ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации
Оганесян Кристины Артаковны
“Оценки и неравенства для тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами”,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа посвящена изучению поведения классических тригонометрических рядов по синусам с монотонными коэффициентами и тригонометрических рядов по синусам с нецелыми и полиномиальными гармониками. Рассмотрены задачи о максимально возможной мере множества нулей и множества положительности синус-ряда с монотонными коэффициентами, а также задачи об условиях равномерной сходимости синус-рядов с нецелыми и полиномиальными гармониками.

Тригонометрические ряды являются классическим, одним из наиболее старых и известных способов представления функций. Более двухсот лет назад благодаря работам Ж.-Б.Фурье они нашли практическое применение как конструкция при построении решений краевых задач для дифференциальных уравнений. С тех пор теория тригонометрических рядов не только фантастически обогатилась результатами и идеями, но и стала источником и катализатором для появления новых направлений и объектов исследований в различных областях анализа и математики в целом.

Исследованию тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами посвящено большое число работ, как классических, так и недавних. Такие ряды представляют интерес, поскольку их поведение гораздо лучше поддается описанию, чем поведение произвольных тригонометрических рядов. Благодаря этому известно значительное число красивых и полезных свойств тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами. Кроме того, решения многих теоретических и прикладных задач могут быть представлены в виде рядов с монотонными или “монотонноподобными” коэффициентами. Следует также отметить, что исследования, касающиеся тригонометрических рядов с нецелыми гармониками, могут оказаться полезными и получить дальнейшее развитие в теории почти периодических функций. Таким образом, тематика диссертации, несомненно, является актуальной.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы, включающего 29 наименований. Общий объем диссертации составляет 69 страниц.

Рассмотрим содержание диссертации по главам.

Во введении приведены необходимые определения и используемые в диссертации обозначения, дан исторический обзор результатов, связанных с тематикой диссертации, сформулированы основные результаты диссертации.

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \tag{1}$$

где $a_1 > 0$ и последовательность коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю. Объектом исследования в первой главе являются функции вида (1). Рассмат-

риваются задачи о том, насколько большой может быть мера множества нулей и множества положительности функции f вида (1) на отрезке $[0, \pi]$.

В 1979 году П.Л.Ульяновым была поставлена серия задач о том, насколько "большим" может быть множество нулей функции вида (1). В процессе исследования этих задач в 1981 году сначала В.Ф.Гапошкин показал, что множество

$$\{x \in [0, \pi] : f(x) = 0\}, \tag{2}$$

где f вида (1), может иметь мощность континуума, а затем М.И.Дьяченко доказал, что это множество может иметь положительную меру. Далее А.С.Белов (1985) и, независимо, М.И.Дьяченко (1986) установили, что мера множества (2) не может быть больше $\pi/2$. С другой стороны, А.С.Белов (1985) построил пример функции вида (1), у которой множество (2) имеет меру $\pi/3$.

В параграфе 1.1 диссертации доказано (теорема 1.1), что для любой функции f вида (1)

$$\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) = 0\} \leq \frac{\pi}{3}.$$

Этот результат вместе с упомянутым выше примером А.С.Белова полностью решает задачу о том, насколько большим по мере может быть множество (2) для функции вида (1).

При доказательстве теоремы 1.1 существенно используется неравенство

$$2f(x) \geq f(2x), \quad x \in [0, \pi],$$

справедливое для любой функции вида (1). В параграфе 1.2 это неравенство обобщается со случая множителя 2 на случай произвольного натурального множителя n (теорема 1.2): для любой функции f вида (1), любого $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, и $x \in (0, 2\pi/n)$

$$nf(x) \geq f(nx),$$

причем равенство здесь достигается лишь в конечном числе точек.

Далее рассматривается задача о мере множества положительности функции вида (1) на отрезке $[0, \pi]$. Диссертант выдвигает гипотезу о том, что эта мера должна быть не меньше, чем $2\pi/3$. В параграфе 1.3 получено утверждение в направлении исследования этой гипотезы (теорема 1.3): для всех функций f вида (1)

$$\mu\{x \in [0, \pi] : f(x) > 0\} \geq \frac{\pi}{2} + 0,24.$$

В параграфе 1.4 исследуются множества положительности функции вида (1) на отрезках $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$. В теореме 1.4, в частности, получена неулучшаемая оценка

$$\mu\{x \in [\pi/2, \pi] : f(x) > 0\} \geq \frac{\pi}{6}.$$

В этом же параграфе показано, что сформулированная гипотеза о мере положительности верна, если на разность первых коэффициентов ряда в (1) $a_1 - a_2$ или $a_2 - a_3$ наложить дополнительные условия (следствие 1.8 и следствие 1.9).

Вторая глава диссертации посвящена изучению рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^{\alpha} x, \tag{3}$$

где $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая стремящаяся к нулю числовая последовательность, а $\alpha > 0$. При нечетных натуральных α рассматриваются также ряды более общего вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin f(k)x, \tag{4}$$

где $f(k)$ — многочлен степени α по нечетным степеням k с рациональными коэффициентами. Исследуется вопрос о необходимых и достаточных условиях равномерной сходимости рядов (3) и (4).

При $\alpha = 1$, то есть в случае классических рядов по синусам с монотонными коэффициентами, задача хорошо изучена. В 1916 году Т.Чаунди и А.Джолифом было показано, что ряд вида (3) в этом случае сходится равномерно тогда и только тогда, когда $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$. В дальнейшем этот результат неоднократно обобщался: условие монотонности последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ заменялось на все более слабые его аналоги. Этой тематике посвящены работы С.Б.Стечкина, Дж.Р.Нуркомба, Л.Ляйнднера, С.Ю.Тихонова, М.И.Дьяченко, А.Муканова.

Для неклассических рядов, когда $\alpha \neq 1$, результаты были известны лишь в случаях $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 2$. В работе S.Kęska 2019 года было показано, что при $\alpha = 1/2$ условие $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$ необходимо и достаточно для равномерной сходимости ряда (3) на отрезке $[0, \pi]$, а для $\alpha = 2$ необходимым и достаточным условием равномерной сходимости ряда (3) является условие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$.

В диссертации рассмотрены случаи, когда $\alpha \in (0, 2)$ и когда α — натуральное число. Основным результатом второй главы является теорема 2.1, в которой получены условия сходимости ряда (3) в указанных случаях. Если α четное натуральное, то условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$ является необходимым для сходимости ряда (3) в точке $\pi/2$ или в точке $2\pi/3$. Если α нечетное натуральное, то для равномерной сходимости на $\mathbb{R}$ ряда (3) и даже ряда более общего вида (4) достаточно, чтобы $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$. Если $\alpha \in (0, 2)$, то для равномерной сходимости ряда (3) на любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}$ также достаточно, чтобы $c_k k \to 0$ при $k \to \infty$. В качестве следствия теоремы 2.1 получены (теорема 2.2) критерии равномерной сходимости рядов на множествах, содержащих некоторые конкретные точки или дискретные окрестности.

В первом параграфе второй главы получены вспомогательные утверждения об оценках сумм Вейля, необходимые в дальнейшем для доказательства теоремы 2.1. Во втором параграфе теорема 2.1 доказана для случая целых α, в третьем параграфе — для $\alpha \in (1, 2)$, в четвертом — для $\alpha \in (0, 1)$. В пятом параграфе приведено доказательство теоремы 2.2.

Переходя к оценке диссертации в целом, отметим, что диссертантом проделана большая работа по исследованию поведения тригонометрических синус-рядов с монотонными коэффициентами и синус-рядов с нецелыми и полиномиальными гармониками. Все основные результаты диссертации являются новыми. В работе усилены или обобщены известные результаты ряда авторов, а также получены продвижения в некоторых новых перспективных задачах. Для доказательства утверждений работы диссертантом изобретены новые идеи и методы, а также успешно применяются известные результаты и методы, в частности, из области теории чисел.

Текст диссертационной работы написан ясно и аккуратно. Утверждения четко

сформулированы и строго доказаны. В работе имеется незначительное количество опечаток. Например, в формулировке теоремы 1.4 на с.10 и 29 в пункте (c) в записи второго множества отрезок должен быть $[0, \pi/2]$; на с.19 в двойном равенстве в строке 9 сверху в среднем выражении знаменатель $2\sin\frac{x}{2}$ не нужен; на с.32 в цепочке преобразований вместо последнего знака равенства должен стоять знак неравенства. В тексте диссертации всюду при ссылке на утверждения работы названия утверждений, встречающиеся в середине предложения, пишутся с большой буквы (например, Теорема 1.1, Следствие 2.2, Лемма 2.3), что не соответствует общепринятым в русскоязычной математической литературе правилам. Отмеченные недочеты носят косметический характер и не влияют на общее положительное впечатление от работы.

Результаты диссертации достаточно полно изложены в четырех работах, опубликованных в ведущих журналах, и доложены на представительных семинарах и конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Диссертация удовлетворяет п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 г., поскольку является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение ряда научных задач, имеющих значение для дальнейшего развития теории функций.

На основании изложенного считаю, что диссертационная работа "Оценки и неравенства для тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами" удовлетворяет всем необходимым требованиям, а ее автор, Оганесян Кристина Артаковна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент Н. Ю. Антонов

Антонов Николай Юрьевич
Доктор физико-математических наук (специальность 01.01.01 – математический анализ), заместитель директора по научной работе ИММ УрО РАН
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru, тел. +73433753404

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН); г.Екатеринбург, ул.С.Ковалевской, 16
e-mail: dir-info@imm.uran.ru, тел. +73433748332

Подпись Н. Ю. Антонова заверяю:

Врио ученого секретаря ИММ УрО РАН
кандидат физ.-мат. наук П. Г. Сурков

16.08.2023