ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Фарвазовой Айсылу Азатовны
на тему: "Математические задачи максимизации полезности"
по специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

В диссертации А.А. Фарвазовой исследуются актуальные проблемы теории максимизации робастной полезности.

В предварительной части диссертации рассматриваются пары (Φ, Ψ) функций Юнга, сопряженные в смысле Фенхеля одна к другой, и находится соответствие между их производными. Это соответствие имеет приложение в задачах максимизации полезности.

Для $t \in \mathbb{R}_+$ правая производная $a(t)$ функции Юнга $\Phi(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, определяется стандартным образом $a(t) := \Phi'_+(t)$, если при некотором $\varepsilon > 0$ величина $\Phi(t+\varepsilon)$ конечна. В противном случае $a(t) := +\infty$. Аналогичным образом определяется правая производная $c(t) := \Psi'_+(t)$ функции Юнга $\Psi = \Phi^*$,

$$\Phi^*(y) := \sup_{x \geq 0} (x|y| - \Phi(x)).$$

При эквивалентном определение правой производной через субдифференциал $\partial\Phi(t))$ функция

$$\Phi'_+(t) = \sup_{p \in \partial\Phi(t)} \partial\Phi(t)), \text{ если } \partial\Phi(t)) \neq \emptyset$$

В противном случае $\Phi'_+(t) = +\infty$. Аналогичным образом определяется правая производная $\Psi'_+(t)$.

В главе 1 диссертации установлено, что функции $a(t)$ и $c(t)$ — взаимно обратные в следующем смысле:

$$a(s) = \inf\{t : c(t) > s\}, \quad c(t) = \inf\{s : a(s) > t\},$$

причем для положительной борелевской функции g на $\mathbb{R}_+$

$$\int_0^\infty g(t)\, da(t) = \int_0^{a(\infty)} g(c(s))\, ds.$$

В главе 2 находится подходящая двойственная задача для задачи максимизации робастной полезности со случайным терминальным вкладом.

Здесь функция полезности U — вогнутая и монотонно неубывающая функция, определенная на $\mathbb{R}$ и принимающая значения в $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Предполагается, что функция U конечна на полупрямой $(a,+\infty)$ и равна $-\infty$ на $(-\infty,a)$. Функции U сопоставляются функция Юнга $\hat{U}$

$$\hat{U}(x) := -U(-|x|) + U(0), \quad \text{и функции } \hat{V} := \hat{U}^*,\ V = -U^*.$$

Далее, пусть $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$ — вероятностное пространство, а $L_{\mathrm{P}}^{\hat{V}}$ — пространство Орлича по мере P, построенное по функции $\hat{V}$,

$$L_{\mathrm{P}}^{\hat{V}} = \{\xi : \mathrm{E}_{\mathrm{P}}\,\hat{V}(\varepsilon\xi) < \infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}.$$

На измеримом пространстве $(\Omega,\mathscr{F})$ задается такое выпуклое непустое семейство $\mathscr{Q}$ вероятностных мер Q, абсолютно непрерывных относительно меры P, что

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\mathrm{P}} \in L_{\mathrm{P}}^{\hat{V}}, \quad \text{когда } \mathrm{Q}\in\mathscr{Q}.$$

Обозначая $L^0(\mathscr{Q})$ классы эквивалентности случайных величин, совпадающих Q почти всюду при $\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}$, введем пространство Орлича $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$,

$$L^{\hat{U}}(\mathscr{Q}) := \{\xi\in L^0(\mathscr{Q}) : \sup_{\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\,\hat{U}(\varepsilon\xi) < \infty \text{ для некоторго } \varepsilon > 0\}.$$

Пусть, наконец,

$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]},\mathrm{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство;

$S = (S_t,\mathscr{F}_t)$ — векторные семимартингалы;

$L(S)$ — множество всех предсказуемых S-интегрируемых процессов H;

$\mathscr{T} = \left\{H\in L(S) : \inf\limits_{t\in[0,T]} \int\limits_0^t H_u\,dS_u \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})\right\}$ — множество допустимых стратегий.

В диссертации под задачей максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени T понимается следующая задача максимизации

$$\inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\,(B + \int_0^T H_t\,dS_t) \to \sup_{H\in\mathscr{T}}.$$

Здесь случайная величина $B \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$. Ожидаемый результат в абстрактной форме выглядит следующим образом. Пусть $\mathscr{K}$ — множество терминальных капиталов, $\mathscr{C} = (\mathscr{K} - L^0_{\mathrm{P}}) \cap L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$,

$$\mathscr{D} = \{X \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q}) : \inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\, U(X) > -\infty\}.$$

Обозначим $\mathscr{A} = (B + \mathscr{C}) \cap \{X : X > \underline{x}\}$, где $\underline{x} = \inf\{x : U(x) > -\infty\}$. Тогда при "надлежащих условиях"

$$\sup_{X\in\mathscr{A}} \inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\, U(X) = \min_{Y\in L^{\hat{V}}_+(\mathscr{Q}),\, \mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} (\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\, V(Y) + \sup_{X\in\mathscr{A}\cap\mathscr{D}} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(XY)).$$

Глава 3 посвящена двойственному описанию задачи максимизации ожидаемой полезности. В случае, когда модель финансового рынка задается четверкой $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}, \mathscr{K})$, стандартная задача максимизации полезности в абстрактной форме имеет вид

$$u(x) := \sup_{k\in\mathscr{K}} \mathrm{E}_{\mathrm{P}}\, U(x + k).$$

Здесь $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ — неубывающая функция, не равная тождественно $-\infty$, x — начальный капитал, $\mathscr{K}$ — выпуклое множество, составленное из случайных величин. Задача максимизации когерентной робастной полезности имеет вид

$$u(x) := \sup_{k\in\mathscr{K}} \inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\, U(x + k),$$

или

$$u(x) := \sup_{k\in\mathscr{K}} \inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} (\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\, U(x + k) + \gamma(\mathrm{Q})),$$

если речь идет о максимизации робастной полезности. Здесь γ — выпуклая штрафная функция. Далее под задачей максимизации робастной полезности со штрафной функцией мы будем понимать следующую задачу

$$\inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} (\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\, U(\,\xi) + \gamma(\mathrm{Q})) \to \sup_{\xi\in\mathscr{A}},$$

где $\mathscr{A}$ — выпуклое подмножество случайных величин.

Будем обозначать $ba = ba(\mathscr{F}, \mathrm{P})$ класс конечно аддитивных мер μ на $\mathscr{F}$ ограниченной вариации, таких что $\mu\{A\} = 0$, когда $\mathrm{P}\{A\} = 0$. Предполагается, что штрафная функция $\gamma : ba \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$,– выпуклая функция, $\operatorname{dom}\gamma := \{\mu \in ba : \gamma(\mu) < +\infty\} = \mathscr{Q}$, причем

$$\inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{Q}} \gamma(\mathrm{Q}) \geq 0.$$

Предполагается также, что множество

$$\left\{\frac{d\mathrm{Q}}{d\mathrm{P}} : \mathrm{Q} \in \mathscr{Q}, \gamma(\mathrm{Q}) \le c\right\}$$

замкнуто в L^1 и равномерно интегрируемо по отношению к P для любого $c \ge 0$.

Сопряженную к U функцию V определим соотношением

$$V(y) = \sup_{x>0} (U(x) - xy), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Исходная и двойственная оптимизационные задачи описываются следующим образом:

$$u(x) := \sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} \inf_{\mathrm{Q} \in \mathscr{Q}} (\mathrm{E}_\mathrm{Q}\, U(\xi) + \gamma(\mathrm{Q})), \quad x > 0,\ \mathscr{A}(x) := x\mathscr{A};$$

$$v(y) := \inf_{\eta \in \mathscr{D}(y), \mathrm{Q} \in \mathscr{Q}} \left(\mathrm{E}_\mathrm{Q}\, V\left(\frac{\eta}{d\mathrm{Q}/d\mathrm{P}}\right) + \gamma(\mathrm{Q})\right), \quad y \ge 0,\ \mathscr{D}(x) := x\mathscr{D}.$$

Здесь

$$\mathscr{D} := \left\{\eta \in L^0_+ : \mathrm{E}_\mathrm{P}\, \eta\xi \le 1 \text{ для любого } \xi \in \mathscr{A}\right\}$$

Важный результат главы 3 (лемма 3.1) заключается в ответе на следующий вопрос: когда в определении двойственной функции v множество $\mathscr{D}$ можно заменить на выпуклое множество $\widetilde{\mathscr{D}} \subset \mathscr{D}$.

Отметим также, что основной результат главы 3 (теорема 3.1) дает ответ на вопрос: когда для задачи максимизации робастной полезности справедливы равенства (3.4)–(3.5) с двойственной функцией v, в определении которой вместо множества $\mathscr{D}$ стоит множество $\widetilde{\mathscr{D}} := \{Y_\infty : Y \in \mathscr{Y}\}$. Поэтому кажется удивительной находкой условие разветвленности семейства $\mathscr{X}$.

Диссертационная работа Фарвазовой Айсылу Азатовны представляет собой обширное исследование по актуальной тематике. Актуальность избранной темы подтверждается многочисленными публикациями в исследуемой области. В диссертационой работе получены новые результаты в теории двойственных задач финансовой математики. Все они сопровождаются подробными доказательствами. Обоснованность положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность и новизна не вызывают сомнений. Изложение диссертации отличается ясностью и доказывает высокую

математическую квалификацию автора диссертации. Мною не замечены сколько-нибудь серьезные погрешности изложения. Содержания оппонируемой диссертации соответствует специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика, а именно следующим ее направлениям: стохастические процессы, стохастический анализ и стохастическая оптимизация, марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели. Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях в рецензируемых научных изданиях, входящих в официальный перечень ВАК и международные базы Scopus, Web of Science и RSCI, а также представлены в тезисах международных конференций. Автореферат верно отражает содержание диссертации. Диссертационная работа "Математические задачи максимизации полезности"отвечает всем требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней"ВАК.

Таким образом, соискатель Фарвазова Айсылу Азатовна безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник лаборатории статистических методов
Санкт Петербургского отделения Математическго института имени В. А. Стеклова РАН

Солев Валентин Николаевич

Подпись руки Солева Валентина Николаевича
удостоверяю
Помощник директора

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук»

Зам. А.И. Зотова
24.12.2023