положительности такого ряда на отрезке $[\pi/2, \pi]$ (Теорема 1.4(b)).

4) Получены достаточные условия для равномерной сходимости синус-рядов с полиномиальными гармониками и коэффициентами монотонного типа (Теорема 2.1(b)), а также критерий равномерной сходимости синус-рядов с гармониками вида k^n, $n \in \mathbb{N}$, и монотонными коэффициентами (Теорема 2.2(a)-(b)).

5) Получен критерий равномерной сходимости синус-рядов с нецелыми гармониками вида k^α, $\alpha \in (0, 2)$, и монотонными коэффициентами (Теорема 2.2(c)).

Методы исследования. В работе используются различные методы математического анализа, теории функций, теории меры, аналитической теории чисел.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории тригонометрических рядов, в теории приближений, в аналитической теории чисел, в теории дифференциальных уравнений.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством Б.С. Кашина, С.В. Конягина, Б.И. Голубова и М.И. Дьяченко (Москва, 2017-2020 гг.), на семинаре по

теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством В.А. Скворцова, Т.П. Лукашенко, М.И. Дьяченко, М.К. Потапова (Москва, 2018 г.), на семинаре «Геометрическая теория приближений» под руководством П.А. Бородина (Москва, 2018 г.), на Конференции, посвящённой 80-летию академика В.А. Садовничего (Москва, 2019 г.), на семинаре «Современные проблемы теории чисел» под руководством С.В. Конягина, И.Д. Шкредова (2020 г.), на Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2018, 2020 гг.), на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2021 г.), на финале Конкурса Августа Мёбиуса (Москва, 2020, 2021 гг.), на Конференции международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021 г.), на семинаре «Barcelona Analysis Seminar» (Барселона, 2021 г.), на семинаре «Harmonic analysis seminar» (Montreal, 2022 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырёх работах автора в журналах из баз данных Web of Science и Scopus, а также представлены в тезисах трёх международных конференций. Список этих работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы из 29 наименований. Общий объем диссертации — 69 страниц. В каждой главе принята сквозная нумерация теорем, следствий, лемм, замечаний и формул. Ранее известные результаты, приведённые в тексте диссертации, нумеруются латинскими буквами в порядке упоминания. Нумерация теорем, следствий, замечаний и формул, появляющихся как во введении, так и в одной из двух глав диссертации, во избежание недоразумений соответствует нумерации в основном тексте.

Краткое содержание диссертации. В первой главе изучаются множества нулей и множества положительности синус-рядов с монотонными коэффициентами. Главным результатом этой главы является доказанная в первом параграфе

Теорема 1.1. *Для функции f вида (1.1) выполняется неравенство*

$$\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) = 0\} \leq \frac{\pi}{3}.$$

При этом если $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) = 0\} = \pi/3 - 2\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \geqslant 0$, то $\mu\{x \in [2\pi/3,\pi] : f(x) = 0\} \geqslant \pi/3 - 7\varepsilon$, (то есть $\mu\{x \in [2\pi/3,\pi] : f(x) = 0\} \to \pi/3$ при $\varepsilon \to 0$).

Ключевую роль в доказательстве Теоремы 1.1 сыграло

Следствие 1.1. *Для функции f вида (1.1) при любом $x \in (0,\pi)$ выполняется*

$$2f(x) - f(2x) \geqslant 0,$$

причём равенство имеет место не более чем в конечном множестве точек.

С помощью этого утверждения удаётся получать полезные неравенства, связывающие меры множеств положительности и нулей функции (1.1) на различных отрезках. Такой подход кажется перспективным, тем более, что на вопрос о максимальном значении меры неположительности функции (1.1) на отрезке $[0, \pi]$ до сих пор нет ответа. Это мотивирует постановку следующей задачи: а нельзя ли обобщить Следствие 1.1 на какие-либо числа, отличные от двойки? Во втором параграфе показано, что обобщить можно, а точнее, имеет место

Теорема 1.2. *Для функции f вида (1.1) при любом натуральном $n > 1$ на интервале $(0, 2\pi/n)$ выполняется неравенство*

$$nf(x) > f(nx),$$

всюду, кроме конечного числа точек, в которых $f(x) = f(nx) = 0$.

В свете Теоремы 1.1 естественным образом возникает вопрос: верно ли, что мера положительности функции (1.1) на $[0, \pi]$ всегда не меньше $2\pi/3$? Из приведённых выше результатов следует, что $\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) > 0\} \geq \pi/2$. В третьем параграфе показано, что имеет место

Теорема 1.3. *Для функции f вида (1.1) верно следующее неравенство*

$$\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) > 0\} \geq \frac{\pi}{2} + 0.24.$$

В четвёртом параграфе дана точная оценка снизу на меру положительности функции (1.1) на отрезке $[\pi/2, \pi]$, а также получены неравенства, связывающие меры положительности на различных отрезках.

Теорема 1.4. *Для функции f вида (1.1) имеем*

$$(a) \quad \mu\{x \in [0, \pi/2] : f(x) > 0\} + 3\mu\{x \in [\pi/2, \pi] : f(x) > 0\} \geq \pi,$$
$$(b) \quad \mu\{x \in [\pi/2, \pi] : f(x) > 0\} \geq \frac{\pi}{6},$$
$$(c) \quad \mu\{x \in [0, \pi] : f(x) > 0\} \geq 2\pi/3, \quad \textit{если} \quad \mu\{x \in [\pi, \pi/2] : f(x) > 0\} = \pi/2,$$

причём оценка в пункте (b) является точной.

В качестве следствия, получены важные ограничения, которые нужно наложить на коэффициенты ряда, иначе заведомо будет иметь место неулучшаемая оценка $\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) > 0\} \geq 2\pi/3$.

Следствие 1.8. *Если f имеет вид (1.1), где $a_1 - a_2 \geq 3 - 2\sqrt{2}$, то $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geq 2\pi/3$.*

Следствие 1.9. *Если f имеет вид (1.1), где $a_2 - a_3 \geq 3 - 2\sqrt{2}$, то $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geq 2\pi/3$.*

Во второй главе изучаются вопросы равномерной сходимости рядов вида (2.1) и (2.2).

Теорема 2.1. *Пусть неотрицательная последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает. Тогда*

(a) Если α — чётное натуральное число, то ряд (2.1) сходится в точке $\pi/2$ или в точке $2\pi/3$ только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

(b) Если α — нечётное натуральное число, то для равномерной сходимости ряда (2.2) на $\mathbb{R}$ достаточно, чтобы $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.

(c) Если $\alpha \in (0,2)$, то для равномерной сходимости ряда (2.1) на любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}$ достаточно, чтобы $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.

Для $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ назовём *дискретной (α,γ)-окрестностью нуля* такую последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, что $|x_j| = \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1}(N+j)^{\alpha}}$ при всех $j \in \mathbb{Z}^+$ и некотором $N \in \mathbb{N}$.

Имеет место следующий критерий равномерной сходимости, вытекающий из Теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть неотрицательная последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает. Тогда*

(a) Если α — чётное натуральное число, то ряд (2.1) сходится равномерно на множестве, содержащем точку вида $\pi/2 + 2\pi m$ или $2\pi/3 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

(b) Если α — нечётное натуральное число, то ряд (2.1) сходится равномерно на множестве, содержащем при некотором $\gamma \geq 2$ дискретную (α,γ)-окрестность нуля, тогда и только тогда, когда $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.

(c) Если $\alpha \in (0,2)$, то ряд (2.1) сходится равномерно на ограниченном множестве, содержащем при некотором $\gamma \geq 2$ дискретную (α,γ)-окрестность нуля, тогда и только тогда, когда $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.

Замечание 2.6. *Пункты (a) и (b) Теорем 2.1 и 2.2 остаются справедливыми, если условие монотонности коэффициентов $\{c_k\}$ ослабить до принадлежности классу $RBVS$ (см. (0.2)).*

Замечание 2.7. *В частности, в пункте (b) (в пункте (c)) условие $c_k k \to 0$ является необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда (2.1) на любом (ограниченном) множестве, содержащем проколотую окрестность нуля.*

Благодарности. Автор выражает огромную благодарность научному руководителю М.И. Дьяченко за чуткое руководство, постановку задач и обсуждение результатов, постоянное внимание и поддержку. Также автор благодарен С.Ю. Тихонову за многочисленные обсуждения и ценные замечания.

Глава I. Множества нулей и множества положительности синус-рядов с монотонными коэффициентами

1.1 Точная верхняя оценка на меру множества нулей на $[0, \pi]$

На протяжении всей главы мы будем использовать следующие обозначения:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad a_1 > 0,\ a_n \searrow 0, \qquad M := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}. \tag{1.1}$$

Также для любого измеримого множества $L \in \mathbb{R}$ положим $E_L := M \cap L,\ \mu_L := \mu(E_L)$, где под $\mu(A)$ здесь и далее подразумевается классическая мера Лебега множества A.

Главным результатом первой главы является

Теорема 1.1. *Для функции f вида (1.1) выполняется неравенство*

$$\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) = 0\} \leq \frac{\pi}{3}.$$

При этом если $\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) = 0\} = \pi/3 - 2\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \geqslant 0$, то $\mu\{x \in [2\pi/3, \pi] : f(x) = 0\} \geqslant \pi/3 - 7\varepsilon$, (то есть $\mu\{x \in [2\pi/3, \pi] : f(x) = 0\} \to \pi/3$ при $\varepsilon \to 0$).

Для доказательства Теоремы 1.1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1.1. *Для любого $x \in (0, \pi)$ выполняется*

$$2\tilde{D}_n(x) - \tilde{D}_n(2x) \geq 0,$$

где $\tilde{D}_n(y) := \sum_{k=1}^{n} \sin ky$ - сопряжённое ядро Дирихле, причём равенство имеет место не более чем в конечном множестве точек.

Доказательство. Используя выражение для сопряжённого ядра Дирихле

$$\tilde{D}_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \sin ky = \frac{\cos \frac{y}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})y}{2 \sin \frac{y}{2}},$$

получаем

$$\begin{aligned} 2\tilde{D}_n(x) - \tilde{D}_n(2x) &= 2\frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\cos x - \cos(n + \frac{1}{2})2x}{2 \sin x} \\ &= \frac{2 \cos \frac{x}{2}(\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x)}{\sin x} - \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 - 2 \cos^2(n + \frac{1}{2})x + 1}{2 \sin x} \\ &= \frac{(\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x)^2}{\sin x} \geq 0, \end{aligned}$$

так как $\sin x > 0$ при $x \in (0, \pi)$. Причём равенство может иметь место лишь в точках, где для некоторых целых k, n выполняется $x/2 = \pm(n + 1/2)x + 2\pi k$, а таких точек конечное число. □

Следствие 1.1. *Для функции f вида (1.1) при любом $x \in (0, \pi)$ выполняется*

$$2f(x) - f(2x) \geqslant 0,$$

причём равенство имеет место не более чем в конечном множестве точек.

Доказательство. Применяя преобразование Абеля к сумме

$$2f(x) - f(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2\sin nx - \sin 2nx),$$

получаем

$$2f(x) - f(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(2\tilde{D}_n(x) - \tilde{D}_n(2x)\right) \geq 0,$$

так как $b_n = a_n - a_{n+1} \geq 0$ и $2\tilde{D}_n(x) - \tilde{D}_n(2x) \geq 0$ по Лемме 1.1. Причём последнее неравенство может обращаться в равенство не более чем в конечном числе точек, для остальных же точек верно $2\tilde{D}_n(x) - \tilde{D}_n(2x) > 0$ и, поскольку существует n, для которого $b_n > 0$, (так как $a_1 > 0,\ a_n \searrow 0$), то в этих точках $2f(x) - f(2x) > 0$. □

Лемма 1.2. *Для любого $x \in (0, \pi)$ выполняется*

$$2\tilde{D}_n(\pi - x) + \tilde{D}_n(2x) \geq 0,$$

причём равенство имеет место не более чем в конечном множестве точек.

Доказательство. Делая замену $y = \pi - x$ и учитывая, что $\tilde{D}_n(2\pi - 2y) = -\tilde{D}_n(2y)$, приходим к неравенству из Леммы 1.1. □

Следствие 1.2. *Для любого $x \in (0, \pi)$ выполняется*

$$2f(\pi - x) + f(2x) \geq 0,$$

причём равенство имеет место не более чем в конечном множестве точек.

Следствие 1.3. *Для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $x \in (0, \pi/2^k)$ выполняется цепочка неравенств*

$$f(x) \geq \frac{f(2x)}{2} \geq \ldots \geq \frac{f(2^{k+1}x)}{2^{k+1}} \geq -\frac{f(\pi - 2^k x)}{2^k} \geq -\frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2^{k-1}x\right)}{2^{k-1}} \geq \ldots \geq -f\left(\frac{\pi}{2^k} - x\right),$$

причём каждое из этих неравенств может обращаться в равенство не более чем в конечном множестве точек.

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из Следствий 1.1 и 1.2. □

Лемма 1.3. *Для любого измеримого множества $L \subset [0,\pi]$ верно неравенство*

$$\mu_L + \mu_{\pi-L} + \frac{\mu_{2L}}{2} \le \mu(L),$$

где $\pi - L := \{x \in [0,\pi] :\ \pi - x \in L\},\ 2L := \{x \in [0,2\pi] :\ x/2 \in L\}$.

Доказательство. Согласно Следствию 1.3 для почти всех $x \in [0,\pi]$ выполняется $f(x) > f(2x)/2 > -f(\pi - x)$. Тогда для любого измеримого $L \subset [0,\pi]$ имеем $\mu(\frac{1}{2}E_{2L} \cap E_L) = 0,\ \mu((\pi - E_{\pi-L}) \cap E_L) = 0,\ \mu((\pi - E_{\pi-L}) \cap \frac{1}{2}E_{2L}) = 0$. Отсюда

$$\mu_L + \mu_{\pi-L} + \frac{\mu_{2L}}{2} = \mu(E_L) + \mu(\pi - E_{\pi-L}) + \mu\Big(\frac{1}{2}E_{2L}\Big) = \mu\Big(E_L \cup (\pi - E_{\pi-L}) \cup \frac{1}{2}E_{2L}\Big) \le \mu(L),$$

так как множества $E_L, \pi - E_{\pi-L}, \frac{1}{2}E_{2L}$ содержатся в L. □

Лемма 1.4. *Для любого измеримого множества $L \subset [0,\pi/2]$ верно неравенство*

$$\mu_L + \frac{\mu_{2L}}{2} + \frac{\mu_{4L}}{4} + \frac{\mu_{\pi-2L}}{2} \le \mu(L).$$

Доказательство. Согласно Следствию 1.3 для почти всех $x \in [0,\pi/2]$ выполняется $f(x) > f(2x)/2 > f(4x)/4 > -f(\pi - 2x)/2$. Таким образом, все попарные пересечения множеств $E_L,\ \frac{1}{2}E_{2L},\ \frac{1}{4}E_{4L},\ \frac{1}{2}(\pi - E_{\pi-2L})$ имеют нулевую меру. Поэтому

$$\begin{aligned}\mu_L + \frac{\mu_{2L}}{2} + \frac{\mu_{4L}}{4} + \frac{\mu_{\pi-2L}}{2} &= \mu(E_L) + \mu\Big(\frac{1}{2}E_{2L}\Big) + \mu\Big(\frac{1}{4}E_{4L}\Big) + \mu\Big(\frac{1}{2}(\pi - E_{\pi-2L})\Big)\\ &= \mu\Big(E_L \cup \frac{1}{2}E_{2L} \cup \frac{1}{4}E_{4L} \cup \frac{1}{2}(\pi - E_{\pi-2L})\Big) \le \mu(L),\end{aligned}$$

так как множества $E_L,\ \frac{1}{2}E_{2L},\ \frac{1}{4}E_{4L},\ \frac{1}{2}(\pi - E_{\pi-2L})$ содержатся в L. □

Доказательство Теоремы 1.1. Полагая $L = [0,\pi/2]$, из Леммы 1.3 получаем

$$\mu_{[0,\pi/2]} + \mu_{[\pi/2,\pi]} + \frac{\mu_{[0,\pi]}}{2} \le \mu\Big(\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big]\Big) = \frac{\pi}{2},$$

откуда $3\mu_{[0,\pi]}/2 \le \pi/2$, то есть $\mu_{[0,\pi]} \le \pi/3$.

Далее обозначим $\mu_0 := \mu_{[0,\pi/3]},\ \mu_1 := \mu_{[\pi/3,\pi/2]},\ \mu_2 := \mu_{[\pi/2,2\pi/3]},\ \mu_3 := \mu_{[2\pi/3,\pi]}$. Из Леммы 1.3 для $L = [\pi/3,\pi/2]$ имеем

$$\mu_1 + \mu_2 + \frac{\mu_3}{2} \le \frac{\pi}{6}. \tag{1.2}$$

Предполагая, что $\mu_{[0,\pi]} = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \pi/3 - 2\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon \ge 0$, из (1.2) получим

$$\mu_0 + \frac{\mu_3}{2} = \frac{\pi}{3} - 2\varepsilon - \mu_1 - \mu_2 - \frac{\mu_3}{2} \ge \frac{\pi}{3} - 2\varepsilon - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 2\varepsilon. \tag{1.3}$$

Заметим, что так как $f(2\pi - x) = -f(x)$, то $\mu_L = \mu_{2\pi - L}$ для любого измеримого L. Значит, $\mu_{[\pi,4\pi/3]} = \mu_{[2\pi/3,\pi]} = \mu_3$. А тогда из Леммы 1.4 для $L = [0, \pi/3]$ имеем

$$\mu_0 + \frac{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3}{4} + \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{2} \le \frac{\pi}{3}.$$

Учитывая, что $\mu_{[0,\pi]} = \pi/3 - 2\varepsilon$, из последнего неравенства получаем

$$\Big(\frac{\pi}{3} - 2\varepsilon\Big)\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Big) + \frac{\mu_0}{2} - \frac{\mu_3}{4} \le \frac{\pi}{3},$$

откуда

$$\frac{\mu_0}{2} - \frac{\mu_3}{4} \le \frac{5}{2}\varepsilon - \frac{\pi}{12}. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) окончательно получаем

$$\frac{\mu_3}{4} \ge \frac{\mu_0}{2} + \frac{\pi}{12} - \frac{5}{2}\varepsilon \ge \frac{\frac{\pi}{6} - 2\varepsilon - \frac{\mu_3}{2}}{2} + \frac{\pi}{12} - \frac{5}{2}\varepsilon,$$

откуда $\mu_3/2 \ge \pi/6 - 7\varepsilon/2$, то есть $\mu_3 \ge \pi/3 - 7\varepsilon$, (и $\mu_3 \to \pi/3$ при $\varepsilon \to 0$), что и требовалось. □

1.2 Одно неравенство для синус-рядов

Обозначим

$$g(x) := 2\sin\frac{x}{2} f(x) = \sum b_n \Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big),$$

где $b_n := a_n - a_{n+1} \ge 0$.

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Для функции f вида (1.1) при любом натуральном $n > 1$ на интервале $(0, 2\pi/n)$ выполняется неравенство*

$$nf(x) > f(nx),$$

всюду, кроме конечного числа точек, в которых $f(x) = f(nx) = 0$.

Для доказательства Теоремы 1.2 нам понадобится следующая

Лемма 1.5. *Пусть числа x, y, z таковы, что $\cos x > \cos y > \cos z$ и $y \in (0, \pi/n)$ для некоторого натурального $n > 1$. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{\cos ny - \cos nx}{\cos y - \cos x} > \frac{n\sin ny}{\sin y} > \frac{\cos ny - \cos nz}{\cos y - \cos z}.$$

Доказательство. Так как $\cos nt = T_n(\cos t)$, где T_n - многочлен Чебышёва первого рода, и так как

$$T_n'(\cos y) = (\cos(n \arccos t))'_{t=\cos y} = \frac{n \sin(n \arccos \cos y)}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{n \sin ny}{\sin y},$$

то данное утверждение равносильно следующему

$$\frac{T_n(\alpha) - T_n(\beta)}{\alpha - \beta} > T_n'(\beta) > \frac{T_n(\beta) - T_n(\gamma)}{\beta - \gamma},$$

где $\alpha = \cos x > \beta = \cos y > \gamma = \cos z$. Так как $\beta > \cos(\pi/n)$ и $\alpha > \beta$, то $T_n(\alpha) - T_n(\beta) > 0$. Поэтому если $T_n(\beta) - T_n(\gamma) \leq 0$, то правое неравенство выполняется. Далее считаем, что $T_n(\beta) - T_n(\gamma) > 0$. Заметим, что

$$\frac{T_n(\beta) - T_n(\gamma')}{\beta - \gamma'} \geq \frac{T_n(\beta) - T_n(\gamma)}{\beta - \gamma},$$

где γ' определяется из условия

$$\gamma' := \max\{\tilde{\gamma} \in [-1, \beta) : T_n(\tilde{\gamma}) = T_n(\gamma)\}.$$

При этом, так как $T_n(t)$ принимает на отрезке $[\cos(2\pi/n), \cos(\pi/n)]$ все значения от -1 до 1, то $\gamma' \geq \cos(2\pi/n)$. Далее, так как $T_n(t)$ убывает на $[\cos(2\pi/n), \cos(\pi/n)]$, то если $\gamma' \leq \cos(\pi/n)$, имеем

$$T_n(\beta) - T_n(\cos\frac{\pi}{n}) \geq T_n(\beta) - T_n(\gamma'), \quad \beta - \gamma' \geq \beta - \cos\frac{\pi}{n},$$

а тогда

$$\frac{T_n(\beta) - T_n(\cos\frac{\pi}{n})}{\beta - \cos\frac{\pi}{n}} \geq \frac{T_n(\beta) - T_n(\gamma')}{\beta - \gamma'}.$$

Итак, достаточно доказать утверждение для $\gamma \in [\cos(\pi/n), \beta)$.

Заметим, что $T_2''(t) = 4 > 0$, а при $n \geq 3$ многочлен $T_n(t)$ — многочлен степени n, имеющий $n \geq 3$ различных корней. Тогда между любыми двумя последовательными корнями есть корень $T_n'(t)$, а значит, $T_n'(t)$, будучи многочленом степени $n-1$, имеет $n-1 \geq 2$ различный корень, и между любыми двумя последовательными корнями лежит корень $T_n''(t)$, то есть на интервале между наименьшим и наибольшим корнями $T_n'(t)$ многочлен $T_n''(t)$ степени $n-2$ имеет $n-2 \geq 1$ корня. Значит, наибольший корень $T_n''(t)$ меньше наибольшего корня $T_n'(t)$, то есть меньше $\cos(\pi/n)$. А так как старший коэффициент $T_n''(t)$ положителен, то $T_n''(t) > 0$ на $[\cos(\pi/n), 1]$, следовательно, $T_n(t)$ строго выпукла на этом отрезке, а значит, $T_n'(t)$ на нем строго возрастает. А тогда при $1 \geq \alpha > \beta > \gamma \geq \cos(\pi/n)$ выполнено

$$\frac{T_n(\alpha) - T_n(\beta)}{\alpha - \beta} > T_n'(\beta) > \frac{T_n(\beta) - T_n(\gamma)}{\beta - \gamma}.$$

□

Доказательство Теоремы 1.2. . Пусть

$$g(t) = \sum_m b_m \Big(\cos\frac{t}{2} - \cos(2m+1)\frac{t}{2} \Big) =: \sum_m b_m g_m(t),$$
$$g(nt) = \sum_m b_m \Big(\cos n\frac{t}{2} - \cos n(2m+1)\frac{t}{2} \Big) =: \sum_m b_m g_m^n(t).$$

Зафиксируем точку $t \in (0, 2\pi/n)$. Если есть хотя бы одно m такое, что $b_m > 0$ и $g_m(t) \neq 0$, то с учетом того, что $t/2 \in (0, \pi/n)$, имеем по Лемме 1.5

$$g(nt) = \sum_m b_m g_m^n(t) = \sum_{m: g_m(t)>0} b_m g_m^n(t) + \sum_{m: g_m(t)<0} b_m g_m^n(t) <$$
$$< \sum_{m: g_m(t)>0} b_m \frac{n \sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} g_m(t) + \sum_{m: g_m(t)<0} b_m \frac{n \sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} g_m(t) = \frac{n \sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} g(t).$$

Возьмем m такое, что $b_m > 0$. Заметим, что $g_m(t)$ может обращаться в нуль на $(0, 2\pi/n)$ лишь в конечном числе точек. Действительно, если $g_m(t) = 0$, то $\pm x/2 = (m + 1/2)x - 2\pi l$ для некоторого целого l, что может выполняться лишь в конечном числе точек. Таким образом, точек, где для любого m, для которого $b_m > 0$, выполняется $g_m(t) = 0$, конечное число, и во всех этих точках $g_m^n(x) = 0$ при всех таких m. То есть точек, где не выполняется

$$g(nt) < \frac{n \sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} g(t),$$

конечное число на $(0, 2\pi/n)$, и во всех этих точках $g(t) = g(nt) = 0$.

Соответственно, на интервале $(0, 2\pi/n)$ выполняется и $nf(x) > f(nx)$, всюду, кроме конечного числа точек, в которых $f(x) = f(nx) = 0$. □

Следствие 1.4. *Для любых натуральных $n > 1$ и m на интервале $(0, 2\pi/n)$ выполняется*

$$n\tilde{D}_m(x) > \tilde{D}_m(nx),$$

где $\tilde{D}_n(y) = \sum_{k=1}^n \sin ky$ - сопряжённое ядро Дирихле, всюду, кроме конечного числа точек, в которых $\tilde{D}_m(x) = \tilde{D}_m(nx) = 0$.

1.3 Нижняя оценка на меру множества положительности на $[0, \pi]$

Теорема 1.3. *Для функции f вида (1.1) верно следующее неравенство*

$$\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) > 0\} \geq \frac{\pi}{2} + 0.24.$$

Прежде чем доказывать теорему сделаем несколько предварительных замечаний.

Обозначим

$$P := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$$

и пусть для любого измеримого множества $L \subset \mathbb{R}$, $P_L := P \cap L$, $\nu_L := \mu(P_L)$, а также

$$\nu := \nu_{[0,\pi]},\ \nu_1 := \nu_{[0,\pi/4]},\ \nu_2 := \nu_{[\pi/4,\pi/3]},\ \nu_3 := \nu_{[\pi/3,\pi/2]},\ \nu_4 := \nu_{[\pi/2,2\pi/3]},\ \nu_5 := \nu_{[2\pi/3,\pi]}.$$

Без ограничения общности мы можем считать, что $a_1 = 1$. Пусть

$$b_n := a_n - a_{n+1}$$

при всех $n \geq 1$. Тогда мы также можем полагать $b_1 = 0$, поскольку $f(x) - b_1 \sin x$ по-прежнему представляет собой синус-ряд с монотонными коэффициентами и $f(x) - b_1 \sin x \leq f(x)$.

Заметим, что функция $g(x) := 2 \sin \frac{x}{2} f(x)$ на $[0, 2\pi]$ имеет тот же знак, что и функция $f(x)$. Имеем

$$g(x) = \sum_n b_n \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \cos \frac{x}{2} - \sum_n b_n \cos(2n+1)\frac{x}{2}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\Big(\cos \frac{x}{2} - \cos(2n-1)\frac{x}{2}\Big) + \Big(\cos \frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) &= 2\cos \frac{x}{2} - 2\cos n\frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 2\cos \frac{x}{2}(1 - \cos n\frac{x}{2}) \geq 0,\end{aligned}$$

мы можем считать, что если для некоторого n выполнено $b_n \neq 0$, то

$$b_{n-1} = 0 \quad \text{и} \quad b_{n+1} = 0. \tag{1.5}$$

Рассмотрим функцию $g(x)g(\pi - x)$. Так как при всех $x \in [0, \pi]$

$$f(x) + f(\pi - x) > 0,$$

то или $f(x) > 0$, или $f(\pi - x) > 0$. Отсюда следует, что если $g(x)g(\pi - x) > 0$, то имеют место оба неравенства $g(x) > 0$ и $g(\pi - x) > 0$, то есть

$$\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) > 0\} = \frac{\pi}{2} + \mu\{x \in [0, \pi/2] : g(x)g(\pi - x) > 0\}.$$

Предложение 1.1. *При условии* (1.5) *имеем*

$$\int_0^{\pi/2} g(x)g(\pi - x) \cdot 2 \sin x \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Доказательство. С помощью элементарных вычислений получаем

$$\begin{aligned}
g(x)g(\pi-x) &= \Big(\cos\frac{x}{2} - \sum_n b_n \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big)\Big(\sin\frac{x}{2} - \sum_n b_n(-1)^n \sin(2n+1)\frac{x}{2}\Big)\\
&= \frac{\sin x}{2} - \sum_n b_n \sin\frac{x}{2}\cos(2n+1)\frac{x}{2} - \sum_n b_n(-1)^n \cos\frac{x}{2}\sin(2n+1)\frac{x}{2}\\
&+ \sum_n\sum_m (-1)^m b_n b_m \cos(2n+1)\frac{x}{2}\sin(2m+1)\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2}\sum_n b_n \sin(n+1)x\\
&+ \frac{1}{2}\sum_n b_n \sin nx - \frac{1}{2}\sum_n b_n(-1)^n \sin(n+1)x - \frac{1}{2}\sum_n b_n(-1)^n \sin nx\\
&+ \frac{1}{2}\sum_n\sum_m (-1)^m b_n b_m(\sin(m+n+1) + \sin(m-n)x) = \frac{\sin x}{2}\\
&+ \sum_n (b_{2n+1} - b_{2n})\sin(2n+1)x + \frac{1}{2}\sum_n\sum_m b_{2n}b_{2m}\sin(2n+2m+1)x\\
&- \frac{1}{2}\sum_n\sum_m b_{2n+1}b_{2m+1}\sin(2n+2m+3)x + \sum_n\sum_m b_{2n+1}b_{2m}\sin(2m-2n-1)x.
\end{aligned}$$

Далее, умножая обе части на $2\sin x$, положительную на $(0,\pi)$ функцию, приходим к следующему соотношению

$$\begin{aligned}
g(x)g(\pi-x)\cdot 2\sin x &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + \sum_n (b_{2n+1} - b_{2n})(\cos 2nx - \cos 2(n+1)x)\\
&+ \frac{1}{2}\sum_n\sum_m b_{2n}b_{2m}(\cos 2(n+m)x - \cos 2(n+m+1)x)\\
&- \frac{1}{2}\sum_n\sum_m b_{2n+1}b_{2m+1}(\cos 2(n+m+1)x - \cos 2(n+m+2)x)\\
&+ \sum_n\sum_m b_{2n+1}b_{2m}(\cos 2(m-n-1)x - \cos 2(m-n)x).
\end{aligned}$$

В свете (1.5), если $b_{2n+1}b_{2m} \neq 0$, то $n \neq m$ и $n \neq m-1$, а следовательно, $m-n-1 \neq 0$, $m-n \neq 0$, откуда и вытекает

$$\int_0^{\pi/2} g(x)g(\pi-x)\cdot 2\sin x\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

□

Предложение 1.1 влечёт за собой следующее замечание.

Замечание 1.1. *Имеет место неравенство* $\nu \geq 9\pi/16$.

Доказательство. Будем оценивать модуль функции $g(x)g(\pi-x)$. Во-первых, заметим, что

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_n b_n \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big| + \Big|\sum_n b_n(-1)^n \sin(2n+1)\frac{x}{2}\Big|\\
&\qquad \leq \sum_n b_n\Big(\big|\cos(2n+1)\frac{x}{2}\big| + \big|\sin(2n+1)\frac{x}{2}\big|\Big) \leq \sqrt{2}\sum_n b_n = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Далее, в силу неравенства $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \le \sqrt{2}$, имеем

$$\begin{aligned}|g(x)g(\pi-x)| &= \Big|\Big(\cos\frac{x}{2} - \sum_n b_n \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big)\Big(\sin\frac{x}{2} - \sum_n b_n(-1)^n \sin(2n+1)\frac{x}{2}\Big)\Big| \\ &\le \Big(\cos\frac{x}{2} + \Big|\sum_n b_n \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big|\Big)\Big(\sin\frac{x}{2} + \sqrt{2} - \Big|\sum_n b_n \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big|\Big) \\ &\le \Big(\cos\frac{x}{2} + \Big|\sum_n b_n \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big|\Big)\Big(2\sqrt{2} - \Big(\cos\frac{x}{2} + \Big|\sum_n b_n \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big|\Big)\Big) \le 2.\end{aligned}$$

Значит, $|g(x)g(\pi-x)\cdot 2\sin x| \le 4$, а тогда

$$\mu\Big\{x \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big] : g(x)g(\pi-x) > 0\Big\} \ge \frac{\pi}{4} : 4 = \frac{\pi}{16},$$

откуда и вытекает требуемое. □

Для любых двух функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$ будем писать $h_1(x) \succ h_2(x)$ на $[a,b]$, если для всех $x \in [a,b]$ кроме конечного числа точек из неравенства $h_1(x) \le 0$ вытекает $h_2(x) < 0$.

Лемма 1.6. *При $x \in [0, 2\pi/3]$ имеем*

$$g(x) \succ g(3x),$$

а при $x \in [2\pi/3, \pi]$

$$-g(2x) \succ g(3x).$$

Доказательство. Элементарными преобразованиями получаем

$$\begin{aligned}&g(3x) + \Big(3 + 4\cos^2\frac{x}{2} - 8\cos\frac{x}{2}\Big)g(x) + \Big(2 - 4\cos\frac{x}{2}\Big)g(2x) \\ &\quad= \sum b_n\Big(\cos\frac{3x}{2} - \cos 3(2n+1)\frac{x}{2}\Big) \\ &\quad+ \Big(3 + 4\cos^2\frac{x}{2} - 8\cos\frac{x}{2}\Big)\sum b_n\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) \\ &\quad+ \Big(2 - 4\cos\frac{x}{2}\Big)\sum b_n\Big(\cos\frac{2x}{2} - \cos 2(2n+1)\frac{x}{2}\Big) \\ &\quad= \sum b_n\Big(4\cos^3\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} - 4\cos^3(2n+1)\frac{x}{2} + 3\cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) \\ &\quad+ \Big(3 + 4\cos^2\frac{x}{2} - 8\cos\frac{x}{2}\Big)\sum b_n\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) \\ &\quad+ \Big(2 - 4\cos\frac{x}{2}\Big)\sum b_n\Big(2\cos^2\frac{x}{2} - 1 - 2\cos^2(2n+1)\frac{x}{2} + 1\Big) \\ &\quad= \sum b_n\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big)\Big(4\cos^2\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2}\cos(2n+1)\frac{x}{2} + 4\cos^2(2n+1)\frac{x}{2} - 3 \\ &\quad+ 3 + 4\cos^2\frac{x}{2} - 8\cos\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} - 8\cos^2\frac{x}{2} + 4\cos(2n+1)\frac{x}{2} - 8\cos\frac{x}{2}\cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) \\ &\quad= 4\sum b_n\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big)^2\Big(-1 - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) < 0\end{aligned}$$

всюду на $[0,\pi]$ кроме конечного множества. То есть, пренебрегая множеством меры нуль, имеем

$$g(3x)+\Big(3+4\cos^2\frac{x}{2}-8\cos\frac{x}{2}\Big)g(x)+\Big(2-4\cos\frac{x}{2}\Big)g(2x)<0. \tag{1.6}$$

Заметим, что трёхчлен $3+4y^2-8y$ имеет корни $1/2$ и $3/2$, а потому коэффициент при $g(x)$ в (1.6) положителен, если $\cos(x/2)<1/2$, и отрицателен, если $\cos(x/2)>1/2$. То же верно и для коэффициента при $g(2x)$.

Таким образом, для $x\in[0,2\pi/3)$, если $g(x)\le 0$, то согласно Следствию 1.1, имеем $g(2x)<0$ всюду кроме конечного множества. Поскольку коэффициенты при $g(x)$ и $g(2x)$ в (1.6) отрицательны, то $g(3x)<0$ всюду на $[0,2\pi/3]$ за исключением конечного множества, то есть $g(3x)\prec g(x)$.

При $x\in(2\pi/3,\pi]$, если $-g(2x)\le 0$, то $g(2x)\ge 0$, и согласно Следствию (1.1) имеем $g(x)>0$ всюду кроме конечного множества. Поскольку коэффициенты при $g(x)$ и $g(2x)$ в (1.6) положительны, то $g(3x)<0$, что означает $g(3x)\prec -g(2x)$. □

Лемма 1.7. *Имеет место неравенство*

$$\nu\ge\frac{12\nu_1+5\pi}{13}.$$

Доказательство. Согласно Следствию 1.1 и Лемме 1.6 имеем

$$\begin{aligned}
4\nu_2&=4\mu\Big\{x\in\Big[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\Big]:f(x)>0\Big\}\ge\mu\Big\{x\in\Big[\pi,\frac{4\pi}{3}\Big]:f(x)\ge 0\Big\}\\
&=\frac{\pi}{3}-\mu\Big\{x\in\Big[\frac{2\pi}{3},\pi\Big]:f(x)>0\Big\}=\frac{\pi}{3}-\nu_5,\\
3\nu_3&=3\mu\Big\{x\in\Big[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\Big]:f(x)>0\Big\}\ge\mu\Big\{x\in\Big[\pi,\frac{3\pi}{2}\Big]:f(x)\ge 0\Big\}\\
&=\frac{\pi}{2}-\mu\Big\{x\in\Big[\frac{\pi}{2},\pi\Big]:f(x)>0\Big\}=\frac{\pi}{2}-\nu_4-\nu_5,\\
2\nu_5&=2\mu\Big\{x\in\Big[\frac{2\pi}{3},\pi\Big]:f(x)>0\Big\}\ge\mu\Big\{x\in\Big[\frac{4\pi}{3},2\pi\Big]:f(x)\ge 0\Big\}\\
&=\frac{2\pi}{3}-\mu\Big\{x\in\Big[0,\frac{2\pi}{3}\Big]:f(x)>0\Big\}=\frac{2\pi}{3}-\nu_1-\nu_2-\nu_3-\nu_4,\\
2\nu_4&=2\mu\Big\{x\in\Big[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\Big]:f(x)>0\Big\}\ge\mu\Big\{x\in\Big[\pi,\frac{4\pi}{3}\Big]:f(x)\ge 0\Big\}\\
&=\frac{\pi}{3}-\mu\Big\{x\in\Big[\frac{2\pi}{3},\pi\Big]:f(x)>0\Big\}=\frac{\pi}{3}-\nu_5.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
0\le 3\Big(4\nu_2-\frac{\pi}{3}+\nu_5\Big)+4\Big(3\nu_3-\frac{\pi}{2}+\nu_4+\nu_5\Big)+\Big(2\nu_5-\frac{2\pi}{3}+\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4\Big)+4\Big(2\nu_4-\frac{\pi}{3}+\nu_5\Big)\\
=13(\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5)+\nu_1-5\pi=13\nu-12\nu_1-5\pi,
\end{aligned}$$

откуда и следует нужное нам неравенство. □

Предложение 1.2. *Если для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $c \geq 0$ выполнено $b_n > \varepsilon_n(c)$, где $\varepsilon_n(c)$ удовлетворяет условию*

$$\mu\Big\{x \in \Big[0, \frac{\pi}{4}\Big] : \varepsilon_n(c)\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) + (1-\varepsilon_n(c))\Big(\cos\frac{x}{2} - 1\Big) > 0\Big\} \geq \frac{\pi}{8} + \frac{13c}{12}, \quad (1.7)$$

то

$$\nu \geq \frac{\pi}{2} + c.$$

Доказательство. Действительно, если $b_n \geq \varepsilon_n(c)$, то

$$\begin{aligned} g(x) = \sum_i b_i\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2i+1)\frac{x}{2}\Big) &\geq b_n\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) + (1-b_n)\Big(\cos\frac{x}{2} - 1\Big) \\ &\geq \varepsilon_n(c)\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos(2n+1)\frac{x}{2}\Big) + (1-\varepsilon_n(c))\Big(\cos\frac{x}{2} - 1\Big) =: \alpha(n, \varepsilon_n, c, x). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\mu\Big\{x \in \Big[0, \frac{\pi}{4}\Big] : \alpha(n, \varepsilon_n, c, x) > 0\Big\} \geq \frac{\pi}{8} + \frac{13c}{12},$$

получаем $\nu_1 \geq \pi/8 + 13c/12$, откуда вытекает

$$\nu \geq \frac{12\nu_1 + 5\pi}{13} \geq \frac{3\pi/2 + 13c + 5\pi}{13} = \frac{\pi}{2} + c.$$

□

Следствие 1.5. *Если $b_2 \geq 0.041$, то имеем*

$$\nu \geq \frac{\pi}{2} + 0.24.$$

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что $\varepsilon_2(0.24) = 0.041$ удовлетворяет условию (1.7). □

Предложение 1.3. *Пусть $b > 0$ и пусть $p(x), r(x)$ — непрерывные функции на $[0, b]$, причём $r(x) > 0$ на $(0, b)$. Пусть $q(x)$ — непрерывная α-периодическая функция, где $\alpha = bt$ для некоторого $t > 0$, с непрерывной функцией распределения $F^q(y)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любых n, $m \geq N$ и любого $y \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$|F_n(y) - F_m(y)| \leq \varepsilon,$$

где

$$F_i(y) := \mu\{x \in [0, b] : (p(x) + q(ix))r(x) > y\}.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $N > 8bt/\varepsilon$. Обозначим

$$\eta := \min_{x\in[\varepsilon/8, b-\varepsilon/8]} r(x).$$

Заметим, что

$$|F_n(y) - F_m(y)| \le \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + |\tilde{F}_n(y) - \tilde{F}_m(y)|,$$

где

$$\tilde{F}_i(y) := \mu\Big\{x \in \Big[\frac{\varepsilon}{8}, b - \frac{\varepsilon}{8}\Big] : (p(x) + q(ix))r(x) > y\Big\}.$$

Пусть c и d — такие точки, что $c := jbt/m,\ d := lbt/m$, где j и l определены следующим образом:

$$j := \min\Big\{i \in \mathbb{N} : \frac{ibt}{m} \ge \frac{\varepsilon}{8}\Big\}, \quad l := \max\Big\{i \in \mathbb{N} : \frac{ibt}{m} \le b - \frac{\varepsilon}{8}\Big\}.$$

Пусть $km = (n, m)$ — наибольший общий делитель n и m, тогда

$$|\tilde{F}_{km}(y) - \tilde{F}_m(y)| \le \left(\frac{jbt}{m} - \frac{\varepsilon}{8}\right) + \left(b - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{lbt}{m}\right) + |\hat{F}_{km}(y) - \hat{F}_m(y)| < \frac{2bt}{m} + |\hat{F}_{km}(y) - \hat{F}_m(y)|,$$

где

$$\hat{F}_i(y) := \mu\{x \in [c, d] : (p(x) + q(ix))r(x) > y\}.$$

Разделим отрезок $[c, d]$ на $l - j$ отрезков I_i длины bt/m каждый. Будем считать, что $N(\varepsilon)$ достаточно велико, чтобы выполнялись следующие условия:

$$|p(x_1)r(x_1) - p(x_2)r(x_2)| \le \eta\delta, \quad |r(x_1) - r(x_2)| \le \eta\delta$$

при $|x_1 - x_2| \le 1/N(\varepsilon)$, где $\delta > 0$ мы выберем позднее. Это всегда возможно в силу равномерной непрерывности функций $p(x)r(x)$ и $r(x)$ на отрезке. На каждом из отрезков I_i мы имеем

$$\frac{1}{m}\mu\Big\{x \in [0, bt] : q(x) > \frac{y - \min_{I_i} pr(x)}{\min_{I_i} r(x)}\Big\} < F_{m,I_i}(y) < \frac{1}{m}\mu\Big\{x \in [0, bt] : q(x) > \frac{y - \max_{I_i} pr(x)}{\max_{I_i} r(x)}\Big\},$$
$$\frac{1}{m}\mu\Big\{x \in [0, bt] : q(x) > \frac{y - \min_{I_i} pr(x)}{\min_{I_i} r(x)}\Big\} < F_{km,I_i}(y) < \frac{1}{m}\mu\Big\{x \in [0, bt] : q(x) > \frac{y - \max_{I_i} pr(x)}{\max_{I_i} r(x)}\Big\},$$

поскольку каждый I_i содержит ровно один период функции $q(mx)$ и ровно k периодов функции $q(kmx)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}|F_{km,I_i}(y) - F_{m,I_i}(y)| &\le \frac{2}{m}\mu\Big\{x \in [0, bt] : q(x) \in \left(\frac{y - \max_{I_i} pr(x)}{\max_{I_i} r(x)}, \frac{y - \min_{I_i} pr(x)}{\min_{I_i} r(x)}\right]\Big\} \\ &= \frac{2}{m}\left(F^q\left(\frac{y - \min_{I_i} pr(x)}{\min_{I_i} r(x)}\right) - F^q\left(\frac{y - \max_{I_i} pr(x)}{\max_{I_i} r(x)}\right)\right). \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Более того, если $(y - \max_{I_i} pr(x))/\max_{I_i} r(x) \geq Q = \max_{[0,b]} q(x)$, то правая часть (1.8) обращается в нуль. Поэтому будем считать, что

$$y < Q \max_{I_i} r(x) + \max_{I_i} p(x)r(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{y - \min_{I_i} pr(x)}{\min_{I_i} r(x)} - \frac{y - \max_{I_i} pr(x)}{\max_{I_i} r(x)} &= \frac{y(\max_{I_i} r - \min_{I_i} r) + \max_{I_i} pr \min_{I_i} r - \min_{I_i} pr \max_{I_i} r}{\min_{I_i} r \max_{I_i} r} \\ &< \frac{(\max_{I_i} r - \min_{I_i} r)(Q \max_{I_i} r + \max_{I_i} pr) + \max_{I_i} pr \min_{I_i} r - \min_{I_i} pr \max_{I_i} r}{\min_{I_i} r \max_{I_i} r} \\ &= \frac{\max_{I_i} r(Q(\max_{I_i} r - \min_{I_i} r) + \max_{I_i} pr - \min_{I_i} pr)}{\min_{I_i} r \max_{I_i} r} \leq \frac{(Q+1)\delta\eta}{\eta} = (Q+1)\delta.\end{aligned}$$

Выберем δ так, чтобы при $|x_1 - x_2| \leq (Q+1)\delta$ выполнялось

$$|F^q(x_1) - F^q(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{16}.$$

В свете (1.8) имеем

$$|F_{km,I_i}(y) - F_{m,I_i}(y)| \leq \frac{2}{m} \cdot \frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{8m}.$$

Следовательно, для любого y,

$$|\hat{F}_{km}(y) - \hat{F}_m(y)| \leq \sum_i |F_{km,I_i}(y) - F_{m,I_i}(y)| \leq (l-j)\frac{\varepsilon}{8m} \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Тогда

$$|\tilde{F}_{[n,m]}(y) - \tilde{F}_m(y)| = |\tilde{F}_{km}(y) - \tilde{F}_m(y)| \leq \frac{2bt}{m} + |\hat{F}_{km}(y) - \hat{F}_m(y)| \leq \frac{2bt}{m} + \frac{\varepsilon}{8} \leq \frac{2bt}{N} + \frac{\varepsilon}{8} \leq \frac{3\varepsilon}{8}.$$

Аналогочно,

$$|\tilde{F}_{[n,m]}(y) - \tilde{F}_n(y)| \leq \frac{3\varepsilon}{8}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}|F_n(y) - F_m(y)| \leq |\tilde{F}_n(y) - \tilde{F}_m(y)| + \frac{\varepsilon}{4} &\leq |\tilde{F}_n(y) - \tilde{F}_{[n,m]}(y)| + |\tilde{F}_{[n,m]}(y) - \tilde{F}_m(y)| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq 2 \cdot \frac{3\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Замечание 1.2. *Из доказательства Предложения 1.3 видно, что условие $r(x) > 0$ на $(0, b)$ можно ослабить до $r(x) \geq 0$ и требования, чтобы r обращалась в нуль в конечном числе точек.*

Следствие 1.6. *При $N \geq 17954$ и $n, m \geq N$ одной чётности выполнено*

$$|F_{s_n}(y) - F_{s_m}(y)| \leq 4 \cdot 10^{-3},$$

где

$$\begin{cases} s_n(x) := \sin x - \sin(n+1)x, & \text{если } n \text{ чётно}, \\ s_n(x) := \sin x + \sin nx, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем $s_n(x) = p(x) + (-1)^{n+1}q(nx)$ для нечётных n и $s_n(x) = p(x) + (-1)^{n+1}q((n+1)x)$ для n чётных, где $p(x) = q(x) = \sin x$. Для таких функций $p(x)$ и $q(x)$, а также $r(x) \equiv 1$, на отрезке $[0, 2\pi]$ найдём $N(5 \cdot 10^{-4})$ как в доказательстве Предложения 1.3. Тогда $b = \pi/2,\ t = 4$, а значит, можно положить $N \geq 8 \cdot 2\pi/(4 \cdot 10^{-3})$, то есть $N \geq 12567$. Отметим, что $\eta = \min r(x) = 1,\ Q = \max q(x) = \max -q(x) = 1$ и что $F^q(y) \equiv F^{-q}(y)$, следовательно, достаточно рассмотреть $F^q(y)$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $|y_1 - y_2| \leq \delta(Q+1) = 2\delta$ выполнялось

$$|F^q(y_1) - F^q(y_2)| \leq \frac{4 \cdot 10^{-3}}{16}.$$

Заметим, что

$$F^q(y) = \mu\{x \in [0, 2\pi] : \sin x > y\} = 2\mu\Big\{x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] : x > \arcsin y\Big\}.$$

Тогда при $y_1 > y_2$

$$\begin{aligned} |F^q(y_1) - F^q(y_2)| &= 2\mu\Big\{x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] : \arcsin y_2 \leq x < \arcsin y_1\Big\} = 2(\arcsin y_1 - \arcsin y_2) \\ &\leq 2(\arcsin(y_1 - y_2) - \arcsin 0) = 2\arcsin(y_1 - y_2) \leq 2(y_1 - y_2)^{99/100}, \end{aligned}$$

если $y_1 - y_2 \leq 0.25$. Следовательно, достаточно, чтобы δ удовлетворяло

$$2\delta \leq \min\left\{0.25,\ \left(\frac{4 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 2}\right)^{100/99}\right\},$$

а поскольку $\left(\frac{4 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 2}\right)^{100/99} > 1.14 \cdot 10^{-4}$, достаточно взять $\delta = 5.57 \cdot 10^{-5}$. То есть достаточно, чтобы выполнялось

$$|p(x_1)r(x_1) - p(x_2)r(x_2)| = |p(x_1) - p(x_2)| \leq \delta\eta = \delta = 5.57 \cdot 10^{-5}$$

при $|x_1 - x_2| \leq 1/N$. Без ограничения общности будем считать, что $x_1 \geq x_2$, тогда по теореме Лагранжа

$$|p(x_1) - p(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| \leq \max_{x \in [x_1, x_2]} |\cos x| \cdot |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

Следовательно, достаточно взять N такое, что

$$\frac{1}{N} \leq 5.57 \cdot 10^{-5},$$

и нетрудно увидеть, что $N = 17954$ этому неравенству удовлетворяет. Так, если $n, m \geq N = 17954$ и $n - m$ чётно, имеет место

$$|F_{s_n}(y) - F_{s_m}(y)| \leq 4 \cdot 10^{-3}.$$

□

Предложение 1.4. *Для данного $c > 0$ обозначим через J_n^c максимум интегралов от $s_n^2(x)$ по множествам из $[0, \pi/2]$ меры c, на которых $s_n(x) > 0$. Тогда если*

$$|F_{s_n}(y) - F_{s_m}(y)| \leq \varepsilon,$$

то

$$|J_n^c - J_m^c| \leq 6\varepsilon.$$

Доказательство. Заметим, что для всех натуральных l,

$$J_l^c = \int\limits_{s_l(x) > b} s_l^2(x)dx,$$

где $b = b_l(c) \geq 0$ удовлетворяет условию $F_{s_l}(b_l(c)) = c$. Поскольку $|F_{s_n} - F_{s_m}| \leq \varepsilon$ в каждой точке, то если $F_{s_n}(b_n(c)) = c$, имеем $|F_{s_n}(b_m(c)) - c| \leq \varepsilon$. Так как $|s_n| \leq 2$ при всех n, то

$$|J_n^c - J_m^c| = \left| \int\limits_{s_n(x) > b_n} s_n^2(x)dx - \int\limits_{s_m(x) > b_m} s_m^2(x)dx \right| \leq \left| \int\limits_{s_n(x) > b_n} s_n^2(x)dx - \int\limits_{s_m(x) > b_n} s_m^2(x)dx \right|$$
$$+ \left| \int\limits_{\text{множество меры } \leq \varepsilon} s_m^2(x)dx \right| \leq \left| \int\limits_{b_n}^{2} yF_{s_n}(y)dy - \int\limits_{b_n}^{2} yF_{s_m}(y)dy \right| + 4\varepsilon \leq \int\limits_{b_n}^{2} y\varepsilon + 4\varepsilon \leq 6\varepsilon.$$

□

Следствие 1.7. *При $N \geq 17954$ и $n, m \geq N$ одной чётности выполнено*

$$|J_n^c - J_m^c| \leq 0.024.$$

Доказательство Теоремы 1.3. Рассмотрим на $[0, \pi]$ множество M всех точек таких, что $g(x) > 0,\ g(\pi - x) > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_M g(x)g(\pi-x)\cdot 2\sin x\,dx &= \int_M 4(g(x)\cdot\sin(x/2))(g(\pi-x)\cdot\cos(x/2))\\ &\le \int_M (g(x)\cdot\sin(x/2)+g(\pi-x)\cdot\cos(x/2))^2\,dx\\ &= \int_M \left(\sum_n b_n\left(\sin x-\sin(1+(-1)^n(2n+1))x/2\right)\right)^2 dx\\ &= \int_M \left(\sum_n b_n s_n(x)\right)^2 dx.\end{aligned}$$

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца этот интеграл не превосходит

$$\int_M \sum_n b_n s_n^2(x)dx.$$

Предположим, что

$$\nu < \frac{\pi}{2}+0.24, \tag{1.9}$$

тогда $\mu\{M\}<0.24$.

Пусть M_n — множество меры 0.24, на котором функция $s_n(x)$ положительна и интеграл от её квадрата по этому множеству максимален. Тогда имеем

$$\int_M \sum_n b_n s_n^2(x)dx \le \sum_n b_n \int_{M_n} s_n^2(x)dx = \sum_n b_n J_n^{0.24} = \sum_n b_n J_n.$$

Непосредственные вычисления J_n при $2\le n\le 17955$ показывают, что

$$0.874 > J_2 > 0.7815 > J_n$$

при всех $n\ne 2,\ n\le 17955$ и $J_{17954},\ J_{17955}<0.7575$. Значит, по Следствию 1.7, если $m\ne 2$, то $J_m\le 0.7575+0.024=0.7815$. Также по Следствию 1.5 имеем $b_2\le 0.041$. Итак,

$$\sum_n b_n J_n \le 0.041\cdot 0.874+0.959\cdot 0.7815 = 0.7852925 < \frac{\pi}{4},$$

что неверно. Приходим к противоречию, а значит, (1.9) не может выполняться, и

$$\nu \ge \frac{\pi}{2}+0.24.$$

□

1.4 Точная нижняя оценка на меру положительности на $[\pi/2,\pi]$ и некоторые следствия

В этом параграфе мы получим точную нижнюю оценку на меру положительности функции (1.1) на $[\pi/2,\pi]$ и докажем неравенство $\nu\ge 2\pi/3$ в некоторых специальных случаях.

Теорема 1.4. *Для функции f вида (1.1) имеем*

$$(a)\quad \mu\{x\in[0,\pi/2]: f(x)>0\}+3\mu\{x\in[\pi/2,\pi]: f(x)>0\}\ge\pi,$$
$$(b)\quad \mu\{x\in[\pi/2,\pi]: f(x)>0\}\ge\frac{\pi}{6},$$
$$(c)\quad \mu\{x\in[0,\pi]: f(x)>0\}\ge 2\pi/3,\quad \textit{если}\quad \mu\{x\in[\pi,\pi/2]: f(x)>0\}=\pi/2,$$

причём оценка в пункте (b) является точной.

Доказательство. Обозначим $\nu':=\nu_{[0,\pi/2]}, \nu'':=\nu_{[\pi/2,\pi]}$.

(a) Согласно Следствию 1.1 имеем

$$\pi-2\nu''=2\mu\Big\{x\in\Big[\frac{\pi}{2},\pi\Big]: f(x)\le 0\Big\}\le\mu\{x\in[\pi,2\pi]: f(x)<0\}$$
$$=\mu\{x\in[0,\pi]: f(x)>0\}=\nu'+\nu'',$$

откуда и вытекает требуемое.

(b) Предположим противное: $\nu''<\pi/6$. Тогда согласно (a) имеем $\nu'\ge\pi-3\nu''>\pi/2$, что невозможно. Точность оценки следует из того факта, что значение $\pi/6$ достигается для функции (0.1) или для функции $f(x)=(\sin x+\sin 2x)/2$.

(c) Этот случай немедленно вытекает из (b). □

Предложение 1.5. *Если $b_1\ge 3-2\sqrt{2}$, то $f(x)>0$ на $(0,\pi/2)$.*

Доказательство. Имеем

$$g(x)\ge b_1\Big(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\Big)+(1-b_1)\Big(\cos\frac{x}{2}-1\Big)\ge(3-2\sqrt{2})\Big(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\Big)$$
$$+(-2+2\sqrt{2})\Big(\cos\frac{x}{2}-1\Big)=\cos\frac{x}{2}-(3-2\sqrt{2})\cos\frac{3x}{2}+2-2\sqrt{2}$$
$$=\cos\frac{x}{2}-(3-2\sqrt{2})\Big(4\cos^3\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}\Big)+2-2\sqrt{2}=:L(\cos\frac{x}{2}).$$

Заметим, что $L(1)=L(1/\sqrt{2})=0$. Для произвольного a

$$L'(a)=-12a^2(3-2\sqrt{2})+10-6\sqrt{2}=-12(3-2\sqrt{2})\Big(a^2-\frac{3+\sqrt{2}}{6}\Big),$$

откуда вытекает, что $L'(a)>0$, если $a^2\in(0,(3+\sqrt{2})/6)$, и $L'(a)<0$, если $a^2>(3+\sqrt{2})/6$. Таким образом, $L(a)>0$ на $(1/\sqrt{2},1)$, а значит, $L(\cos\frac{x}{2})>0$ при $x\in(0,\pi)$. Остаётся заметить, что знаки $f(x)$ и $g(x)$ совпадают на $(0,\pi/2)$. □

Предложение 1.6. *Если $b_2\ge 3-2\sqrt{2}$, то $f(x)>0$ на $(0,\pi/2)$.*

Доказательство. Имеем

$$g(x) \geq b_2\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\Big) + (1-b_2)\Big(\cos\frac{x}{2} - 1\Big) \geq (3-2\sqrt{2})\Big(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\Big)$$
$$+ (-2+2\sqrt{2})\Big(\cos\frac{x}{2} - 1\Big) = \cos\frac{x}{2} - (3-2\sqrt{2})\cos\frac{5x}{2} + 2 - 2\sqrt{2}$$
$$= \cos\frac{x}{2} - (3-2\sqrt{2})\Big(16\cos^5\frac{x}{2} - 20\cos^3\frac{x}{2} + 5\cos\frac{x}{2}\Big) + 2 - 2\sqrt{2} =: T(\cos\frac{x}{2}).$$

Заметим, что $T(1) = T(1/\sqrt{2}) = 0$. Для произвольного a

$$\frac{T'(a)}{3-2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} - 80a^4 + 60a^2 - 5 = -(80a^4 - 60a^2 + 2 - 2\sqrt{2})$$
$$= -80\left(a^2 - \frac{15 - \sqrt{225 + 40(\sqrt{2}-1)}}{40}\right)\left(a^2 - \frac{15 + \sqrt{225 + 40(\sqrt{2}-1)}}{40}\right)$$
$$= -80(a^2 - a')(a^2 - a''),$$

откуда следует, что $T'(a) > 0$ при $a^2 \in (0, a'')$ и $T'(a) < 0$ при $a^2 > a''$. Таким образом, $T(a) > 0$ на $(1/\sqrt{2}, 1)$, а следовательно, $T(\cos\frac{x}{2}) > 0$ при $x \in (0, \pi)$. Остаётся заметить, что знаки функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают на $(0, \pi/2)$. □

Следствие 1.8. *Если f имеет вид (1.1), где $a_1 - a_2 \geq 3 - 2\sqrt{2}$, то $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geq 2\pi/3$.*

Доказательство. Утверждение следует из Предложения 1.5 и Теоремы 1.4 (c). □

Следствие 1.9. *Если f имеет вид (1.1), где $a_2 - a_3 \geq 3 - 2\sqrt{2}$, то $\mu\{x \in [0,\pi] : f(x) > 0\} \geq 2\pi/3$.*

Доказательство. Утверждение следует из Предложения 1.6 и Теоремы 1.4 (c). □

Следствие 1.9 является особенно важным по следующей причине. На данный момент не известно ни одного примера ряда (1.1) с “маленьким” коэффициентом b_2 и мерой положительности близкой к $2\pi/3$. Поэтому полученное ограничение на b_2 может привести к окончательной оценке снизу на меру множества положительности f на $[0, \pi]$.

Глава II. Равномерная сходимость синус-рядов с полиномиальными и нецелыми гармониками

В данной главе наша главная цель — получить достаточные условия равномерной сходимости рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^{\alpha} x, \quad c_k \searrow 0, \tag{2.1}$$

где $\alpha > 0$, а при нечётном натуральном α — рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin f(k) x, \quad c_k \searrow 0, \tag{2.2}$$

где $f(k)$ — многочлен степени α с рациональными коэффициентами по нечётным степеням k.

Теорема 2.1. *Пусть неотрицательная последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает. Тогда*

(a) Если α — чётное натуральное число, то ряд (2.1) сходится в точке $\pi/2$ или в точке $2\pi/3$ только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

(b) Если α — нечётное натуральное число, то для равномерной сходимости ряда (2.2) на $\mathbb{R}$ достаточно, чтобы $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.

(c) Если $\alpha \in (0, 2)$, то для равномерной сходимости ряда (2.1) на любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}$ достаточно, чтобы $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.

Замечание 2.1. *В частности, из Теоремы 2.1 следует, что при нечётном α сумма ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sin k^{\alpha} x}{k}, \quad \frac{a_k}{k} \searrow 0, \ a_k \to 0,$$

представляет собой непрерывную функцию, в то время как функция $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^{\alpha} x}{k}$, хотя и ограничена, однако разрывна на всюду плотном на $\mathbb{R}$ множестве. Более точно, она имеет разрывы во всех точках вида $2\pi a/b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, таких, что $\sum_{k=1}^{b} e^{\frac{2\pi k^{\alpha} a}{b}} \neq 0$ (см. [22, стр. 219]). При этом известно, что для любых натуральных a, $n > 2$ и любого простого p такого, что $(a, p) = 1$, выполнено

$$\sum_{k=1}^{p^n} e^{\frac{2\pi a k^n}{p^n}} = p^{n-1}$$

(см. [19, стр. 42]), а множество π-рациональных точек вида $2\pi a/p^n$, $(a, p) = 1$, при фиксированном n всюду плотно на $\mathbb{R}$.

2.1 Оценки сумм Вейля в зависимости от параметров рациональных приближений старшего коэффициента многочлена

Лемма 2.1. *Пусть $P \in \mathbb{N}$, а число $A \geq 1$. Тогда для любого натурального $k \geq 1$ выполнено*

$$\#\left\{(y_1, y_2, ..., y_k) \in \{1, 2, ..., P\}^k : y_1 y_2 ... y_k \leq \frac{P^k}{A}\right\} \leq \frac{kP^k}{A^{1/k}}.$$

Доказательство. Утверждение следует из цепочки неравенств:

$$\begin{aligned}
&\#\left\{(y_1, y_2, ..., y_k) \in \{1, 2, ..., P\}^k : y_1 y_2 ... y_k \leq \frac{P^k}{A}\right\} \\
&\leq k \cdot \#\left\{(y_1, y_2, ..., y_k) \in \{1, 2, ..., P\}^k : y_1 \leq y_2, ..., y_k,\ y_1 y_2 ... y_k \leq \frac{P^k}{A}\right\} \\
&\leq k \cdot \#\left\{(y_1, y_2, ..., y_k) \in \{1, 2, ..., P\}^k : 1 \leq y_1 \leq \frac{P}{A^{1/k}}\right\} = \frac{kP^k}{A^{1/k}}.
\end{aligned}$$

□

Приведём здесь утверждение [19, Лемма 13], которым мы в дальнейшем будем пользоваться неоднократно.

Лемма А. *Пусть λ и $x_1, ..., x_k$ — натуральные числа. Обозначим через $\tau_k(\lambda)$ число решений уравнения $x_1 ... x_k = \lambda$. Тогда при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ выполняется оценка*

$$\tau_k(\lambda) \leq C_k(\varepsilon)\lambda^{\varepsilon}, \tag{2.3}$$

где $C_k(\varepsilon)$ — константа, зависящая только от k и ε.

Для произвольного числа y будем обозначать

$$\|y\| := \min\big(\{y\}, 1 - \{y\}\big),$$

где $\{y\}$ — дробная часть числа y.

Далее для произвольной функции $\psi(y)$ и числа y_1 обозначим через

$$\underset{y_1}{\Delta}\psi(y) := \psi(y + y_1) - \psi(y)$$

конечную разность первого порядка функции $\psi(y)$, а при $k \geq 2$ конечную разность k-го порядка определим индуктивно:

$$\underset{y_1 ... y_k}{\Delta}\psi(y) := \underset{y_k}{\Delta}\Big(\underset{y_1 ... y_{k-1}}{\Delta}\psi(y)\Big).$$

Согласно [19, (144)], если $\psi(y)$ — многочлен степени $k \geq 2$, то

$$\underset{y_1 ... y_{k-1}}{\Delta}\psi(y) = k!\alpha_k y_1 ... y_{k-1} y + \eta, \tag{2.4}$$

где α_k — старший коэффициент $\psi(y)$, а η зависит лишь от коэффициентов $\psi(y)$ и чисел $y_1, ..., y_{k-1}$. Также по [19, Лемма 12] для любых $K, k \geq 1$ верна оценка

$$\left|\sum_{y=1}^{K} e^{2\pi i h(y)}\right|^{2^k} \leq 2^{2^k} K^{2^k-(k+1)} \sum_{y_1=0}^{K_1-1} ... \sum_{y_k=0}^{K_k-1} \left|\sum_{y=1}^{K_{k+1}} e^{2\pi i \underset{y_1...y_k}{\Delta} h(y)}\right|, \tag{2.5}$$

где $K_1 = K$, $K_{\nu+1} = K_\nu - y_\nu$, $\nu = 1, 2, ..., k$. Теперь, с учетом (2.4) и (2.5), для любого многочлена f степени n со старшим коэффициентом α_n получаем

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{m} e^{if(k)x}\right|^{2^{n-1}} &\leq 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=0}^{m-1} \sum_{y_2=0}^{m-y_1-1} ... \sum_{y_{n-1}=0}^{m-y_1-y_2-...-y_{n-2}-1} \left|\sum_{y=1}^{m-y_1-...-y_{n-1}} e^{i \underset{y_1...y_{n-1}}{\Delta} f(y)x}\right| \\ &= 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=0}^{m-1} \sum_{y_2=0}^{m-y_1-1} ... \sum_{y_{n-1}=0}^{m-y_1-y_2-...-y_{n-2}-1} \left|\sum_{y=1}^{m-y_1-...-y_{n-1}} e^{in!yy_1...y_{n-1}\alpha_n x}\right| \\ &\leq 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-n} \left((n-1)m^{n-1} + \sum_{y_1,...,y_{n-1}=1}^{m} \left|\sum_{y=1}^{m-y_1-...-y_{n-1}} e^{in!yy_1...y_{n-1}\alpha_n x}\right|\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Заметим, что для любого числа t и натурального l выполнено

$$\begin{aligned}\left|\sum_{y=1}^{l} e^{iyt}\right| &\leq \left|\sum_{y=1}^{l} \sin yt\right| + \left|\sum_{y=1}^{l} \cos yt\right| = \left|\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{(2l+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right| + \left|\frac{\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{(2l+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\right| \\ &= \left|\frac{\sin\frac{lt}{2}\sin\frac{(l+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right| + \left|\frac{\sin\frac{lt}{2}\cos\frac{(l+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right| \leq 2\left|\frac{\sin\frac{lt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Объединяя (2.6) и (2.7), получаем

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{m} e^{if(k)x}\right|^{2^{n-1}} &\leq 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-1}(n-1) + 2^{2^{n-1}+1} m^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1,...,y_{n-1}=1}^{m} \left|\frac{\sin\frac{(m-y_1-...-y_{n-1})n!y_1...y_{n-1}\alpha_n x}{2}}{\sin\frac{n!y_1...y_{n-1}\alpha_n x}{2}}\right| \\ &\leq 2^{2^{n-1}} m^{2^{n-1}-1}(n-1) + 2^{2^{n-1}+1} m^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1,...,y_{n-1}=1}^{m} \min\left\{m, \frac{1}{2\|\frac{n!y_1...y_{n-1}\alpha_n x}{2\pi}\|}\right\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Лемма 2.2. *Пусть* $0 < y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\varepsilon \in (0,1)$, $4 \leq P \in \mathbb{N}$, $3 \leq n \in \mathbb{N}$. *Если нет такой пары взаимно простых натуральных чисел* C *и* $M \leq P^\varepsilon$, *что*

$$\left|y - \frac{C}{M}\right| \leq P^{\varepsilon-1},$$

то выполнено

$$\#\left\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : \|yy_1...y_{n-1}\| \leq P^{\varepsilon-1}\right\} \leq 4C_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\right)P^{n-1-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где $C_m(\gamma)$ *из* (2.3). *При этом имеем*

$$\sum_{y_1,...,y_{n-1}=1}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1...y_{n-1}\|}\right\} \leq GP^{n-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где G *зависит лишь от* n *и* ε.

Замечание 2.2. *Здесь и далее мы проводим рассуждения с иррациональными (π-иррациональными) числами не потому, что в рациональных (π-рациональных) точках ситуация иная, а лишь из соображений удобства.*

Доказательство. Пусть T — минимальное такое число из $\{1,2,...,P^{n-1}\}$, что $\|yT\| \le P^{\varepsilon-1}$ (если такого T нет, то утверждение очевидно). Тогда имеем $T \ge P^{\varepsilon}$. В этом случае для любого $0 \le k \le P^{n-1}-T$ среди значений $\{y(k+1)\},\ \{y(k+2)\},...,\{y(k+T)\}$ не более одного лежит в полуинтервале $(0, P^{\varepsilon-1}]$ (иначе бы для некоторых $1 \le i < j \le T$ выполнялось $\|y(j-i)\| \le P^{\varepsilon-1}$, что невозможно в силу минимальности T) и не более одного в полуинтервале $[1-P^{\varepsilon-1}, 1)$. Итак, среди значений $\{1,2,...,P^{n-1}\}$ не более $2\lceil\frac{P^{n-1}}{T}\rceil \le \frac{4P^{n-1}}{T} \le 4P^{n-1-\varepsilon}$ значений k удовлетворяют условию $\|yk\| \le P^{\varepsilon-1}$, а так как при этом для любого k, согласно (2.3),

$$\#\Big\{(y_1,y_2,...,y_{n-1}) \in \{1,2,...,P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} = k\Big\} \le C_{n-1}\Big(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\Big)k^{\frac{\varepsilon}{2(n-1)}},$$

то

$$\begin{aligned}\#\Big\{(y_1,y_2,...,y_{n-1}) \in \{1,2,...,P\}^{n-1} : \|yy_1...y_{n-1}\| \le P^{\varepsilon-1}\Big\}\\ \le 4P^{n-1-\varepsilon}C_{n-1}\Big(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\Big)(P^{n-1})^{\frac{\varepsilon}{2(n-1)}} = 4C_{n-1}\Big(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\Big)P^{n-1-\frac{\varepsilon}{2}}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{y_1,...,y_{n-1}=1}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1...y_{n-1}\|}\right\} \le P\cdot 4C_{n-1}\Big(\frac{\varepsilon}{2(n-1)}\Big)P^{n-1-\frac{\varepsilon}{2}} + P^{n-1}\frac{1}{2P^{\varepsilon-1}} \quad \le GP^{n-\frac{\varepsilon}{2}},$$

где G зависит лишь от n и ε. □

Следствие 2.1. *В условиях Леммы 2.2 для любого действительного приведённого (то есть имеющего единичный старший коэффициент) многочлена f степени n выполнено*

$$\Big|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\Big| \le DP^{1-\frac{\varepsilon}{2^n}},$$

где D зависит лишь от n и ε.

Доказательство. Из (2.8) и Леммы 2.2 следует, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\Big|^{2^{n-1}} \le 2^{2^{n-1}}P^{2^{n-1}-n}\big((n-1)P^{n-1} + 2GP^{n-\frac{\varepsilon}{2}}\big) \le D'P^{2^{n-1}-\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{2.9}$$

где $D' > 0$ зависит лишь от ε и n. Отсюда и вытекает утверждение при $D = (D')^{\frac{1}{2^{n-1}}}$. □

Лемма 2.3. *Пусть* $0 < y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{6})$, $9 \le P \in \mathbb{N}$, $3 \le n \in \mathbb{N}$. *Если есть такая пара взаимно простых натуральных чисел* C *и* $M \le P^{\varepsilon}$, *что*

$$P^{\varepsilon-n} < \Big|y - \frac{C}{M}\Big| =: |\beta| \le P^{\varepsilon-1},$$

то

$$\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : \|yy_1...y_{n-1}\| \le P^{\varepsilon-1}\Big\}$$
$$\le 6P^{n-\frac{3}{2}}C_{n-1}\Big(\frac{2\varepsilon}{n-1}\Big) + (n-1)C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)P^{n-1-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}|\beta|^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}},$$

а также

$$\sum_{y_1,...,y_{n-1}=1}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1...y_{n-1}\|}\right\} \le U\big(P^{n-\varepsilon} + P^{n-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}|\beta|^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}\big),$$

где U *зависит лишь от* n *и* ε.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $P^{\varepsilon-n} < y - \frac{C}{M} = \beta \le P^{\varepsilon-1}$. Пусть некоторые взаимно простые C' и M', отличные от C и M, удовлетворяют неравенству

$$\Big|y - \frac{C'}{M'}\Big| = |\beta'| \le \frac{2}{M'P^{1-\varepsilon}}.$$

Тогда имеем, во-первых,

$$\frac{1}{MM'} \le \Big|y - \frac{C}{M}\Big| + \Big|y - \frac{C'}{M'}\Big| \le \frac{3}{P^{1-\varepsilon}},$$

откуда

$$M' \ge \frac{P^{1-\varepsilon}}{3M} \ge \frac{P^{1-2\varepsilon}}{3} \ge P^{\varepsilon} \ge M, \tag{2.10}$$

а во-вторых,

$$yMM' = C'M + \beta'M'M = CM' + \beta M'M,$$

откуда $\{\beta'M'M\} = \{\beta M'M\}$. Тогда если $\beta' > 0$, то так как $\beta'M' \le 2P^{\varepsilon-1}$, то $\beta'M'M \le 2P^{2\varepsilon-1} < 1$ и $\{\beta'M'M\} = \beta'M'M$, а значит, либо $M' \ge \beta^{-1}M^{-1}$, либо $\{\beta'M'M\} = \beta'M'M = \beta M'M$, откуда $\beta'M' \ge \beta'M = \beta M$.

Если же $\beta' < 0$, то $(-\beta' + \beta)M'M \ge 1$, а значит,

$$M' \ge \frac{1 + \beta'M'M}{\beta M} \ge (1 - 2P^{2\varepsilon-1})\beta^{-1}M^{-1} \ge \frac{1}{2}\beta^{-1}M^{-1}. \tag{2.11}$$

Итак, мы получили, что вне зависимости от знака β' выполнено либо $\beta'M' \ge \beta M$, либо $M' \ge \frac{1}{2}\beta^{-1}M^{-1}$.

Теперь пусть $T_1 < T_2 < ... < T_K$ — все числа k из $\{1, 2, ..., P^{n-1}\}$ такие, что $\|yk\| \le P^{\varepsilon-1}$. Тогда, так как $\{y(T_{i+1} - T_i)\} \in (0, 2P^{\varepsilon-1}] \cup [1 - 2P^{\varepsilon-1}, 1)$, то из рассуждения выше следует, что либо $T_{i+1} - T_i \ge \frac{1}{2}\beta^{-1}M^{-1}$, либо

$$\{y(T_{i+1} - T_i) - (1 - P^{\varepsilon-1})\} \ge \beta M. \tag{2.12}$$

Но так как

$$\big(\lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor + 1\big)\beta M > P^{\varepsilon-1},$$

то среди чисел $i = 1, 2, ..., \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor + 1$ найдётся такое, что выполнено $T_{i+1} - T_i \ge \beta^{-1}M^{-1}/2$. Также заметим, что из (2.12) следует, что среди любых $\lceil 2P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rceil + 1$ последовательных значений i есть такое, что выполнено $T_{i+1} - T_i \ge \beta^{-1}M^{-1}/2$.

Заметим, что $\lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor M \le P^{\varepsilon-1}P^{n-\varepsilon} = P^{n-1}$, а значит,

$$\mathfrak{T} := \Big\{M, 2M, ..., \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor M\Big\} \subset \{T_k\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} P^{n-1} \ge T_K &\ge \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor M + \frac{K - \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor}{\lceil 2P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rceil + 1}\Big(\lceil 2P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rceil M + \frac{\beta^{-1}M^{-1}}{2}\Big) \\ &\ge \frac{K - \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor}{3P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}}\frac{\beta^{-1}M^{-1}}{2}, \end{aligned}$$

откуда

$$K - \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor \le 6P^{n-2+\varepsilon}.$$

Тогда, учитывая (2.3) и Лемму 2.1, имеем

$$\begin{aligned} &\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : \|yy_1...y_{n-1}\| \le P^{\varepsilon-1}\Big\} \\ =&\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \in \{T_k\}\Big\} \\ =&\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \in \{T_k\} \setminus \mathfrak{T}\Big\} \\ +&\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \in \mathfrak{T}\Big\} \\ &\le 6P^{n-2+\varepsilon}C_{n-1}\Big(\frac{2\varepsilon}{n-1}\Big)(P^{n-1})^{\frac{2\varepsilon}{n-1}} \\ +&\#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \in \Big\{M, 2M, ..., \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor M\Big\}\Big\} \\ &\le 6P^{n-\frac{3}{2}}C_{n-1}\Big(\frac{2\varepsilon}{n-1}\Big) + \ \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} = M\Big\} \\ &\cdot\ \#\Big\{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \in \{1, 2, ..., P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1} \le P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\Big\} \\ &\le 6P^{n-\frac{3}{2}}C_{n-1}\Big(\frac{2\varepsilon}{n-1}\Big) + C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)M^{\frac{1}{2(n-1)}}\frac{(n-1)P^{n-1}}{(\beta M P^{n-\varepsilon})^{\frac{1}{n-1}}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{y_1,\dots,y_{n-1}=1}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1\dots y_{n-1}\|}\right\}$$
$$\le P\cdot\left(6P^{n-\frac{3}{2}}C_{n-1}\Big(\frac{2\varepsilon}{n-1}\Big)+(n-1)C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)P^{n-1-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}\right)$$
$$+P^{n-1}\frac{1}{2P^{\varepsilon-1}}\le U\big(P^{n-\varepsilon}+P^{n-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}\big),$$

где U зависит лишь от n и ε. □

Следствие 2.2. *В условиях Леммы 2.3 для любого действительного приведённого многочлена f степени n выполнено*

$$\Big|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\Big| \le D_1\big(P^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}+P^{1-\frac{n-\varepsilon}{2^{n-1}(n-1)}}\beta^{-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}}M^{-\frac{1}{2^n(n-1)}}\big), \tag{2.13}$$

где D_1 зависит лишь от n и ε.

Доказательство. По Лемме 2.3 и из (2.8) аналогично (2.9) следует, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\Big|^{2^{n-1}} \le 2^{2^{n-1}}P^{2^{n-1}-1}(n-1)+2^{2^{n-1}+1}P^{2^{n-1}-n}\big(UP^{n-\varepsilon}+UP^{n-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}\big)$$
$$\le D_1'P^{2^{n-1}-\varepsilon}+D_1'P^{2^{n-1}-\frac{n-\varepsilon}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}},$$

откуда, учитывая неравенство $(a+b)^{\frac{1}{n-1}}\le a^{\frac{1}{n-1}}+b^{\frac{1}{n-1}}$, верное для любых положительных a и b, получаем требуемое утверждение с $D_1=(D_1')^{\frac{1}{2^{n-1}}}$.

□

Лемма 2.4. *Пусть $0<y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\varepsilon\in(0,1/6)$, $8\le P\in\mathbb{N}$, $3\le n\in\mathbb{N}$. Если найдётся такая пара взаимно простых натуральных чисел C и $M\le P^{\varepsilon}$, что*

$$\Big|y-\frac{C}{M}\Big| =: |\beta| \le P^{\varepsilon-n},$$

то выполнено неравенство

$$\sum_{y_1,\dots,y_{n-1}=1}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1\dots y_{n-1}\|}\right\} \le \frac{BP^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}},$$

где B зависит лишь от n. При этом в случае $P^n|\beta|\ge 2$ для любого $\delta>0$ выполняется

$$\sum_{y_1,\dots,y_{n-1}=1}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1\dots y_{n-1}\|}\right\} \le \frac{P^{n-\varepsilon}}{2}+\frac{A_\delta}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}|\beta|^{\frac{1}{n-1}-\delta}}P^{n-\frac{n}{n-1}+\delta n},$$

где A_δ зависит лишь от δ и n.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\beta > 0$. Покажем, что минимальное такое $T \in \mathbb{N}$, что $\|yT\| \leq P^{\varepsilon-1}$, есть M. Действительно, иначе существует $T < M$ такое, что $yT = Z + \gamma$, где $Z \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \gamma \in (0, P^{\varepsilon-1}] \cup [1 - P^{\varepsilon-1}, 1)$, и тогда

$$\frac{Z}{T} + \frac{\gamma}{T} = y = \frac{C}{M} + \beta,$$

но

$$\frac{1}{P^{2\varepsilon}} \leq \frac{1}{M^2} \leq \frac{1}{TM} \leq \left|\frac{C}{M} - \frac{Z}{T}\right| = \left|\beta - \frac{\gamma}{T}\right| < \frac{2}{P^{1-\varepsilon}}, \tag{2.14}$$

откуда $P^{1-3\varepsilon} < 2$, что невозможно, так как $P^{1-3\varepsilon} \geq \sqrt{P} > 2$. Пусть $T_1 = M < T_2 < T_3 < ... < T_K$ — все такие натуральные числа, меньшие P^{n-1}, что $\|yT_k\| \leq P^{\varepsilon-1}$. Покажем, что $K = \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1} \rfloor$ и что $T_k = kM$ для всех $k \leq K$. Будем доказывать вторую часть утверждения по индукции. База: $k = 1$. Пусть для $k = l < K$ это утверждение доказано, докажем его для $k = l + 1$. Предположим, оно неверно, и $lM < T_{l+1} < (l+1)M$. В силу иррациональности y имеем $\{yT_{l+1}\} \neq \{ylM\} = l\beta$. Остаются два возможных варианта:

1) $l\beta < \{yT_{l+1}\} \leq P^{\varepsilon-1}$. Но тогда $0 < T_{l+1} - lM < M$ и $\{y(T_{l+1} - lM)\} \in (0, P^{\varepsilon-1}]$, что невозможно в силу того, что $T_1 = M$.

2) $\{yT_{l+1}\} \in [1 - P^{\varepsilon-1}, 1)$ или $\{yT_{l+1}\} < l\beta \leq P^{n-1}P^{\varepsilon-n} = P^{\varepsilon-1}$. Тогда $\{y(T_{l+1} - lM)\} \in (1 - 2P^{\varepsilon-1}, 1)$, откуда

$$\{y(T_{l+1} - lM)M\} > 1 - 2MP^{\varepsilon-1} \geq 1 - 2P^{2\varepsilon-1} \geq 1 - 2P^{-2/3} > \frac{1}{2}, \tag{2.15}$$

а с другой стороны

$$\{yM(T_{l+1} - lM)\} \leq (T_{l+1} - lM)M\beta \leq M^2\beta \leq P^{3\varepsilon-n} < P^{-2} \leq \frac{1}{64}. \tag{2.16}$$

Получили противоречие. Осталось показать, что $K = \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1} \rfloor$. Заметим, что при l, удовлетворяющем $\lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1} \rfloor + 1 \leq l \leq P^{n-1}$, выполнено

$$\{ylM\} \leq \{yM\}l \leq P^{n-1}\beta M \leq P^{n-1-n+\varepsilon+\varepsilon} = P^{2\varepsilon-1}$$

и

$$\{ylM\} > P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\beta M = P^{\varepsilon-1},$$

то есть $lM \neq T_k$ ни для какого k. Предположим, есть такое натуральное T, что $lM < T < (l+1)M$ для некоторого $\lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1} \rfloor \leq l \leq P^{n-1}$ и $\|yT\| \leq P^{\varepsilon-1}$. Но тогда $\{y(T - lM)\} \geq 1 - 2P^{2\varepsilon-1}$, а значит, снова

$$\{y(T - lM)M\} > 1 - 2MP^{2\varepsilon-1} \geq 1 - 2P^{3\varepsilon-1} \geq 1 - 2P^{-1/2} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{5}, \tag{2.17}$$

а с другой стороны

$$\{yM(T-lM)\} \le (T-lM)M\beta \le M^2\beta \le P^{3\varepsilon-3} < P^{-2} \le \frac{1}{64}.$$

Противоречие. Итак,

$$K = \lfloor P^{\varepsilon-1}\beta^{-1}M^{-1}\rfloor \qquad \text{и} \qquad T_k = kM \ \text{ для всех } \ k \le K. \tag{2.18}$$

Тогда

$$\sum_{\substack{y_1,\dots,y_{n-1}=1\\ y_1\dots y_{n-1}\notin\{T_k\}}}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1\dots y_{n-1}\|}\right\} \le P^{n-1}\frac{1}{2P^{\varepsilon-1}} \le \frac{P^{n-\varepsilon}}{2}. \tag{2.19}$$

Заметим, что с учётом (2.3), имеем для произвольного натурального l

$$\begin{aligned}
&\#\Big\{(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1y_2\dots y_{n-1}\in\{M,2M,\dots,lM\}\Big\}\\
&\le \#\Big\{(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1y_2\dots y_{n-1}\le l\Big\}\\
&\cdot\#\Big\{(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1y_2\dots y_{n-1}= M\Big\}\\
&\le C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)M^{\frac{1}{2(n-1)}}\#\Big\{(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1y_2\dots y_{n-1}\le l\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Теперь, согласно (2.20) и Лемме 2.1, можем оценить

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{y_1,\dots,y_{n-1}=1\\ y_1\dots y_{n-1}\in\{T_k\}}}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1\dots y_{n-1}\|}\right\} &\le \sum_{\substack{y_1,\dots,y_{n-1}=1\\ y_1\dots y_{n-1}\in\{T_k\}}}^{P} P\\
&\le PC_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)M^{\frac{1}{2(n-1)}}\#\Big\{(y_1,y_2,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1y_2\dots y_{n-1}\le \frac{P^{n-1}}{M}\Big\}\\
&\le C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)\frac{(n-1)P^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Объединяя оценки (2.19) и (2.21), имеем

$$\sum_{y_1,\dots,y_{n-1}=1}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1\dots y_{n-1}\|}\right\} \le \frac{P^{n-\varepsilon}}{2} + C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)\frac{(n-1)P^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}} < \frac{BP^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}}.$$

Рассмотрим теперь случай $P^n\beta \ge 2$. Обозначим

$$F_t := \Big\{(y_1,\dots,y_{n-1})\in\{1,2,\dots,P\}^{n-1} : y_1\dots y_{n-1}\in\Big\{M,2M,\dots,\big\lfloor t(P\beta M)^{-1}\big\rfloor M\Big\}\Big\}.$$

Заметим, что при $t > P^n\beta$ выполнено

$$\left\lfloor\frac{t}{P\beta M}\right\rfloor M > \frac{P^n\beta}{P\beta M}M = P^{n-1} \ge y_1y_2\dots y_{n-1},$$

а значит, при таких значениях t имеем $F_t = F_{\lfloor P^n\beta\rfloor}$. Для произвольного натурального $t \le P^n\beta$ по Лемме 2.1 получаем

$$\#\left\{(y_1,...,y_{n-1})\in\{1,2,...,P\}^{n-1} : y_1...y_{n-1}\le \frac{t}{P\beta M}\right\} \le \frac{(n-1)P^{n-1}}{\left(\frac{P^n\beta M}{t}\right)^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{2.22}$$

Объединяя оценки (2.20) и (2.22), имеем

$$|F_t| \le C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)M^{\frac{1}{2(n-1)}}\frac{(n-1)P^{n-1}}{\left(\frac{P^n\beta M}{t}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)\frac{(n-1)P^{n-1}}{\left(\frac{P^n\beta M^{1/2}}{t}\right)^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{2.23}$$

Если $y_1y_2...y_{n-1}\in\{T_k\}_{k=1}^K\setminus F_t$, то

$$\frac{1}{2\|yy_1...y_{n-1}\|} \le \frac{1}{2\beta tP^{-1}\beta^{-1}} = \frac{P}{2t}. \tag{2.24}$$

Тогда, с учётом (2.24), имеем

$$\begin{aligned} S(P,y) :=& \sum_{\substack{y_1,...,y_{n-1}=1\\ y_1\cdots y_{n-1}\in\{T_k\}}}^{P} \min\left\{P, \frac{1}{2\|yy_1...y_{n-1}\|}\right\} \le |F_2|\max p + \big(|F_3|-|F_2|\big)\frac{P}{2\cdot 2}\\ &+\big(|F_4|-|F_3|\big)\frac{P}{2\cdot 3}+...+\big(|F_{\lfloor P^n\beta\rfloor+1}|-|F_{\lfloor P^n\beta\rfloor}|\big)\frac{P}{2\cdot\lfloor P^n\beta\rfloor}. \end{aligned}$$

Замечая, что в выражении выше каждый член $|F_i|$ встречается с неотрицательным коэффициентом, получаем с помощью (2.23)

$$\begin{aligned} S(P,y) \le& C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)P(n-1)P^{n-1-\frac{n}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}\\ &\cdot\left(2^{\frac{1}{n-1}}+\Big(3^{\frac{1}{n-1}}-2^{\frac{1}{n-1}}\Big)\frac{1}{2}+...+\Big(\big(\lfloor P^n\beta\rfloor+1\big)^{\frac{1}{n-1}}-\lfloor P^n\beta\rfloor^{\frac{1}{n-1}}\Big)\frac{1}{\lfloor P^n\beta\rfloor}\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

При любом $a\ge 2$ по теореме Лагранжа для некоторого $\theta\in(0,1)$ имеем

$$(a+1)^{\frac{1}{n-1}}-a^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{n-1}(a+\theta)^{-\frac{n-2}{n-1}} \le \frac{2}{n-1}a^{-\frac{n-2}{n-1}} \le 1 \le 2^{\frac{1}{n-1}},$$

а значит, из (2.25) следует, что

$$S(P,y) \le C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)P(n-1)P^{n-1-\frac{n}{n-1}}\beta^{-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}2^{\frac{1}{n-1}}\ln(P^n\beta). \tag{2.26}$$

Поскольку для любого $\delta>0$ существует такое число $B_\delta>0$, что $\ln(s+1)\le B_\delta s^\delta$ при $s>0$, то из (2.26) вытекает

$$\begin{aligned} S(P,y) &\le B_\delta C_{n-1}\Big(\frac{1}{2(n-1)}\Big)(n-1)P^{n-\frac{n}{n-1}+\delta n}\beta^{\delta-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}2^{\frac{1}{n-1}}\\ &= A_\delta P^{n-\frac{n}{n-1}+\delta n}\beta^{\delta-\frac{1}{n-1}}M^{-\frac{1}{2(n-1)}}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

где A_δ — константа, зависящая лишь от n. Объединяя оценки (2.19) и (2.27), получаем неравенство из условия леммы для случая $P^n\beta\ge 2$. □

Следствие 2.3. *В условиях Леммы 2.4 для любого действительного приведённого многочлена f степени n имеет место неравенство*

$$\Big|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\Big| \le W\frac{P}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}, \tag{2.28}$$

где W зависит лишь от n. При этом если $P^n|\beta| \ge 2$, то выполняется

$$\Big|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\Big| \le J\bigg(P^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}} + \frac{P^{1-\frac{n}{2^n(n-1)}}}{(M|\beta|)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\bigg), \tag{2.29}$$

где J зависит лишь от n.

Доказательство. По Лемме 2.4 и (2.8) имеем

$$\Big|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\Big|^{2^{n-1}} \le 2^{2^{n-1}} P^{2^{n-1}-n}\bigg((n-1)P^{n-1} + 2\frac{BP^n}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}}\bigg),$$

откуда и вытекает (2.28).

Если $P^n|\beta| \ge 2$, то согласно (2.8), по Лемме 2.4

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{P} e^{\frac{2\pi i f(k)y}{n!}}\Big|^{2^{n-1}} &\le 2^{2^{n-1}} P^{2^{n-1}-1}(n-1) \\ &+ 2^{2^{n-1}+1} P^{2^{n-1}-n}\bigg(\frac{P^{n-\varepsilon}}{2} + \frac{A_{\frac{1}{2(n-1)}}}{M^{\frac{1}{2(n-1)}}|\beta|^{\frac{1}{2(n-1)}}} P^{n-\frac{n}{2(n-1)}}\bigg).\end{aligned} \tag{2.30}$$

Учитывая неравенство $(a+b)^{\frac{1}{n-1}} \le a^{\frac{1}{n-1}} + b^{\frac{1}{n-1}}$, $a, b > 0$, а также (2.30), получаем (2.29). □

Замечание 2.3. *Утверждения Лемм 2.3 и 2.4, а также Следствий 2.2 и 2.3 остаются справедливыми для $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$ при достаточно большом P.*

Доказательство. Внося соответствующие изменения в оценки (2.10), (2.11), (2.14), (2.15), (2.16) и (2.17), получаем требуемое. □

2.2 Случай целых степеней

Рассмотрим случай, когда $\alpha =: n \in \mathbb{N}$. Имеем две принципиально разные ситуации: когда n чётное и когда нечётное. Начнём с чётного случая.

Доказательство Теоремы 2.1 (a). Заметим, что $k^2 \equiv 0 \pmod 4$ при любом чётном k и $k^2 \equiv 1 \pmod 4$ при любом k нечётном. Тогда для любых $l < L$

$$\sum_{k=2l+1}^{2L} c_k \sin k^n \frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{L-l} c_{2l+2k-1} \ge \frac{1}{2}\sum_{k=2l+1}^{2L} c_k, \tag{2.31}$$

откуда и вытекает требуемое.

Аналогичные рассуждения можно провести и для точки $2\pi/3$, с учётом того, что $k^2 \equiv 1 \pmod 3$ при любом k, не кратном трём. □

Замечание 2.4. *Можно подобрать и другие точки для пункта (a) Теоремы 2.1 с тем же свойством, однако это не представляется существенным.*

Обратимся теперь к случаю нечётной степени n и ряда (2.2). Этот случай отличается от предыдущего тем, что для любого нечётного l и любой точки вида $x = 2\pi a/b \in 2\pi\mathbb{Q}$ выполнено $\sum_{k=1}^{b} \sin k^l x = 0$, за счёт чего не происходит "накопления", наблюдаемого в случае чётного l. Мы увидим, что, благодаря этому свойству, и для точек, достаточно близких к 2π-рациональным, соответствующие мнимые части сумм Вейля удаётся хорошо оценить. Для остальных же точек эффективные оценки дают результаты Главы 2.1, и эти оценки остаются справедливыми, если f заменить на произвольный приведённый многочлен той же степени.

Доказательство Теоремы 2.1 (b). Пусть $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0, 1/6)$ и $x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Q}$. Поскольку мы будем доказывать утверждение для всех $x \in \mathbb{R}$, то можем считать, что многочлен f — приведённый. Без ограничения общности, $x > 0$. Обозначим

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x := \left\{ M \in \mathbb{N} : \exists C_M \in \mathbb{N} \text{ такое, что } (C_M, M) = 1 \text{ и } \left|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C_M}{M}\right| \le \frac{1}{M^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} \right\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{M}$ есть конечная или бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{M_i\}_{i\ge 1}$, в которой для любого $i \ge 1$ выполнено

$$2M_{i+1} \ge M_i^4. \tag{2.32}$$

Действительно, имеем

$$\frac{1}{M_i M_{i+1}} \le \left|\frac{C_{M_i}}{M_i} - \frac{C_{M_{i+1}}}{M_{i+1}}\right| \le \left|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C_{M_i}}{M_i}\right| + \left|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C_{M_{i+1}}}{M_{i+1}}\right| \le \frac{1}{M_i^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} + \frac{1}{M_{i+1}^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} \le \frac{2}{M_i^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}},$$

откуда

$$2M_{i+1} \ge M_i^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}-1} \ge M_i^{\frac{1-1/6}{1/6}-1} = M_i^4.$$

Будем называть натуральное число m *неудобным*, если существует такая пара взаимно простых натуральных чисел C и $M \le m^\varepsilon$, что

$$\left|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C}{M}\right| \le m^{\varepsilon-n}.$$

Иначе, если существует такая пара взаимно простых натуральных чисел C и $M \le m^\varepsilon$, что

$$\left|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C}{M}\right| \le m^{\varepsilon-1},$$

будем называть число m *почти удобным*. В остальных же случаях m будем называть *удобным*. Обозначим

$$S_m(x) := \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{m} e^{if(k)x} = \sum_{k=1}^{m} \sin f(k)x.$$

Для произвольных натуральных $l < L$, применяя преобразование Абеля, имеем

$$\left|\sum_{m=l}^{L} c_m \sin f(m)x\right| \le c_l l + c_{L+1}L + \left|\sum_{m=l}^{L}(c_m - c_{m+1})S_m(x)\right|$$
$$\le 2\sup_{k\ge l} c_k k + \sum_{m=l}^{L}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)|. \tag{2.33}$$

Далее будем считать, что $l \ge 9$, чтобы применять оценки из параграфа 2.1. С помощью Следствий 2.1 и 2.2, мы оценим $S_m(x)$ для удобных и почти удобных m, учитывая, что в этих случаях $\sin \frac{n!y_1\dots y_{n-1}x}{2\pi}$, грубо говоря, редко принимает близкие к нулю значения. Для этих значений m мы нигде не используем нечётность f и тот факт, что коэффициенты f рациональны.

Итак, если m удобное, из Следствия 2.1 получаем

$$\sum_{\substack{m\ge l\\ \text{удобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \le D\sum_{m\ge l}(c_m - c_{m+1})m^{1-\frac{\varepsilon}{2^n}} \le Dc_l l^{1-\frac{\varepsilon}{2^n}} + 2D\sum_{m\ge l} c_m m^{-\frac{\varepsilon}{2^n}}$$
$$\le D\Big(1 + 2\sum_{m\ge l} m^{-1-\frac{\varepsilon}{2^n}}\Big)\sup_{k\ge l} c_k k \le D\Big(1 + \frac{2^{n+1}}{\varepsilon}\Big)\sup_{k\ge l} c_k k$$
$$\le D\frac{2^{n+2}}{\varepsilon}\sup_{k\ge l} c_k k =: D''\sup_{k\ge l} c_k k. \tag{2.34}$$

Заметим, что за каждым почти удобным числом m закреплено натуральное число $M = M(m) \le m^{\varepsilon}$, $M \in \mathfrak{M}$, причём все числа m, за которыми закреплено данное M, должны удовлетворять условию

$$\Big|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C}{M}\Big|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} =: \beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \le m \le \beta^{-\frac{1}{1-\varepsilon}}. \tag{2.35}$$

Для почти удобных m с учётом (2.35) и Следствия 2.2, имеем

$$\sum_{\substack{m\ge l\\ \text{почти удобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \le \sum_{M\in\mathfrak{M}}\sum_{\substack{m\ge l,\ M=M(m)\\ \text{почти удобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)|$$
$$\le D_1\sum_{m\ge l}(c_m - c_{m+1})m^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}$$
$$+ D_1\beta^{-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}}\sum_{M\in\mathfrak{M}} M^{-\frac{1}{2^n(n-1)}}\sum_{\substack{m\ge l\\ m=\lceil\beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\rceil}}^{\lfloor\beta^{-\frac{1}{1-\varepsilon}}\rfloor}(c_m - c_{m+1})m^{1-\frac{n-\varepsilon}{2^{n-1}(n-1)}}.$$

Первую сумму оценим как в (2.34), получим

$$\sum_{\substack{m\geq l\\ \text{почти удобное}}} (c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \tag{2.36}$$

$$\leq D''\frac{D_1}{D}\sup_{k\geq l} c_k k + 2D_1\beta^{-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}}\sum_{M\in\mathfrak{M}} M^{-\frac{1}{2^n(n-1)}}\sum_{\substack{m\geq l\\ m=\lceil\beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\rceil}}^{\lfloor\beta^{-\frac{1}{1-\varepsilon}}\rfloor} c_m m^{-\frac{n-\varepsilon}{2^{n-1}(n-1)}}$$

$$\leq D''\frac{D_1}{D}\sup_{k\geq l} c_k k + 2D_1\beta^{-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}}\sum_{M\in\mathfrak{M}} M^{-\frac{1}{2^n(n-1)}}\frac{2^{n-1}(n-1)}{n-\varepsilon}\left(\lceil\beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\rceil\right)^{-\frac{n-\varepsilon}{2^{n-1}(n-1)}}\sup_{k\geq l} c_k k$$

$$\leq D_1''\sup_{k\geq l} c_k k, \tag{2.37}$$

где D_1'' зависит лишь от n и ε, в силу (2.32).

Перейдём теперь к неудобным числам m. В этом случае x приближается π-рациональными дробями слишком хорошо, поэтому разность между S_m, взятым в точке x, и S_m, взятым в близкой π-рациональной точке, будет контролируемо небольшой. При некоторых m мы этим воспользуемся, и это будет тот единственный случай, когда нам важно, что мы оцениваем только мнимую часть соответствующей суммы Вейля, что функция f нечётна и что коэффициенты f рациональные. Для остальных m будем проводить оценки, согласно одному из двух неравенств из Следствия 2.3, и эти оценки останутся справедливыми для всей суммы Вейля и для любого приведённого многочлена той же степени.

За каждым неудобным числом m также закреплено число $M \leq m^\varepsilon$, $M \in \mathfrak{M}$. Фиксированное $M \in \mathfrak{M}$ закреплено за всеми натуральными числами m такими, что $\beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} = \beta_M^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} = \left|\frac{n!x}{2\pi} - \frac{C}{M}\right|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \geq m \geq M^{\frac{1}{\varepsilon}}$, где $C = C_M$, и только за ними. Обозначим $m_1 = \lceil M^{\frac{1}{\varepsilon}}\rceil$, $m_2 = \left\lfloor\beta^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\right\rfloor$ (при фиксированном M). Пусть K — такое натуральное число, что

$$\frac{1}{K^n\ln(2M)} \leq \beta \leq \frac{1}{(K-1)^n\ln(2M)}. \tag{2.38}$$

Мы разделим отрезок $m_1 \leq m \leq m_2$ на три отрезка: $m_1 \leq m \leq K-1$, $K \leq m \leq \lfloor 2K\ln(2M)\rfloor$ и $\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor + 1 \leq m \leq m_2$. Для m, принадлежащего второму или третьему из этих отрезков, будем оценивать $S_m(x)$ с помощью первого и второго неравенств, соответственно, из Следствия 2.3. И только на отрезке $m_1 \leq m \leq K-1$ для оценки $S_m(x)$ нам понадобятся свойства многочлена f и тот факт, что мы имеем дело с синусами, а не с косинусами.

Пусть $Q \in \mathbb{N}$ — минимальное такое число, что $Qf \in \mathbb{Z}[x]$. Заметим, что для любого нечётного l, если числа k_1 и k_2 таковы, что $k_1 \equiv -k_2 \pmod{QMn!}$, то $\sin\left(k_1^l\frac{2\pi C}{QMn!}\right) + \sin\left(k_2^l\frac{2\pi C}{QMn!}\right) = 0$.

Значит, для любого $g \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\sum_{k=g+1}^{g+QMn!} \sin\Big(f(k)\frac{2\pi C}{Mn!}\Big) = 0,$$

откуда

$$|S_m(x)| \le \Big|S_m\Big(\frac{2\pi C}{Mn!}\Big)\Big| + \Big|S_m(x) - S_m\Big(\frac{2\pi C}{Mn!}\Big)\Big| \le \Big|\sum_{k=1}^{m} \sin\Big(f(k)\frac{2\pi C}{Mn!}\Big)\Big| + \frac{2\pi}{n!}\sum_{k=1}^{m}|f(k)|\beta$$
$$\le \Big\{\frac{m}{QMn!}\Big\}QMn! + 2C_f\beta\sum_{k=1}^{m}k^n \le QMn! + C_f m^{n+1}\beta \le Qm^{\varepsilon}n! + C_f m^{n+1}\beta, \quad (2.39)$$

где C_f — сумма модулей коэффициентов многочлена f. Из (2.38) и (2.39) имеем

$$\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \le Qn!\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})m^{\varepsilon} + C_f\beta\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})m^{n+1}$$
$$\le Qn!c_{m_1}m_1^{\varepsilon} + Qn!\sum_{m=m_1+1}^{K-1}c_m\varepsilon(m-\theta_m)^{\varepsilon-1} + \frac{C_f}{(K-1)^n\ln(2M)}\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})m^{n+1}, \quad (2.40)$$

где $\theta_m \in (0,1)$, по теореме Лагранжа. Учитывая, что для любого $z \ge 2$ выполнено $(z-1)^{\varepsilon-1} \le 2z^{\varepsilon-1}$, из (2.40) следует

$$\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)|$$
$$\le Qn!m_1^{\varepsilon-1}\sup_{k\ge l}c_k k + 2\varepsilon Qn!\sum_{m=m_1+1}^{K-1}c_m m^{\varepsilon-1} + C_f\frac{c_{m_1}m_1}{\ln(2M)} + C_f\frac{n+1}{(K-1)^n\ln(2M)}\sum_{m=m_1+1}^{K-1}c_m m^n$$
$$\le \sup_{k\ge l}c_k k\Big(Qn!m_1^{\varepsilon-1} + 2\varepsilon Qn!\sum_{m=m_1+1}^{K-1}m^{\varepsilon-2} + \frac{C_f}{\ln(2M)} + \frac{(n+1)C_f}{(K-1)^n\ln(2M)}\sum_{m=m_1+1}^{K-1}m^{n-1}\Big)$$
$$\le \Big(Qn!\Big(m_1^{\varepsilon-1} + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}m_1^{\varepsilon-1}\Big) + \frac{C_f}{\ln(2M)} + \frac{(n+1)C_f}{(K-1)^n\ln(2M)}\frac{K^n}{n}\Big)\sup_{k\ge l}c_k k, \quad (2.41)$$

откуда в силу того, что $m_1^{\varepsilon} \ge M$, и того, что $\frac{(n+1)K^n}{n(K-1)^n} \le 2^{n+1}$, окончательно имеем

$$\sum_{m=m_1}^{K-1}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \le A\Big(M^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{\ln(2M)}\Big)\sup_{k\ge l}c_k k, \quad (2.42)$$

где $A > 0$ зависит только от n, ε и многочлена f.

При $2K\ln(2M) \le m \le m_2$ имеем

$$m^n\beta \ge \big(2K\ln(2M)\big)^n\big(K^n\ln(2M)\big)^{-1} = 2^n\ln^{n-1}(2M) \ge 2(2\ln 2)^{n-1} \ge 2,$$

а значит, с учётом (2.29),

$$\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m - c_{m+1})|S_m(x)| \le J\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m - c_{m+1})\Big(m^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}} + \frac{m^{1-\frac{n}{2^n(n-1)}}}{(M\beta)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\Big). \quad (2.43)$$

Оценим сначала

$$\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})m^{1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}$$
$$\le \frac{c_{\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}\big(\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1\big)}{\big(\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1\big)^{\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}}+2\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+2}^{m_2}c_m m^{-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}$$
$$\le \left(m_1^{-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}+2\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+2}^{m_2}m^{-1-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}\right)\sup_{k\ge l}c_k k$$
$$\le \left(M^{-\frac{1}{2^{n-1}}}+\frac{2^n}{\varepsilon}m_1^{-\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}}\right)\sup_{k\ge l}c_k k\le \frac{2^{n+1}}{\varepsilon}M^{-\frac{1}{2^{n-1}}}\sup_{k\ge l}c_k k. \tag{2.44}$$

Далее, в силу (2.38), имеем

$$\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})\frac{m^{1-\frac{n}{2^n(n-1)}}}{(M\beta)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}$$
$$\le \sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})\frac{m^{1-\frac{n}{2^n(n-1)}}K^{\frac{n}{2^n(n-1)}}\big(\ln(2M)\big)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}$$
$$\le \left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}c_{\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}\big(\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1\big)$$
$$+2\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+2}^{m_2}c_m m^{-\frac{n}{2^n(n-1)}}K^{\frac{n}{2^n(n-1)}}$$
$$\le \left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\left(1+2K^{\frac{n}{2^n(n-1)}}\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+2}^{m_2}m^{-1-\frac{n}{2^n(n-1)}}\right)\sup_{k\ge l}c_k k$$
$$\le \left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\left(1+2K^{\frac{n}{2^n(n-1)}}\left(\frac{2^n(n-1)}{n}\right)\big(\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor\big)^{-\frac{n}{2^n(n-1)}}\right)\sup_{k\ge l}c_k k$$
$$\le H\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\sup_{k\ge l}c_k k, \tag{2.45}$$

где $H>0$ зависит лишь от n. Итак, из (2.43), (2.44) и (2.45) получаем

$$\sum_{m=\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor+1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})|S_m(x)|\le H'\left(\frac{\ln(2M)}{M}\right)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}\sup_{k\ge l}c_k k, \tag{2.46}$$

где $H'>0$ также зависит только от n и f.

При $K\le m\le 2K\ln(2M)$, согласно (2.28),

$$\sum_{m=K}^{\lfloor 2K\ln(2M)\rfloor}(c_m-c_{m+1})|S_m(x)|\le W\sum_{m=K}^{\lfloor 2K\ln(3M)\rfloor}(c_m-c_{m+1})\frac{m}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}$$
$$\le \frac{W}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\left(c_K K+\sum_{m=K+1}^{\lfloor 2K\ln(3M)\rfloor}c_m\right)$$
$$\le \frac{W}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\left(1+2\ln\frac{2K\ln(3M)}{K+1}\right)\sup_{k\ge l}c_k k$$
$$\le 3W\frac{\ln\ln(3M)}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\sup_{k\ge l}c_k k. \tag{2.47}$$

Собирая вместе оценки (2.42), (2.46) и (2.47), получаем

$$\sum_{m=m_1}^{m_2}(c_m-c_{m+1})|S_m(x)|\le A\Big(M^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}+\frac{1}{\ln(2M)}\Big)\sup_{k\ge l}c_kk$$
$$+\left(H'\Big(\frac{\ln(2M)}{M}\Big)^{\frac{1}{2^n(n-1)}}+3W\frac{\ln\ln(3M)}{M^{\frac{1}{2^n(n-1)}}}\right)\sup_{k\ge l}c_kk\le A'\frac{\sup_{k\ge l}c_kk}{\ln(2M)},\qquad(2.48)$$

где $A'>0$ зависит лишь от ε,n и f. А значит, учитывая, что $M\in\mathfrak{M}$ и (2.32), окончательно имеем

$$\sum_{\substack{m\ge l\\ \text{неудобное}}}(c_m-c_{m+1})|S_m(x)|\le\sum_{i\ge1}A'\frac{\sup_{k\ge l}c_kk}{\ln(2M_i)}\le A'\Big(\frac{1}{\ln2}+\sum_{i\ge2}\frac{1}{\ln M_i}\Big)\sup_{k\ge l}c_kk$$
$$\le A'\Big(\frac{1}{\ln2}+\frac{1}{\ln2}\sum_{i\ge2}\frac{1}{3^{i-2}}\Big)\sup_{k\ge l}c_kk\le\frac{3}{\ln2}A'\sup_{k\ge l}c_kk.\qquad(2.49)$$

Итак, объединяя оценки (2.33), (2.49), (2.34) и (2.36), получаем

$$\Big|\sum_{m=l}^{L}c_m\sin f(m)x\Big|\le2\sup_{k\ge l}c_kk+\frac{3}{\ln2}A'\sup_{k\ge l}c_kk+D''\sup_{k\ge l}c_kk+D_1''\sup_{k\ge l}c_kk\le A''\sup_{k\ge l}c_kk,$$

где $A''>0$ зависит лишь от ε,n и f. Таким образом, утверждение доказано для $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Q}$.

Наконец, если $x\in\pi\mathbb{Q}$, найдём такое $x'\notin\pi\mathbb{Q}$, что $|x-x'|\le L^{-n-1}c_1^{-1}\sup_{k\ge l}c_kk$, тогда

$$\Big|\sum_{m=l}^{L}c_m\sin f(m)x\Big|\le\Big|\sum_{m=l}^{L}c_m\sin f(m)x'\Big|+\Big|\sum_{m=l}^{L}c_m\sin f(m)x-\sum_{m=l}^{L}c_m\sin f(m)x'\Big|$$
$$\le A''\sup_{k\ge l}c_kk+C_f\sum_{m=l}^{L}c_mm^n|x-x'|$$
$$\le A''\sup_{k\ge l}c_kk+C_fL^{-n-1}\sup_{k\ge l}c_kk\sum_{m=l}^{L}m^n\le(A''+C_f)\sup_{k\ge l}c_kk,\qquad(2.50)$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

2.3 Случай степени из интервала (1,2)

Специфика этого случая состоит в том, что при $\alpha\in(1,2)$ разности $(k+1)^\alpha-k^\alpha$ возрастают, и возрастают достаточно медленно. Идея доказательства заключается в следующем: выделить блоки таких k, что разности $(k+1)^\alpha x-k^\alpha x$, взятые по модулю 2π, лежат близко к 0 или 2π. Тогда "шаги" между $k^\alpha x$ и $(k+1)^\alpha x$ в таких блоках достаточно малы, и суммы вида $\sum_{k=k_1}^{k_1+s}\sin k^\alpha x$ в них можно оценить с помощью Леммы 2.5. Для остальных же k сумма вида $\sum_{k=k_1}^{k_1+s}\sin k^\alpha x$ мало отличается от суммы

$$\sum_{k=0}^{s}\sin(x_0+k\gamma)=\frac{\cos\left(x_0-\frac{\gamma}{2}\right)-\cos\left(x_0+(2k+1)\frac{\gamma}{2}\right)}{2\sin\frac{\gamma}{2}},$$

где γ отделена от 0 и 2π, а значит, $\sin\frac{\gamma}{2}$ отделён от нуля. Основная трудность состоит в выборе длин таких блоков: они не должны быть слишком маленькими, чтобы обеспечить нужную оценку всей суммы, но при этом не должны быть и большими, иначе слова "мало отличается" потеряют всякий смысл, так как внутри длинного блока разности $(k+1)^\alpha x - k^\alpha x$ успеют сильно измениться.

Доказательство Теоремы 2.1 (c) для случая $\alpha \in (1,2)$. Пусть выполнено условие $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$. Покажем, что ряд (2.1) сходится равномерно на множестве $|x| \le X < \infty$. Без ограничения общности будем далее считать, что $x > 0$ (случай $x = 0$ очевиден). Зафиксируем некоторое число δ из интервала $(0, \frac{2-\alpha}{3})$. Положим натуральное число $l_0 \ge 2$ таким, чтобы выполнялись условия

$$\Big(\frac{\pi}{\alpha(\alpha-1)} - 1\Big) l_0^2 \ge \pi, \qquad l_0^{1-\frac{\alpha}{2}} > 4\sqrt{\pi}\ln^2 l_0, \qquad l_0^{\frac{2-\alpha}{3}-\delta} > 4\ln^2 l_0. \tag{2.51}$$

Тогда для любого $l \ge l_0$ все эти условия также выполнены.

Рассмотрим

$$\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x,$$

где $l \ge l_0$, а $x \in (0, X]$ — фиксированная точка. Обозначим $m := \lceil x^{-\frac{1}{\alpha}} \rceil$, тогда

$$\Big|\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Big| \le \Big|\sum_{k=l}^{m-1} c_k \sin k^\alpha x\Big| + \Big|\sum_{k=m}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Big| =: |S_1| + |S_2|. \tag{2.52}$$

Если $m = 1$, то $S_1 = 0$. Иначе $2 \le m \le x^{-\frac{1}{\alpha}} + 1 \le 2x^{-\frac{1}{\alpha}}$, и мы имеем

$$|S_1| \le \sum_{k=l}^{m-1} c_k k^\alpha x \le \sup_{k\ge l} c_k k \sum_{k=1}^{m-1} k^{\alpha-1} x \le x \sup_{k\ge l} c_k k \int_1^{2x^{-\frac{1}{\alpha}}} y^{\alpha-1} dy \le \frac{2^\alpha}{\alpha} \sup_{k\ge l} c_k k. \tag{2.53}$$

Далее обозначим

$$\Delta_k^1 := k^\alpha x - (k-1)^\alpha x, \qquad \Delta_k^2 := \Delta_k^1 - \Delta_{k-1}^1, \qquad \tilde\Delta_k^1 := \Delta_k^1 \mod 2\pi,$$

так что $\tilde\Delta_k^1 \in [0, 2\pi)$. Заметим, что Δ_k^2 убывает по k. Действительно, по теореме Лагранжа

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\Delta_k^2}{x}\Big)'_k &= \alpha\Big(k^{\alpha-1} - 2(k-1)^{\alpha-1} + (k-2)^{\alpha-1}\Big) \\ &= \alpha(\alpha-1)\Big((k-1+\theta_1)^{\alpha-2} - (k-2+\theta_2)^{\alpha-2}\Big) < 0,\end{aligned} \tag{2.54}$$

где $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Также заметим, что

$$\Delta_k^2 = \alpha x\Big((k-1+\theta_3)^{\alpha-1} - (k-2+\theta_4)^{\alpha-1}\Big) \le 2\alpha(\alpha-1)x(k-2)^{\alpha-2}, \tag{2.55}$$

где $\theta_3, \theta_4 \in (0,1)$, и что

$$\Delta_k^2 \geq \frac{1}{2}(\Delta_{k+1}^2 + \Delta_k^2) = \frac{1}{2}(\Delta_{k+1}^1 - \Delta_{k-1}^1) = \frac{1}{2}\alpha x\Big((k+\theta_5)^{\alpha-1} - (k-2+\theta_6)^{\alpha-1}\Big)$$
$$\geq \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x(k+1)^{\alpha-2}, \tag{2.56}$$

где снова $\theta_5, \theta_6 \in (0,1)$. Пусть

$$K_1 := \Big\{k : \tilde{\Delta}_{k+1}^1 \in [0, m^{-\delta}] \cup [2\pi - m^{-\delta}, 2\pi]\Big\}, \quad K_2 := \Big\{k : \tilde{\Delta}_{k+1}^1 \in [m^{-\delta}, 2\pi - m^{-\delta}]\Big\}.$$

Тогда имеем

$$|S_2| \leq \Big|\sum_{\substack{k=m \\ k\in K_1}}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Big| + \Big|\sum_{\substack{k=m \\ k\in K_2}}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Big| =: |S_2'| + |S_2''|. \tag{2.57}$$

Сначала оценим S_2'. Согласно (2.54) и (2.55), при $k \geq m+2$ выполнено $\Delta_k^2 \leq 2\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}$. Значит, можно выбрать такое $p = p(m)$, что

$$p := \min\Big\{p' > 1 : |\Delta_{m+p'}^1 - \Delta_{m+1}^1 - 2\pi| \leq 2\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}\Big\}.$$

Заметим, что тогда

$$2\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}p \geq 2\pi - 2\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2},$$

откуда

$$p \geq -1 + \frac{2\pi}{2\alpha(\alpha-1)x}m^{2-\alpha} \geq m^{2-\alpha}x^{-1}, \tag{2.58}$$

в силу первого условия из (2.51).

Так как Δ_k^1 возрастает по k, (см., например, (2.56)), и так как p мы выбрали минимальным, то $0 < \Delta_{m+p-1}^1 - \Delta_{m+1}^1 < 2\pi$, и значит, среди $\tilde{\Delta}_{m+1}^1$, $\tilde{\Delta}_{m+2}^1, ..., \tilde{\Delta}_{m+p}^1$ встречается не более трёх блоков подряд идущих $\tilde{\Delta}_i^1$, то есть блоков из $\tilde{\Delta}_{i_1}^1, \tilde{\Delta}_{i_1+1}^1, ..., \tilde{\Delta}_{i_1+i_2}^1$, значения в которых возрастают и лежат в одном из отрезков $[0, m^{-\delta}]$ или $[2\pi - m^{-\delta}, 2\pi]$. Остановимся на случае отрезка $[0, m^{-\delta}]$, второй случай разбирается аналогично. Пусть наш блок — это $\tilde{\Delta}_{s+1}^1$, $\tilde{\Delta}_{s+2}^1, ..., \tilde{\Delta}_{s+v}^1$. Без ограничения общности можем считать, что $s^\alpha x \in [\pi u, \pi(u+1)) =: I_u$ для некоторого чётного u. Пусть t таково, что

$$s^\alpha x + \sum_{i=0}^{t} \tilde{\Delta}_{s+i}^1 \in I_u, \qquad s^\alpha x + \sum_{i=0}^{t+1} \tilde{\Delta}_{s+i}^1 \notin I_u.$$

Тогда должно выполняться по крайней мере

$$\pi \geq (t-1)\Delta_{s+2}^2 + (t-2)\Delta_{s+3}^2 + ... + 1 \cdot \Delta_{s+t}^2. \tag{2.59}$$

Из (2.56) и (2.59) тогда имеем

$$\pi \geq \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x\Big((t-1)(s+3)^{\alpha-2}+(t-2)(s+4)^{\alpha-2}+\ldots+1\cdot(s+t+1)^{\alpha-2}\Big). \tag{2.60}$$

Заметим, что функция $\kappa(y)=y(a-y)^{-c}+(b-y)(a-b+y)^{-c}$ не возрастает при $c>0,\ a\geq b\geq 2y>0$. Действительно,

$$\kappa'(y)=(a-y)^{-c}-y(-c)(a-y)^{-c-1}-(a-b+y)^{-c}+(b-y)(-c)(a-b+y)^{-c-1}<0,$$

так как $a-y\geq a-b+y$ и $y\leq b-y$. Значит, при $c=2-\alpha,\ b=t,\ a=s+t+2$ и $y=t-i,\ i=1,2,\ldots,\lfloor\frac{t-1}{2}\rfloor$, имеем

$$(t-i)(s+2+i)^{\alpha-2}+i(s+t+2-i)^{\alpha-2}\geq 2\frac{t}{2}\Big(s+2+\frac{t}{2}\Big)^{\alpha-2},$$

откуда, с учётом (2.60),

$$\pi\geq\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x(t-1)\frac{t}{2}\Big(s+2+\frac{t}{2}\Big)^{\alpha-2}\geq\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x(t-1)\frac{t-1}{2}\Big(s+2+\frac{t-1}{2}\Big)^{\alpha-2}. \tag{2.61}$$

Если $t-1\geq 2(s+2)$, то из (2.61) имеем

$$\pi\geq\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x\frac{(t-1)^{\alpha}}{2}\geq\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}(t-1)^{\alpha}m^{-\alpha},$$

откуда $t-1\leq\big(\frac{4\pi}{\alpha(\alpha-1)}\big)^{\frac{1}{\alpha}}m\leq\frac{4\pi}{\alpha-1}m\leq\frac{4\pi}{\alpha-1}(s+2)$. А тогда из (2.61) получаем

$$\pi\geq\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x\frac{(t-1)^2}{2}\Big(\frac{4\pi}{\alpha-1}+1\Big)^{\alpha-2}(s+2)^{\alpha-2}>\frac{(\alpha-1)^2}{20\pi}(t-1)^2(s+2)^{\alpha-2}x,$$

значит,

$$t<\frac{8}{\alpha-1}(s+2)^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+1\leq\frac{27}{\alpha-1}s^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.62}$$

Обозначим $t_0:=t$, а t_i при $i\geq 1$ определим следующим образом:

$$s^{\alpha}x+\sum_{j=1}^{t_i}\tilde{\Delta}^1_{s+j}\in I_{u+i},\quad s^{\alpha}x+\sum_{j=1}^{t_i+1}\tilde{\Delta}^1_{s+j}\notin I_{u+i}.$$

При этом обозначим R — минимальное чётное число, для которого выполнено $s^{\alpha}x+\sum_{j=1}^{v}\tilde{\Delta}^1_{s+j}<\pi(u+R+2)$. Тогда, рассуждая аналогично выводу (2.62), получим

$$t_1<\frac{54}{\alpha-1}s^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.63}$$

Также имеем

$$\sum_{k=s}^{s+v}c_k\sin k^{\alpha}x=\sum_{k=s}^{s+t_0}c_k\sin k^{\alpha}x+\sum_{i=0}^{\frac{R}{2}-1}\sum_{k=s+t_{2i}+1}^{s+t_{2i+2}}c_k\sin k^{\alpha}x+\sum_{k=s+t_R}^{s+v}c_k\sin k^{\alpha}x. \tag{2.64}$$

Заметим, что, учитывая (2.62),

$$\sum_{k=s}^{s+t_0}c_k\sin k^{\alpha}x\leq tc_s<\frac{27}{\alpha-1}s^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}c_s\leq\frac{27}{\alpha-1}s^{-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\sup_{k\geq l}c_k k. \tag{2.65}$$

Лемма 2.5. *Пусть точки $y_1, ..., y_k$ таковы, что $0 < y_1 \le y_2 - y_1 \le y_3 - y_2 \le ... \le y_k - y_{k-1}$, $y_k \le 2\pi$ и пусть номер q таков, что $y_q \le \pi < y_{q+1}$ и $y_{q+1} - y_q = a < \pi$. Тогда $\sum_{i=1}^{k} \sin y_i \ge -\sin \frac{a}{2}$.*

Доказательство. Пусть μ таково, что $\sin y_\mu \ge \sin y_i$ при всех i, а ν таково, что $\sin y_\nu \le \sin y_i$ при всех i. Заметим, что тогда

$$y_1, ..., y_{\mu-1} \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big],\ y_{\mu+1}, ..., y_q \in \Big[\frac{\pi}{2}, \pi\Big],\ y_{q+1}, ..., y_{\nu-1} \in \Big[\pi, \frac{3\pi}{2}\Big],\ y_{\nu+1}, ..., y_k \in \Big[\frac{3\pi}{2}, \pi\Big].$$

В таком случае при $1 \le i \le \mu - 1$ имеем $y_{i+1} - y_i \le a$, а значит,

$$\sin y_i \ge \max\Big\{ \sin\big(y_\mu - a(M-i)\big),\ 0\Big\}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\mu-1} \sin y_i \ge \sum_{j=1}^{\lceil \frac{y_\mu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\mu - aj).$$

Аналогично, так как при $\mu + 1 \le i \le q$ так же $y_{i+1} - y_i \le a$, то

$$\sum_{i=\mu+1}^{q} \sin y_i \ge \sum_{j=1}^{\lceil \frac{\pi - y_\mu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\mu + aj).$$

Далее, так как при $q + 1 \le i \le k - 1$ выполняется $y_{i+1} - y_i \ge a$, то

$$\sum_{i=q+1}^{\nu-1} \sin y_i \ge \sum_{j=1}^{\lceil \frac{y_\nu - \pi}{a} \rceil - 1} \sin(y_\nu - aj)$$

и

$$\sum_{i=\nu+1}^{k} \sin y_i \ge \sum_{j=1}^{\lceil \frac{2\pi - y_\nu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\nu + aj).$$

То есть

$$\sum_{i=1}^{q} \sin y_i \ge \sum_{j=-\lceil \frac{y_\mu}{a} \rceil + 1}^{\lceil \frac{\pi - y_\mu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\mu + aj) = \frac{\cos\big(y_\mu - \lceil \frac{y_\mu}{a} \rceil a + \frac{a}{2}\big) - \cos\big(y_\mu + \lceil \frac{\pi - y_\mu}{a} \rceil a - \frac{a}{2}\big)}{2\sin\frac{a}{2}} \ge \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

В то же время

$$\sum_{i=q+1}^{k} \sin y_i \ge \sum_{j=-\lceil \frac{y_\nu - \pi}{a} \rceil + 1}^{\lceil \frac{2\pi - y_\nu}{a} \rceil - 1} \sin(y_\nu + aj) = \frac{\cos\big(y_\nu - \lceil \frac{y_\nu - \pi}{a} \rceil a + \frac{a}{2}\big) - \cos\big(y_\nu + \lceil \frac{2\pi - y_\nu}{a} \rceil a - \frac{a}{2}\big)}{2\sin\frac{a}{2}} \ge \frac{-1}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{k} \sin y_i \ge \frac{\cos\frac{a}{2} - 1}{\sin\frac{a}{2}} \ge \frac{\cos^2\frac{a}{2} - 1}{\sin\frac{a}{2}} = -\sin\frac{a}{2}.$$

□

Следствие 2.4. *Пусть точки $y_1, ..., y_k$ как в Лемме 2.5, а последовательность $\{a_j\}$ не возрастает. Тогда $\sum_{i=1}^{k} a_i \sin y_i \geq -a_{q+1} \sin \frac{a}{2}$.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \sin y_i = \sum_{i=1}^{q} a_i \sin y_i + \sum_{i=q+1}^{k} a_i \sin y_i \geq a_{q+1} \sum_{i=1}^{q} \sin y_i + a_{q+1} \sum_{i=q+1}^{k} \sin y_i \geq -a_{q+1} \sin \frac{a}{2}$$

по Лемме 2.5. □

По Следствию 2.4 для любого $0 \leq i \leq \frac{R}{2} - 1$ имеем

$$\sum_{k=s+t_{2i}+1}^{s+t_{2i+2}} c_k \sin k^\alpha x \leq \frac{m^{-\delta}}{2} c_{s+t_{2i+1}+1} \tag{2.66}$$

и

$$\sum_{k=s+t_R}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x \leq \frac{m^{-\delta}}{2} c_{s+t_{R+1}+1}. \tag{2.67}$$

Итак, из (2.64) и (2.65), (2.66) и (2.67), получаем

$$\sum_{k=s}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x \leq \Big(\frac{R}{2} + 1\Big) \frac{m^{-\delta}}{2} c_s + \frac{27}{\alpha - 1} s^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \sup_{k \geq l} c_k k. \tag{2.68}$$

Заметим, что v должно удовлетворять неравенству

$$\Delta^1_{s+v} - \Delta^1_{s+1} \leq m^{-\delta}, \tag{2.69}$$

а по теореме Лагранжа, для некоторых $\theta_7,\ \theta_8 \in (0, 1)$, левую часть (2.69) можно записать в виде

$$\alpha x \Big((s + v - 1 + \theta_7)^{\alpha - 1} - (s + \theta_8)^{\alpha - 1} \Big) \geq \alpha x \Big((s + v - 1)^{\alpha - 1} - (s + 1)^{\alpha - 1} \Big),$$

то есть должно выполняться

$$(s + v - 1)^{\alpha - 1} \leq m^{-\delta} x^{-1} + (s + 1)^{\alpha - 1},$$

откуда

$$\Big(1 + \frac{v - 2}{s + 1}\Big)^{\alpha - 1} \leq m^{-\delta} x^{-1} (s + 1)^{1 - \alpha} + 1. \tag{2.70}$$

По неравенству Бернулли левая часть (2.70) не меньше $1 + (\alpha - 1)\frac{v-2}{s+1}$, откуда получаем

$$(\alpha - 1) \frac{v - 2}{s + 1} \leq m^{-\delta} x^{-1} (s + 1)^{1 - \alpha},$$

а значит,

$$v \le \frac{1}{(\alpha-1)} m^{-\delta} x^{-1} (s+1)^{2-\alpha} + 2 \le \frac{1+2X(\alpha-1)}{(\alpha-1)} m^{-\delta} x^{-1} (s+1)^{2-\alpha}. \tag{2.71}$$

Тогда из (2.54), (2.55) и (2.71) следует, что

$$\begin{aligned} R \le \frac{1}{2\pi} \Delta^2_{s+2} v &\le \frac{\alpha(\alpha-1)}{\pi} s^{\alpha-2} x \frac{1+2X(\alpha-1)}{(\alpha-1)} m^{-\delta} x^{-1} (s+1)^{2-\alpha} \\ &\le \frac{2 \cdot 2^{2-\alpha} \cdot (1+2X)}{\pi} m^{-\delta} \le (2+4X) m^{-\delta}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Из (2.68) и (2.72) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=s}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x &\le (2+4X) m^{-\delta} \frac{m^{-\delta}}{2} c_s + \frac{27}{\alpha-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \sup_{k \ge l} c_k k \\ &\le \left((1+2X) m^{-1-2\delta} + \frac{27}{\alpha-1} s^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \sup_{k \ge l} c_k k, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\sum_{k=m}^{m+p} c_k \sin k^\alpha x \le 3 \left((1+2X) m^{-1-2\delta} + \frac{27}{\alpha-1} m^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \sup_{k \ge l} c_k k.$$

Отсюда, учитывая (2.58),

$$\begin{aligned} S'_2 &\le 3 \sum_{i=0}^{\infty} \left((1+2X) w_i^{-1-2\delta} + \frac{27}{\alpha-1} w_i^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \sup_{k \ge l} c_k k \\ &\le 3 \left((1+2X) \frac{m^{-2\delta}}{2\delta} + \frac{27}{\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} w_i^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right) \sup_{k \ge l} c_k k, \end{aligned} \tag{2.73}$$

где $w_0 := m$, а $w_{i+1} := w_i + w_i^{2-\alpha} x^{-1} \ge w_i + 1$ при $i \ge 0$, а значит,

$$w_i \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{2.74}$$

Вспомним, что $m \ge l \ge l_0 \ge 2$, и рассмотрим функцию

$$F(m) := \int_m^{\infty} \frac{dy}{y \ln^2 y} = \frac{1}{\ln m}.$$

Согласно (2.74),

$$F(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{w_j}^{w_{j+1}} \frac{dy}{y \ln^2 y} =: \sum_{j=0}^{\infty} W_j. \tag{2.75}$$

Пусть для $j = 0, ..., J$ и только для этих значений выполнено $x^{-1} > w_j^{\alpha-1}$, тогда при $j = 0, ..., J-1$ выполнено $w_{j+1} \ge 2 w_j$, а значит,

$$\sum_{i=0}^{J} w_i^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \le m^{-\frac{\alpha}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\frac{i\alpha}{2}} \le \frac{1}{1-2^{-\frac{\alpha}{2}}} \le 4. \tag{2.76}$$

При этом при $j > J$ выполнено $x^{-1} \le w_j^{\alpha-1}$, а тогда, пользуясь неравенством $\ln(1+y) \ge y/2$, верном при $y \le 1$, получаем

$$W_j = \frac{1}{\ln w_j} - \frac{1}{\ln\left(w_j + w_j^{2-\alpha}x^{-1}\right)} = \frac{\ln\left(1 + w_j^{1-\alpha}x^{-1}\right)}{\ln w_j \ln\left(w_j + w_j^{2-\alpha}x^{-1}\right)} \ge \frac{w_j^{1-\alpha}x^{-1}}{2\ln w_j \ln(2w_j)} \ge w_j^{-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.77)$$

Здесь мы воспользовались двойным неравенством

$$w_j^{1-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}} \ge w_j^{1-\frac{\alpha}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}} \ge 4\ln^2 w_j,$$

верным, так как $w_j \ge m \ge l_0$, по второму условию из (2.51). Таким образом, из (2.75) и (2.77),

$$\sum_{i=J+1}^{\infty} w_i^{-\frac{\alpha}{2}}x^{-\frac{1}{2}} \le \sum_{i=J+1}^{\infty} W_j \le F(m) \le \frac{1}{\ln 2}. \quad (2.78)$$

Объединяя оценки (2.76) и (2.78), получим из (2.73)

$$S_2' \le 3\left(\frac{1+2X}{2\delta} + \frac{27}{\alpha-1}\left(4 + \frac{1}{\ln 2}\right)\right)\sup_{k\ge l} c_k k. \quad (2.79)$$

Записывая вместо (2.64)

$$\sum_{k=s}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x = \sum_{k=s}^{s+t_1} c_k \sin k^\alpha x + \sum_{i=2}^{\frac{R}{2}-1} \sum_{k=s+t_{2i-1}+1}^{s+t_{2i+1}} c_k \sin k^\alpha x + \sum_{k=s+t_R}^{s+v} c_k \sin k^\alpha x$$

и рассуждая абсолютно аналогично, с помощью (2.63), получаем

$$S_2' \ge -3\left(\frac{1+2X}{2\delta} + \frac{54}{\alpha-1}\left(4 + \frac{1}{\ln 2}\right)\right)\sup_{k\ge l} c_k k. \quad (2.80)$$

Объединяя (2.79) и (2.80), окончательно имеем

$$|S_2'| \le C(\alpha, X)\sup_{k\ge l} c_k k. \quad (2.81)$$

Теперь рассмотрим S_2''. Пусть $m' = m'(m) \ge m$ — первый номер такой, что $m' \in K_2$. Положим $Q = Q(m) := \lceil m^{\frac{2-\alpha}{3}} \rceil$. Заметим, что при $k \in K_2$ выполнено

$$\frac{m^{-\delta}}{2} \le \frac{\tilde{\Delta}_{k+1}^1}{2} \le \pi - \frac{m^{-\delta}}{2}. \quad (2.82)$$

Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=m'}^{m'+Q-1} c_k \sin k^\alpha x = \sum_{q=0}^{Q-1}(c_{m'+q} - c_{m'+q+1}) \sum_{k=m'}^{m'+q} \sin k^\alpha x + c_{m'+Q} \sum_{k=m'}^{m'+Q-1} \sin k^\alpha x. \quad (2.83)$$

При этом

$$(m'+q)^\alpha x \underset{\mathrm{mod}\ 2\pi}{=} (m')^\alpha x + \sum_{t=1}^{q} \tilde{\Delta}_{m'+t}^1,$$

а тогда из (2.54) и (2.55)

$$\left|(m'+t)^\alpha-(m')^\alpha-\tilde\Delta^1_{m+1}t\right|\le\frac{t(t-1)}{2}\Delta^2_{m'+2}\le t(t-1)\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}. \tag{2.84}$$

Так как для произвольных $g,h\in\mathbb{R}$ выполнено $|\sin(g+h)-\sin g|\le|h|$, то из (2.84) следует, что при $q\le Q-1$

$$\Big|\sum_{k=m'}^{m'+q}\sin k^\alpha x-\sum_{t=0}^{q}\sin\Big((m')^\alpha x+\tilde\Delta^1_{m+1}t\Big)\Big|\le\frac{Q(Q+1)(2Q+1)}{6}\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}$$
$$\le Q^3\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}\le(2m^{\frac{2-\alpha}{3}})^3\alpha(\alpha-1)xm^{\alpha-2}=2^{2-\alpha}\alpha(\alpha-1)x\le 4X. \tag{2.85}$$

При этом, учитывая (2.82),

$$\Big|\sum_{t=0}^{q}\sin\Big((m')^\alpha x+\tilde\Delta^1_{m+1}t\Big)\Big|=\left|\frac{\cos\Big((m')^\alpha x-\frac{\tilde\Delta^1_{m+1}}{2}\Big)-\cos\Big((m')^\alpha x+\frac{\tilde\Delta^1_{m+1}(2q+1)}{2}\Big)}{2\sin\frac{\tilde\Delta^1_{m+1}}{2}}\right|$$
$$\le\frac{2}{2\frac{2}{\pi}\frac{m^{-\delta}}{2}}=\pi m^\delta. \tag{2.86}$$

Из (2.85) и (2.86) имеем

$$\Big|\sum_{k=m'}^{m'+q}\sin k^\alpha x\Big|\le\pi m^\delta+4X\le(\pi+4X)m^\delta, \tag{2.87}$$

а из (2.87) и (2.83) следует, что

$$\Big|\sum_{k=m'}^{m'+Q-1}c_k\sin k^\alpha x\Big|\le c_{m'}(\pi+4X)m^\delta\le c_m(\pi+4X)m^\delta\le(\pi+4X)m^{\delta-1}\sup_{k\ge l}c_kk. \tag{2.88}$$

Пусть $Q'=Q'(m)\ge Q(m)$ — наименьшее число такое, что $m'+Q'\in K_2$. Положим $m_0:=m$, $m_{i+1}:=m'(m_i)+Q'(m_i)$ при всех $i\ge0$. Так как

$$Q'\ge Q\ge m^{\frac{2-\alpha}{3}},$$

то

$$m_{i+1}\ge m_i+m_i^{\frac{2-\alpha}{3}}. \tag{2.89}$$

Заметим, что в сумме, стоящей в левой части (2.88), могут встречаться блоки таких k, что $k\in K_1$ и значения $\tilde\Delta^1_{k+1}$ в одном блоке возрастают и лежат в одном из отрезков $[0,m^{-\delta}]$, $[2\pi-m^{-\delta},2\pi]$. Сумму по каждому из таких блоков оценим как в (2.68) при оценке соответствующего блока в S'_2. Тогда из (2.81), (2.88) и (2.89), а также, вспоминая, что $\delta<\frac{2-\alpha}{3}<1$, имеем

$$|S''_2|\le C(\alpha,X)\sup_{k\ge l}c_kk+(\pi+4X)\sup_{k\ge l}c_kk\sum_{i=0}^{\infty}c_{m_i}m_i^{\delta-1}$$
$$\le C(\alpha,X)\sup_{k\ge l}c_kk+(\pi+4X)\sup_{k\ge l}c_kk\sum_{i=0}^{\infty}z_i^{\delta-1}, \tag{2.90}$$

где $z_0 := m,\ z_{i+1} := z_i + z_i^{\frac{2-\alpha}{3}} \geq z_i + 1$ для любого i, а значит, $z_i \to \infty$ при $i \to \infty$, следовательно,

$$F(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dy}{y \ln^2 y} =: \sum_{j=0}^{\infty} Z_j. \tag{2.91}$$

Положим для удобства $\frac{2-\alpha}{3} =: \gamma > \delta$. Пользуясь неравенством $\ln(1+y) \geq y/2$, справедливым при $y \leq 1$, имеем

$$Z_j = \frac{1}{\ln z_j} - \frac{1}{\ln\left(z_j + z_j^{\gamma}\right)} = \frac{\ln\left(1 + z_j^{\gamma-1}\right)}{\ln z_j \ln\left(z_j + z_j^{\gamma}\right)} \geq \frac{z_j^{\gamma-1}}{2 \ln z_j \ln(2 z_j)} > z_j^{\delta-1}. \tag{2.92}$$

Последнее неравенство в (2.92) следует из неравенства

$$z_j^{\gamma-\delta} > 4 \ln^2 z_j,$$

которое выполнено, поскольку $z_j \geq l_0$, и по третьему условию из (2.51). А тогда из (2.90), (2.91) и (2.92) вытекает

$$\begin{aligned} |S_2''| &\leq C(\alpha, X) \sup_{k \geq l} c_k k + (\pi + 4x) \sup_{k \geq l} c_k k \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \\ &= C(\alpha, X) \sup_{k \geq l} c_k k + (\pi + 4X) F(m) \sup_{k \geq l} c_k k \leq \left(C(\alpha, X) + \frac{\pi + 4X}{\ln 2}\right) \sup_{k \geq n} c_k k. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Окончательно, объединяя (2.52), (2.53), (2.57), (2.81) и (2.93), получаем

$$\left| \sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^{\alpha} x \right| \leq \left(\frac{2^{\alpha}}{\alpha} + 2C(\alpha, X) + \frac{\pi + 4X}{\ln 2} \right) \sup_{k \geq l} c_k k,$$

откуда и вытекает, что при выполнении условия $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$, наш ряд сходится равномерно. □

2.4 Случай степени из интервала (0,1)

Доказательство Теоремы 2.1 (c) для случая $\alpha \in (0, 1)$. Пусть выполнено условие $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$. Покажем, что ряд (2.1) сходится равномерно на множестве $|x| \leq X < \infty$. Без ограничения общности далее будем считать, что $x > 0$. Возьмём $D \geq 3$ — нечётное число, удовлетворяющее следующим условиям:

$$(\pi X^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} D^{\frac{1}{\alpha}-1} \geq 12\alpha, \quad \left(1 + \frac{1}{D}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \leq \frac{4}{3}, \quad \left(1 - \frac{3}{2\alpha}\frac{1}{D}\right)^{\alpha-1} \leq \frac{4}{3}, \quad \left(1 + \frac{3}{2D}\right)^{\frac{1}{\alpha}-2} \leq 2, \tag{2.94}$$

и положим $E := D + 1$. Рассмотрим в произвольной точке $x \in (0, X]$ сумму $\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^{\alpha} x$. Если $x \leq \pi L^{-\alpha}$, имеем

$$0 \leq \sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^{\alpha} x \leq x \sum_{k=l}^{L} c_k k^{\alpha} \leq x \sup_{k \geq l} c_k k \sum_{k=l}^{L} k^{\alpha-1} \leq \pi L^{-\alpha} \frac{(2L)^{\alpha}}{\alpha} \sup_{k \geq l} c_k k =: C_1 \sup_{k \geq l} c_k k. \tag{2.95}$$

Если же $x \geq \pi l^{-\alpha}$ и $L^\alpha x - l^\alpha x \leq 6\pi$, то имеем $L^\alpha - l^\alpha \leq \frac{6\pi}{x} \leq 6l^\alpha$, откуда $L \leq 7^{\frac{1}{\alpha}} l$, а значит,

$$\Big|\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Big| \leq \sum_{k=l}^{L} c_k \leq c_l(L-l+1) < 7^{\frac{1}{\alpha}} l c_l \leq 7^{\frac{1}{\alpha}} \sup_{k\geq l} c_k k =: C_2(\alpha) \sup_{k\geq l} c_k k. \tag{2.96}$$

Остался лишь случай, когда $x \geq \pi l^{-\alpha}$ и $L^\alpha x - l^\alpha x > 6\pi$.

Пусть нечётные числа $d_1,\ d_2$ и чётные числа $e_1,\ e_2$ таковы, что

$$\pi(e_1-2) < xl^\alpha \leq \pi e_1, \quad \pi(d_1-2) < xl^\alpha \leq \pi d_1,$$
$$\pi e_2 \leq xL^\alpha < \pi(e_2+2), \quad \pi d_2 \leq xL^\alpha \leq \pi(d_2+2).$$

Заметим, что для любых $\gamma > 0$ и $d \geq 3$ выполнено

$$F(\gamma,d) = F(\gamma,d,\alpha) := \frac{\lfloor(\gamma d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor - \Big\lfloor\big(\gamma(d-2)\big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor}{\Big\lfloor\big(\gamma(d-2)\big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor + 1} \leq \frac{2\Big((\gamma d)^{\frac{1}{\alpha}} - \big(\gamma(d-2)\big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big)}{\big(\gamma(d-2)\big)^{\frac{1}{\alpha}}}$$
$$\leq \frac{2\Big((\gamma d)^{\frac{1}{\alpha}} - \big(\gamma(d-2)\big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big)}{\big(\gamma(d-2)\big)^{\frac{1}{\alpha}}} = 2\Big(\Big(\frac{d}{d-2}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\Big) \leq 2\big(3^{\frac{1}{\alpha}} - 1\big) =: C.$$

Тогда имеем

$$\Big|\sum_{k=l}^{\lfloor(\pi x^{-1}d_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} c_k \sin k^\alpha x\Big| \leq c_l \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}(d_1-2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}d_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} 1 \leq c_l\Big(\Big\lfloor\big(\pi x^{-1}(d_1-2)\big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor + 1\Big)F(\pi x^{-1}, d_1)$$
$$\leq l c_l F(\pi x^{-1}, d_1) \leq C \sup_{k\geq l} c_k k. \tag{2.97}$$

Аналогично

$$\Big|\sum_{k=l}^{\lfloor(\pi x^{-1}e_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} c_k \sin k^\alpha x\Big| \leq C \sup_{k\geq l} c_k k. \tag{2.98}$$

Далее

$$\Big|\sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Big| \leq c_{\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1} \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(e_2+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} 1$$
$$\leq c_{\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}\Big(\big\lfloor(\pi x^{-1}e_2)^{\frac{1}{\alpha}}\big\rfloor + 1\Big)F(\pi x^{-1}, e_2+2) \leq C \sup_{k\geq l} c_k k. \tag{2.99}$$

Аналогично

$$\Big|\sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}d_2)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Big| \leq C \sup_{k\geq l} c_k k. \tag{2.100}$$

Теперь рассмотрим сумму

$$S(d) := \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} \sin k^\alpha x = \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+\frac{1}{2}))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} + \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}(d+\frac{1}{2}))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor}$$
$$+ \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+\frac{3}{2}))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} + \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}(d+\frac{3}{2}))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} \sin k^\alpha x =: S_1(d)+S_2(d)+S_3(d)+S_4(d),$$

где $d \geq D$ — нечётное число.

Сначала покажем, что сумма $S_2(d)+S_3(d)$ не может быть слишком велика, так как большую часть слагаемых, входящих в суммы $S_2(d)$ и $S_3(d)$, можно разбить на пары так, что сумма значений в парах будет близка к нулю и неположительна. Пусть в s-й паре значения k будут $\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s$ и $\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor-1-s$, где

$$s = 0,1,...,\min\left\{\left\lfloor\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor - \left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor,\right.$$
$$\left.\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor - \left\lfloor\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor - 1\right\}. \tag{2.101}$$

Заметим, что ровно одна пара состоит из слагаемых $S_2(d)$, а каждая из остальных пар состоит из одного слагаемого $S_2(d)$ и одного слагаемого $S_3(d)$. Сумма слагаемых в s-й паре равна

$$\sin\left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor+s\right)^\alpha x + \sin\left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor-1-s\right)^\alpha x$$
$$= 2\sin\left(\left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor+s\right)^\alpha + \left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor-1-s\right)^\alpha\right)\frac{x}{2}$$
$$\cdot\cos\left(\left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor+s\right)^\alpha - \left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor-1-s\right)^\alpha\right)\frac{x}{2}. \tag{2.102}$$

Согласно (2.101), аргумент каждого косинуса в (2.102) лежит на отрезке $[0,\pi/2]$, а значит, все косинусы неотрицательны. Покажем теперь, что аргументы всех синусов в (2.102) лежат в полуинтервале $[\pi d,\pi(d+1))$, из чего будет следовать неположительность этих синусов. В силу выпуклости вверх функции $\chi(y)=y^\alpha$ ($\chi''(y)=\alpha(\alpha-1)y^{\alpha-2}<0$ при $y>0$) на $\mathbb{R}^+$, аргумент синуса не превосходит

$$2\left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor-\frac{1}{2}\right)^\alpha\frac{x}{2} < \pi(d+1).$$

В то же время, имеем

$$\left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 1 < \left(\pi x^{-1}(d+2)\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{2}, \tag{2.103}$$

так как по теореме Лагранжа, найдётся $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ такая, что

$$(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\Big((d+2)^{\frac{1}{\alpha}} - \Big(d+\frac{3}{2}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big) \geq (\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{2\alpha}\Big(d+\frac{3}{2}+\theta\Big)^{\frac{1}{\alpha}-1} \geq (\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{2\alpha}\Big(d+\frac{3}{2}+\theta\Big)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$
$$\geq (\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{2\alpha}D^{\frac{1}{\alpha}-1} \geq 6 > \frac{3}{2}$$

по первому условию из (2.94). Значит, из (2.103),

$$s \leq \Big(\pi x^{-1}(d+2)\Big)^{\frac{1}{\alpha}} - \Big(\pi x^{-1}(d+1)\Big)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{2},$$

а тогда

$$\frac{s+\frac{1}{2}}{\big(\pi x^{-1}(d+1)\big)^{\frac{1}{\alpha}}} < \Big(\frac{d+2}{d+1}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \leq \frac{4}{3\alpha(d+1)}, \tag{2.104}$$

так как функция $t(y) = (1+y)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 - 4y/3\alpha$ обращается в нуль при $y = 0$, а $t'(y) = ((1+y)^{\frac{1}{\alpha}-1} - 4/3)/\alpha \leq 0$ при $y \leq 1/D$ согласно второму из условий (2.94). Также

$$\frac{3}{\big(2\pi x^{-1}(d+1)\big)^{\frac{1}{\alpha}}} < \frac{2}{(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}(d+1)^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \frac{1}{6\alpha(d+1)}, \tag{2.105}$$

учитывая первое из условий (2.94) и то, что $d \geq D$. А тогда, из (2.104) и (2.105), аргумент каждого синуса в правой части (2.102) не меньше чем

$$\begin{aligned}
&\Big(\Big(\pi x^{-1}(d+1)\Big)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{3}{2} + \max\Big(s+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\alpha}\frac{x}{2} + \Big(\Big(\pi x^{-1}(d+1)\Big)^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{3}{2} - \max\Big(s+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\alpha}\frac{x}{2} \\
&\qquad \geq \Big(1 - \frac{3}{2(\pi x^{-1}(d+1))^{1/\alpha}} + \frac{4}{3\alpha(d+1)}\Big)^{\alpha}\frac{\pi(d+1)}{2} \\
&\qquad + \Big(1 - \frac{3}{2(\pi x^{-1}(d+1))^{1/\alpha}} - \frac{4}{3\alpha(d+1)}\Big)^{\alpha}\frac{\pi(d+1)}{2} \\
&\qquad \geq \Big(\Big(1 - \frac{1}{6\alpha(d+1)} + \frac{4}{3\alpha(d+1)}\Big)^{\alpha} + \Big(1 - \frac{1}{6\alpha(d+1)} - \frac{4}{3\alpha(d+1)}\Big)^{\alpha}\Big)\frac{\pi(d+1)}{2} \\
&\qquad \geq \Big(1 + \Big(1 - \frac{3}{2\alpha(d+1)}\Big)^{\alpha}\Big)\frac{\pi(d+1)}{2}.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Покажем, что последнее выражение не меньше чем πd. Для этого достаточно показать, что в точке $y = (d+1)^{-1}$ неотрицательна функция

$$g(y) = 1 + \Big(1 - \frac{3}{2\alpha}y\Big)^{\alpha} - 2 + 2y = \Big(1 - \frac{3}{2\alpha}y\Big)^{\alpha} - 1 + 2y.$$

Заметим, что $g(0) = 0$, а

$$g'(y) = -\frac{3}{2}\Big(1 - \frac{3}{2\alpha}y\Big)^{\alpha-1} + 2 \geq 0$$

при $y \leq 1/D$ по третьему условию из (2.94). Таким образом, из (2.106) и сделанного замечания следует, что аргумент каждого синуса в правой части (2.102) не меньше чем πd. При

этом, нетрудно заметить, что каждый из этих аргументов также не больше чем $(\pi+1)d$, а значит, все синусы в правой части (2.102), неположительны, откуда следует неположительность всей суммы по выбранным нами парам. Если без пары осталось некоторое слагаемое из $S_2(d)$, оценим его сверху нулём.

Оценим количество слагаемых из $S_3(d)$, которые могли остаться без пары. Если такие есть, то поскольку у нас есть ровно одна пара, состоящая из слагаемых $S_2(d)$, а все остальные пары содержат по одному слагаемому из $S_2(d)$ и $S_3(d)$, то слагаемых из $S_3(d)$, оставшихся без пары, ровно

$$\begin{aligned}\Big(\Big\lfloor\Big(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{3}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor-\Big\lfloor\Big(\pi x^{-1}(d+1)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor\Big)&\\ -\Big(\Big\lfloor\Big(\pi x^{-1}(d+1)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor-\Big\lfloor\Big(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor-2\Big)&\\ \le\Big(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{3}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}-2\Big(\pi x^{-1}(d+1)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}+\Big(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}+4&\\ \le\frac{2}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}+4.&\qquad(2.107)\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались теоремой Лагранжа для функции $w(y)=y^{\frac{1}{\alpha}}$:

$$w(y+1)-2w\Big(y+\frac{1}{2}\Big)+w(y)=w'\Big(y+\frac{1}{2}+\theta_1\Big)-w'(y+\theta_2)=\Big(\frac{1}{2}+\theta_1-\theta_2\Big)w''(y+\theta_0),$$

где $\theta_1,\ \theta_2\in[0,\frac{1}{2}],\ \theta_0\in[0,1]$. Отсюда

$$\begin{aligned}w(y+1)-2w\Big(y+\frac{1}{2}\Big)+w(y)\le\sup_{[y+\frac{1}{2},y+\frac{3}{2}]}w''(z)=\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)\max\Big\{\Big(d+\frac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{\alpha}-2},\Big(d+\frac{3}{2}\Big)^{\frac{1}{\alpha}-2}\Big\}&\\ \le\frac{2}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{1/\alpha-2}&\end{aligned}$$

согласно четвёртому из условий (2.94), откуда и следует справедливость оценки (2.107).

Из вышесказанного следует, что

$$S_2(d)+S_3(d)\le\frac{2}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}+4.\qquad(2.108)$$

Покажем теперь, что сумма $S_1(d)$ мало отличается от $S_2(d)$, а $S_4(d)$ — от $S_3(d)$. Каждому

$$s=1,2,...,\Big\lfloor\Big(\pi x^{-1}(d+1)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor-\Big\lfloor\Big(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor=:s_{max}\qquad(2.109)$$

поставим в соответствие одно из

$$k_s=\Big\lfloor\Big(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\Big\rfloor-\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1,...,\Big\lfloor\Big(\pi x^{-1}(d+1)\Big)^{1/\alpha}\Big\rfloor-\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor\qquad(2.110)$$

так, что

$$k_s:=\min\Big\{k\in\mathbb{N}:\Big(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+k\Big)^{\alpha}\ge\pi x^{-1}(2d+1)-\Big(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+s\Big)^{\alpha}\Big\}.\qquad(2.111)$$

Тогда, так как

$$\pi d \le \left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + s\right)^{\alpha} x \le \pi\left(d+\frac{1}{2}\right) \le \left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + k_s\right)^{\alpha} x \le \pi(d+1),$$

и

$$\pi\left(d+\frac{1}{2}\right) - \left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + s\right)^{\alpha} x \le \left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + k_s\right)^{\alpha} x - \pi\left(d+\frac{1}{2}\right),$$

то

$$\sin\left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + s\right)^{\alpha} x \le \sin\left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + k_s\right)^{\alpha} x. \tag{2.112}$$

Заметим, что

$$\left(\pi x^{-1}(2d+1) - \left((\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}} - 1 + s\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - (\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}} + 2 \le \left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1, \tag{2.113}$$

так как

$$\left(\pi x^{-1}(2d+1) - \pi x^{-1}d\right)^{\frac{1}{\alpha}} - (\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}} + 3 - \left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 3 - (\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}} \le 0$$

в силу $d \ge D \ge 3$. Тогда из (2.113) следует

$$\left(\pi x^{-1}(2d+1) - \left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + s\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + 1 \le \left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor,$$

а значит, для каждого s из (2.109) найдётся k_s, удовлетворяющее (2.110) и (2.111).

Покажем также, что $k_{s_1} \ne k_{s_2}$ при $s_1 \ne s_2$. Так как k_s не возрастает с возрастанием s, то достаточно показать, что $k_s > k_{s+1}$. Действительно, из (2.111) видим, что

$$k_s \ge \left(\pi x^{-1}(2d+1) - \left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + s\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor > k_s - 1,$$

а значит, достаточно показать справедливость

$$\begin{aligned}\left(\pi x^{-1}(2d+1) - \left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + s\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor \\ > \left(\pi x^{-1}(2d+1) - \left(\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + s + 1\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor + 1.\end{aligned} \tag{2.114}$$

Обозначим для краткости $a = \pi x^{-1}(2d+1)$, $b = \lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor$ и рассмотрим функцию

$$h_{a,b}(s) = \left(a - (b+s)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тогда по теореме Лагранжа $h_{a,b}(s) - h_{a,b}(s+1) = -h'_{a,b}(s_0)$, где $s_0 \in (1, s_{max})$. При этом

$$h'_{a,b}(s) = -\left(a - (b+s)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}(b+s)^{\alpha-1},$$

то есть $|h'_{a,b}|$ убывает по $b+s$, а следовательно, учитывая, что $b+s \le \left(\pi x^{-1}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ согласно (2.109), на интервале $(1, s_{max})$ имеем

$$|h'_{a,b}(s)| > \left(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\left(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha-1} = 1.$$

Отсюда $h_{a,b}(s) - h_{a,b}(s+1) > 1$, а значит, (2.114) выполнено.

Итак, каждому s, удовлетворяющему (2.109), мы инъективно сопоставили k_s, удовлетворяющее (2.110) и (2.111), так, что для каждого s имеет место (2.112), то есть каждое слагаемое $S_1(d)$ оценивается сверху соответствующим слагаемым из $S_2(d)$. Число слагаемых в $S_2(d)$, не участвующих в этой оценке, есть

$$\begin{aligned}\left\lfloor\left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor - \left\lfloor\left(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor - \left(\left\lfloor\left(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\rfloor - \lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor\right)\\ \le \left(\pi x^{-1}(d+1)\right)^{\frac{1}{\alpha}} + (\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}} - 2\left(\pi x^{-1}\Big(d+\frac{1}{2}\Big)\right)^{\frac{1}{\alpha}} + 2\\ \le \frac{2}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2\end{aligned}$$

аналогично оценке (2.107). Таким образом,

$$S_1(d) \le S_2(d) + \frac{2}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2. \tag{2.115}$$

Проводя совершенно аналогичные рассуждения для $S_3(d)$ и $S_4(d)$, получим для $d \ge D$

$$\begin{aligned}S_4(d) &\le S_3(d) + \frac{2}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)(d+1)^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2\\ &\le S_3(d) + \frac{4}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2\end{aligned} \tag{2.116}$$

с учётом четвёртого из условий (2.94).

Итак, собирая вместе оценки (2.97), (2.100), (2.108), (2.115) и (2.116), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x &\le 2C\sup_{k\ge l} c_k k + \sum_{\substack{d\ge d_1\\ d \text{ нечетно}}}^{D-2}\ \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} c_k \sin k^\alpha x + \sum_{\substack{d\ge D\\ d \text{ нечетно}}}^{d_2-2}\ \sum_{k=\lfloor(\pi x^{-1}d)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}^{\lfloor(\pi x^{-1}(d+2))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} c_k \sin k^\alpha x\\ &\le 2C\sup_{k\ge l} c_k k + c_{\lfloor(\pi x^{-1}d_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor+1}\Big(\lfloor(\pi x^{-1}D)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor - \lfloor(\pi x^{-1}d_1)^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor\Big) + \sum_{\substack{d\ge D\\ d \text{ нечетно}}}^{d_2-2} c_{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor} S(d)\\ &\le 2C\sup_{k\ge l} c_k k + 2\left(\Big(\frac{D}{d_1}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)\sup_{k\ge l} c_k k\\ &+ 2\sum_{\substack{d\ge D\\ d \text{ нечетно}}}^{d_2-2} c_{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor}\left(S_2(d) + S_3(d) + \frac{3}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}} + 2\right)\end{aligned}$$

$$\le 2C\sup_{k\ge l} c_k k + 2(D^{\frac{1}{\alpha}}-1)\sup_{k\ge l} c_k k + 2\sum_{\substack{d\ge D\\ d \text{ нечетно}}}^{d_2-2} c_{\lfloor(\pi x^{-1}(d+1))^{\frac{1}{\alpha}}\rfloor}$$
$$\cdot\left(\frac{2}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}+4+\frac{3}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{\frac{1}{\alpha}-2}(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}+2\right)$$
$$\le 2C\sup_{k\ge l} c_k k + 2(D^{\frac{1}{\alpha}}-1)\sup_{k\ge l} c_k k + 2\sup_{k\ge l} c_k k\sum_{d\ge d_1}\frac{5}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)d^{-2}+\frac{6}{(\pi x^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}}d^{-\frac{1}{\alpha}}$$
$$\le\left(2C+2(D^{\frac{1}{\alpha}}-1)+\frac{10}{\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)D^{-1}+\frac{6}{(\pi X^{-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)D^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)\sup_{k\ge l} c_k k$$
$$\le\left(2C+2(D^{\frac{1}{\alpha}}-1)+\Big(\frac{10}{\alpha}+2X^2\Big)\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)\right)\sup_{k\ge l} c_k k =: C_3\sup_{k\ge l} c_k k. \tag{2.117}$$

Проводя совершенно аналогичные рассуждения с e_1, e_2 и E вместо d_1, d_2 и D и оценивая $S(e)$ снизу, с учётом (2.98) и (2.99), получим

$$\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x \ge -C_4\sup_{k\ge l} c_k k. \tag{2.118}$$

В итоге, объединяя оценки (2.95), (2.96), (2.117) и (2.118), имеем

$$\Big|\sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x\Big| \le \max\{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4\}\sup_{k\ge l} c_k k,$$

откуда и следует равномерная сходимость. □

Замечание 2.5. *Если вместо синус-ряда (2.1) рассматривать соответствующий косинус-ряд, то легко заметить, что условие $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$ является необходимым для его сходимости в точке 0, а при натуральном α — и для сходимости в точках вида $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.*

2.5 Доказательство Теоремы 2.2

Для $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$ назовём *дискретной (α,γ)-окрестностью нуля* такую последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, что $|x_j| = \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1}(N+j)^\alpha}$ при всех $j \in \mathbb{Z}^+$ и некотором $N \in \mathbb{N}$.

Теперь мы готовы сформулировать критерий равномерной сходимости рядов (2.1).

Теорема 2.2. *Пусть неотрицательная последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает. Тогда*

(a) Если α — чётное натуральное число, то ряд (2.1) сходится равномерно на множестве, содержащем точку вида $\pi/2 + 2\pi m$ или $2\pi/3 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

(b) Если α — нечётное натуральное число, то ряд (2.1) сходится равномерно на множестве, содержащем при некотором $\gamma \ge 2$ дискретную (α,γ)-окрестность нуля, тогда и только тогда, когда $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$.

(c) Если $\alpha \in (0,2)$, *то ряд* (2.1) *сходится равномерно на ограниченном множестве, содержащем при некотором* $\gamma \geq 2$ *дискретную* (α,γ)*-окрестность нуля, тогда и только тогда, когда* $c_k k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Замечание 2.6. *Пункты (a) и (b) Теорем 2.1 и 2.2 остаются справедливыми, если условие монотонности коэффициентов* $\{c_k\}$ *ослабить до принадлежности классу* $RBVS$ (*см.* (0.2)).

Замечание 2.7. *В частности, в пункте (b) (в пункте (c)) условие* $c_k k \to 0$ *является необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда* (2.1) *на любом (ограниченном) множестве, содержащем проколотую окрестность нуля.*

Доказательство Теоремы 2.2. Пункт (a) Теоремы 2.2 очевидным образом вытекает из Теоремы 2.1 (a).

В силу Теоремы 2.1 (b), (c), для доказательства соответствующих пунктов Теоремы 2.2 достаточно показать, что при любом $\alpha > 0$ условие $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$ является необходимым для равномерной сходимости ряда (2.1) на множестве, содержащем при некотором $\gamma \geq 2$ дискретную (α,γ)-окрестность нуля. Пусть ряд (2.1) сходится равномерно на некотором множестве X, содержащем дискретную (α,γ)-окрестность нуля, и пусть $2 \leq \gamma, N$ — числа, фигурирующие в определении такой окрестности. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Для него найдётся $l_0 = l_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $l_0 \geq N$ такое, что при любом $L > l \geq l_0$ и любом $x \in X$ будет выполнено $\left| \sum_{k=l}^{L} c_k \sin k^\alpha x \right| < \varepsilon$. Тогда возьмём любое $l \geq l_0$ и положим $x_0 = \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1} l^\alpha}$ (либо x_0, либо $-x_0$ содержится в X), получим

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=l+1}^{2l} c_k \sin k^\alpha x_0 \right| = \left| \sum_{k=l+1}^{2l} c_k \sin k^\alpha \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1} l^\alpha} \right|.$$

Заметим, что аргумент каждого из синусов здесь не превосходит $\frac{\pi}{2}$, а значит, имеем

$$\varepsilon > \frac{2}{\pi} \sum_{k=l+1}^{2l} c_k k^\alpha \frac{\pi}{\gamma^{\alpha+1} l^\alpha} \geq 2\gamma^{-\alpha-1} \sum_{k=l+1}^{2l} c_k \geq 2\gamma^{-\alpha-1} l c_{2l} = \gamma^{-\alpha-1} c_{2l} 2l, \tag{2.119}$$

то есть $c_{2l} 2l \leq \gamma^{\alpha+1}\varepsilon$. При этом

$$c_{2l+1}(2l+1) \leq c_{2l} 4l \leq 2\gamma^{\alpha+1}\varepsilon, \tag{2.120}$$

откуда и следует необходимость условия. □

Доказательство Замечания 2.6. Оценки из доказательства Теоремы 2.1 (a), (b) остаются с точностью до констант верными при замене разностей вида $c_m - c_{m+1}$ на их модули. Дей-

ствительно, это вытекает из соотношений

$$\sum_{k=l}^{L} |c_k - c_{k+1}| k^{\xi} = l^{\xi} \sum_{k=l}^{L} |c_k - c_{k+1}| + \sum_{k=l}^{L} \left((k+1)^{\xi} - k^{\xi} \right) \sum_{j=l}^{L} |c_k - c_{k+1}|$$

$$\leq V c_l l^{\xi} + V C(\xi) \sum_{k=l}^{L} c_k k^{\xi - 1}, \tag{2.121}$$

где $\xi > 0$, V из (0.2), и

$$c_k \leq c_m + \sum_{l=m}^{k-1} |c_l - c_{l+1}| \leq (V+1) c_m \tag{2.122}$$

при $k > m$. Из неравенства (2.121) следует справедливость (2.34), (2.36), (2.40), (2.41), (2.44), (2.45) и (2.47) с соответствующими изменениями, а из (2.122) — справедливость (2.31), (2.50), (2.119) и (2.120). □

Заключение

В диссертации исследуются вопросы о поведении классических тригонометрических рядов, а также тригонометрических рядов с нецелыми и полиномиальными гармониками, коэффициенты которых удовлетворяют некоторым условиям монотонного типа. Получены следующие новые результаты.

Найдена точная верхняя оценка на меру множества нулей невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0, \pi]$, что ставит точку в исследованиях этого вопроса. Также получены новые нижние оценки на меру множества положительности такого ряда на отрезке $[0, \pi]$, а также точная нижняя оценка на меру множества положительности такого ряда на отрезке $[\pi/2, \pi]$. В доказательстве этих утверждений важную роль играет полученное в работе неравенство $nf(x) \geq f(nx)$, справедливое всюду на интервале $(0, 2\pi/n)$ при всех натуральных $n > 1$. Стоит отметить, что задача о точной нижней оценке меры положительности до сих пор остаётся открытой.

Получены критерии равномерной сходимости синус-рядов с полиномиальными и нецелыми гармониками и монотонными коэффициентами, а также коэффициентами из более общего класса. Исследование критериев равномерной сходимости для классических синус-рядов имеет более чем столетнюю историю и развивается довольно активно, однако в аналогичных вопросах для неклассических гармоник имеются большие пробелы.

Список литературы

[1] В. Ф. Гапошкин, О нулях тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Изв. высш. учебн. заведений **172**:9 (1981), 13–15.

[2] М. И. Дьяченко, О рядах Фурье с монотонно убывающими коэффициентами и некоторых вопросах гладкости сопряженных функций // Сообщ. АН Груз. ССР **104**:3 (1981), 533–536.

[3] А. С. Белов, Степенные ряды и кривые Пеано // Изв. А СССР. Сер. матем. **49**:4 (1985), 675–704.

[4] М. И. Дьяченко, Теория функций и приближений // Труды 2-й Саратовской зимней школы 24 января - 5 февраля 1984 года, часть 2, Изд-во Саратовского ун-та, 1986, 101–104.

[5] M. I. Dyachenko, On some properties of trigonometric series with monotone decreasing coefficients // Anal.Math. **10**:3 (1984), 193–205.

[6] T. W. Chaundy, A. E. Jolliffe, The uniform convergence of a certain class of trigonometric series // Proc. London Math. Soc. **15** (1916), 214–216.

[7] J. R. Nurcombe, On the uniform convergence of sine series with quasimonotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. **166**:2 (1992), 577–581.

[8] С. Б. Стечкин, Тригонометрические ряды с коэффициентами монотонного типа // Тр. ИММ УрО РАН, **7**:1 (2001), 197–207.

[9] L. Leindler, On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. **27**:4 (2001), 279–285.

[10] S. Tikhonov, Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), 721–731.

[11] S. Tikhonov, Best approximation and moduli of smoothness: computation and equivalence theorems // J. Approx. theory **153** (2008), 19–39.

[12] M. Dyachenko, A. Mukanov, S. Tikhonov, Uniform convergence of trigonometric series with general monotone coefficients // Canad. J. Math. **71**:6 (2019), 1445–1463.

[13] S. Kęska, On the uniform convergence of sine series with square root // J. Func. Sp. (2019), 1–11.

[14] И. М. Виноградов, Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена // Изв. Акад. наук СССР **21**:4 (1927), 567–578.

[15] Л. Д. Пустыльников, Распределение дробных частей значений многочлена, суммы Вейля и эргодическая теория // УМН **48**:4 (1993), 131–166.

[16] S. Chowla, H. Davenport, On Weyl's inequality and Waring's problem for cubes // Acta Arithm. **6** (1961), 505–521.

[17] D. R. Heath-Brown, Bounds for the cubic Weyl sum // J. Math. Sci. **171**:6 (2010), 813–823.

[18] T. D. Wooley, Mean value estimates for odd cubic Weyl sums // Bull. London Math. Soc. **47**:6 (2015), 946–957.

[19] Н. М. Коробов, Тригонометрические суммы и их приложения, Москва, Наука, 1989.

[20] К. И. Осколков, О спектрах равномерной сходимости // Докл. АН СССР **1**:288 (1986), 54–58.

[21] Г. И. Архипов, К. И. Осколков, Об одном специальном тригонометрическом ряде и его применениях // Матем. сб. **134**:176 (**2**:10) (1987), 147–157.

[22] К. И. Осколков, Ряды и интегралы И. М. Виноградова и их приложения // Тр. МИАН СССР **190** (1989), 186–221.

Работы автора по теме диссертации

[23] К. А. Оганесян, Мера множества нулей суммы невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0, \pi]$ // Матем. заметки **103**:4 (2018), 576–581.

[24] К. А. Оганесян, Одно функциональное неравенство для синус-рядов // Матем. заметки, **107**:3 (2020), 476–478.

[25] K. Oganesyan, The sets of positivity of sine series with monotone coefficients // Acta Math. Hungar., **162**:2 (2020), 705–721.

[26] К. А. Оганесян, Критерий равномерной сходимости негармонических синус-рядов // Матем. сб., **212**:1 (2021), 78–118.

Тезисы конференций

[27] К. А. Оганесян, Мера положительности суммы невырожденного синус-ряда с монотонными коэффициентами на отрезке $[0, \pi]$ // Современные проблемы математики и механики, Материалы Международной конференции, посвящённой 80-летию академика РАН В. А. Садовничего, стр. 480–482.

[28] К. А. Оганесян, Об одной задаче П. Л. Ульянова // Современные проблемы теории функций и их приложения, Материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 2018 г., стр. 218–220.

[29] К. А. Оганесян, Критерий равномерной сходимости негармонических синус-рядов // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2021 г., стр. 230–231.