ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертационной работе
Фарвазовой Айсылу Азатовны
"Математические задачи максимизации полезности",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

Задача максимизации ожидаемой полезности экономическим агентом, действующим на финансовом рынке, т.е. задача выбора стратегии, максимизирующей определенный функционал от отвечающего ей случайного процесса капитала, является одной из основных задач финансовой математики. Одним из подходов к ее решению является двойственный подход, при котором сначала решается двойственная оптимизационная задача на множестве двойственных объектов, а решение двойственной задачи позволяет охарактеризовать решение исходной. Настоящая диссертация посвящена развитию двойственных методов в задачах финансовой математики.

Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трех глав, заключения, списка литературы и работ автора по теме диссертации.

Во **введении**, в частности, раскрывается актуальность темы, обоснована научная новизна диссертационной работы, перечислены цели диссертации и основные положения, выносимые на защиту. Также, во введении приводится исторический очерк и обзор современной литературы по теме работы, излагается краткое содержание диссертации.

В **первой главе** устанавливается связь между производными функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой. Автором доказано, что эти функции взаимно обратные в обобщенном смысле. Несмотря на то, что полученный в данной главе результат является вспомогательным при исследовании задачи максимизации робастной полезности, он также представляет самостоятельный интерес.

Во **второй главе** рассматривается двойственное описание оптимальной робастной полезности в задаче оптимального инвестирования. Исходная оптимизационная задача имеет довольно сложную структуру: она является минимаксной и содержит дополнительное случайное слагаемое (случайный вклад). Функция полезности является конечной на полупрямой (a, ∞), где $a < 0$. Минимум берется по некоторому множеству вероятностных мер, соответствующих возможным сценариям, а максимум – по конусу капиталов, сдвинутому

за счет присутствия указанного слагаемого. Последнее можно рассматривать как дополнительный случайный приток или отток капитала в терминальный момент времени. При вычислении максимума по подмножеству L^∞ в двойственной задаче естественным образом появляется минимум по множеству конечно-аддитивных мер. Субъективные меры не предполагаются эквивалентными. Цель работы состояла в том, чтобы избавиться от сингулярных функционалов в двойственной задаче. Важно подчеркнуть, что в основной результат (теорема 2.1) конечно-аддитивные функции множества не входят.

Исследуемая во второй главе задача имеет длинную предысторию. Большой вклад в развитие двойственных методов в задаче максимизации стандартной полезности для функции полезности, конечной на полупрямой, внесли Д. Крамков и В. Шахермайер (1999, 2003). Задачу со случайным вкладом рассмотрели Я. Цвитанич, В. Шахермайер и Х. Ванг (2001), но их формулировка двойственной задачи была неудовлетворительной ввиду наличия в ней конечно-аддитивных мер. Полученный автором в диссертации результат (теорема 2.1) является обобщением результата С. Бьяджини и А. Черны (2020) на случай робастной полезности. Аналогичный результат при других предположениях и в случае, когда случайный вклад в терминальный момент времени равен константе, получен мной (2010).

В **третьей главе** объектом исследования является двойственная задача к задаче максимизации робастной полезности. В абстрактную постановку этой задачи входят элементы поляры к множеству терминальных капиталов. Рассматривается вопрос, когда минимум в двойственной задаче можно взять не по поляре, а по множеству терминальных значений супермартингальных плотностей. При естественных предположениях ответ на этот вопрос дает теорема 3.1, при этом он опирается на новое понятие разветвленной оболочки семейства случайных процессов. Полученный результат является обобщением на робастный случай совместной работы Д. Крамкова и В. Шахермайера (1999). В качестве приложения для выпуклого и разветвленного семейства случайных процессов получено обобщение результата Д. Рохлина (2010) о существовании эквивалентной супермартингальной плотности.

В **заключении** дается краткий обзор проведенного исследования, приводятся рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.

Основные результаты диссертации изложены в 5 научных работах автора, в том числе 3 публикациях в ведущих рецензируемых научных изданиях, входящих в международные базы *SCOPUS, Web of Science и RSCI*, рекомендованных для защиты в диссертационном

совете МГУ по специальности, а также неоднократно представлялись автором на научных семинарах и конференциях всероссийского и международного уровней.

Основные результаты диссертации являются новыми, достоверными, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в МГУ им. М. В. Ломоносова, МИАН им. В. А. Стеклова, СПбГУ, ЮФУ и ЦЭМИ РАН.

Диссертация А. А. Фарвазовой представляет собой законченное научное исследование, выполненное на высоком научном уровне. Полученные результаты являются фундаментальными в исследуемой области и значительно расширяют применение двойственных методов в максимизации робастной полезности.

Диссертация А. А. Фарвазовой "Математические задачи максимизации полезности" соответствует критериям, установленным в "Положении о присуждении ученых степеней в МГУ им. М. В. Ломоносова" и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3(01.07) ФГБОУ ВО МГУ по специальности 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки).

Профессор кафедры теории вероятностей
механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова,
(119991, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет,
тел. +74959391403,
e-mail: probability@yandex.ru,
сайт: http://new.math.msu.su/department/probab/)
доктор физико-математических наук
(тел. +74959391403, e-mail: gushchin@mi-ras.ru) А. А. Гущин

11 09.2023

Подпись профессора кафедры теории вероятностей,
доктора физико-математических наук А. А. Гущина удостоверяю
декан механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Шафаревич