«УТВЕРЖДАЮ»:
Директор Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Центрального экономико-математического
института Российской академии наук
член-корреспондент РАН,
доктор экономических наук, профессор,
Бахтизин Альберт Рауфович



«12» декабря 2023 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Фарвазовой Айсылу Азатовны
«Математические задачи максимизации полезности»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика.

Диссертация А.А. Фарвазовой «Математические задачи максимизации полезности» посвящена развитию применения теории двойственных методов в задачах максимизации ожидаемой полезности в робастной постановке.

Актуальность темы исследования. Максимизация ожидаемой полезности является интуитивно понятной, вполне естественной задачей финансовой математики и берет свое начало с 1950-х годов. В работе Д. фон Неймана и О. Моргенштерна (1944) была впервые изложена теория ожидаемой полезности. В монографии Л. Сэвиджа (1954) приведена теория субъективной ожидаемой полезности. Первоначально для марковских моделей финансового рынка задачи оптимального инвестирования решались методами динамического программирования в работах Р. Мертона (1969, 1971) и П. Самуэльсона (1969). Альтернативный подход состоит в использовании двойственных методов, применение которых позволяет решать задачу максимизации полезности для самых общих моделей рынка. Суть этих методов заключается в

решении сначала вспомогательной двойственной оптимизационной задачи. Решение основной задачи затем выражается в двойственных терминах. В стандартной постановке задачи максимизации полезности будущее состояние рынка описывается одной вероятностной мерой. Исчерпывающее исследование многих аспектов этой задачи было проведено в работах Д. Крамкова и В. Шахермайера (1999, 2003), В. Шахермайера (2001). Тем не менее, сравнительно недавняя и новаторская в смысле применяемых методов работа С. Биаджини и А. Черного (2020), использующая стандартную постановку, показывает, что данная тематика сохраняет свою актуальность. В робастном случае будущее состояние рынка описывается множеством вероятностных мер, что соответствует ситуации, когда мера заранее не известна. Задача максимизации робастной полезности была исследована А.А. Гущиным (2010), однако, в рассмотренном им случае функционал полезности не включал терминальных слагаемых. В диссертационной работе А.А. Фарвазовой рассматривается постановка задачи, которая, с одной стороны, обобщает постановку С. Биаджини и А. Черного на случай робастной полезности, а с другой стороны, включает случайный вклад или штрафную функцию в терминальный момент времени.

Научная новизна. Основные положения, выводы и результаты диссертационной работы являются новыми, корректно сформулированными, все утверждения сопровождаются строгими доказательствами. Основная научная новизна диссертации связана с распространением применения теории двойственных методов на задачи максимизации робастной полезности при различных предположениях о модели финансового рынка и о виде терминальной составляющей функционала полезности.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут найти применение в теории вероятностей, функциональном анализе, математической статистике и таких прикладных областях, как финансовая математика и математическая

экономика. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Центральном экономико-математическом институте РАН, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Южном федеральном университете, а также в других учебных и научных учреждениях.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в 3 статьях (без соавторов) в журналах, входящих в официальный перечень ВАК рецензируемых научных изданий и в международные базы цитирований Scopus, Web of Science, RSCI, представлялись на научных семинарах и конференциях.

Основное содержание работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, который включает 62 наименования. Общий объем работы составляет 68 страниц.

Во введении приведено обоснование актуальности темы, описаны методы исследования и содержится достаточно полный обзор литературы по рассматриваемой тематике, связанной с максимизации классической и робастной полезности. При этом особое внимание уделяется работам, связанным с теорией двойственности.

Основная часть работы (главы 2 и 3) связана с изучением прямой оптимизационной задачи и двойственной к ней. При этом важную роль играет выбор функционального пространства. На эту роль подходят пространства Орлича, порожденные функциями Юнга. В первой главе изучаются свойства функций Юнга. Показано, что правая производная $a(t)$ от функции Юнга и правая производная $c(t)$ от функции, сопряженной к ней по Фенхелю, являются взаимно обратными. Эта связь позволяет сделать замену времени в интеграле Стильтьеса по мере, отвечающей $a(t)$ для любой борелевской функции.

Во второй главе приводится постановка задачи максимизации робаст-

ной полезности при самых общих предположениях на финансовый рынок, а также дается постановка двойственной задачи. Главные результаты в основной и двойственной задачах, взаимные связи между ними (минимаксные соотношения) сформулированы в двух основных утверждениях (теорема 2.1 и лемма 2.1). Данные утверждения не только обобщают предшествующие работы в случае стандартной полезности, но и охватывают случай робастной полезности. При доказательстве результатов автор продемонстрировал хорошее владение методами функционального и выпуклого анализа. В частности, автору удалось преодолеть проблему возникающих сингулярных функционалов в двойственной задаче и избавиться от них, применяя теоремы Фенхеля–Рокафеллара.

Объектом исследования в третьей главе является двойственная характеризация задачи максимизации робастной полезности со штрафной функцией. Изучена структура поляр подмножеств терминальных значений капиталов стратегий: доказан критерий для сужения поляры множества терминальных капиталов в определении двойственной задачи до выпуклого подмножества терминальных значений всех супермартингальных плотностей.

В заключении подводится итог проведенного исследования и приводятся дальнейшие перспективы развития направления.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Некоторые замечания. К тексту диссертации имеются следующие замечания.

1. В списке обозначений на стр. 4, 5 в описании некоторых из них фигурирует число, смысл которого не указан. По-видимому, это число соответствует номеру страницы, на которой обозначение впервые появляется в тексте. Но для большинства обозначений эти номера не указаны.

2. В этом же списке: в описании обозначения семейства мер не говорится, что это вероятностные меры; в обозначении пространства Орлича по

мере P не сказано, что такое $\hat{U}$; в обозначении операции сопряжения непонятно, для чего используются угловые скобки, если соответствующие переменные принадлежат пространству $\mathbb{R}$; при этом неясно, зачем приводить пояснения к некоторым обозначениям, если к другим, менее распространенным, таких пояснений нет.

3. На стр. 6 абстрактная модель финансового рынка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}, \mathcal{K})$ вводится с сопровождающей фразой «где $\xi \in \mathcal{K}$ - множество терминальных капиталов», что выглядит некорректно в ситуации, когда именно $\mathcal{K}$ является множеством терминальных капиталов, а ξ – элемент этого множества.

4. В представлении множества допустимых терминальных капиталов на стр. 7 не поясняется, что впервые используемое там обозначение $H \cdot S_T$ означает стохастический интеграл, при этом нигде не говорится, что там фигурирует скалярное произведение значений векторных процессов. В списке обозначений этого обозначения также нет, хотя пояснение (без упоминания скалярного произведения) все же встречается позже в тексте.

5. В конце стр. 7 и далее на стр. 8 сказано, что в настоящей работе используется двойственный метод, для которого описывается последовательность действий: сначала находится соотношение между исходной задачей и двойственной, потом решается двойственная, «что намного проще», и «наконец, решение двойственной задачи приводит к решению исходной». Из этого описания может сложиться впечатление, что в работе будут решены двойственная, а затем исходная задачи, однако содержание диссертации связано только с первым действием из этой последовательности: установлением соотношения между исходной и двойственной задачами (что само по себе, тем не менее, является важной проблемой).

6. В конце стр. 10 при описании оптимизационной задачи автор не объясняет смысл и возможные значения параметра α.

7. На стр. 18 вводятся обозначения сопряженных функций, которые в данном месте никак не используются и не понятно, для чего они там приведены.

8. В теореме 2.1. на стр. 21 во введении упоминаются предположения 2.1–2.4, которых нет в предшествующем тексте. Но если читатель текста диссертации может найти эти предположения в последующем изложении в соответствующей главе, то в тексте автореферата, где теорема 2.1 приведена в том же виде, этих предположений найти нельзя. Кроме того, не понятно, что такое $\underline{x}$, хотя это обозначение в теореме используется.

9. На стр. 22 никак не описывается множество, из которого берутся терминальные значения X капиталов инвестиционных стратегий.

10. На стр. 21, 22 описывается оптимизационная задача с множеством терминальных капиталов $\mathcal{A}$, но при этом не объясняется, какому начальному капиталу соответствует это множество. Тогда не сразу становится понятной приведенная далее структура множества, соответствующего начальному капиталу x, в виде $\mathcal{A}x$, и приходится лишь догадываться, что в первом случае предполагался единичный начальный капитал.

11. На стр. 25 используется термин «стандартное пространство Орлича», но пояснения смысла слова «стандартное» в данном случае нет.

12. На стр. 26 фильтрация описывается как «последовательность вложенных сигма-алгебр» с использованием целочисленного параметра времени, хотя в задаче речь идет о непрерывном времени. Кроме того, термин «вложенные» не подходит к описанию фильтрации, представляющей собой семейство расширяющихся с течением времени сигма-алгебр.

13. На стр. 27 одинаково обозначены (буквой T) детерминированный терминальный момент времени и семейство марковских моментов.

14. На стр. 27, 28 в разделе 1.3, кроме формул и рисунка, есть только одна фраза: «Приведем пример экспоненциальной функции полезности». На рисунке не поясняется, какая еще функция кроме экспоненциальной, изоб-

ражена. В то же время рисунку предшествуют формулы, определяющие всего 4 функции. На этом весь раздел заканчивается, и обсуждений соотношения этих функций между собой и с рисунком нет.

15. На стр. 28 не понятен последний абзац, а именно, для чего нужно было определять субдифференциалы функций одномерного вещественного аргумента.

16. В тексте диссертации имеется также определенное количество неудачных фраз, несогласованных падежей и родов в предложениях, например: 1) «функция полезность» (стр. 7, 33, 49 и др.); 2) «оптимальное утверждение допускает интегральное представление» (стр. 10); 3) на стр. 15 часть последней фразы после точки с запятой не согласована с предшествующей частью; 4) фраза «классы функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой» (стр. 15) повторяется неоднократно и звучит коряво; 5) «Выплата, в момент времени T, соответствующее» (стр. 11); 6) на стр. 27 говорится о процессе и замене времени, «которую она порождает»; 7) «левая часть равно» (на стр. 31 употребляется дважды); 8) не очень корректно звучит фраза «вложить оптимизационную задачу в выпуклое подмножество» (стр. 50) и т.д.

Сделанные замечания не умаляют достоинств диссертационного исследования. В основном, речь идет о небрежностях.

Заключение. Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Её автор, А.А. Фарвазова, продемонстрировала владение современными математическими методами функционального анализа, выпуклого анализа, теории случайных процессов.

Область диссертационного исследования соответствует паспорту научной специальности 1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика».

Диссертация «Математические задачи максимизации полезности» удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении учёных степе-

ней, утверждённого постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а ее автор, Фарвазова Айсылу Азатовна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика.

Отзыв ведущей организации на диссертацию Фарвазовой Айсылу Азатовны обсужден и утвержден на заседании лаборатории стохастической оптимизации и теории риска отделения теоретической экономики и математических исследований Федерального государственного бюджетного учреждения науки Центрального экономико-математического института Российской академии наук, протокол № 9 от 21 ноября 2023 г.

Руководитель лаборатории стохастической
оптимизации и теории риска
отделения теоретической экономики
и математических исследований ЦЭМИ РАН,
кандидат физико-математических наук,
доцент (специальность — 01.01.05) Белкина Татьяна Андреевна

Главный научный сотрудник лаборатории
стохастической оптимизации и теории риска
отделения теоретической экономики
и математических исследований ЦЭМИ РАН,
доктор физико-математических наук
(специальность — 01.01.05) Пресман Эрнст Львович

11 декабря 2023 г.

Контактные данные:
117418, Москва, Нахимовский просп., 47, ФГБУН ЦЭМИ РАН,
тел. +7(499)129-08-22; e-mail: director@cemi.rssi.ru;
сайт: http://www.cemi.rssi.ru/

Подпись ЗАВЕРЯЮ
Зав. ОК ОТДЕЛ КАДРОВ

Подпись ЗАВЕРЯЮ
Зав. ОК ОТДЕЛ КАДРОВ