ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Кузнецова Степана Львовича
«Алгоритмические вопросы для субструктурных логик с итерацией Клини»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.5 «Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика»

Диссертация «Алгоритмические вопросы для субструктурных логик с итерацией Клини» С. Л. Кузнецова посвящена исследованию исчислений (логик), которые расширяют исчисления Ламбека в различных направлениях.

Актуальность темы исследования безусловно высока. Рассматриваемые исчисления имеют большое количество интерпретаций: алгебраических, языковых, действий и т. д. Алгебраические интерпретации, которые рассматриваются в диссертации, основаны на алгебрах бинарных отношений. Над ними можно определить большой набор естественных операций. Часть из них как раз и может быть промоделирована изучаемыми исчислениями: композиция, деления, транзитивное замыкание, например.

Другой важный способ интерпретации — это формальные языки и действия над ними. Собственно говоря, именно эта предметная область и послужила исходной мотивацией для Ламбека при создании такого рода исчислений. Теория формальных языков начала активно развиваться в 20 в., являясь одной из молодых отраслей математики. Эта скорость развития обусловлена с одной стороны всё более широким применением математических методов в разных областях, в частности, в лингвистике, а с другой — широким применением формальных языков в задачах разработки программного обеспечения и хранения информации. И часть диссертации напрямую связана с вопросами из теории формальных языков.

Третьим перечисленным методом интерпретации является рассмотрение формул и их последовательностей, как действий и отношений между ними. Поэтому изучаемые исчисления позволяют создавать формальные описания и математические модели различных ситуаций, использовать их, например, как ограничения целостности, как набор инструкций и другими способами.

Таким образом, тема и результаты диссертации имеют большое теоретическое значение, а также могут найти практическое применение.

Работа состоит из титульного листа, оглавления, введения, шести глав основной части, заключения и списка литературы.

Во введении обосновывается актуальность работы, вводятся базовые понятия, даётся описание многих из использованных источников и результатов предыдущих исследований, очерчиваются цели исследования, указываются

основные методы и полученные результаты. В конце введения кратко описывается структура работы и содержание последующих глав.

В первой главе формулируются основные исчисления, которые далее рассматриваются в диссертации. Главным объектом изучения здесь являются правила декомпозиции, их допустимость и выводимость (невыводимость) в различных исчислениях. Далее строится пример секвенции явно различающий исчисления ACT и ACT_ω. Ранее было косвенным способом показано, что эти исчисления различны, но прямой пример отсутствовал.

В главе 2 найдена степень неразрешимости для задач выводимости в исчислениях CommACT и CommACT_ω. Для этого разработан метод кодирования вычисления счётчиковых машин с помощью выводов в указанных исчислениях. Для доказательства Π^0_1-полноты проблема неостановки сводится к выводимости в CommACT_ω. Для доказательства Σ^0_1-полноты проблемы выводимости в CommACT используются более сложные соображения, основанные на свойствах креативных множеств и эффективной неотделимости. Для при этом рассматриваются нефундированные выводы в модифицированном исчислении CommACT_∞ с условием цикличности бесконечных ветвей.

В третьей главе результаты об исчислениях CommACT и CommACT_ω переносятся на некоммутативный случай — исчисления ACT и ACT_ω. Для этого используется техника, позволяющая описывать работу счётчиковых машин с помощью контекстно-свободных языков (порождающих грамматик или распознающих автоматов с магазинной памятью). Полученные результаты аналогичны: Π^0_1-полнота задачи выводимости в исчислении ACT_ω и Σ^0_1-полнота — в исчислении ACT.

В четвёртой главе рассматриваются ограничения ранее введённых исчислений за счёт исключения некоторых операций. В качестве семантики берутся алгебры бинарных отношений и их релятивизации. В начале, например, показана существенность дизъюнкции: исчисления ACT_ω и ACT^+_ω без дизъюнкции не являются полными для таких интерпретаций. Показаны и проблемы, которые возникают из-за констант. В связи с этим вводятся фрагменты исчислений, в которых итерация может быть использована только под знаком деления, — исчисления с итерированными делениями. В этом случае оказывается, что исходные неограниченные исчисления будут консервативными расширениями вновь введённых. Для доказательства слабой полноты рассматривается новый инструмент — определённым образом размеченный граф, который обладает универсальным свойством: в построенной интерпретации истинны в точности выводимые секвенции. Далее механизм доказательства модифицируется, чтобы получить результаты о сильной полноте в случае отсутствия единицы или умножения.

Глава 5 посвящена изучению чисто мультипликативного случая — конъюнкция и дизъюнкция отсутствуют. Технически она наиболее сложна, в ней

предлагается механизм соединяющей формулы, который позволяет моделировать поведение дизъюнкции с помощью только мультипликативных действий. Главными результатами здесь являются Π_1^0-трудность задачи выводимости для L_ω^+ и $\mathrm{L1}_\omega^*$, а также Σ_1^0-полнота задачи выводимости для исчислений L_{dec}^+ и $\mathrm{L1}_{dec}^*$ с правилом декомпозиции. В качестве следствия получена Σ_1^0-полнота ACT, в которой из конъюнкции и дизъюнкции оставлено только что-то одно. Последним крупным результатом данной главы является Π_1^0-полнота задачи выводимости для логик, в которых из операций присутствуют только деления, включая итерированные.

Последняя, шестая, глава наоборот посвящена расширению ранее изученных исчислений с помощью (экспоненциальных) модальностей, которые позволяют управлять использованием правил утончения (ослабления), сокращения и перестановки. В частности, их применение позволяет доказать теорему о дедукции и устранять сечения. Но, как и следовало ожидать, такие мощные инструменты сразу сильно повышают степень неразрешимости: задача выводимости становится Π_1^1-полной. Если при этом потребовать, чтобы выполнялось условие независимости: модальность не применяется к формулам, содержащим итерацию, то задача выводимости одновременно принадлежит классам Π_1^1 и Σ_1^1, то есть является гиперарифметической. Получена для неё и нижняя возможная оценка — Π_2^0. И, наконец, показано, что единственным видом модальности, который повышает оценку сложности задачи выводимости по сравнению со случаем без модальностей, является модальность нелокального сокращения. Без неё оценки вновь возвращаются к уровню Π_1^0-полноты.

В заключении ещё раз перечисляются основные полученные результаты и формулируются новые задачи, которые могут составлять содержание будущих исследований по тематике диссертации.

Общий объём работы составляет 266 страниц, список литературы содержит 95 наименований.

По результатам автор опубликовал 14 работ, в том числе 12 — в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций и индексируемых в международных системах цитирования.

Работа носит теоретический характер. Все результаты являются новыми и строго математически доказаны. Изложение достаточно последовательное. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Полученные результаты вносят большой вклад в изучение выразительных возможностей субструктурных логик. Они могут быть интересны специалистам в области математической логики, формальных языков, математических основ информатики. Эти результаты могут найти и практическое применение, например, при разработке языков представления знаний.

Работа не свободна от некоторых замечаний.

1) Написано $0 \neq x$ вместо $0 \notin x$ (стр. 44, абзац 3 снизу).

2) Для разности множеств традиционным является знак $\setminus$, а не $-$ (стр. 45). Это может быть оправдано, чтобы не путать с левым делением.

3) Не определена итерация ξ^* и η^* (стр. 45, абзац 2 снизу).

4) Язык остаётся в семействе L_2, а не L_1 (стр. 51, второй абзац).

5) Должно быть $a^2 \in p$, а не $\{a, a\} \subseteq p$ (стр. 51).

6) Пропущен индекс ω в названии CommACT (стр. 78, перед теоремой 2.2).

7) Обозначения в лемме 2.3 неудачны: прямым шрифтом обозначены буквы, а теми же символами, но курсивного начертания — их количества. Это запутывает при чтении (стр. 79).

8) Должно быть $\mathrm{a}^{a_2}, \mathrm{b}^{b_2}, \mathrm{c}^{c_2}$ (стр. 84, утверждение 3, строка 5).

9) Должно быть $q' \vee z_a$ (стр. 85, случай 3, строка 1).

10) Должно быть $\mathrm{b}^{b_2}, \mathrm{c}^{c_2}$ (стр. 86, нижний вывод, вверху справа).

11) Иногда одни и те же обозначения используются повторно для совершенно других объектов. Например, $\mathscr{H}$ сначала используется для множеств гипотез на стр. 24 и далее, а потом — как множество пар машина-вход на стр. 92. Знак $\mathscr{C}$ сначала используется как множество пар машина-вход на стр. 92, а потом — как множество модальностей на стр. 213.

12) Нужно K вместо A (стр. 93, определение креативного множества).

13) Термин «вычислимая» используется и для частично рекурсивных, и для общерекурсивных функций. В некоторых случаях это различие существенно (стр. 95).

14) В секвенции пропущено p (стр. 98, строка 1 после первого вывода).

15) Нужно выбирать правую, а не левую посылку (стр. 99, третий абзац).

16) Проверять, что k' является корректной конфигурацией излишне, достаточно, чтобы k' было непусто (стр. 109, абзац 3).

17) Должно быть «положительной итерацией на множестве $\mathscr{P}(U)$ всех бинарных отношений, включённых в U» (стр. 123, определение).

18) Отношение R должно состоять из всех пар вида $(i, i+1)$, а секвенция должна быть $(r \setminus r) \setminus r \to r$ (стр. 123, пример 4.1).

19) Знаки $\vee$ и $\wedge$ перепутаны (стр. 124, строка 11 снизу).

20) В выводах пропущены: правило $\cdot L$ — второй вывод верхняя левая часть, секвенция $A \to A$ — третий вывод верхняя правая часть (стр. 126).

21) Последнее правило — $\wedge L$ (стр. 126, четвёртая снизу строка).

22) Нужны формулы E и F, а не A и B (стр. 134, случай 1, строка 2), и то же самое для случая 2 (стр. 135).

23) Должно быть $\mathfrak{A}$, а не A (стр. 141, строка 3).

24) Пропущено V_n в объединении (стр. 162, строка 4).

25) Термин «поднятие формулы» на стр. 173 я бы назвал неудачным, так как понятие «верх формулы» носит прямо противоположный характер. Скорее нужно было бы говорить «опускание» или «понижение».

26) Пропущен знак секвенции $\to$ (стр. 173, строка 3 снизу).

27) Должно быть C_1, а не C в секвенции (стр. 179, абзац 3, строка 1).

28) Знак v используется как количество нетерминалов грамматики, а потом — как символ переменной (стр. 181).

29) Пропущены знаки выводимости (стр. 188, строки 3 и 4).

30) Неудачно, что правило перестановки обозначено буквой P, а соответствующая ему модальность — буквой e (стр. 214).

31) Должно быть Γ_i, а не Γ_1 в секвенции (стр. 215, строка 4).

32) Пропущено A под знаком модальности (стр. 222, второй снизу вывод, верхняя секвенция), и то же самое в случае 2 (стр. 223).

33) Пропущена посылка в правиле !Mix (стр. 225, верх вывода).

34) Должно быть «ACT, но не в L1*» (стр. 228, абзаца 3, строка 5).

35) Пропущен индекс ω в названии CommACT (стр. 229., теорема 6.5 и доказательство).

36) Термин «условие независимости» неудачен, так как плохо отражает суть понятия (стр. 235).

37) После первого r должно быть \, а не / (стр. 236, строка перед выводом и третья снизу строка вывода).

38) Копия может быть не только формулы A', но и подформулы (стр. 237, абзац 1).

39) Правило $\backslash L$, а не $/L$ (стр. 237, абзац 2).

Также имеется некоторое число грамматических неточностей: «опередение» на стр. 5, «интепретации» на стр. 11, «такого» не согласовано на стр. 17, «выполена» на стр. 27, повтор «докажем установим» на стр. 36, «всякой слово» не согласовано на стр. 58, «интиуционистской» на стр. 69, «дальшней-шая» на стр. 89, «креатвных» на стр. 93, «соответственно» на стр. 112, «эта вхождение» не согласовано на стр. 185, «Напоминим» на стр. 187, посылка не «вводится», а «выводится» (стр. 216, абзац после вывода), «применем» и «антеденте» на стр. 217, пропущен предлог «из» на стр. 218, «секвнецию» на

стр. 236, «аксимой» на стр. 242. Имеются места, где некорректно расставлены запятые (строки 3 и 4 на стр. 5, строка 6 на стр. 6, строка 15 на стр. 7 и далее). Тире довольно часто оказывается в начале строки (строка 8 на стр. 6, строка 5 на стр. 7, строка 5 на стр. 16 и далее).

Указанные замечания носят технический характер и не снижают значимости и корректности полученных в работе новых результатов.

Исходя из вышесказанного, следует сделать вывод, что диссертация Кузнецова Степана Львовича «Алгоритмические вопросы для субструктурных логик с итерацией Клини» представляет собой законченное научное исследование на актуальную тему, отвечает критериям, предъявляемым к докторским диссертациям согласно п. 9 «Положения о присуждении учёных степеней», а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук доцент
декан факультета
прикладной математики и кибернетики
ФГБОУ ВО «Тверской
государственный университет» Дудаков Сергей Михайлович
21.02.2024

Подпись Дудакова С.М.
заверяю:
Проректор по НИД А.В. Зиновьев

Дудаков Сергей Михайлович
доктор физико-математических наук
специальность 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»
170100, Тверь, ул. Желябова, 33
+7 (903) 631–61–72
sergeydudakov@yandex.ru