Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи



Фарвазова Айсылу Азатовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Гущин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела теории вероятностей и математической статистики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность — 01.01.05).

Официальные оппоненты:

Колесников Александр Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель декана по учебной работе факультета математики, ведущий научный сотрудник Международной лаборатории стохастических алгоритмов и анализа многомерных данных Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (специальность — 01.01.05).

Солев Валентин Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Лаборатории статистических методов Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность — 01.01.05).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Центральный экономико-математический институт Российской академии наук.

Защита состоится 27 декабря 2023 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета 24.1.167.01 при Математическом институте имени В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д.8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте http://www.mi-ras.ru/dis/ref23/farvazova/dis.pdf

Автореферат разослан «__» октября 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.01
доктор физ.-матем. наук, профессор  В. А. Ватутин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень ее разработанности. Задача оптимального инвестирования занимает значимое место в финансовой математике. Максимизация ожидаемой полезности впервые начинает рассматриваться с 1950-х годов. В качестве примера первых работ с применением вероятностных методов в этом направлении перечислим работы[1,2,3]. Сама задача максимизации ожидаемой полезности имеет две постановки — это *стандартная* и *робастная*. Пусть задана абстрактная модель финансового рынка, т.е. задана четверка $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}, \mathscr{K})$, где $\xi \in \mathscr{K}$ — множество терминальных капиталов; $\mathscr{Q}$ — некоторое семейство мер на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$; U — функция полезности экономического агента, тогда

$$\xi \rightsquigarrow \mathsf{E}_{\mathsf{P}} U(\xi), \tag{0.1}$$

функционал максимизации для *стандартной* формы и

$$\xi \rightsquigarrow \inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi), \tag{0.2}$$

для *робастной* постановки. В первом случае будущее состояние рынка описывается одной единственной мерой P, а во втором — семейством мер $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$ и максимизируем наихудший случай, что соответствует инфимуму. Приведем пример работы со стандартной постановкой[4] и примеры работ с робастной[5,6].

Задачи максимизации ожидаемой полезности сильно различаются друг от друга в зависимости от накладываемых на функцию полезность U предположений, а именно, U может быть конечной на полупрямой или же на всей вещественной прямой.

В робастном случае задачи максимизации полезности в литературе встречаются работы[7] со *штрафной функцией* γ:

$$\xi \rightsquigarrow \inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathsf{Q})\big). \tag{0.3}$$

Модель финансового рынка со штрафной функцией также рассматривается в настоящей диссертации.

Если задана четверка $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}, \mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$ — множество допустимых капиталов в терминальный момент времени, то можно говорить об *абстрактной* модели

[1] *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, 1944.

[2] *Savage L.* The foundations of statistics. N. Y.: Wiley, 1954.

[3] *Tobin J.* Liquidity preference as behavior towards risk // Rev. Econ. Stud., 1958, Vol. 25, p. 68–85.

[4] *Biagini S., Černý A.* Convex duality and Orlicz spaces in expected utility maximization // Math. Finance, 2020, Vol. 30, Issue 1, p. 85–127.

[5] *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin expected utility with nonunique prior // J. Math. Econom., 1989, Vol. 18, №2, p. 141–153.

[6] *Гущин А. А.* Двойственная характеризация цены в задаче максимизации робастной полезности // Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 4, с. 680–704.

[7] *Maccheroni F., Marinacci M.* Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences // Econometrica, 2006, Vol. 74, №6, p. 1447–1498.

финансового рынка. Чтобы перейти к *динамической* модели в задачах (0.1)–(0.3) необходимо ввести процесс S дисконтированных цен торгуемых базовых активов и множество $\mathscr{H}$ допустимых самофинансируемых стратегий. Тогда множество допустимых капиталов представляется в виде

$$\mathscr{K}(x, B) := \{x + H \cdot S_T + B \colon H \in \mathscr{H}\},$$

где x — начальный капитал, B — возможный случайный вклад в момент времени T, т.е. в терминальный момент времени. В различных предположениях задача максимизации исследуется, например, при $x = 0$ или $B = 0$. Ввиду исключения возможности арбитража в финансовых рынках, естественно предполагалось допустимыми именно равномерно ограниченные снизу процессы капитала.

Существует два подхода к решению задач максимизации ожидаемой полезности — это *двойственные методы*[8] и *методы динамического программирования*[9]. В настоящей работе рассматриваются именно двойственные методы. Сначала находим соотношение между исходной задачей и двойственной. Потом решаем двойственную, что намного проще, поскольку поиск инфимума проще поиска седловой точки. Наконец, решение двойственной задачи приводит к решению исходной.

В случае конечной на полупрямой функции полезности, ограниченность снизу капиталов никак не влияет на выбор множества допустимых стратегий. Так, например, в работе [8] авторы сначала доказывали все основные утверждения для абстрактной модели финансового рынка, а потом переносили результаты для динамических семимартингальных моделей.

Актуальность избранной темы подтверждается многочисленными публикациями в исследуемой области, а именно, по максимизации стандартной полезности — работы[10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] и по максимизации робастной полезности — ра-

[8] *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Prob., 1999, Vol. 9, №3, p. 904–950.

[9] *Pliska S. R.* A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios // Math. Oper. Res., 1986, Vol. 11, №2, p. 370–382.

[10] *Bellini F., Frittelli M.* On the Existence of Minimax Martingale Measures // Math. Finance, 2002, Vol. 12, №1, p. 1–21.

[11] *Biagini S.* An Orlicz spaces duality for utility maximization in incomplete markets // Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V, Progress Probab., Birkhäuser, Basel, 2007, Vol. 59, Part 2, p. 445–455.

[12] *Biagini S., Frittelli M.* Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes // Finance Stoch., 2005, Vol. 9, №4, p. 493–517.

[13] *Biagini S., Frittelli M.* The supermartingale property of the optimal portfolio process for general semimartingales // Finance Stoch., 2007, Vol. 11, №2, p. 253–266.

[14] *Biagini S., Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Ann. Appl. Probab., 2008, Vol. 18, №3, p. 929–966.

[15] *Delbaen F., Grandits P., Rheinlander T., Samperi D., Schweizer M., Stricker, C.* Exponential hedging and entropic penalties // Math. Finance, 2002, Vol. 12, №2, p. 99–123.

[16] *Kabanov Y. M., Stricker C.* On the optimal portfolio for the exponential utility maximization: remarks to the six-author paper // Math. Finance, 2002, Vol. 12, №2, p. 125–134.

[17] *Kramkov D., Schachermayer W.* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Prob., 2003, Vol. 13, №4, p. 1504–1516.

[18] *Schachermayer W.* Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative // Ann. Appl. Probab., 2001, Vol. 11, №3, p. 694–734.

боты[19, 20, 21, 22, 23].

Включение ценообразования активов в структуру максимизации полезности естественным образом приводит к концепции минимаксных мартингальных мер. В работе Ф. Беллини и М. Фрителли [10] 2002 года рассматривается модель рынка, в которой процессы цен предполагаются $\mathbb{R}^d$-семимартингалами X, а набор торговых стратегий состоит из всех предсказуемых, X-интегрируемых, со значениями в $\mathbb{R}^d$ процессов H, для которых стохастический интеграл $H \cdot X$ равномерно ограничен снизу. Авторы показывают, что в безарбитражном рынке достаточным условием существования *минимаксной меры* (см. работу [10]) является вогнутость и неубывание функции полезности $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Когда случайные процессы цен финансовых активов описываются возможно неограниченными семимартингалами, классическая концепция допустимых торговых стратегий может привести к тривиальной задаче максимизации полезности, поскольку множество ограниченных снизу стохастических интегралов может быть сведено к нулевому процессу. Однако может случиться так, что инвестор захочет торговать на таком рискованном рынке, где потенциальные потери неограничены, чтобы увеличить свою ожидаемую полезность. Авторы работы [12] описывают это отношение в математических терминах, используя класс $\mathcal{H}^W$ — W-допустимых торговых стратегий, которые зависят от случайной величины убытка W. Эти стратегии обладают хорошими математическими свойствами. Авторы формулируют и анализируют методом двойственности задачу максимизации полезности в новой области $\mathcal{H}^W$. Показывается, что для всех переменных потерь W, содержащихся в правильно идентифицированном множестве $\mathcal{W}$, оптимальное значение на классе $\mathcal{H}^W$ постоянно и совпадает с оптимальным значением задачи максимизации над большей областью K_Φ. Класс K_Φ не зависит от одного $W \in \mathcal{W}$, но зависит от функции полезности U через ее сопряженную функцию Φ. Методами двойственности показано, что решение существует в K_Φ и может быть представлено в виде стохастического интеграла, являющегося равномерно интегрируемым мартингалом относительно минимаксной меры. Дается экономическая интерпретация более широкого класса K_Φ и анализируется несколько примеров, чтобы показать, что такое расширение класса торговых стратегий действительно необходимо.

В совместной работе С. Биаджини и М. Фрителли [12] авторы столкнулись с проблемой максимизации полезности на неполных рынках, когда случайный процесс цены финансовых активов описывается семимартингалами, которые не обязатель-

[19] *Burgert C., Rüschendorf L.* Optimal consumption strategies under model uncertainty // Stat. Decisions, 2005, Vol. 23, №1, p. 1–14.

[20] *Föllmer H., Gundel A.* Robust projections in the class of martingale measures // Illinois J. Math., 2006, Vol. 50, №2, p. 439–472.

[21] *Gundel A.* Robust utility maximization for complete and incomplete market models // Finance Stoch., 2005, Vol. 9, №2, p. 151–176.

[22] *Gushchin A.* On robust utility maximization // International Conference "Modern Stochastics: Theory and Application", Kyiv, Ukraine, 2006, p. 134–135.

[23] *Schied A., Wu C.-T.* Duality theory for optimal investments under model uncertainty // Stat. Decisions, 2005, Vol. 23, №3, p. 199–217.

но локально ограничены. Был введен класс хорошо контролируемых допустимых стратегий в очень рискованном контексте, а затем решена задача максимизации с помощью техники (L^∞, ba)-двойственности. В работе [11] С. Биаджини придерживается тактики совместной работы и показывает, что двойственный результат может быть получен через двойственность пространств Орлича, естественно связанную с рассматриваемой функцией полезности. Эта новая формулировка дает дополнительное понимание природы контроля потерь в хороших торговых стратегиях.

В работе С. Биаджини и М. Фрителли [13] 2007 года рассматривается неполный стохастический финансовый рынок, где случайные процессы цен описываются семимартингалом с векторным значением, который, возможно, не является локально ограниченным. Авторы сталкиваются с задачей типа (0.1). Рассматриваемая функция полезности конечна, гладкая на всей прямой и удовлетворяет условию *reasonable asymptotic elasticity* (см. работу [18]). В этой общей постановке авторами чуть ранее в работе [12] было показано, что оптимальное утверждение допускает интегральное представление, как только минимаксная σ-мартингальная мера эквивалентна эталонной вероятностной мере. В работе [13] авторы показывают, что процесс оптимального капитала на самом деле является супермартингалом по отношению к любой σ-мартингальной мере с конечной обобщенной энтропией.

В работе С. Биаджини и М. Фрителли [14] 2008 года рассматривается стохастический финансовый неполный рынок, где процессы цен описываются семимартингалом с векторным значением, который, возможно, не является локально ограниченным. Авторы имеют дело с задачей типа (0.1), где функция полезности конечна на (a, ∞), $a \in [-\infty, \infty)$ и удовлетворяет предположению *слабой регулярности*. Вложение задачи максимизации полезности в пространства Орлича позволяет сформулировать задачу единым образом как для случая $a \in \mathbb{R}$, так и для случая $a = -\infty$. С помощью двойственных методов доказывается существование решений прямой и двойственной задачи и показывается, что сингулярная компонента в функционалах ценообразования может также иметь место со всюду конечными функциями полезности.

В работе [15] авторы рассматривают задачу максимизации с экспоненциальной функцией полезности. Исходная оптимизационная задача имеет вид:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\Big(1 - e^{-\alpha(V_T(c,\vartheta)-B)}\Big) \longrightarrow \sup_{\vartheta\in\Theta},$$

- $\vartheta \in \Theta$ — множество допустимых стратегий;
- (c, ϑ) — самофинансируемая стратегия, где c — начальный капитал и ϑ^i_t — количество единиц базового актива в момент времени t;
- $V_T(c, \vartheta) = c + \int_0^T \vartheta dX = c + G(\vartheta)$ — капитал в момент времени T, где X — локально ограниченный семимартингал;

- B — выплата в момент времени T, соответствующее условным обязательствам.

Авторы ставят целью найти оптимальную стратегию ϑ^* и вычислить само значение оптимизационной задачи. Формулируется и выводится двойственная оптимизационная задача:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta}\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\Big(1-e^{-\alpha(V_T(c,\vartheta)-B)}\Big)=1-\exp\Big(\alpha\sup_{\mathsf{Q}\in\mathbb{P}}\big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}B-c-\frac{1}{\alpha}H(\mathsf{Q}|\mathsf{P})\big)\Big),$$

α — *risk aversion* параметр; $H(\mathsf{Q}|\mathsf{P})$ — относительная энтропия меры Q относительно P и $\mathbb{P}$ — множество абсолютно непрерывных локальных мартингальных мер. В правой части равенства выше можно вынести знак минус за скобки и рассматривать уже задачу минимизации. Отдельно рассматривается случай $B\equiv 0$. Приложения включают новую характеристику минимальной мартингальной меры $\hat{\mathsf{P}}$. Показывается, что $\hat{\mathsf{P}}$ является единственным решением двойственной задачи: нахождение минимальной мартингальной меры соответствует хеджированию в случае экспоненциальной полезности с B. Также исследуется случай $\alpha\to\infty$.

Работа [16] является заметкой к предыдущей работе шести авторов [15]. Авторы ослабляют предположения основных результатов, полученных в работе [15]. А именно, предполагая, что ценовой процесс локально ограничен и допускает эквивалентную локальную мартингальную меру с конечной энтропией, показывается, без предположения выполнения *обратного неравенства Гёльдера*, что в случае экспоненциальной полезности процесс оптимальной стратегии является мартингалом относительно каждой локальной мартингальной меры с конечной энтропией. Более того, оптимальное значение всегда достижимо на последовательности равномерно ограниченных стратегий.

В задачах максимизации робастной ожидаемой полезности рассматривают не только стратегии оптимального инвестирования, но и также стратегии оптимального потребления. Примером такой работы является работа [19]. В работе [19] рассматривается неполная семимартингальная модель финансового рынка в условиях модельной неопределенности, что подразумевает робастный случай. Цель авторов найти оптимальную допустимую стратегию потребления, чтобы потери были минимальными. Потери измеряются некоторой строго убывающей, строго выпуклой, непрерывно дифференцируемой функцией $L:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, которая удовлетворяет условиям Инады: $L^{'}(0)=-\infty$, $L^{'}(\infty)=0$. Функция полезности предполагается равной $U:=-L$. На функцию полезности накладываются дополнительные условия. Исходная оптимизационная задача имеет вид:

$$\sup_{c\in\mathscr{A}_L^1(x)}\inf_{\mathsf{Q}\in\mathbb{P}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big(\int_0^T U(c_t)dt\Big),$$

где для $x\in\mathbb{R}_+$ положим

- $$\mathscr{A}_L^1(x) := \big\{c \in \mathscr{A}(x) : \int_0^T L(c_t)dt \in L^1(\mathsf{P})\big\},$$

- $\mathscr{A}(x)$ — множество всех допустимых торговых стратегий для начального капитала x,

- стратегия потребления $(c_t)_{t\in[0,T]}$ называется *допустимой* при начальном капитале x, если существует такая торговая стратегия H, что

$$x + \int_0^T H_t dS_t + \int_0^T (e_t - c_t)dt \geq 0,$$

- $(e_t)_{t\in[0,T]}$ — существенно ограниченный неотрицательный процесс притока капитала.

Авторы формулируют двойственную задачу, доказывают существование седловой точки у исходной задачи и дают характеристику оптимальной стратегии потребления в терминах решения двойственной задачи. Полученный результат является обобщением на робастный случай результата Карацаса и Зитковича (2003) (см. работу [19]).

Основным объектом исследования в работе [20] является f-дивергенция между мерами P и Q:

$$f(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) := \mathsf{E}_\mathsf{Q}\left(f\left(\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}\right)\right),$$

где $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$, $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}$ — некоторое семейство мер и $\mathsf{P} \ll \mathsf{R}$, $\mathsf{Q} \ll \mathsf{R}$ для заданной вероятностной меры R; f — выпуклая функция. Рассматривается следующая оптимизационная задача для *робастной f-дивергенции*:

$$f(\mathsf{P}|\mathcal{Q}) = \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} f(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) \longrightarrow \inf_{\mathsf{P}\in\mathcal{P}}.$$

По-другому, *задача проекции*, которая состоит в нахождении вероятностной меры $\mathsf{P}_0 \in \mathcal{P}$, где инфимум достигается. При определенных условиях на семейство мер $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ (компактность и замкнутость) показывается, что существует робастная f-проекция P_0 на $\mathcal{Q}$, где $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$, более того существует обратная проекция, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

Если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

то решение существует в классе $\tilde{\mathcal{P}}$ расширенных мартингальных мер. Авторы также объясняют связь этих двух случаев с теорией выбора оптимального инвестирования в максимизации ожидаемой полезности.

В работе[21] исследуется следующая оптимизационная задача с ограничением

$$\max \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(X) \text{ для всех X таких, что } \sup_{\mathsf{P}\in\mathcal{P}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(X) \le x,$$

где $\mathcal{P}$ — выпуклое множество эквивалентных локальных мартингальных мер; x — начальный капитал. В случае полной и неполной модели финансового рынка авторы дают двойственную характеризацию для исходной задачи. Авторы используют технику f-дивергенции. Это стандартный подход для сведения робастного случая к классической задаче максимизации по фиксированной вероятностной мере. Более того, авторы дают двойственную характеристику для задачи тесно связанной с исходной: минимизация расходов при минимальном уровне ожидаемой полезности w в случае неполного рынка:

$$\min \inf_{\mathsf{P}\in\tilde{\mathcal{P}}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[X] \text{ для всех X таких, что } \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(X) \ge w.$$

В работе[22] приводятся тезисы выступления. Основные результаты касаются свойства V-*дивергенции* (см. работу [24]), а именно, двойственная характеризация исходной робастной оптимизационной задачи выражается через V-дивергенцию. Функция полезности $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ считается конечной на полупрямой $(-r, \infty)$, где $r := -\inf\{x : U(x) > -\infty\}$.

В работе[23] авторы развивают теорию двойственных методов в задачах максимизации полезности. В отличие от работ[8,17] рассматривается робастная постановка типа (0.2). Следовательно, естественно вводятся дополнительные предположения на семейство мер $\mathcal{Q}$ при фиксированном фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$:

- $\mathsf{Q} \ll \mathbb{P}$ для всех $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}$;
- если $\mathsf{Q}(A) = 0$ для всех $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}$, тогда $\mathbb{P}(A) = 0$;
- $\mathcal{Q}$ — выпуклое, замкнутое и относительно компактное множество в топологии сходимости в полной вариации.

Авторы доказывают существование оптимального значения $\hat{\mathsf{Q}}$, которое необязательно эквивалентно мере $\mathbb{P}$. Предположения, накладываемые на функцию полезность U, аналогичные как в работах[8,17]. Отказ от предположения эквивалентности мер существенно затрудняет доказательство теорем, а также допускает арбитражные возможности, как было показано авторами.

[24] *Гущин А. А.* О расширении понятия f-дивергенции // Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 468–489.

В дополнение хотели бы привести примеры по исследуемой теме недавних работ[25, 26, 27, 28, 29].

Цели и задачи. Целью исследования являются: постановка и вывод двойственной задачи для задачи максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой. Также ставится задача изучения вопроса, при каких условиях можно определить двойственную задачу для задачи максимизации робастной полезности со штрафной функцией и с функцией полезности, конечной на полупрямой, в терминах супермартингальных плотностей; изучение вопроса связи производных классов функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой.

Объект исследования. Объектом исследования являются двойственная характеризация задачи максимизации робастной полезности и классы функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации новые и заключаются в следующем.

В главе 1 **доказано**, что функции, играющие роль производных для всех функций из классов функций Юнга, которые сопряжены одна к другой в смысле Фенхеля, взаимно обратные в обобщенном смысле.

В главе 2 **доказана** теорема о двойственной характеризации задачи максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой.

В главе 3 **изучена** структура поляр $\mathscr{D}$ подмножеств $\mathscr{A}$ конуса L^0_+, соответствующих терминальным значениям капиталов инвестиционных стратегий $X \in \mathscr{X}$. А именно, **доказан** критерий для сужения поляры множества терминальных капиталов в определении двойственной задачи для задачи максимизации робастной полезности со штрафной функцией и с функцией полезности, конечной на полупрямой, до выпуклого подмножества терминальных значений всех супермартингальных плотностей.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть полезны в задачах максимизации полезности, а именно, в применении двойственных методов.

Методы исследования. В работе применяются методы теории вероятностей

[25] *Backhoff Veraguas J. D., Fontbona J.* Robust utility maximization without model compactness // SIAM Journal on Financial Mathematics, 2016, Vol. 7, №1, p. 70–103.

[26] *Gushchin A. A., Khasanov R. V., Morozov I. S.* Some functional analytic tools for utility maximization // Modern stochastics and applications, Springer, Cham, Springer Optim. Appl., 2014, Vol. 90, p. 267–285.

[27] *Matoussi A., Possamaï D., Zhou C.* Robust utility maximization in nondominated models with 2BSDE: the uncertain volatility model // Mathematical Finance, 2015, Vol. 25, №2, p. 258–287.

[28] *Neufeld A., Nutz M.* Robust utility maximization with Lévy processes // Mathematical Finance, 2018, Vol. 28, №1, p. 82–105.

[29] *Pennanen T.* Convex duality in optimal investment under illiquidity // Math. Program., 2014, Vol. 148, p. 279–295.

и функционального анализа, в частности, двойственные методы выпуклого анализа.

Положения, выносимые на защиту. Следующие основные результаты диссертации выносятся на защиту.

1) Функции, играющие роль производных для всех функций из классов функций Юнга, которые сопряжены одна к другой в смысле Фенхеля, взаимно обратные в обобщенном смысле.

2) Теорема о соотношении между исходной и двойственной задачей для задачи максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой.

3) Критерий для сужения поляры множества терминальных капиталов в определении двойственной задачи для задачи максимизации робастной полезности со штрафной функцией и с функцией полезности, конечной на полупрямой, до выпуклого подмножества терминальных значений всех супермартингальных плотностей.

Апробация результатов. Основные идеи и положения работы изложены в 5 научных работах автора общим объемом 2.2 п.л., в том числе 3 публикациях (объемом 1.96 п.л.) в рецензируемых научных изданиях, входящих в официальный перечень ВАК и международные базы SCOPUS, Web of Science и RSCI. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. *Аспирантский коллоквиум* кафедры теории вероятностей, проводимый под руководством академика РАН А. Н. Ширяева и профессора Д. А. Шабанова, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2019.

2. *Аспирантский коллоквиум* кафедры теории вероятностей, проводимый под руководством академика РАН А. Н. Ширяева и профессора Д. А. Шабанова, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2021.

3. *XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019»*, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 8–12 апреля 2019.

4. *XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021»*, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 12–23 апреля 2021.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 68 страницах и состоит из списка обозначений, введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 62 наименований и работ автора по теме диссертации.

Краткое содержание работы. Во введении, в частности, определяются цели и задачи диссертации, объект и методы исследования, научная новизна, теоретическая значимость работы и приводятся положения, выносимые на защиту. Говорится об актуальности задачи максимизации робастной полезности в современной финансовой математике, излагаются различные подходы к решению проблемы и приводится исторический очерк.

В постановке задачи максимизации робастной полезности важную роль играет выбор функционального пространства. Важно, чтобы для любого $\xi \in \mathscr{K}$ такого, что $\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) > -\infty$ случайные величины $\min\{\xi, 0\}$ лежали в этом пространстве. На эту роль идеально подходят пространства Орлича, порожденные функцией Юнга $\hat{U}(x) := -U(-|x|) + U(0)$. **Глава 1** посвящена доказательству одного свойства производных функций Юнга и их преобразований Фенхеля: замена времени и порождающий её процесс являются производными функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой. Полученный результат имеет приложения в задачах максимизации полезности. Глава 1 состоит из пяти параграфов. В первых двух и в четвертом приводятся вспомогательные результаты — про функцию Юнга и пространства Орлича по мере (см. работу[30]), про замену времени (см. работу[31]), про субдифференцируемость функций Юнга (см. работу[32]), в третьем — пример и в пятом содержится основная теорема и ее доказательство.

В **главе 2** объектом исследования является двойственная характеризация задачи максимизации ожидаемой полезности.

Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$, U — функция полезности. По функции полезности U построим функцию Юнга $\hat{U}(x) := -U(-|x|) + U(0)$. Введем сопряженную к $\hat{U}$ функцию Юнга $\hat{V}$ соотношением $\hat{V} := \hat{U}^*$. Положим $V := -U^*$.

Поскольку в главе 2 рассматривается *робастная* постановка задачи максимизации, то на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ нужно ввести семейство мер $\mathscr{Q}$. Семейство $\mathscr{Q}$ (субъективных) мер определим как выпуклое и непустое подмножество множества вероятностных мер:

$$\mathscr{Q} \subset \{\mathsf{Q} \ll \mathsf{P} \colon d\mathsf{Q}/d\mathsf{P} \in L^{\hat{V}}_+(\mathsf{P}) \text{ для некоторой меры } \mathsf{P}\}.$$

Здесь

$$L^{\hat{V}}(\mathsf{P}) := \{\xi \in L^0(\mathsf{P}) \colon \mathsf{E}_{\mathsf{P}} \hat{V}(\varepsilon\xi) < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}$$

— пространство Орлича по мере P, порожденное функцией Юнга $\hat{V}$.

Определим функциональное пространство для постановки задачи максимизации. Пространство Орлича $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$, построенное по семейству мер $\mathscr{Q}$ и ассоции-

[30] *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz Spaces. N. Y.: Marcel Dekker, 1991.

[31] *Barndorff-Nielsen O. E., Shiryaev A. N.* Change of time and change of measure, 2nd ed., Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab., 21, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015, xviii+326 pp.

[32] *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

рованное с функцией Юнга $\hat{U}$, определяется как

$$L^{\hat{U}}(\mathscr{Q}) := \{\xi \in L^0(\mathscr{Q})\colon \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\hat{U}(\varepsilon\xi) < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\},$$

где пространство $L^0(\mathscr{Q})$ состоит из классов эквивалентности случайных величин, совпадающих Q-п.н. при всех $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$.

Замечание 2.1. Пространство $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$ является банаховым (см. работу[33]) относительно нормы Люксембурга

$$N_{\hat{U}}(\xi) := \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} N^{\mathsf{Q}}_{\hat{U}}(\xi) = \inf\Big\{K > 0\colon \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\hat{U}\Big(\frac{\xi}{K}\Big) \le 1\Big\}.$$

Теперь опишем модель финансового рынка. Модель финансового рынка состоит из

- фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$,
- d согласованных строго положительных последовательностей $S^i = (S^i_t, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, ..., d$, которые описывают эволюцию цен базовых активов; в нашем случае $S = (S^i)$, $i = 1, ..., d$ — семимартингалы,
- d предсказуемых последовательностей $H^i = (H^i_t, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, ..., d$ — *торговая стратегия* или *портфель ценных бумаг*; в нашем случае $L(S)$ — множество всех предсказуемых S-интегрируемых процессов H,
- *капитала стратегии* H к моменту времени t (см. работу[34]) $X^H_t := \int_0^t H_u dS_u$.

Здесь имеет место векторное представление $S = (S^1, ..., S^d)$, $H = (H^1, ..., H^d)$ и $H_t \cdot S_t := \int_0^t H_u dS_u$.

Пусть $B \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$ — случайная величина, представляющая случайный возможный вклад в терминальный момент времени T. В главе 2 исследуется следующая оптимизационная задача:

$$\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U\Big(\int_0^T H_t dS_t + B\Big) \longrightarrow \sup_{H\in\mathcal{J}},$$

где $\mathcal{J} = \{H \in L(S)\colon \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t H_u dS_u \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})\}$ — множество допустимых стратегий.

Пусть $\mathscr{K}$ — множество случайных величин ξ, капиталов в момент времени T.

---

[33] *Rosenberg R.* Orlicz spaces based on families of measures // Studia Math., 1970, Vol. 35, p. 15–49.

[34] *Ширяев А. Н., Черный А. С.* Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража // Стохастическая финансовая математика, Сборник статей, Труды МИАН, М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2002, т. 237, с. 12–56.

Замечание 2.2. Если в качестве допустимых стратегий рассматривать S-интегрируемые процессы H, то в качестве примера допустимых терминальных капиталов можно привести следующую структуру:

$$\mathscr{K} = \{H \cdot S_T \colon H \in \mathcal{J}\}.$$

Замечание 2.3. Отметим, что в качестве допустимых стратегий мы рассматриваем предсказуемые процессы H, поскольку предполагаем, что портфель на завтра задается сегодня. Также, оказывается, что наиболее общий класс процессов S, что стохастический интеграл по нему $H \cdot S_t$, $t \in [0,T]$ определен для любого предсказуемого H — это семимартингалы. Поэтому мы рассматриваем *семимартингальную модель* финансового рынка. Вообще, на основе определения стохастических интегралов по семимартингалу лежит обширная теория, но мы не будем на этом останавливаться подробно.

Исходная оптимизационная задача определена на пространстве L^0 всех (классов эквивалентности) случайных величин, которое, обычно, не локально выпукло. В ходе доказательства основных утверждений главы 2 мы активно применяем методы выпуклого анализа. Поэтому наш первый шаг состоит в том, чтобы вложить задачу в подходящее пространство, а именно, что исходная цена не изменится, если в её определении $\mathscr{K}$ заменить на

$$\mathscr{C} = (\mathscr{K} - L^0_+(\mathsf{P})) \cap L^{\hat{U}}(\mathscr{Q}).$$

Здесь $\mathscr{C}$ — конус. Учитывая случайный вклад, формально заменим множество $\mathscr{K}$ множеством

$$\mathscr{A} := B + \mathscr{K}.$$

В зависимости от накладываемых предположений на финансовую модель рынка, задачи максимизации полезности могут сильно отличаться друг от друга. В главе 2 накладываются дополнительные предположения на функцию полезности U (Предположения 2.1–2.2), семейство мер $\mathscr{Q}$ (Предположение 2.3) и на множество терминальных капиталов $\mathscr{K}$ (Предположение 2.4).

В главе 2 выводится двойственная задача для задачи максимизации *робастной* полезности со случайным вкладом B в терминальный момент времени T и с функцией полезности, конечной на полупрямой. Задача усложняется тем, что полярный конус $\mathscr{C}^*$ содержит сингулярные линейные функционалы, которые не могут быть представлены случайными величинами. Полученный в главе 2 результат является обобщением результата С. Биаджини и А. Черного [4] на робастный случай. Аналогичный результат при других предположениях и когда $B \equiv const$ получен А. А. Гущиным [6].

Сформулируем основной результат главы 2:

Теорема 2.1. Пусть выполнены предположения 2.1–2.4 и $B \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$. Переобозначим $\mathscr{A} := (B + \mathscr{C}) \cap \{X \colon X \geq \underline{x}\}$. Тогда выполнено

$$\sup_{X \in \mathscr{A}} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(X) = \min_{Y \in L^{\hat{V}}_+(\mathscr{Q}),\, \mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V(Y) + \sup_{X \in \mathscr{A} \cap \mathcal{D}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(XY) \big). \tag{0.4}$$

Решая двойственную задачу мы приходим к решению исходной.

В **главе 3** рассматривается следующая модель финансового рынка:

- $U : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty)$ — монотонно неубывающая вогнутая функция полезности; $U(x) = -\infty$ при $x < 0$ и $U(x) \in \mathbb{R}$ при $x > 0$;
- γ — выпуклая штрафная функция (см. работу[35]);
- $\mathscr{Q}$ — семейство субъективных мер.

Оптимизационная задача выглядит как в (0.3) по множеству терминальных капиталов $\mathscr{A}$:

$$\xi \rightsquigarrow \sup_{\xi \in \mathscr{A}} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \bigl(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathsf{Q}) \bigr).$$

Здесь множество случайных величин $\mathscr{A}$ и множество мер $\mathscr{Q}$ являются выпуклыми.

Определим

$$\mathscr{D} := \{ \eta \in L^0_+ \colon \mathsf{E}_{\mathsf{P}} \eta \xi \leq 1 \text{ для любого } \xi \in \mathscr{A} \}.$$

Пусть $x > 0$ — начальный капитал, тогда $\mathscr{A}(x) := x\mathscr{A}$. Аналогично для $y \geq 0$ положим $\mathscr{D}(y) := y\mathscr{D}$.

Исходная и двойственная оптимизационные задачи выглядят следующим образом:

$$u(x) := \sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \bigl(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathsf{Q}) \bigr), \quad x > 0,$$

$$v(y) := \inf_{\eta \in \mathscr{D}(y),\, \mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \bigl(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V \left(\frac{\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}} \right) + \gamma(\mathsf{Q}) \bigr), \quad y \geq 0. \tag{0.5}$$

В главе 3 исследуется структура поляр $\mathscr{D}$ подмножеств $\mathscr{A}$ конуса L^0_+, соответствующих терминальным значениям капиталов инвестиционных стратегий $X \in \mathscr{X}$. Если $\mathscr{A} = \{ X_\infty \colon X \in \mathscr{X} \}$ и $\widetilde{\mathscr{D}} = \{ Y_\infty \colon Y \in \mathscr{Y} \}$, где $\mathscr{Y}$ — семейство супермартингальных плотностей для $\mathscr{X}$, то $\widetilde{\mathscr{D}}$ обладает следующим ключевым свойством, которое можно назвать свойством мажорирования поляры $\mathscr{D}$: для любого $\eta \in \mathscr{D}$ существует $\widetilde{\eta} \in \widetilde{\mathscr{D}}$ такое, что $\eta \leq \widetilde{\eta}$.

В лемме 3.1 эта ситуация рассматривается в абстрактной форме, и доказывается, что данное свойство равносильно тому, что при двойственном описании оптимального значения робастной полезности (0.5) можно ограничиться вычислением минимума по множеству $\widetilde{\mathscr{D}}$ вместо $\mathscr{D}$. В теореме 3.1 доказывается, что если множество $\mathscr{X}$ выпукло, то для выполнения свойства мажорирования поляры $\mathscr{D}$ необходимо и достаточно, чтобы при переходе к разветвленной оболочке $\mathscr{X}$ терминальные значения содержались в замыкании в L^0 множества $(\mathscr{A} - L^0_+) \cap L^\infty$.

[35] *Фёльмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008.

Полученный результат является обобщением на робастный случай одного из результатов совместной работы Д. Крамкова и В. Шахермайера [8]. В качестве приложения для выпуклого и разветвленного семейства случайных процессов получено некоторое обобщение результата Д. Б. Рохлина[36] о существовании супермартингальной плотности с $\mathsf{P}(Y_\infty > 0)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги выполненного исследования. Диссертация посвящена развитию двойственных методов в задаче максимизации полезности в финансовой математике, а также некоторым смежным вопросам. В настоящей работе рассмотрены двойственные описания оптимального значения ожидаемой робастной полезности и свойство производных классов функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля.

Выводы диссертации заключаются в следующем:

1) **Доказано**, что функции, играющие роль производных для всех функций из классов функций Юнга, которые сопряжены одна к другой в смысле Фенхеля, взаимно обратные в обобщенном смысле.

2) **Доказана** теорема о соотношении между исходной и двойственной задачей для задачи максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой.

3) **Изучена** структура поляр $\mathscr{D}$ подмножеств $\mathscr{A}$ конуса L^0_+, соответствующих терминальным значениям капиталов инвестиционных стратегий $X \in \mathscr{X}$. А именно, **доказан** критерий для сужения поляры множества терминальных капиталов в определении двойственной задачи для задачи максимизации робастной полезности, до выпуклого подмножества терминальных значений всех супермартингальных плотностей.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. В завершении перечислим некоторые возможные перспективы дальнейших исследований:

1) В зависимости от вида функции полезности U **изучить** структуру пространства $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$, а также двойственного пространства $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})^*$.

2) Пусть $U : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. **Исследовать** задачу максимизации робастной полезности, используя полученные в главе 2 результаты. **Найти** двойственную задачу. **Установить** минимаксные соотношения.

[36] *Рохлин Д. Б.* О существовании эквивалентной супермартингальной плотности для разветвленно-выпуклого семейства случайных процессов // Матем. заметки, 2010, т. 87, в. 4, с. 594–603.

3) **Изучить** структуру *разветвленных семейств.*

4) Пусть семейство $\mathscr{X}$ является *разветвленным.* Каждый процесс X из $\mathscr{X}$ представляется в виде стохастической экспоненты от некоторого процесса Y. Все такие процессы Y образуют семейство $\mathscr{Y}$. **Найти** необходимые условия на семейство процессов $\mathscr{Y}$.

Благодарность. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Александра Александровича Гущина. Автор благодарит своего научного руководителя за выбор темы исследования и поддержку. Также автор выражает искреннюю благодарность и глубокую признательность академику РАН профессору Альберту Николаевичу Ширяеву за внимательное чтение текста настоящей диссертации, ценные замечания и всему коллективу кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] *Фарвазова А. А.* Об одном свойстве преобразования Фенхеля. // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, в. 3, с. 474–478.

Farvazova A. A. On a property of the Fenchel transform. // Chebyshevskii Sbornik, 2021, Vol. 22, №3, p. 474–478.

Объем: 0.58 п.л.. Входит в перечень ВАК. Индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. JIF SJR: 0.305 (Q3).

[2] *Фарвазова А. А.* Двойственная задача максимизации робастной полезности. // Вестн. Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика, 2022, №4, с. 15–21.

Farvazova A. A. Dual problem of robust utility maximization. // Moscow University Mathematics Bulletin, 2022, Vol. 77, №4, p. 176–182.

Объем: 0.69 п.л.. Входит в перечень ВАК. Индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. JIF SJR: 0.607 (Q2).

[3] *Фарвазова А. А.* Максимизация робастной полезности в терминах супермартингальных мер. // Вестн. Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика, 2022, №1, с. 19–25.

Farvazova A. A. Robust utility maximization in terms of supermartingale measures. // Moscow University Mathematics Bulletin, 2022, Vol. 77, №1, p. 20–26.

Объем: 0.69 п.л.. Входит в перечень ВАК. Индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. JIF SJR: 0.607 (Q2).

Тезисы докладов на научных конференциях

[4] *Фарвазова А. А.* Двойственная задача для максимизации робастной полезности в терминах супермартингальных мер // тез. докл. в сборнике Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2021», М.: МАКС Пресс, 2019. Объем: 0.12 п.л..

[5] *Фарвазова А. А.* Двойственная задача максимизации робастной полезности // тез. докл. в сборнике Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2021», М.: МАКС Пресс, 2021. Объем: 0.12 п.л..

Подписано в печать 19.10.2023 г.
Тираж 100 экз.

Отпечатано в (название, адрес типографии)