Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Фарвазова Айсылу Азатовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук
Гущин Александр Александрович

Москва — 2023

Оглавление

Список обозначений **4**

Введение **6**

ГЛАВА 1. Об одном свойстве преобразования Фенхеля **24**

1.1 Функция Юнга и пространства Орлича 25

1.2 Возрастающие процессы, порождающие замену времени 26

1.3 Пример: экспоненциальная функция полезности 27

1.4 Общие сведения про субдифференцируемость класса функций Юнга 28

1.5 Основной результат 29

ГЛАВА 2. Двойственная задача максимизации робастной полезности **32**

2.1 Введение 34

2.2 Постановка задачи и формулировка результата. 37

2.3 Доказательство результата 41

ГЛАВА 3. Максимизация робастной полезности в терминах супермартингальных мер **48**

3.1 Введение 48

3.2 Вспомогательный результат 51

3.3 Основной результат 53

3.4 Следствие 57

Заключение **59**

Список литературы **61**

Список обозначений

В диссертации используется следующая система нумераций и обозначений. Во-первых, утверждения разных характеров (теоремы и леммы), определения и замечания нумеруются двумя цифрами независимо от типа. Первая цифра отвечает за номер главы, а вторая — порядковому значению типа в содержании главы. Во-вторых, наиболее важные формулы выводятся в отдельную строку и нумеруются аналогичным способом. В-третьих, приведем ниже список наиболее значимых, по мнению автора, обозначений.

$\mathscr{Q}$	6	семейство *субъективных* мер на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$
E_P	6	математическое ожидание по фиксированной мере P
$\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q}$		инфимум по семейству мер $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$
γ	7	*штрафная* функция — прибавляемая к целевой функции задачи максимизации робастной полезности слагаемое, которое 'штрафует' за нарушение ограничений, т.е. увеличивает значение целевой функции, тем самым инфимум будет находиться в области ограничений
$\mathscr{K}(x, B)$		множество терминальных капиталов с начальным капиталом x и со случайным вкладом B (случайная величина) в момент T
M_+		неотрицательные элементы множества M
$L^0(\mathsf{P})$		пространство классов эквивалентности случайных величин, совпадающих P-п.н.; неравенства выполняются P-п.н.
$L^0(\mathscr{Q})$		пространство классов эквивалентности случайных величин, совпадающих Q-п.н. при всех $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$

$L^{\hat{U}}(\mathsf{P})$		пространство Орлича по мере P
$L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$	35	пространство Орлича по семейству мер $\mathscr{Q}$
$L(S)$		множество всех предсказуемых S-интегрируемых случайных процессов для случайного процесса S
$\mathscr{E}^*$		сопряжение $\mathscr{E}$ (сопряженное пространство, функция, конус и т.д.); примечание: для вогнутой функции f сопряженная функция f^* определяется как вогнутая функция $f^*(y) = \inf_x\big(\langle x, y\rangle - f(x)\big)$, $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$, а для выпуклой функции f — как выпуклая функция $f^*(y) = \sup_x\big(\langle x, y\rangle - f(x)\big)$, $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$
$\overline{\mathbb{R}}$		расширенная вещественная прямая, т.е. $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\operatorname{dom} f$		*эффективная* область определения функции $f : X \to Y$; для выпуклой f определяется как $\operatorname{dom} f := \{x \in X\colon f(x) < +\infty\}$, а для вогнутой функции — $\operatorname{dom} f := \{x \in X\colon f(x) < -\infty\}$
$\partial f(x)$	28	субдифференциал функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке x, $\partial f(x) := \{p \in \mathbb{R} : f(y) \geq f(x) + p(y - x)\ \forall\, y \in \mathbb{R}\}$
$\|\|\mu\|\|_{ba}$	38	норма полной вариации в пространстве ba : $\|\|\mu\|\| := \sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\|$, где супремум берется по всем конечным разбиениям Ω на дизъюнктные множества $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$
$\mathscr{J}_f$	39	f-дивергенция
$\sigma(X, Y)$	41	*слабая* топология дуальной пары (X, Y)
M°	51	*поляра* множества M
$\overline{M}^0_+$	51	замыкание множества M_+ в L^0
f'_+	52	правая производная функции f
ess sup	56	*существенная* верхняя грань (не интересуемся тем, что происходит на множестве меры нуль); (X, μ) — измеримое пространство, $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{\sup_{E \in X} f(x) : \mu(X \setminus E) = 0\}$

Введение

Диссертация подготовлена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и посвящена развитию двойственных методов в задаче максимизации робастной полезности в финансовой математике, а также некоторым смежным вопросам.

Актуальность темы и степень ее разработанности. Задача оптимального инвестирования занимает значимое место в финансовой математике. Максимизация ожидаемой полезности впервые начинает рассматриваться с 1950-х годов. В качестве примера первых работ с применением вероятностных методов в этом направлении перечислим работы [55, 58, 59]. Сама задача максимизации ожидаемой полезности имеет две постановки — это *стандартная* и *робастная*. Пусть задана абстрактная модель финансового рынка, т.е. задана четверка $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}, \mathscr{K})$, где $\xi \in \mathscr{K}$ — множество терминальных капиталов; $\mathscr{Q}$ — некоторое семейство мер на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$; U — функция полезности экономического агента, тогда

$$\xi \rightsquigarrow \mathsf{E}_{\mathsf{P}} U(\xi), \tag{0.1}$$

функционал максимизации для *стандартной* формы и

$$\xi \rightsquigarrow \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi), \tag{0.2}$$

для *робастной* постановки. В первом случае будущее состояние рынка описывается одной единственной мерой P, а во втором — семейством мер $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$ и мак-

симизируем наихудший случай, что соответствует инфимуму. Приведем пример работы со стандартной постановкой [21] и примеры работ с робастной [35, 3].

Задачи максимизации ожидаемой полезности сильно различаются друг от друга в зависимости от накладываемых на функцию полезность U предположений, а именно, U может быть конечной на полупрямой или же на всей вещественной прямой.

В робастном случае задачи максимизации полезности в литературе встречаются работы [43] со *штрафной функцией* γ:

$$\xi \rightsquigarrow \inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathsf{Q})\big). \tag{0.3}$$

Модель финансового рынка со штрафной функцией также рассматривается в настоящей диссертации.

Если задана четверка $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}, \mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$ — множество допустимых капиталов в терминальный момент времени, то можно говорить об абстрактной модели финансового рынка. Чтобы перейти к динамической модели в задачах (0.1)–(0.3) необходимо ввести процесс S дисконтированных цен торгуемых базовых активов и множество $\mathscr{H}$ *допустимых* самофинансируемых стратегий. Тогда множество *допустимых* капиталов представляется в виде

$$\mathscr{K}(x, B) := \{x + H \cdot S_T + B \colon H \in \mathscr{H}\},$$

где x — начальный капитал, B — возможный случайный вклад в момент времени T, т.е. в терминальный момент времени. В различных предположениях задача максимизации исследуется, например, при $x = 0$ или $B = 0$. Ввиду исключения возможности арбитража в финансовых рынках, естественно предполагалось допустимыми именно равномерно ограниченные снизу процессы капитала.

Существует два подхода к решению задач максимизации ожидаемой полезности — это *двойственные методы* [41] и *методы динамического программирования* [49]. В настоящей работе рассматриваются именно двойственные методы.

Сначала находим соотношение между исходной задачей и двойственной. Потом решаем двойственную, что намного проще, поскольку поиск инфимума проще поиска седловой точки. Наконец, решение двойственной задачи приводит к решению исходной.

В случае конечной на полупрямой функции полезности, ограниченность снизу капиталов никак не влияет на выбор множества допустимых стратегий. Так, например, в работе [41] авторы сначала доказывали все основные утверждения для абстрактной модели финансового рынка, а потом переносили результаты для динамических семимартингальных моделей.

Актуальность избранной темы подтверждается многочисленными публикациями в исследуемой области, а именно, по максимизации стандартной полезности — работы [19, 20, 22, 23, 24, 29, 40, 42, 56] и по максимизации робастной полезности — [3, 28, 33, 36, 37, 57].

Включение ценообразования активов в структуру максимизации полезности естественным образом приводит к концепции минимаксных мартингальных мер. В работе Ф. Беллини и М. Фрителли [19] 2002 года рассматривается модель рынка, в которой процессы цен предполагаются $\mathbb{R}^d$-семимартингалами X, а набор торговых стратегий состоит из всех предсказуемых, X-интегрируемых, со значениями в $\mathbb{R}^d$ процессов H, для которых стохастический интеграл $H \cdot X$ равномерно ограничен снизу. Авторы показывают, что в безарбитражном рынке достаточным условием существования *минимаксной меры* (см. [19]) является вогнутость и неубывание функции полезности $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Когда случайные процессы цен финансовых активов описываются возможно неограниченными семимартингалами, классическая концепция допустимых торговых стратегий может привести к тривиальной задаче максимизации полезности, поскольку множество ограниченных снизу стохастических интегралов может быть сведено к нулевому процессу. Однако может случиться так, что инвестор захочет торговать на таком рискованном рынке, где потенциальные потери неограничены, чтобы увеличить свою ожидаемую полезность. Авторы

работы [22] описывают это отношение в математических терминах, используя класс $\mathcal{H}^W$ — W-допустимых торговых стратегий, которые зависят от случайной величины убытка W. Эти стратегии обладают хорошими математическими свойствами. Авторы формулируют и анализируют методом двойственности задачу максимизации полезности в новой области $\mathcal{H}^W$. Показывается, что для всех переменных потерь W, содержащихся в правильно идентифицированном множестве $\mathcal{W}$, оптимальное значение на классе $\mathcal{H}^W$ постоянно и совпадает с оптимальным значением задачи максимизации над большей областью K_Φ. Класс K_Φ не зависит от одного $W \in \mathcal{W}$, но зависит от функции полезности U через ее сопряженную функцию Φ. Методами двойственности показано, что решение существует в K_Φ и может быть представлено в виде стохастического интеграла, являющегося равномерно интегрируемым мартингалом относительно минимаксной меры. Дается экономическая интерпретация более широкого класса K_Φ и анализируется несколько примеров, чтобы показать, что такое расширение класса торговых стратегий действительно необходимо.

В совместной работе С. Биаджини и М. Фрителли [22] авторы столкнулись с проблемой максимизации полезности на неполных рынках, когда случайный процесс цены финансовых активов описывается семимартингалами, которые не обязательно локально ограничены. Был введен класс хорошо контролируемых допустимых стратегий в очень рискованном контексте, а затем решена задача максимизации с помощью техники (L^∞, ba)-двойственности. В работе [20] С. Биаджини придерживается тактики совместной работы и показывает, что двойственный результат может быть получен через двойственность пространств Орлича, естественно связанную с рассматриваемой функцией полезности. Эта новая формулировка дает дополнительное понимание природы контроля потерь в хороших торговых стратегиях.

В работе С. Биаджини и М. Фрителли [23] 2007 года рассматривается неполный стохастический финансовый рынок, где случайные процессы цен описываются семимартингалом с векторным значением, который, возможно, не явля-

ется локально ограниченным. Авторы сталкиваются с задачей типа (0.1). Рассматриваемая функция полезности конечна, гладкая на всей прямой и удовлетворяет условию *reasonable asymptotic elasticity* (см. [56]). В этой общей постановке авторами чуть ранее в работе [22] было показано, что оптимальное утверждение допускает интегральное представление, как только минимаксная σ-мартингальная мера эквивалентна эталонной вероятностной мере. В работе [23] авторы показывают, что процесс оптимального капитала на самом деле является супермартингалом по отношению к любой σ-мартингальной мере с конечной обобщенной энтропией.

В работе С. Биаджини и М. Фрителли [24] 2008 года рассматривается стохастический финансовый неполный рынок, где процессы цен описываются семимартингалом с векторным значением, который, возможно, не является локально ограниченным. Авторы имеют дело с задачей типа (0.1), где функция полезности конечна на (a, ∞), $a \in [-\infty, \infty)$ и удовлетворяет предположению *слабой регулярности*. Вложение задачи максимизации полезности в пространства Орлича позволяет сформулировать задачу единым образом как для случая $a \in \mathbb{R}$, так и для случая $a = -\infty$. С помощью двойственных методов доказывается существование решений прямой и двойственной задачи и показывается, что сингулярная компонента в функционалах ценообразования может также иметь место со всюду конечными функциями полезности.

В [29] авторы рассматривают задачу максимизации с экспоненциальной функцией полезности. Исходная оптимизационная задача имеет вид:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\left(1 - e^{-\alpha(V_T(c,\vartheta)-B)}\right) \longrightarrow \sup_{\vartheta\in\Theta},$$

- $\vartheta \in \Theta$ — множество допустимых стратегий;
- (c, ϑ) — самофинансируемая стратегия, где c — начальный капитал и ϑ^i_t — количество единиц базового актива в момент времени t;
- $V_T(c, \vartheta) = c + \int_0^T \vartheta dX = c + G(\vartheta)$ — капитал в момент времени T, где X

— локально ограниченный семимартингал;

- B — выплата в момент времени T, соответствующее условным обязательствам.

Авторы ставят целью найти оптимальную стратегию ϑ^* и вычислить само значение оптимизационной задачи. Формулируется и выводится двойственная оптимизационная задача:

$$\sup_{\vartheta\in\Theta}\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\Big(1-e^{-\alpha(V_T(c,\vartheta)-B)}\Big)=1-\exp\Big(\alpha\sup_{\mathsf{Q}\in\mathbb{P}}\big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}B-c-\frac{1}{\alpha}H(\mathsf{Q}|\mathsf{P})\big)\Big),$$

α — *risk aversion* параметр; $H(\mathsf{Q}|\mathsf{P})$ — относительная энтропия меры Q относительно P и $\mathbb{P}$ — множество абсолютно непрерывных локальных мартингальных мер. В правой части равенства выше можно вынести знак минус за скобки и рассматривать уже задачу минимизации. Отдельно рассматривается случай $B\equiv 0$. Приложения включают новую характеристику минимальной мартингальной меры $\hat{\mathsf{P}}$. Показывается, что $\hat{\mathsf{P}}$ является единственным решением двойственной задачи: нахождение минимальной мартингальной меры соответствует хеджированию в случае экспоненциальной полезности с B. Также исследуется случай $\alpha\to\infty$.

Работа [40] является заметкой к предыдущей работе [29] шести авторов. Авторы ослабляют предположения основных результатов, полученных в [29]. А именно, предполагая, что ценовой процесс локально ограничен и допускает эквивалентную локальную мартингальную меру с конечной энтропией, показывается, без предположения выполнения *обратного неравенства Гёльдера*, что в случае экспоненциальной полезности процесс оптимальной стратегии является мартингалом относительно каждой локальной мартингальной меры с конечной энтропией. Более того, оптимальное значение всегда достижимо на последовательности равномерно ограниченных стратегий.

В задачах максимизации робастной ожидаемой полезности рассматривают не только стратегии оптимального инвестирования, но и также стратегии опти-

мального потребления. Примером такой работы является [28]. В данной работе рассматривается неполная семимартингальная модель финансового рынка в условиях модельной неопределенности, что подразумевает робастный случай. Цель авторов найти оптимальную допустимую стратегию потребления, чтобы потери были минимальными. Потери измеряются некоторой строго убывающей, строго выпуклой, непрерывно дифференцируемой функцией $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условиям Инады:

$$L^{'}(0) = -\infty, \quad L^{'}(\infty) = 0.$$

Функция полезности предполагается равной $U := -L$. На функцию полезности накладываются дополнительные условия. Исходная оптимизационная задача имеет вид:

$$\sup_{c \in \mathscr{A}_L^1(x)} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathbb{P}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\Big(\int_0^T U(c_t)dt\Big),$$

где для $x \in \mathbb{R}_+$ положим

- $$\mathscr{A}_L^1(x) := \big\{c \in \mathscr{A}(x) : \int_0^T L(c_t)dt \in L^1(\mathsf{P})\big\},$$
- $\mathscr{A}(x)$ — множество всех допустимых торговых стратегий для начального капитала x,
- стратегия потребления $(c_t)_{t\in[0,T]}$ называется *допустимой* при начальном капитале x, если существует такая торговая стратегия H, что
$$x + \int_0^T H_t dS_t + \int_0^T (e_t - c_t)dt \geq 0,$$
- $(e_t)_{t\in[0,T]}$ — существенно ограниченный неотрицательный процесс притока капитала.

Авторы формулируют двойственную задачу, доказывают существование седловой точки у исходной задачи и дают характеристику оптимальной стратегии

потребления в терминах решения двойственной задачи. Полученный результат является обобщением на робастный случай результата Карацаса и Зитковича (2003) (см. [28]).

Основным объектом исследования в [33] является f-дивергенция между мерами P и Q:

$$f(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) := \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\left(f\left(\frac{d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}}\right)\right),$$

где $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$, $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}$ — некоторое семейство мер и $\mathsf{P} \ll \mathsf{R}$, $\mathsf{Q} \ll \mathsf{R}$ для заданной вероятностной меры R; f — выпуклая функция. Рассматривается следующая оптимизационная задача для *робастной f-дивергенции*:

$$f(\mathsf{P}|\mathcal{Q}) = \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} f(\mathsf{P}|\mathsf{Q}) \longrightarrow \inf_{\mathsf{P}\in\mathcal{P}}.$$

По-другому, *задача проекции*, которая состоит в нахождении вероятностной меры $\mathsf{P}_0 \in \mathcal{P}$, где инфимум достигается. При определенных условиях на семейство мер $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ (компактность и замкнутость) показывается, что существует робастная f-проекция P_0 на $\mathcal{Q}$, где $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$, более того существует обратная проекция, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

Если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

то решение существует в классе $\tilde{\mathcal{P}}$ расширенных мартингальных мер. Авторы также объясняют связь этих двух случаев с теорией выбора оптимального инвестирования в максимизации ожидаемой полезности.

В работе [36] исследуется следующая оптимизационная задача с ограничением

$$\max \inf_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(X) \text{ для всех X таких, что } \sup_{\mathsf{P}\in\mathcal{P}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}(X) \le x,$$

где $\mathcal{P}$ — выпуклое множество эквивалентных локальных мартингальных мер; x — начальный капитал. В случае полной и неполной модели финансового рынка авторы дают двойственную характеризацию для исходной задачи. Авторы

используют технику f- дивергенции. Это стандартный подход для сведения робастного случая к классической задаче максимизации по фиксированной вероятностной мере. Более того, авторы дают двойственную характеристику для задачи тесно связанной с исходной: минимизация расходов при минимальном уровне ожидаемой полезности w в случае неполного рынка:

$$\min \inf_{\mathsf{P}\in\tilde{\mathcal{P}}} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[X] \text{ для всех X таких, что } \sup_{\mathsf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(X) \geq w.$$

В работе [37] приводятся тезисы выступления. Основные результаты касаются свойства V- *дивергенции* (см. [2]), а именно, двойственная характеризация исходной робастной оптимизационной задачи выражается через V- дивергенцию. Функция полезности $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ считается конечной на полупрямой $(-r, \infty)$, где $r := -\inf\{x : U(x) > -\infty\}$.

В работе [57] авторы развивают теорию двойственных методов в задачах максимизации полезности. В отличие от работ [41, 42] рассматривается робастная постановка типа (0.2). Следовательно, естественно вводятся дополнительные предположения на семейство мер $\mathcal{Q}$ при фиксированном фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$:

- $\mathsf{Q} \ll \mathbb{P}$ для всех $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}$;
- если $\mathsf{Q}(A) = 0$ для всех $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}$, тогда $\mathbb{P}(A) = 0$;
- $\mathcal{Q}$ — выпуклое, замкнутое и относительно компактное множество в топологии сходимости в полной вариации.

Авторы доказывают существование оптимального значения $\hat{\mathsf{Q}}$, которое необязательно эквивалентно мере $\mathbb{P}$. Предположения, накладываемые на функцию полезность U, аналогичные как в работах [41, 42]. Отказ от предположения эквивалентности мер существенно затрудняет доказательство теорем, а также допускает арбитражные возможности, как было показано авторами.

В дополнение хотели бы привести примеры по исследуемой теме недавних работ [17, 38, 44, 47, 48].

Цели и задачи. Целью исследования являются: постановка и вывод двойственной задачи для задачи максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой. Также ставится задача изучения вопроса, при каких условиях можно определить двойственную задачу для задачи максимизации робастной полезности со штрафной функцией и с функцией полезности, конечной на полупрямой, в терминах супермартингальных плотностей; изучение вопроса связи производных классов функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой.

Объект исследования. Объектом исследования являются двойственная характеризация задачи максимизации робастной полезности и классы функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации новые и заключаются в следующем.

В главе 1 **доказано**, что функции, играющие роль производных для всех функций из классов функций Юнга, которые сопряжены одна к другой в смысле Фенхеля, взаимно обратные в обобщенном смысле.

В главе 2 **доказана** теорема о двойственной характеризации задачи максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой.

В главе 3 **изучена** структура поляр $\mathscr{D}$ подмножеств $\mathscr{A}$ конуса L^0_+, соответствующих терминальным значениям капиталов инвестиционных стратегий $X \in \mathscr{X}$. А именно, **доказан** критерий для сужения поляры множества терминальных капиталов в определении двойственной задачи для задачи максимизации робастной полезности со штрафной функцией и с функцией полезности, конечной на полупрямой, до выпуклого подмножества терминальных значений всех супермартингальных плотностей.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический

характер. Результаты диссертации могут быть полезны в задачах максимизации полезности, а именно, в применении двойственных методов.

Методы исследования. В работе применяются методы теории вероятностей и функционального анализа, в частности, двойственные методы выпуклого анализа.

Положения, выносимые на защиту. Следующие основные результаты диссертации выносятся на защиту.

1) Функции, играющие роль производных для всех функций из классов функций Юнга, которые сопряжены одна к другой в смысле Фенхеля, взаимно обратные в обобщенном смысле.

2) Теорема о соотношении между исходной и двойственной задачей для задачи максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой.

3) Критерий для сужения поляры множества терминальных капиталов в определении двойственной задачи для задачи максимизации робастной полезности со штрафной функцией и с функцией полезности, конечной на полупрямой, до выпуклого подмножества терминальных значений всех супермартингальных плотностей.

Апробация результатов. Основные идеи и положения работы изложены в 5 научных работах автора общим объемом 2.2 п.л., в том числе 3 публикациях (объемом 1.96 п.л.) в рецензируемых научных изданиях, входящих в официальный перечень ВАК и международные базы SCOPUS, Web of Science и RSCI. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. *Аспирантский коллоквиум* кафедры теории вероятностей, проводимый под руководством академика РАН А. Н. Ширяева и профессора Д. А. Шабанова, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2019.

2. *Аспирантский коллоквиум* кафедры теории вероятностей, проводимый под руководством академика РАН А. Н. Ширяева и профессора Д. А. Шабанова, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2021.

3. *XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019»*, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 8–12 апреля 2019.

4. *XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021»*, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 12–23 апреля 2021.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 68 страницах и состоит из списка обозначений, введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 62 наименований и работ автора по теме диссертации.

Краткое содержание работы. Во введении, в частности, определяются цели и задачи диссертации, объект и методы исследования, научная новизна, теоретическая значимость работы и приводятся положения, выносимые на защиту. Говорится об актуальности задачи максимизации робастной полезности в современной финансовой математике, излагаются различные подходы к решению проблемы и приводится исторический очерк.

В постановке задачи максимизации робастной полезности важную роль играет выбор функционального пространства. Важно, чтобы для любого $\xi \in \mathscr{K}$ такого, что $\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) > -\infty$ случайные величины $\min\{\xi, 0\}$ лежали в этом пространстве. На эту роль идеально подходят пространства Орлича, порожденные функцией Юнга $\hat{U}(x) := -U(-|x|) + U(0)$. **Глава 1** посвящена

доказательству одного свойства производных функций Юнга и их преобразований Фенхеля: замена времени и порождающий её процесс являются производными функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой. Полученный результат имеет приложения в задачах максимизации полезности. Глава 1 состоит из пяти параграфов. В первых двух и в четвертом приводятся вспомогательные результаты (про функцию Юнга и пространства Орлича по мере [50], про замену времени [18], про субдифференцируемость функций Юнга [16]), в третьем — пример и в пятом содержится основная теорема и ее доказательство.

В **главе 2** объектом исследования является двойственная характеризация задачи максимизации ожидаемой полезности.

Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$, U — функция полезности. По функции полезности U построим функцию Юнга

$$\hat{U}(x) := -U(-|x|) + U(0).$$

Введем сопряженную к $\hat{U}$ функцию Юнга $\hat{V}$ соотношением

$$\hat{V} := \hat{U}^*.$$

Положим

$$V := -U^*.$$

Поскольку в главе 2 рассматривается *робастная* постановка задачи максимизации, то на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ нужно ввести семейство мер $\mathscr{Q}$. Семейство $\mathscr{Q}$ (субъективных) мер определим как выпуклое и непустое подмножество множества вероятностных мер:

$$\mathscr{Q} \subset \{\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}\colon d\mathsf{Q}/d\mathsf{P} \in L_+^{\hat{V}}(\mathsf{P}) \text{ для некоторой меры } \mathsf{P}\}.$$

Здесь

$$L^{\hat{V}}(\mathsf{P}) := \{\xi \in L^0(\mathsf{P})\colon \mathsf{E}_\mathsf{P}\hat{V}(\varepsilon\xi) < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}$$

— пространство Орлича по мере P, порожденное функцией Юнга $\hat{V}$.

Определим функциональное пространство для постановки задачи максимизации. Пусть $L^0(\mathscr{Q})$ — классы эквивалентности случайных величин, совпадающих Q-п.н. при всех $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$. *Пространством Орлича* $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$ *по семейству мер* $\mathscr{Q}$, порожденной функцией Юнга $\hat{U}$, называется

$$L^{\hat{U}}(\mathscr{Q}) := \{\xi \in L^0(\mathscr{Q})\colon \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\hat{U}(\varepsilon\xi) < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}.$$

Замечание 2.1. Важно отметить, что пространство Орлича $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$ по семейству мер $\mathscr{Q}$ является банаховым (см. [53]) относительно *нормы Люксембурга*

$$N_{\hat{U}}(\xi) := \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} N_{\hat{U}}^{\mathsf{Q}}(\xi) = \inf\Big\{K > 0\colon \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\hat{U}\Big(\frac{\xi}{K}\Big) \le 1\Big\}.$$

Теперь опишем модель финансового рынка. Модель финансового рынка состоит из

- фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$,
- d согласованных строго положительных последовательностей $S^i = (S^i_t, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, ..., d$, которые описывают эволюцию цен базовых активов; в нашем случае $S = (S^i)$, $i = 1, ..., d$ — семимартингалы,
- d предсказуемых последовательностей $H^i = (H^i_t, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, ..., d$ — *торговая стратегия* или *портфель ценных бумаг*; в нашем случае $L(S)$ — множество всех предсказуемых S-интегрируемых процессов H,
- *капитала стратегии* H к моменту времени t (см. [14]) $X^H_t := \int_0^t H_u dS_u$.

Здесь имеет место векторное представление $S = (S^1, ..., S^d)$, $H = (H^1, ..., H^d)$ и $H_t \cdot S_t := \int_0^t H_u dS_u$.

Пусть $B \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$ — случайная величина, представляющая случайный возможный вклад в терминальный момент времени T. В главе 2 исследуется следующая оптимизационная задача:

$$\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U\Big(\int_0^T H_t dS_t + B\Big) \longrightarrow \sup_{H\in\mathcal{J}},$$

где $\mathcal{J} = \{H \in L(S)\colon \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t H_u dS_u \in L^{\hat{U}}(\mathcal{Q})\}$ — множество допустимых стратегий.

Пусть $\mathcal{K}$ — множество случайных величин ξ, капиталов в момент времени T.

Замечание 2.2. Если в качестве допустимых стратегий рассматривать S-интегрируемые процессы H, то в качестве примера допустимых терминальных капиталов можно привести следующую структуру:

$$\mathcal{K} = \{H \cdot S_T\colon H \in \mathcal{J}\}.$$

Замечание 2.3. Отметим, что в качестве допустимых стратегий мы рассматриваем предсказуемые процессы H, поскольку предполагаем, что портфель на завтра задается сегодня. Также, оказывается, что наиболее общий класс процессов S, что стохастический интеграл по нему $H \cdot S_t$, $t \in [0,T]$ определен для любого предсказуемого H — это семимартингалы. Поэтому мы рассматриваем *семимартингальную модель* финансового рынка. Вообще, на основе определения стохастических интегралов по семимартингалу лежит обширная теория, но мы не будем на этом останавливаться подробно.

Исходная оптимизационная задача определена на пространстве L^0 всех (классов эквивалентности) случайных величин, которое, обычно, не локально выпукло. В ходе доказательства основных утверждений главы 2 мы активно применяем методы выпуклого анализа. Поэтому наш первый шаг состоит в том, чтобы вложить задачу в подходящее пространство, а именно, что исходная цена не изменится, если в её определении $\mathcal{K}$ заменить на

$$\mathcal{C} = (\mathcal{K} - L^0_+(\mathsf{P})) \cap L^{\hat{U}}(\mathcal{Q}).$$

Здесь $\mathcal{C}$ — конус. Учитывая случайный вклад, формально заменим множество $\mathcal{K}$ множеством

$$\mathcal{A} := B + \mathcal{K}.$$

В зависимости от накладываемых предположений на функцию полезности

U, семейство мер $\mathscr{Q}$ и на множество терминальных капиталов $\mathscr{K}$, задачи максимизации *робастной* полезности сильно отличаются друг от друга.

В главе 2 ставится цель постановки и вывода двойственной задачи для задачи максимизации *робастной* полезности со случайным терминальным вкладом B. Задача усложняется тем, что полярный конус $\mathscr{C}^*$ содержит сингулярные линейные функционалы, которые не могут быть представлены случайными величинами. Полученный в главе 2 результат является обобщением результата С. Биаджини и А. Черного [21] на робастный случай. Аналогичный результат при других предположениях и когда $B \equiv const$ получен А. А. Гущиным [3].

Сформулируем основной результат главы 2:

Теорема 2.1. Пусть выполнены предположения 2.1–2.4 и $B \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$. Переобозначим $\mathscr{A} := (B + \mathscr{C}) \cap \{X \colon X \geq \underline{x}\}$. Тогда выполнено

$$\sup_{X \in \mathscr{A}} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(X) = \min_{Y \in L^{\hat{V}}_+(\mathscr{Q}),\, \mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V(Y) + \sup_{X \in \mathscr{A} \cap \mathcal{D}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(XY) \big). \tag{0.4}$$

Решая двойственную задачу мы приходим к решению исходной.

В **главе 3** рассматривается следующая модель финансового рынка:

- $U : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty)$ — монотонно неубывающая вогнутая функция полезности; $U(x) = -\infty$ при $x < 0$ и $U(x) \in \mathbb{R}$ при $x > 0$;
- γ — выпуклая штрафная функция (см. работу [12]);
- $\mathscr{Q}$ — семейство субъективных мер.

Оптимизационная задача выглядит как в (0.3):

$$\inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \Big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathsf{Q}) \Big) \longrightarrow \sup_{\xi \in \mathscr{A}}$$

где $\mathscr{A}$ — множество терминальных капиталов, содержащее случайную величину $\xi_0 \geq \varkappa$ для некоторого $\varkappa > 0$. Здесь множество случайных величин $\mathscr{A}$ и множество мер $\mathscr{Q}$ являются выпуклыми.

Определим

$$\mathscr{D} := \{\eta \in L^0_+ \colon \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\eta\xi \le 1 \text{ для любого } \xi \in \mathscr{A}\}.$$

Пусть $x > 0$ — начальный капитал, тогда $\mathscr{A}(x) := x\mathscr{A}$. Аналогично для $y \ge 0$ положим $\mathscr{D}(y) := y\mathscr{D}$.

Исходная и двойственная оптимизационные задачи выглядят следующим образом:

$$u(x) := \sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathsf{Q})\big), \quad x > 0,$$

$$v(y) := \inf_{\eta \in \mathscr{D}(y),\, \mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right) + \gamma(\mathsf{Q})\big), \quad y \ge 0. \tag{0.5}$$

В главе 3 исследуется структура поляр $\mathscr{D}$ подмножеств $\mathscr{A}$ конуса L^0_+, соответствующих терминальным значениям капиталов инвестиционных стратегий $X \in \mathscr{X}$. Если $\mathscr{A} = \{X_\infty \colon X \in \mathscr{X}\}$ и $\widetilde{\mathscr{D}} = \{Y_\infty \colon Y \in \mathscr{Y}\}$, где $\mathscr{Y}$ — семейство супермартингальных плотностей для $\mathscr{X}$, то $\widetilde{\mathscr{D}}$ обладает следующим ключевым свойством, которое можно назвать свойством мажорирования поляры $\mathscr{D}$: для любого $\eta \in \mathscr{D}$ существует $\widetilde{\eta} \in \widetilde{\mathscr{D}}$ такое, что $\eta \le \widetilde{\eta}$.

В лемме 3.1 эта ситуация рассматривается в абстрактной форме, и доказывается, что данное свойство равносильно тому, что при двойственном описании оптимального значения робастной полезности (0.5) можно ограничиться вычислением минимума по множеству $\widetilde{\mathscr{D}}$ вместо $\mathscr{D}$. В теореме 3.1 доказывается, что если множество $\mathscr{X}$ выпукло, то для выполнения свойства мажорирования поляры $\mathscr{D}$ необходимо и достаточно, чтобы при переходе к разветвленной оболочке $\mathscr{X}$ терминальные значения содержались в замыкании в L^0 множества $(\mathscr{A} - L^0_+) \cap L^\infty$. Полученный результат является обобщением на робастный случай одного из результатов совместной работы Д. Крамкова и В. Шахермайера [41]. В качестве приложения для выпуклого и разветвленного семейства случайных процессов получено некоторое обобщение результата Д. Б. Рохлина [8] о существовании супермартингальной плотности с $\mathsf{P}(Y_\infty > 0)$.

Благодарность. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Александра Александровича Гущина. Автор благодарит своего научного руководителя за выбор темы исследования и поддержку. Также автор выражает искреннюю благодарность и глубокую признательность академику РАН профессору Альберту Николаевичу Ширяеву за внимательное чтение текста настоящей диссертации, ценные замечания и всему коллективу кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ.

Глава 1

Об одном свойстве преобразования Фенхеля

Основные результаты диссертации (Главы 2 и 3) посвящены развитию теории двойственных методов в задаче максимизации робастной полезности. В постановке задачи максимизации и двойственной к ней важную роль играет выбор функционального пространства. На эту роль идеально подходят пространства Орлича, порожденные функцией Юнга и ее преобразованием Фенхеля (Глава 2). В главе 1 рассматриваются некоторые смежные вопросы, связанные с классом функций Юнга.

Глава 1 посвящена доказательству одного свойства производных функций Юнга и их преобразований Фенхеля: замена времени и порождающий её процесс являются производными функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля одна к другой. Полученный результат имеет приложения в задачах максимизации полезности. Глава 1 состоит из пяти параграфов. В первых двух и в четвертом приводятся вспомогательные результаты, в третьем — пример и в пятом содержится основная теорема и ее доказательство.

1.1 Функция Юнга и пространства Орлича

Самым первым дадим определение *функции Юнга*. Британский математик Уильям Генри Янг (1863–1942) анализировал некоторый класс функций во время своего изучения рядов Фурье. Этот класс функций впоследствии стал называться его именем.

Определение 1.1. ([50]) *Функцией Юнга* называется функция $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, которая является выпуклой, четной, т.е. $\Phi(x) = \Phi(-x)$, $\Phi(0) = 0$, полунепрерывной снизу и ненулевой.

Сопряженная к Φ функция $\Psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ определяется как преобразование Фенхеля Φ^* функции Φ:

$$\Psi(y) := \Phi^*(y) := \sup_{x \geqslant 0}\big(x|y| - \Phi(x)\big), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Она также является функцией Юнга. Свойства проверяются очевидно. Из выражения выше видно, что функции Φ и Ψ удовлетворяют *неравенству Юнга*:

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Важно отметить, что вторая сопряженная к Φ функция Φ^{**} равняется самой функции $\Phi(x)\colon\ \Phi^{**} = \Phi$.

Теперь дадим определение пространства Орлича, порожденного функцией Юнга Φ. Названа в честь создателя теории функционального пространства польского математика Владислава Орлича (1903–1990).

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. Пусть $L^0(\mathsf{P})$ — множество на $(\Omega, \mathscr{F})$ измеримых функций $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Определение 1.2. *Пространством Орлича* $L^\Phi(\mathsf{P})$ по мере P, отвечающей функции Юнга Φ, называется

$$L^\Phi(\mathsf{P}) := \{\xi \in L^0(\mathsf{P})\colon \mathsf{E}_\mathsf{P}\Phi(\varepsilon\xi) < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}.$$

Определим *норму Люксембурга* N_Φ^{P} в пространстве Орлича $L^\Phi(\mathsf{P})$

$$N_\Phi^{\mathsf{P}}(\xi) := \inf\left\{K > 0\colon \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\Phi\left(\frac{\xi}{K}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Замечание 1.1. Стандартное пространство Орлича $L^\Phi(\mathsf{P})$ является банаховым относительно нормы Люксембурга N_Φ^{P}.

Названа в честь датско-американского математика Вильгельма Люксембурга (1929–2018).

Определим также *норму Орлича* $\|\cdot\|_\Phi^{\mathsf{P}}$ на $L^\Phi(\mathsf{P})$:

$$\|\xi\|_\Phi^{\mathsf{P}} := \sup_{\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\Psi(\eta)\leqslant 1} |\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\xi\eta|.$$

Отметим, что нормы Люксембурга и Орлича эквивалентны и для любой $\xi \in L^\Phi(\mathsf{P})$ выполнено соотношение (предложение III.3.4, [50])

$$N_\Phi^{\mathsf{P}}(\xi) \leqslant \|\xi\|_\Phi^{\mathsf{P}} \leqslant 2N_\Phi^{\mathsf{P}}(\xi).$$

Определение 1.3. ([4] и [50]) Функция Юнга Φ удовлетворяет Δ_2-условию (об. $\Phi \in \Delta_2$), если $\exists\, x_0 \geq 0$ и $\exists\, K > 0$:

$$\Phi(2x) \leqslant K\Phi(x), \quad x \geq x_0.$$

Пространство Орлича $L^\Phi(\mathsf{P})$ является сепарабельным, только если функция Юнга Φ удовлетворяет Δ_2-условию.

1.2 Возрастающие процессы, порождающие замену времени

В этом разделе приведем определения *замены времени* и *порождающего ее процесса*, а также некоторых вспомогательных объектов.

Фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ — это вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ плюс последовательность вложенных σ-

алгебр $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset ... \subset \mathscr{F}$ *(фильтрация). Марковским моментом* фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, где $T \subset [0, +\infty)$, называется случайная величина τ, принимающая значения в $T \cup \{+\infty\}$, и такая, что $\{\tau \leq t\} \subset \mathscr{F}_t$ для любого $t \in T$. Марковский момент называется *моментом остановки*, если он конечени п.н., т.е. $\mathsf{P}(\tau < +\infty) = 1$.

Определение 1.4. *Заменой времени* называется семейство $T = (T_s)_{s\geqslant 0}$ марковских моментов, для которого отображения $s \rightsquigarrow T_s$ не убывают и непрерывны справа.

Отметим, что процесс $X = (X_t)_{t\geq 0}$ называется *согласованным с фильтрацией* $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$, если X_t — $\mathscr{F}_t$-измерим для любого $t \in T$. Далее, пусть $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$ — согласованный непрерывный справа возрастающий процесс и $A_0 \geqslant 0$, тогда замена времени, которую она порождает выражается равенством

$$T_s := \inf\{t : A_t > s\}.$$

Верно и обратное. По замене времени $T = (T_s)_{s\geqslant 0}$ мы можем построить порождающий ее процесс $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$

$$A_t := \inf\{s : T_s > t\}.$$

Замечание 1.2. Для пустого множества $\{\varnothing\}$ положим $\inf\{\varnothing\} = +\infty$.

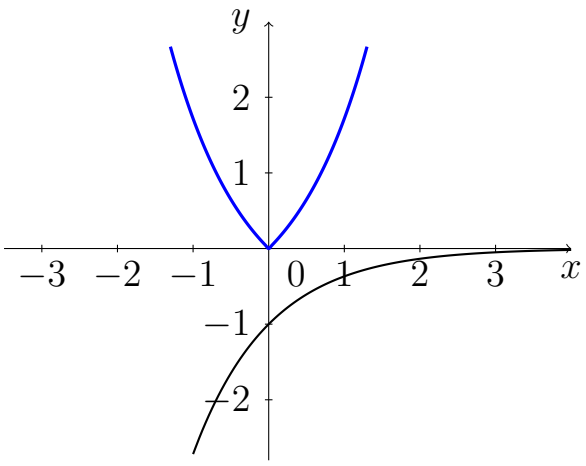
Более подробно про замену времени можно прочитать в монографии [18].

1.3 Пример: экспоненциальная функция полезности

Приведем пример экспоненциальной функции полезности.

- $U(x) = -e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$,
- $V(y) = y \log y - y, \quad y > 0$,

- $\Phi(x) = e^{|x|} - 1, \quad \Psi(x) = \big(|x| \log |x| - |x| + 1\big) \mathbb{1}_{|x|>1}, \quad x \in \mathbb{R}.$



1.4 Общие сведения про субдифференцируемость класса функций Юнга

Напомним следующие определения:

Определение 1.5. Пусть X — линейное топологическое пространство. Вогнутая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется собственной, если $\operatorname{dom} f := \{x \in X \colon f(x) < +\infty\} \neq \varnothing$ и $f(x) > -\infty$ для любого (конечного) $x \in X$.

Определение 1.6. Пусть задана собственная функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Субдифференциал функции f в точке $x \in \mathbb{R}$:

$$\partial f(x) = \{p \in \mathbb{R} : f(y) \geq f(x) + p(y - x) \ \forall\, y \in \mathbb{R}\}.$$

Следующее утверждение является стандартным (см. работу [16]).

Утверждение 1.1. *Пусть задана собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Тогда*

$$y \in \partial f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \partial f^*(y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + f^*(y) = xy.$$

Рассмотрим класс функций Юнга Φ. Функции Φ, где она определена, поставим в соответствие функцию $a(\cdot)$, за исключением тождественного нуля, а

функции $\Phi^* = \Psi - c(\cdot)$, за исключением функции, которая в нуле равна нулю, а в остальных точках бесконечности. Мы покажем, что класс таких функций a — класс неубывающих, неотрицательных, непрерывных справа функций из $\mathbb{R}_+$ в $[0, +\infty]$, и в замене времени отвечает траекториям.

Определение 1.7. Дано $\Phi(t)$. Вводим функцию $a(t)$ для $t \in \mathbb{R}_+$ через субдифференциал:

1) если $\partial\Phi(t) \neq \varnothing$, то $a(t) = \sup_{p \in \partial\Phi(t)} \partial\Phi(t)$ (м.б. $+\infty$),

2) если $\partial\Phi(t) = \varnothing$, то $a(t) = +\infty$.

Определение 1.8. Дано $\Phi(t)$. Вводим функцию $a(t)$ для $t \in \mathbb{R}_+$ через правую производную:

1) если $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\Phi(t + \varepsilon) < \infty$, то $a(t) = \Phi'_+(t)$,

2) если $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\Phi(t + \varepsilon) = +\infty$, то $a(t) = +\infty$.

Утверждение 1.2. *Два определения функции a(t) эквивалентны.*

Доказывается очевидно.

Замечание 1.3. Функция $c(t)$ определяется аналогично по $\Psi(t)$.

1.5 Основной результат

Сформулируем основной результат Главы 1.

Теорема 1.1. *Пусть Φ — функция Юнга. Зададим $a(\cdot)$ как в определении 1.8, аналогично определим $c(\cdot)$. Тогда функции $a(\cdot)$ и $c(\cdot)$ — возрастающие, непрерывные справа и для произвольных $s, t \in \mathbb{R}_+$ выполнено*

$$a(s) = \inf\{t : c(t) > s\}, \tag{1.1}$$

$$c(t) = \inf\{s : a(s) > t\}. \tag{1.2}$$

Пусть g — положительная борелевская функция на $\mathbb{R}_+$. Тогда справедливо

$$\int_0^{\infty} g(t)da(t) = \int_0^{a(\infty)} g(c(t))dt. \tag{1.3}$$

Доказательство. Если определить функции $a(\cdot)$ и $c(\cdot)$ через правую производную, то в конечном случае и в бесконечном, непрерывность справа и возрастание очевидны. Также это очевидно, если они определены через формулы (1.1) и (1.2).

Далее, пусть $a(u)$ определено как в определении 1.8, а $c(t)$ определено как в (1.2). Покажем, что это определение $c(t)$ эквивалентно определению через правую производную. Сначала для этого докажем, что $a(u) \geq t \Leftrightarrow u \geq c(t_-)$, где $c(t_-) = \lim_{t' \uparrow t} c(t')$. Пусть $a(u) \geq t$. Возьмём $s < t$, тогда $a(u) > s$ и $c(s) \leq u$. Т.к. данное неравенство выполнено для произвольного $s < t$, то $c(t_-) \leq u$. Обратно, пусть $c(t_-) \leq u$, $a(u) < t$. Для $t' < t$ имеем $c(t') \leq u$. Т.к. $a(c(t')) \geq t'$ (см. [30]), то $t' \leq a(c(t')) \leq a(u)$, т.е. $a(u) \geq t'$.

Далее, докажем, что $a(u_-) \leq t \Leftrightarrow u \leq c(t)$, где $a(u_-) = \lim_{u' \uparrow u} a(u')$. Пусть $c(t) \geq u$. Для $u' < u$ имеем $c(t) > u'$ и $a(u') \leq t$. Т.к. данное неравенство справедливо для произвольного $u' < u$, то $a(u_-) \leq t$. Обратно, пусть $a(u_-) \leq t$, $c(t) < u$. Отсюда следует, что существует $s < u$, т.ч. $a(s) > t$. Противоречие.

С одной стороны, возьмём $t \in \partial\Phi(u)$, и пусть $a(u)$ определено как в определении 1.8, а $c(t)$ определено как в (1.2). Тогда $a(u) \geq t \geq a(u_-) \Leftrightarrow c(t_-) \leq u \leq c(t)$. С другой, $t \in \partial\Phi(u) \Leftrightarrow u \in \partial\Psi(t)$. Так как это выполнено для произвольного $t \in \partial\Phi(u)$, то $\partial\Psi(t) = [\Psi'_-(t), \Psi'_+(t)] = [c(t_-), c(t)]$ и $c(t) = \Psi'_+(t)$. Аналогично, определяя $c(t)$ через производную, а $a(u)$ как в (1.1), получаем, что для $a(u)$ справедливо определение 1.8. Отсюда следует, что $\partial\Phi(u) = [\Phi'_-(u), \Phi'_+(u)] = [a(u_-), a(u)]$ и $a(u) = \Phi'_+(u)$.

Если ни для какого u $t \notin \partial\Phi(u)$, то $\partial\Psi(t) = \emptyset$. Это случай, когда функция Ψ в точке t обращается в $+\infty$, либо принимает конечное значение, но левая производная равна $+\infty$, а правая производная не существует, так как справа функция принимает бесконечное значение. В этом случае $c(t) = +\infty$.

Пусть сначала $g(t) = \mathbb{1}\{t = 0\}$. Левая часть (1.3) равно a(0). Правая — длине интервала $|I_0| = |\{t : c(t) = 0\}| = a(0)$.

Пусть теперь $g(t) = \mathbb{1}\{t \in (0, s]\}$. Левая часть (1.3) равно $a(s) - a(0)$. Правая — длине интервала $|I_s| = |\{t : 0 \le c(t) \le s\}| = \inf\{t : c(t) > s\} - \inf\{t : c(t) > 0\} = a(s) - a(0)$.

Проверим (1.3) для $g(t) = 1$. Тогда $a(0) + a(\infty) - a(0) = a(\infty)$.

Обозначим $\mathscr{H}$ векторное пространство ограниченных борелевских функций g, для которых выполняется соотношение (1.3), и $\mathscr{C}$ — совокупность индикаторов интервалов вида $[0, t]$. Теорема о монотонных классах (см. [5]), показывает, что $\mathscr{H}$ содержит все ограниченные борелевские функции. Равенство (1.3) с помощью предельного перехода проверяется для всех положительных борелевских функций. □

Глава 2

Двойственная задача максимизации робастной полезности

Глава 2 посвящена развитию двойственных методов в задаче максимизации *робастной* полезности. Исчерпывающие результаты в развитии двойственных методов в задаче максимизации *стандартной* полезности были получены в серии работ Д. Крамкова и В. Шахермайера [41, 42, 56]. Остановимся на этих работах более подробно.

Самой первой следуют упомянуть совместную работу Д. Крамкова и В. Шахермайера 1999 года [41]. Авторы рассматривают функцию полезности $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, т.е. она определена на $\mathbb{R}_+$ и принимает значение $-\infty$ на $(-\infty, 0)$. Также предполагается, что функция полезности U — строго возрастающая, строго вогнутая, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяет условиям Инады

$$U^{'}(0) = \lim_{x \to 0} U^{'}(x) = \infty,$$
$$U^{'}(\infty) = \lim_{x \to \infty} U^{'}(x) = 0.$$

Было выделено ключевое условие *асимптотической эластичности* функции

U при $x \to +\infty$:

$$AE(U) = \limsup_{x \to +\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} < 1.$$

Это условие оказалось необходимым и достаточным для существования оптимального решения, а также других утверждений в теории двойственности. Были получены результаты как для "абстрактного" случая, так и для семимартингальной модели финансового рынка. Отдельно был рассмотрен полный финансовый рынок и неполный.

Работа В. Шахермайера [56], опубликованная в 2001 году, является продолжением совместной работы Д. Крамкова и В. Шахермайера [41]. В работе [56] рассматривается уже конечная на всей вещественной прямой функция полезности $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с дополнительными условиями

$$U'(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} U'(x) = \infty,$$

$$U'(\infty) = \lim_{x \to \infty} U'(x) = 0.$$

Условие асимптотической эластичности, что было сказано в [41], сопровождается еще одним условием на функцию полезность U уже при $x \to -\infty$:

$$AE_{-\infty}(U) = \liminf_{x \to -\infty} \frac{xU'(x)}{U(x)} > 1.$$

$AE_{-\infty}(U)$ определяется как асимптотическая эластичность функции полезности U при $x \to -\infty$. Если выполняются оба условия, то мы говорим, что функция полезности U удовлетворяет условию *reasonable asymptotic elasticity*. Доказывается, что это условие является необходимым и достаточным для существования оптимального решения в задаче максимизации в локально ограниченной семимартингальной модели финансового рынка. Аналогичный результат для случая $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ был получен в [41].

Совместная работа Д. Крамкова и В. Шахермайера 2003 года [42] также является продолжением исследования задачи максимизации ожидаемой полезности на неполных рынках. В отличие от работы [41] в этой статье авторы

показывают, что необходимым и достаточным условием, чтобы несколько ключевых утверждений теории оставались верными, является конечность целевой функции в двойственной задаче $v(y) < \infty$.

Отдельно стоит упомянуть совместную работу С. Биаджини и А. Черного [21] и работу А. А. Гущина [3].

Вслед за вышеперечисленными работами в данной главе мы продолжаем развивать применение двойственных методов в задаче максимизации *робастной* полезности.

2.1 Введение

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ — фиксированное фильтрованное вероятностное пространство (стохастический базис); U — функция полезности. В постановке задачи максимизации робастной полезности важную роль играет выбор функционального пространства. Важно, чтобы для любого $\xi \in \mathscr{K}$ такого, что $\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) > -\infty$ случайные величины $\min\{\xi, 0\}$ лежали в этом пространстве. На эту роль идеально подходят простравства Орлича, порожденные функцией Юнга

$$\hat{U}(x) := -U(-|x|) + U(0).$$

Аналогично поступаем при выборе функционального пространства для постановки двойственной задачи. Здесь уже будет пространство Орлича, соответствующее двойственной функции Юнга $\hat{V}$, которая определяется, как сопряженная к $\hat{U}$ функция

$$\hat{V} := \hat{U}^*.$$

Определим двойственную к U функцию

$$V := -U^*.$$

В главе 2 рассматривается *робастная* постановка задачии максимизации ожидаемой полезности. Значит, мы имеем дело не с одной фиксированной ме-

рой P, а семейством вероятностных (*субъективных*) мер $\mathscr{Q}$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$, которое определяется как выпуклое и непустое подмножество:

$$\mathscr{Q} \subset \{\mathsf{Q} \ll \mathsf{P} \colon d\mathsf{Q}/d\mathsf{P} \in L_+^{\hat{V}}(\mathsf{P}) \text{ для некоторой меры } \mathsf{P}\}.$$

Здесь

$$L^{\hat{V}}(\mathsf{P}) := \{\xi \in L^0(\mathsf{P}) \colon \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\hat{V}(\varepsilon\xi) < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}$$

— пространство Орлича по мере P, порожденное функцией Юнга $\hat{V}$.

Определим функциональное пространство для постановки задачи максимизации. Пусть $L^0(\mathscr{Q})$ — классы эквивалентности случайных величин, совпадающих Q-п.н. при всех $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$. *Пространством Орлича* $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$ *по семейству мер* $\mathscr{Q}$, порожденной функцией Юнга $\hat{U}$, называется

$$L^{\hat{U}}(\mathscr{Q}) := \{\xi \in L^0(\mathscr{Q}) \colon \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\hat{U}(\varepsilon\xi) < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\}.$$

Замечание 2.1. Важно отметить, что пространство Орлича $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$ по семейству мер $\mathscr{Q}$ является банаховым (см. [53]) относительно *нормы Люксембурга*

$$N_{\hat{U}}(\xi) := \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} N_{\hat{U}}^{\mathsf{Q}}(\xi) = \inf\Big\{K > 0 \colon \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\hat{U}\Big(\frac{\xi}{K}\Big) \le 1\Big\}.$$

Теперь опишем модель финансового рынка. Модель финансового рынка состоит из

- фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$,
- d согласованных строго положительных последовательностей $S^i = (S_t^i, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, ..., d$, которые описывают эволюцию цен базовых активов; в нашем случае $S = (S^i)$, $i = 1, ..., d$ — семимартингалы,
- d предсказуемых последовательностей $H^i = (H_t^i, \mathscr{F}_t)$, $i = 1, ..., d$ — *торговая стратегия* или *портфель ценных бумаг*; в нашем случае $L(S)$ — множество всех предсказуемых S-интегрируемых процессов H,

- *капитала стратегии* H к моменту времени t (см. [14]) $X_t^H := \int_0^t H_u dS_u$.

Здесь имеет место векторное представление $S = (S^1, ..., S^d)$, $H = (H^1, ..., H^d)$ и $H_t \cdot S_t := \int_0^t H_u dS_u$.

Пусть $B \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$ — случайная величина, представляющая возможный приток или отток капитала в терминальный момент T. В главе 2 исследуется следующая оптимизационная задача:

$$\inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U\Big(\int_0^T H_t dS_t + B\Big) \longrightarrow \sup_{H \in \mathcal{J}},$$

где $\mathcal{J} = \{H \in L(S)\colon \inf_{t\in[0,T]} \int_0^t H_u dS_u \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})\}$ — множество допустимых стратегий.

Пусть $\mathscr{K}$ — множество случайных величин ξ, капиталов в момент времени T.

Замечание 2.2. Если в качестве допустимых стратегий рассматривать S-интегрируемые процессы H, то в качестве примера допустимых терминальных капиталов можно привести следующую структуру:

$$\mathscr{K} = \{H \cdot S_T\colon H \in \mathcal{J}\}.$$

Замечание 2.3. Отметим, что в качестве допустимых стратегий мы рассматриваем предсказуемые процессы H, поскольку предполагаем, что портфель на завтра задается сегодня. Также, оказывается, что наиболее общий класс процессов S, что стохастический интеграл по нему $H \cdot S_t$, $t \in [0, T]$ определен для любого предсказуемого H — это семимартингалы. Поэтому мы рассматриваем *семимартингальную* модель финансового рынка. Вообще, на основе определения стохастических интегралов по семимартингалу лежит обширная теория, но мы не будем на этом останавливаться подробно.

Исходная оптимизационная задача определена на пространстве L^0 всех (классов эквивалентности) случайных величин, которое, обычно, не локально выпукло. В ходе доказательства основных утверждений главы 2 мы активно

применяем методы выпуклого анализа. Поэтому наш первый шаг состоит в том, чтобы вложить задачу в подходящее пространство, а именно, что исходная цена не изменится, если в её определении $\mathscr{K}$ заменить на

$$\mathscr{C} = (\mathscr{K} - L^0_+(\mathsf{P})) \cap L^{\hat{U}}(\mathscr{Q}).$$

Здесь $\mathscr{C}$ — конус. Учитывая случайный вклад, формально заменим множество $\mathscr{K}$ множеством

$$\mathscr{A} := B + \mathscr{K}.$$

В зависимости от накладываемых предположений на функцию полезности U, семейство мер $\mathscr{Q}$ и на множество терминальных капиталов $\mathscr{K}$, задачи максимизации *робастной* полезности сильно отличаются друг от друга.

В главе 2 ставится цель постановки и вывода двойственной задачи для задачи максимизации *робастной* полезности со случайным терминальным вкладом B. Задача усложняется тем, что полярный конус $\mathscr{C}^*$ содержит сингулярные линейные функционалы, которые не могут быть представлены случайными величинами. Полученный в главе 2 результат является обобщением результата С. Биаджини и А. Черного [21] на робастный случай. Аналогичный результат при других предположениях и когда $B \equiv const$ получен А. А. Гущиным [3]. Также следует упомянуть работу Р. Хасанова [13] в этом направлении.

2.2 Постановка задачи и формулировка результата.

Для формулировки основного результата сформулируем налагаемые нами предположения и введем дополнительные необходимые объекты.

Индикаторные функции $\mathbb{1}_A$ и δ_A множества $A \subseteq X$ определяются следу-

ющим образом:

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad \delta_A(x) := \begin{cases} 0, & x \in A, \\ +\infty, & x \notin A. \end{cases}$$

Замечание 2.4. Известно, что δ_A полунепрерывна снизу (сверху) тогда и только тогда, когда множество A замкнуто (открыто).

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$. *Ограниченной конечно-аддитивной мерой* называется отображение $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ такое, что

$$\sup_{A \in \mathscr{F}} |\mu(A)| < +\infty,$$

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

для любых попарно непересекающихся $A_1, ..., A_k \in \mathscr{F}$. Множество всех ограниченных конечно-аддитивных мер на $\mathscr{F}$ обозначается ba. Множество всех $\mu \in ba$ с дополнительным свойством

$$A \in \mathscr{F},\ \mathsf{P}(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = 0$$

обозначается $ba(\mathscr{F}, \mathsf{P})$. В $ba(\mathscr{F}, \mathsf{P})$ действует *норма полной вариации* $||\mu||_{ba}$.

Замечание 2.5. Пространства $ba(\mathscr{F}, \mathsf{P})$ и L^∞ являются сопряженными. Двойственность задается линейным функционалом

$$l_\mu(\xi) := \int_\Omega \xi d\mu, \quad \mu \in ba,\ \xi \in L^\infty.$$

Ананлогично $ba(\mathscr{F}, \mathsf{P})$ определяется подпространство $ca(\mathscr{F}, \mathsf{P})$ — подпространство *ограниченных счетно-аддитивных мер* с дополнительным свойством. Для $\mu \in ba$ справедливо единственное разложение $\mu = \mu^r + \mu^s$ на счетно-аддитивную меру $\mu^r \in ca$ и чисто конечно-аддитивную функцию множества $\mu^s \in ba$ (Теорема 1.24, [62]). Пространства $ca(\mathscr{F}, \mathsf{P})$ и L^1 являются сопряженными. Двойственность задается соотношением

$$L^1 \ni \xi \rightsquigarrow \mu_\xi \in ca(\mathscr{F}, \mathsf{P}), \quad \mu_\xi(A) = \int_A \xi d\mathsf{P},\ A \in \mathscr{F},$$

$$ca(\mathscr{F},\mathsf{P}) \ni \mu \rightsquigarrow \mu_\xi, \quad \xi = d\mu/d\mathsf{P}.$$

В работе активно используется понятие f-дивергенции. В [2] было дано определение f-дивергенции $\mathscr{J}_f(\mu,\nu)$ конечно-аддитивных функций множества μ и ν, заданных на $(\Omega,\mathscr{F})$. Дадим формальное её определение для $ba(\mathscr{F},\mathsf{P})$.

Определение 2.1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция с $\operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}_+$. Для $\mu,\nu \in ba(\mathscr{F},\mathsf{P})$ *f-дивергенция* определяется следующим образом:

$$\mathscr{J}_f(\mu,\nu) = \sup_{\xi,\eta \in L^\infty :\, \eta + f^*(\xi) \le 0} \big(\mu(\xi) + \nu(\eta)\big).$$

Из определения следует, что функция $\mathscr{J}_f(\mu,\nu)$ на $ba \times ba$ принимает значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, выпукла и полунепрерывна снизу в топологии $\sigma(ba \times ba, L^\infty \times L^\infty)$.

Предположение 2.1. (о функции полезности) Функция полезности U — собственная, вогнутая, неубывающая, полунепрерывная сверху функция и $\hat{U}$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Замечание 2.6. Если функция Юнга $\hat{U}(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то сопряженное пространство эквивалентно пространству Орлича $(L^{\hat{U}})^* \sim L^{\hat{V}}$, а если не удовлетворяет, то сопряженное пространство шире $(L^{\hat{U}})^* \supset L^{\hat{V}}$. Здесь имеются в виду стандартные пространства Орлича.

Сформулируем дополнительное предположение на функцию полезность U. Для этого введем вспомогательные объекты — две важные точки $\underline{x}$ и $\overline{x}$. Определим нижнюю границу эффективной области определения

$$\underline{x} := \inf(\operatorname{dom} U).$$

Замечание 2.7. Функция U считается конечной на $(\underline{x},\infty)$.

Замечание 2.8. Непрерывность сверху функции U означает, что в точке $\underline{x}$, которая является единственной возможной точкой разрывности U, функция полезности должна быть непрерывна справа.

Определим верхнюю границу полезности

$$\overline{x} := \inf\{x\colon U(x) = U(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} U(x)\}.$$

Замечание 2.9. В бесконечности функция полезности U может вести себя двумя способами:

1) $U(\infty) < \infty$;

2) $U(\infty) = \infty$.

Для строго возрастающей функции полезности U получаем $\overline{x} = \infty$. По определению имеем $\underline{x} \le \overline{x}$.

Сформулируем второе предположение на U.

Предположение 2.2. (о функции полезности) $-\infty < \underline{x} < 0 < \overline{x}$ и $U(0) = 0$.

Замечание 2.10. При выполнении предположений 2.1–2.2 эквивалентным пространством будет L^∞: $L^{\hat{U}} \sim L^\infty$. Для двойственного пространства $L^{\hat{V}} \sim ba$.

Прежде, чем сформулировать предположение, накладываемое на семейство мер $\mathscr{Q}$, приведем вспомогательные определения ([1]). *Дуальной парой* будем называть тройку $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ с условием невырожденности, где X, Y — векторные пространства, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — билинейная форма. Теперь для каждого $y \in Y$ введем полунорму $||x||_y := |\langle x, y\rangle|$ на X. *Слабой топологией дуальной пары* $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называют топологию, порожденную семейством полунорм $\{||\cdot||_y\colon y \in Y\}$ (об. $\sigma(X, Y)$). Топология $\sigma(X, Y)$ хаусдорфова. Направленность $\{x_n\}$ в X сходится к $x \in X$ в топологии $\sigma(X, Y) \Leftrightarrow \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$, т.е. $\sigma(X, Y)$ — топология поточечной сходимости, если считать $x \in X$ как функционалы на Y. Если X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, то $\sigma(X, X^*)$ называют *слабой* топологией на X. Тройку $(X, X^*, \sigma(X, X^*))$ обозначают X_σ. Элементы $y \in Y$ — непрерывные линейные функционалы на X_σ.

Предположение 2.3. (о семействе мер) Множество $\mathscr{Q}$ — компакт в слабой топологии $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Предположение 2.4. (о множестве терминальных капиталов) $\mathscr{K}$ — выпуклое подмножество L^0, содержащее случайную величину $\xi_0 \geq \underline{x} + \varkappa - B$, то есть $\xi_0 + B \geq \underline{x} + \varkappa$ для некоторого $\varkappa > 0$.

Определим множество

$$\mathcal{D} := \operatorname{dom} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U = \{X \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q}) \colon \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(X) > -\infty\}.$$

Сформулируем основной результат главы 2.

Теорема 2.1. Пусть выполнены предположения 2.1–2.4 и $B \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$. Переобозначим $\mathscr{A} := (B + \mathscr{C}) \cap \{X \colon X \geq \underline{x}\}$. Тогда выполнено

$$\sup_{X \in \mathscr{A}} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(X) = \min_{Y \in L^{\hat{V}}_+(\mathscr{Q}),\, \mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V(Y) + \sup_{X \in \mathscr{A} \cap \mathcal{D}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(XY) \big). \tag{2.1}$$

2.3 Доказательство результата

Замечание 2.11. Отметим, что, по существу, двойственная характеризация и минимаксная теорема, т.е. когда мы в левой части выражения (2.1) можем менять местами супремум и инфимум, доказываются одновременно.

Обозначим левую часть (2.1) через $u(B)$.

Рассмотрим случай $u(B) < \infty$. Следующая лемма играет ключевую роль в доказательстве основного результата.

Лемма 2.1. Пусть выполнены предположения 2.1—2.4, $\mathscr{A} \subseteq L^\infty$, $B \in L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$. Тогда

$$\sup_{\xi \in \mathscr{A},\, U(\xi) \in L^\infty} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) = \min_{\mu \in ba_+,\, \mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \big(\mathscr{J}_V(\mu, \mathsf{Q}) + \mu(B) + \sup_{\xi \in \mathscr{K}} \mu(\xi) \big). \tag{2.2}$$

Замечание 2.12. Отметим, что мы рассматриваем случай $U(\xi) \in L^\infty$, а следовательно $\xi \in (\underline{x}, \infty)$.

Доказательство. Определим функции φ и ψ на $L^\infty \times L^\infty$ со значениями в

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ соотношениями

$$\varphi(\xi,\eta) = \delta_{\{(\xi,\eta)\,|\,\eta \le U(-\xi)\}}(\xi,\eta), \quad \psi(\xi,\eta) = \delta_{\mathscr{A}}(\xi) + \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\eta.$$

Пусть $\tilde{u}(B) = \tilde{u}$ обозначает левую часть (2.2). Справедлива следующая цепочка равенств

$$-\tilde{u} = \inf_{\xi\in\mathscr{A},\, U(\xi)\in L^\infty} \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} -\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) \overset{(*)}{=} \inf_{\xi\in\mathscr{A},\, \eta\in L^\infty,\, \eta\ge -U(\xi)} \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\eta =$$

$$= \inf_{(\xi,\eta)\in L^\infty\times L^\infty} \big(\varphi(-\xi,-\eta) + \psi(\xi,\eta)\big),$$

где равенство, помеченное $(*)$, использует тот факт, что для $\xi \in L^\infty$ и $\xi \in (\underline{x},\infty)$ случайная величина $-U(\xi)$ всегда ограничена снизу константой, поскольку мы рассматриваем случай $U(\xi) \in L^\infty$.

Функции φ и ψ являются выпуклыми, $dom\,\psi = \mathscr{A} \times L^\infty$. Возьмем $\varepsilon \in (0,\varkappa)$. Тогда случайные величины $|U(\xi)|$, где $\xi \in L^\infty$, $||\xi - \xi_0 - B||_{L^\infty} < \varepsilon$, равномерно ограничены, скажем, числом b.

Замечание 2.13. Отметим, что ξ_0 определяется в предположении 2.4 (о множестве терминальных капиталов).

Здесь $\xi \ge \underline{x} + \varkappa - \varepsilon$, то есть ξ отделяется от $\underline{x}$ положительной константой, а следовательно $U(\xi)$ будет ограничен снизу значением $U(\underline{x} + \varkappa - \varepsilon)$. Далее, $-U(\xi)$ ограничена сверху. Значит, существует $\eta_0 \in L^\infty$ такое, что $\eta_0 \ge -U(\xi_0 + B)$. Если взять $\eta_0 := b + \varepsilon$, то φ будет непрерывной по норме в точке $(-\xi_0 - B, -\eta_0) \in L^\infty \times L^\infty$. Мы нашли точку, где одна из функций непрерывна. Поэтому применима теорема двойственности Фенхеля-Рокафеллара (Теорема 1.12, [27]), согласно которой

$$\tilde{u} = \min_{\mu,\nu\in ba} \big(\varphi^*(\mu,\nu) + \psi^*(\mu,\nu)\big).$$

По определению V-дивергенции $\varphi^*(\mu,\nu) = \mathscr{J}_V(\mu,\nu)$ и $dom\,\varphi^* \subseteq ba_+ \times ba_+$. Для второй функции

$$\psi^*(\mu,\nu) = \sup_{\xi\in\mathscr{K}} \mu(\xi) + \mu(B) + \delta_{\mathscr{Q}}(\nu),$$

так как

$$\sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\eta=\sup_{\nu\in L^1(\mathscr{Q})}\big(\langle\eta,\nu\rangle-\delta_{\mathscr{Q}}(\nu)\big)=\delta^*_{\mathscr{Q}}(\eta),$$

$$\big(\sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}\eta\big)^*=\delta_{\overline{\mathscr{Q}}}(\nu),$$

но $\overline{\mathscr{Q}}=\mathscr{Q}$ в силу предположения 2.3. Итого,

$$\tilde{u}=\min_{\mu,\nu\in ba_+}\big(\mathscr{J}_V(\mu,\nu)+\sup_{\xi\in\mathscr{K}}\mu(\xi)+\mu(B)+\delta_{\mathscr{Q}}(\nu)\big)=$$

$$=\min_{\mu\in ba_+,\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\big(\mathscr{J}_V(\mu,\mathsf{Q})+\mu(B)+\sup_{X\in\mathscr{K}}\mu(X)\big).$$

Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 2.1.

Для любого $\varepsilon>0$ верно

$$u(B)\leqslant\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\sup_{X\in\mathscr{A}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(X)\leqslant\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\sup_{X\in\mathscr{A}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(X+\varepsilon).$$

Для $\xi\in\mathscr{K}$ и $\xi\geqslant\underline{x}$ положим $\xi_n:=\xi\wedge n$, тогда $\xi_n\in\mathscr{C}$ и $U(\varepsilon+\xi_n+B+\underline{x})\geqslant U(\underline{x}+\varepsilon)>-\infty$, поэтому по теореме о монотонной сходимости для любой $\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(\varepsilon+\xi+B+\underline{x})=\lim_n\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(\varepsilon+\xi_n+B+\underline{x})\leqslant\sup_{\eta\in\mathscr{C}+\varepsilon+B,U(\eta)\in L^\infty}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(\eta),$$

откуда

$$u(B)\leqslant\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\sup_{\eta\in\mathscr{C}+\varepsilon+B,U(\eta)\in L^\infty}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(\eta)=$$

$$=\min_{\mu\in ba_+,\,\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\big(\mathscr{J}_V(\mu,\mathsf{Q})+\mu(B)+\sup_{\xi\in\mathscr{C}}\mu(\xi+\varepsilon)\big)=\widetilde{u}(\varepsilon+B),\qquad(2.3)$$

где в обоих равенствах мы воспользовались леммой 2.1.

Пусть теперь $\varepsilon\in(0,\varkappa)$ и $\xi+\varepsilon\in\mathscr{C}$. Тогда найдется такая случайная величина $\eta\in B+\mathscr{C}$, что $\xi+\varepsilon+B\leqslant\eta$, причем $U(\eta)\geqslant U(\xi+\varepsilon+B)\geqslant U(\xi+B)$; в частности, из $U(\xi+B)\in L^\infty$ следует, что $\eta\geqslant\underline{x}$. Поэтому

$$\widetilde{u}(B-\varepsilon)=\sup_{\xi+B\in\mathscr{C}+B-\varepsilon,U(\xi+B)\in L^\infty}\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(\xi+B)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{\eta\in\mathscr{C}+B}\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(\eta)=u(B).\qquad(2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что $\widetilde{u}(B-\varepsilon) \leqslant u(B) \leqslant \widetilde{u}(B+\varepsilon)$. Из непрерывности $\widetilde{u}$ получаем, что $u(B) = \widetilde{u}(B)$

Таким образом, для $\mathscr{A} := (B+\mathscr{C}) \cap \{X\colon X \geq \underline{x}\}$ получили

$$\sup_{\xi\in\mathscr{A}} \inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) = \min_{\mu\in ba_+,\, \mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \big(\mathscr{J}_V(\mu,\mathsf{Q}) + \mu(B) + \sup_{\xi\in\mathscr{C}} \mu(\xi) \big). \tag{2.5}$$

Заметим, что поскольку $\mathscr{C}$ конус, то правая часть выражения (2.5) конечна, только если $\mu \in \mathscr{C}^*$. Что даёт

$$u(B) = \min_{\mu\in\mathscr{C}^*,\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \big(\mathscr{J}_V(\mu,\mathsf{Q}) + \mu(B) \big). \tag{2.6}$$

Для достаточно большой константы c соотношение (2.6) можно переписать в виде

$$u(B) = \min_{\mu\in\mathscr{C}_c^*,\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \big(\mathscr{J}_V(\mu,\mathsf{Q}) + \mu(B) \big), \tag{2.7}$$

где $\mathscr{C}_c^* = \{\mu \in \mathscr{C}^*\colon ||\mu|| \leq c\}$.

Пусть $\mathscr{Q} = \{\mathsf{Q}\}$. Тогда

$$u(B) = \sup_{X\in\mathscr{A}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(X) = \min_{\mu\in\mathscr{C}_c^*} \big(\mathscr{J}_V(\mu,\mathsf{Q}) + \mu(B) \big).$$

Сравнивая это выражение с (2.7) немедленно приходим к минимаксной теореме.

Поскольку V-дивергенция $\mathscr{J}_V$ полунепрерывна снизу, а множество $\mathscr{C}_c^* \times \mathscr{Q}$ является компактом, нижняя грань в равенстве (2.7) достигается на некоторых $(\hat{\mu}, \hat{\mathsf{Q}})$.

Обозначим $\hat{I}_h := \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}} h$ для некоторой функции h. По теореме двойственности Фенхеля-Рокафеллара (Теорема 1.12, [27]) в точке минимума $(\hat{\mu}, \hat{\mathsf{Q}})$ выражения (2.7) имеем

$$u(B) = \sup_{X\in\mathscr{A}} \hat{I}_U(X) = -\big(\hat{I}_U^*(\hat{\mu}) - \delta_{\mathscr{A}}^*(\hat{\mu}) \big) = -\hat{I}_U^*(\hat{\mu}) + \hat{\mu}(B) + \sup_{X\in\mathscr{C}} \hat{\mu}(X).$$

Заметим, что поскольку $\mathscr{C}$ конус, то правая часть конечна, только если $\hat{\mu} \in \mathscr{C}^*$. Аналогично (2.7) перейдем к множеству $\hat{\mu} \in \mathscr{C}_c^*$. Что даёт

$$u(B) = -\hat{I}_U^*(\hat{\mu}) + \hat{\mu}(B). \tag{2.8}$$

Вычислим значение $-\hat{I}^*_U(\hat{\mu})$. Для этого сделаем следующие вспомогательные выкладки. Определим выпуклую функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Далее введем функцию $g(x, \omega)$ на пространстве $\mathbb{R} \times \Omega$:

$$g(x, \omega) = f(x) \cdot \frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega).$$

При фиксированном значении ω берем преобразование Фенхеля этой функции по переменной x. Преобразование Фенхеля определяется на пространстве $\mathbb{R}$ и равняется:

$$g^*(y, \omega) = \left(f(x)\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) \right)^* = \sup_x \left(xy - f(x)\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) \right) =$$

$$= \sup_x \left(\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) \cdot \left(x \cdot \frac{y}{\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega)} - f(x) \right) \right) =$$

$$= \frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) \cdot f^* \left(\frac{y}{\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega)} \right) \cdot \mathbb{1}\left\{ \frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) > 0 \right\} + \delta_{\{0\}}(y) \cdot \mathbb{1}\left\{ \frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) = 0 \right\},$$

так как при $\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) = 0$ имеем $g(x, \omega) = 0$ и

$$g^*(y, \omega) = \sup_x (xy - 0) = \sup_x (xy) = \begin{cases} +\infty & \text{при } y \neq 0, \\ 0 & \text{при } y = 0. \end{cases}$$

Пусть теперь $\xi \in L^\infty$ и $\eta \in L^1$. Используя Теорему 2 из [51] о сопряжении интеграла, как выпуклого функционала, получаем

$$\left(\mathsf{E}_\mathsf{Q} f(\xi) \right)^* = \left(\mathsf{E}_\mathsf{P} g(\xi, \omega) \right)^* = \mathsf{E}_\mathsf{P} g^*(\eta, \omega) = \tag{2.9}$$

$$= \mathsf{E}_\mathsf{P} \left(\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) f^* \left(\frac{\eta}{\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega)} \right) \right) \cdot \mathbb{1}\left\{ \frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) > 0 \right\} + \mathsf{E}_\mathsf{P} \delta_{\{0\}}(\eta) \cdot \mathbb{1}\left\{ \frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega) = 0 \right\}.$$

Обозначим $I_h := \mathsf{E}_\mathsf{Q} h$ для некоторой функции h. По Теореме 1 из [52] получаем, что $-I^*_U$ представляется в виде прямой суммы I_{-U^*} с регулярной составляющей μ и некоторой сингулярной компоненты. Поскольку $\mu \ll \mathsf{P}$, а абсолютная непрерывность меры μ относительно Q не предполагается, то математическое ожидание в первом слагаемом прямой суммы мы можем рассматривать только по мере P. Учитывая этот факт и формулу (2.9) при $\xi \in L^\infty$,

$\eta \in ba$ и $f(\xi) = U(\xi)$, посчитаем преобразование Фенхеля следующего функционала

$$-I_U^*(\mu) = I_V\left(\frac{d\mu^r/d\mathsf{P}}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right) - \mathsf{E}_\mathsf{P}\delta_{\{0\}}(\mu^r)\cdot\mathbb{1}\left\{\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega)=0\right\} - \inf_{X\in\mathcal{D}}\mu^s(X),$$

где

$$\mathsf{E}_\mathsf{P}\delta_{\{0\}}(\mu^r)\cdot\mathbb{1}\left\{\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}(\omega)=0\right\} = \begin{cases}+\infty & \text{при } \mu \not\ll \mathsf{Q},\\ 0 & \text{при } \mu \ll \mathsf{Q}.\end{cases}$$

Следовательно имеет смысл рассматривать только случай, когда $\mu \ll \mathsf{Q}$. Тогда получаем, что

$$-I_U^*(\mu) = I_V\left(\frac{d\mu^r}{d\mathsf{Q}}\right) - \inf_{X\in\mathcal{D}}\mu^s(X) = I_V\left(\frac{d\mu^r}{d\mathsf{Q}}\right) + \sup_{X\in\mathcal{D}} -\mu^s(X).$$

Теперь вычислим значение $-I_U^*(\mu)$ в точке минимума $(\hat{\mu}, \hat{\mathsf{Q}})$ выражения (2.7), таких что $\hat{\mu} \geq 0$ и $\hat{\mu}^r \ll \hat{\mathsf{Q}}$. Обозначим

$$\hat{Y} := \frac{d\hat{\mu}^r}{d\hat{\mathsf{Q}}}.$$

Получаем

$$-\hat{I}_U^*(\hat{\mu}) = \hat{I}_V(\hat{Y}) + \delta_\mathcal{D}^*(-\hat{\mu}^s),$$

где

$$\delta_\mathcal{D}^*(-\hat{\mu}^s) = \sup_{X\in\mathcal{D}} -\hat{\mu}^s(X)$$

есть сопряженная к выпуклому индикатору $\delta_\mathcal{D}$ функция. Следовательно, получили явное выражение для (2.8)

$$u(B) = \sup_{X\in\mathscr{A}} \hat{I}_U(X) = \hat{I}_V(\hat{Y}) + \hat{\mu}(B) + \delta_\mathcal{D}^*(-\hat{\mu}^s).$$

Распишем последовательно

$$u(B) = \hat{I}_V(\hat{Y}) + \hat{\mu}(B) + \sup_{X\in\mathcal{D}} -\hat{\mu}^s(X) = \hat{I}_V(\hat{Y}) + \hat{\mu}(B) + \sup_{X\in\mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X+B) =$$

$$= \hat{I}_V(\hat{Y}) + \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(\hat{Y}B) + \sup_{X\in\mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X).$$

По неравенству Фенхеля

$$\hat{I}_U(X) \le \hat{I}_V(\hat{Y}) + \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X\hat{Y})$$

для $X \in L^{\hat{U}}$. Отсюда имеем

$$u(B) = \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \hat{I}_U(X+B) \le \hat{I}_V(\hat{Y}) + \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X+B)\hat{Y}.$$

Далее избавимся от сингулярных функционалов. Имеем

$$u(B) \le I_V(\hat{Y}) + \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X+B)\hat{Y}.$$

Следовательно, с одной стороны

$$\sup_{X \in \mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X) \le \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X\hat{Y}).$$

Для $\hat{\mu} \in \mathscr{C}_c^*$ выполнено, что $\hat{\mu}(X) \le 0 \quad \forall\, X \in \mathscr{C}$. Поэтому

$$-\hat{\mu}^s(X) \ge \hat{\mu}^r(X) = \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X\hat{Y})$$

для всех $X \in \mathscr{C} \supset \mathscr{A} \cap \mathcal{D} - B$ и

$$\sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X) \ge \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \hat{\mu}^r(X) = \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X\hat{Y}).$$

С другой стороны

$$\sup_{X \in \mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X) \ge \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X) \ge \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X\hat{Y}).$$

То есть

$$\sup_{X \in \mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X) \ge \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X) \ge \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X\hat{Y}) \ge \sup_{X \in \mathcal{D}-B} -\hat{\mu}^s(X).$$

Итого,

$$u(B) = \hat{I}_V(\hat{Y}) + \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(\hat{Y}B) + \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}-B} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X\hat{Y}) = \hat{I}_V(\hat{Y}) + \sup_{X \in \mathscr{A}\cap\mathcal{D}} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}}(X\hat{Y}).$$

Для $u(B) < \infty$ теорему доказали.

Для случая $u(B) = \infty$ имеем $U(\infty) \equiv V(0) = \infty$ и $Y = 0$.

Такими образом, теорему полностью доказали.

□

Глава 3

Максимизация робастной полезности в терминах супермартингальных мер

Глава 3 посвящена двойственной характеризации задачи максимизации *робастной* полезности. Как уже было отмечано во введении диссертации и в начале главы 2, в зависимости от дополнительных предположений на рассматриваемую модель финансового рынка, задача максимизации полезности может принимать самые разные формы. В отличие от постановки задачи в главе 2 в рассматриваемой главе 3 предполагается, что $B = 0$, $\underline{x} = 0$ и в постановке присутствует дополнительное слагаемое γ — штрафная функция, которая 'штрафует' за нарушение ограничений, т.е. увеличивает значение целевой функции, тем самым инфимум будет находиться в области ограничений.

3.1 Введение

Распишем более подробно рассматриваемую в главе 3 модель финансового рынка.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, U — функция полезности, γ — выпуклая штрафная функция (см. [12]), $\mathscr{Q}$ — некоторое выпуклое множество вероятностных мер на $(\Omega, \mathscr{F})$. Оптимизационная задача выглядит как в (0.3):

$$\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\Big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(\xi) + \gamma(\mathsf{Q})\Big) \longrightarrow \sup_{\xi\in\mathscr{A}}$$

где $\mathscr{A}$ — выпуклое множество случайных величин (терминальных капиталов) на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$.

Самым первым приведем предположения, накладываемые на функцию полезность U.

Предположение 3.1. (о функции полезности) $U : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty)$ — монотонно неубывающая вогнутая функция полезности; $U(x) = -\infty$ при $x < 0$ и $U(x) \in \mathbb{R}$ при $x > 0$.

Введем сопряженную к U функцию V соотношением

$$V(y) = \sup_{x>0}\big(U(x) - xy\big), \quad y \in \mathbb{R}.$$

В силу предположения 3.1, которое накладывается на функцию полезности U, для V будет справедливо, что V монотонно не возрастает, $\operatorname{dom} V \subseteq \mathbb{R}_+$ и

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{V(y)}{y} = 0.$$

Далее перейдем к описанию предположений, накладываемых на штрафную функцию γ. В главе 2 было достаточно подробно рассказано про пространство $ba = ba(\mathscr{F}, \mathsf{P})$. Не будем повторяться. Лишь скажем, что будет вполне естественно охарактеризовать $\mathscr{Q}$ как эффективную область $\operatorname{dom}\gamma$.

Предположение 3.2. (о штрафной функции) $\gamma\colon ba \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная выпуклая функция, причем $\operatorname{dom}\gamma = \{\mu \in ba : \gamma(\mu) < +\infty\} =: \mathscr{Q}$ есть подмножество множества всех вероятностных мер на $(\Omega, \mathscr{F})$, $\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}\gamma(\mathsf{Q}) \geq 0$ и множество

$$\{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}\colon \mathsf{Q} \in \mathscr{Q},\, \gamma(\mathsf{Q}) \leq c\}$$

замкнуто в L^1 и равномерно интегрируемо по отношению к P для любого $c \geq 0$.

Теперь приведем предположения, накладываемые на множество терминальных капиталов $\mathscr{A}$. Как уже отмечалось в главе 2, пространство L^0 не локально выпукло. Нам нужно вложить оптимизационную задачу в выпуклое подмножество, чтобы мы могли применять методы выпуклого анализа в ходе доказательств.

Предположение 3.3. (о множестве терминальных капиталов) $\mathscr{A}$ — выпуклое подмножество L^0, содержащее случайную величину $\xi_0 \geq \varkappa$ для некоторого $\varkappa > 0$.

Определим

$$\mathscr{D} := \{\eta \in L^0_+ \colon \mathsf{E}_{\mathsf{P}}\eta\xi \leq 1 \text{ для любого } \xi \in \mathscr{A}\}, \tag{3.1}$$

где L^0_+ — конус. Пусть $x > 0$ — начальный капитал, тогда $\mathscr{A}(x) := x\mathscr{A}$. Аналогично для $y \geq 0$ положим $\mathscr{D}(y) := y\mathscr{D}$.

Исходная и *двойственная* оптимизационные задачи выглядят следующим образом:

$$u(x) := \sup_{\xi \in \mathscr{A}(x)} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) + \gamma(\mathsf{Q})\big), \quad x > 0, \tag{3.2}$$

$$v(y) := \inf_{\eta \in \mathscr{D}(y),\, \mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right) + \gamma(\mathsf{Q})\big), \quad y \geq 0. \tag{3.3}$$

Имеют место равенства, см. [3]:

$$u(x) = \min_{y \geq 0} \big(v(y) + xy\big), \quad x > 0, \tag{3.4}$$

$$v(y) = \sup_{x > 0} \big(u(x) - xy\big), \quad y \geq 0. \tag{3.5}$$

Вспомогательный результат главы 3 (лемма 3.1) заключается в следующем: когда в определении двойственной функции v, см. (3.3), множество $\mathscr{D}$, определяемое в (3.1), можно заменить на выпуклое множество $\widetilde{\mathscr{D}} \subseteq \mathscr{D}$. Аналогичный результат для неробастного случая получен в совместной работе Д. Крамкова и В. Шахермайера, см. [41].

3.2 Вспомогательный результат

Фиксируем вероятностную меру Q такую, что $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$. Для нее введем функции

$$v_{\mathsf{Q}}(y) := \inf_{\eta \in \mathscr{D}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right), \quad y \geq 0,$$

$$\widetilde{v}_{\mathsf{Q}}(y) := \inf_{\eta \in \widetilde{\mathscr{D}}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right), \quad y \geq 0.$$

Сопоставляя эти функции с (3.3) видим, что для доказательства основного результата, достаточно рассмотреть вопрос о совпадении функций v_{Q} и $\widetilde{v}_{\mathsf{Q}}$.

Определение 3.1. *Полярой* $\mathscr{E}^\circ$ множества $\mathscr{E} \subseteq L^0_+$ называется

$$\mathscr{E}^\circ := \{\xi \in L^0_+ \colon \mathsf{E}_{\mathsf{P}} \eta\xi \leq 1 \text{ для любого } \eta \in \mathscr{E}\}.$$

В этих терминах определение 3.1 множества $\mathscr{D}$, в котором $\mathscr{A}$ можно заменить на $\mathscr{C}_+ := (\mathscr{A} - L^0_+) \cap L^\infty_+$, записывается как $\mathscr{D} = \mathscr{C}^\circ_+$.

$\overline{\mathscr{C}}^0_+$ обозначает замыкание множества $\mathscr{C}_+$ в L^0.

Лемма 3.1. *Пусть множество $\mathscr{A}$ удовлетворяет предположению 3.3, $\mathscr{A} \subseteq L^0_+$, $\mathscr{D}$ определено в (3.1) и $\widetilde{\mathscr{D}} \subseteq \mathscr{D}$, $\widetilde{\mathscr{D}}$ выпукло и непусто. Введем следующие условия*

(i) *для любой $\eta \in \mathscr{D}$ найдется такая $\widetilde{\eta} \in \widetilde{\mathscr{D}}$, что $\eta \leq \widetilde{\eta}$;*

(ii) *$v_{\mathsf{Q}}(y) = \widetilde{v}_{\mathsf{Q}}(y)$ для всех $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$ и $y \geq 0$ для любой функции U, удовлетворяющей предположению 3.1;*

(iii) *$v_{\mathsf{Q}}(y) = \widetilde{v}_{\mathsf{Q}}(y)$ для всех $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$ и $y \geq 0$ для некоторой строго возрастающей функции U, удовлетворяющей предположению 3.1;*

(iv) *для любой $f \in L^0_+$*

$$\sup_{g \in \mathscr{D}} \mathsf{E} fg = \sup_{g \in \widetilde{\mathscr{D}}} \mathsf{E} fg.$$

Тогда (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). *Если замыкание $\overline{\widetilde{\mathscr{D}}}^0_+$ множества $\widetilde{\mathscr{D}}$ в L^0 лежит в $\widetilde{\mathscr{D}} - L^0_+$, то все четыре условия эквивалентны.*

Замечание 3.1. Имеем $\mathscr{D}^\circ = \big(\mathscr{C}_+^\circ\big)^\circ$. Утверждение (iv) леммы 3.1, как несложно видеть, эквивалентно тому, что $\mathscr{D}^\circ = \widetilde{\mathscr{D}}^\circ$. С другой стороны, поскольку $\mathscr{C}$ выпукло и телесно (solid), биполярная теорема Бранната-Шахермайера [26] утверждает, что $\big(\mathscr{C}_+^\circ\big)^\circ$ совпадает с *замыканием множества* $\mathscr{C}_+$ *в* L^0 *(обозн.* $\overline{\mathscr{C}}^0_+$*)*.

Доказательство. Импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидны. Пусть выполнено (iii) и предположим, что (iv) не выполнено. Тогда найдутся такие $f \in L^0_+$ и $\eta \in \mathscr{D}$, что

$$\mathsf{E} f\eta > \sup_{g\in\widetilde{\mathscr{D}}} \mathsf{E} fg. \tag{3.6}$$

Урезая сверху f и η, можно считать, что f и η ограничены, а прибавляя к f маленькую константу (напомним, что $\mathsf{E}g \le \varkappa^{-1}$ для любой $g \in \mathscr{D} \supseteq \widetilde{\mathscr{D}}$) – что $f \ge \varepsilon > 0$. Положим теперь $q = y\eta/U'_+(f)$, где $y > 0$ выберем из условия нормировки $\mathsf{E}q = 1$, и $\mathsf{Q} = q \cdot \mathsf{P}$. Отметим, что здесь U'_+ есть правая производная функции полезности U. Она существует, так как по предположению 3.1 функция полезности на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$ нигде не обращается в бесконечность. Имеем [2]:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{yg}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right) = \mathscr{J}_V\big((yg)\cdot\mathsf{P},\mathsf{Q}\big) = \sup_{\xi\in L^\infty:\, U(\xi)\in L^\infty} \big(\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) - y\mathsf{E}g\xi\big).$$

Заметим, что при $g = \eta$ верхняя грань достигается на f:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi) - y\mathsf{E}\eta\xi = y\mathsf{E}\eta\left(\frac{U(\xi)}{U'_+(f)} - \xi\right) \le y\mathsf{E}\eta\left(\frac{U(f)}{U'_+(f)} - f\right),$$

где неравенство следует из вогнутости U. Поэтому

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(f) - y\mathsf{E}\eta f,$$

в то время как

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{yg}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right) \ge \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(f) - y\mathsf{E}gf.$$

Значит,

$$v_{\mathsf{Q}}(y) \le \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{y\eta}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right) = \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(f) - y\mathsf{E}\eta f < \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(f) - y\sup_{g\in\widetilde{\mathscr{D}}} \mathsf{E}gf$$

$$\leq \inf_{g\in\widetilde{\mathscr{D}}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} V\left(\frac{yg}{d\mathsf{Q}/d\mathsf{P}}\right) = \widetilde{v}_{\mathsf{Q}}(y),$$

где строгое неравенство следует из (3.6). Мы пришли к требуемому противоречию.

Пусть теперь $\overline{\widetilde{\mathscr{D}}}^0_+ \subseteq \widetilde{\mathscr{D}} - L^0_+$ и выполнено (iv). Из замечания 3.1 следует, что (iv) влечет $\mathscr{D} = \left(\widetilde{\mathscr{D}}^\circ\right)^\circ$. С другой стороны, поскольку $\widetilde{\mathscr{D}}$ выпукло и ограничено в L^1, стандартные аргументы, основанные на переходе к выпуклым комбинациям, показывают, что множество $(\widetilde{\mathscr{D}} - L^0_+) \cap L^0_+$ замкнуто в L^0 и, следовательно, есть наименьшее выпуклое, телесное и замкнутое в L^0 подмножество L^0_+, содержащее $\widetilde{\mathscr{D}}$. По биполярной теореме Бранната-Шахермайера [26] $\left(\widetilde{\mathscr{D}}^\circ\right)^\circ = (\widetilde{\mathscr{D}} - L^0_+) \cap L^0_+$. Таким образом, выполнено (i). □

3.3 Основной результат

Пусть задано фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathsf{P})$ Фильтрация $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет *обычным* условиям,

$$\mathscr{F} = \sigma\Big(\bigcup_{t\geq 0} \mathscr{F}_t\Big)$$

и $\mathscr{F}_0$ состоит только из множества P-меры 0 или P-меры 1. Говорим, что фильтрация $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ удовлетворяет *обычным* условиям, если 1) $\mathscr{F}_0$ содержит все P-*нулевые* множества $\mathscr{F}$ (A — P-нулевое, если существует $B \in \mathscr{F}$, что $\mathsf{P}(B) = 0$ и $B \subset A$); 2) $\mathscr{F}_t$ непрерывны справа, т.е.

$$\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$$

для любого $t \geq 0$.

Введем теперь вспомогательные обозначения, которые в дальнейшем будем активно использовать.

- $\mathbb{D} := \{X = (X_t)_{t\geq 0}\}$, где случайные процессы $X = (X_t)_{t\geq 0}$ согласованы с фильтрацией $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$, вещественнозначные и при фиксированном $\omega \in$

Ω траектории которых непрерывны справа и имеют конечные пределы слева,

- $\mathbb{D}_+ := \{X \in \mathbb{D}\colon X \geq 0\}$,
- $\mathbb{D}_{++} := \{X \in \mathbb{D}\colon \mathsf{P}(\inf_t X_t > 0) = 1\}$.

Обозначим $L^0 \ni X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$, где $X \in \mathbb{D}$ и P-п.н. существует конечный предел. Обозначим через $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{D}_+$ семейство процессов капитала, отвечающие всевозможным инвестиционным стратегиям, при единичном начальном капитале, а через $\mathscr{X}(x) = x\mathscr{X}$ — при начальном капитале $x > 0$.

Налагаем следующие условия на семейство капиталов $\mathscr{X}$.

Предположение 3.4. (о семействе процессов капитала) Множество $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{D}_+$ выпукло, $X_0 = 1$ для любого $X \in \mathscr{X}$, $1 \in \mathscr{X}$ и P-п.н. существует конечный предел $\lim_{t\to\infty} X_t$ для любого $X \in \mathscr{X}$.

Положим $\mathscr{A} = \{X_\infty\colon X \in \mathscr{X}\}$, то есть $\mathscr{A}$ — множество всех терминальных значений семейства капиталов $\mathscr{X}$. Если $\mathscr{X}$ удовлетворяет предположению 3.4, то $\mathscr{A}$ удовлетворяет предположению 3.3 и $\mathscr{A} \subseteq L^0_+$. Определим $\mathscr{D}$ соотношением (3.1).

Определение 3.2. Процесс $Y \in \mathbb{D}_+$ называется *супермартингальной плотностью* для класса процессов $\mathscr{X}$, если $Y_0 = 1$ и YX — P-супермартингал для любого $X \in \mathscr{X}$.

Обозначим через $\mathscr{Y}$ класс всех супермартингальных плотностейи и определим множество всех предельных значений супермартингальных плотностей $\widetilde{\mathscr{D}} := \{Y_\infty\colon Y \in \mathscr{Y}\}$.

Следующая лемма является стандартной.

Лемма 3.2. *Множество $\widetilde{\mathscr{D}}$ выпукло, $\widetilde{\mathscr{D}} \subseteq \mathscr{D}$ и $\overline{\widetilde{\mathscr{D}}}^0_+ \subseteq \widetilde{\mathscr{D}} - L^0_+$.*

Доказательство. Выпуклость $\widetilde{\mathscr{D}}$ очевидна. Если $Y \in \mathscr{Y}$, то для любого $X \in \mathscr{X}$ в силу леммы Фату и супермартингального свойства

$$\mathsf{E}Y_\infty X_\infty \le \lim_{t\to\infty} \mathsf{E}Y_t X_t \le \mathsf{E}Y_0 X_0 = 1,$$

поэтому $Y_\infty \in \mathscr{D}$.

Пусть теперь дана последовательность (Y^n) из $\mathscr{Y}$ и Y^n_∞ сходятся P-п.н. к η. По лемме 5.2 в [34], найдутся такие последовательность $Z^n \in \mathrm{conv}(Y^n, Y^{n+1}, ...)$ и супермартингал Z с $Z_0 \le 1$, что Z^n *сходятся по Фату* (см. [34]) на счетном всюду плотном подмножестве $\mathbb{R}_+$, при этом можно считать, что $Z^n_\infty \to Z_\infty$ P-п.н. (детерминированной заменой времени можно свести процессы Y^n на $[0,1)$ и продолжить их на $[1,\infty)$ величиной Y^n_∞). Так как XZ^n сходятся по Фату к XZ для $X \in \mathbb{D}_+$ и сходимость по Фату сохраняет супермартингальное свойство, процесс XZ является супермартингалом для любого $X \in \mathscr{X}$. Так как, очевидно, $\xi = Z_\infty$, остается заметить, что в случае $0 < Z_0 \le 1$ имеем $Z/Z_0 \in \mathscr{Y}$ и величина Z_∞/Z_0 мажорирует ξ, а случай $Z_0 = 0$ тривиален. $\square$

Напомним, что основной результат главы 3 (теорема 3.1) заключается в следующем: при каких предположениях множество $\mathscr{Y}$ непусто и для $\widetilde{\mathscr{D}}$ выполнены условия (i)–(iv) Леммы 3.1. То есть, когда для задачи максимизации робастной полезности (3.2) справедливы равенства (3.4)–(3.5) с двойственной функцией v, в определении которой (3.3) вместо множества $\mathscr{D}$ стоит множество $\{Y_\infty : Y \in \mathscr{Y}\}$.

Определение 3.3. Семейство $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{D}_+$ назовем *разветвленным*, если для любых $X^i \in \mathscr{X} \cap \mathbb{D}_{++}$, $i = 1, 2, 3$, для любого $s \ge 0$ и любого $B \in \mathscr{F}_s$ процесс

$$X_t = X^1_t \mathbb{1}_{\{t<s\}} + X^1_s \left(\mathbb{1}_B \frac{X^2_t}{X^2_s} + \mathbb{1}_{\Omega\setminus B} \frac{X^3_t}{X^3_s} \right) \mathbb{1}_{\{t\ge s\}}$$

принадлежит $\mathscr{X}$.

Обозначим через $\mathrm{fork}(\mathscr{X})$ наименьшее разветвленное семейство, содержащее $\mathscr{X}$. Очевидно, что для любого семейства он существует.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение 3.4,* $\mathscr{A} = \{X_\infty : X \in \mathscr{X}\}$, $\mathscr{D} \neq \{0\}$, *где* $\mathscr{D}$ *определено в* (3.1), *и* $\widetilde{\mathscr{D}} := \{Y_\infty : Y \in \mathscr{Y}\}$. *Для того, чтобы множество* $\widetilde{\mathscr{D}}$ *было непусто и для него были выполнены условия*
(i) — (iv) леммы 3.1, необходимо и достаточно

$$\{X_\infty : X \in \operatorname{fork}(\mathscr{X})\} \subseteq \overline{\mathscr{C}}^0_+. \tag{3.7}$$

Доказательство. Более просто доказывается необходимость. Положим

$$\mathscr{X}_0 := \operatorname{fork}(\mathscr{X}) \cap \{X \in \mathbb{D}_+ : XY - \text{супермартингал для любого } Y \in \mathscr{Y}\}.$$

Легко проверить, что множество $\mathscr{X}_0$ является развлетвленным. Значит, $\mathscr{X}_0 = \operatorname{fork}(\mathscr{X})$ и процесс XY является супермартингалом для любых $X \in \operatorname{fork}(\mathscr{X})$ и $Y \in \mathscr{Y}$.

Возьмем $X \in \operatorname{fork}(\mathscr{X})$ и пусть $\eta \in \mathscr{D}$. В силу условия (i) леммы 3.1 найдется такой процесс $Y \in \mathscr{Y}$, что $Y_\infty \geq \eta$. Тогда

$$\mathsf{E} X_\infty \eta \leq \mathsf{E} X_\infty Y_\infty \leq \mathsf{E} X_0 Y_0 = 1,$$

то есть $X_\infty \in \mathscr{D}^\circ = \overline{\mathscr{C}}^0_+$.

Докажем достаточность условия (3.7). Возьмем произвольную $\eta \in \mathscr{D}$, $\eta \neq 0$. Имеем $\mathsf{E} X_\infty \eta \leq 1$ для любого $X \in \operatorname{fork}(\mathscr{X})$. Для $t \in \mathbb{R}_+$ определим случайную величину Y_t равенством

$$Y_t = \operatorname*{ess\,sup}_{X \in \operatorname{fork}(\mathscr{X}) \cap \mathbb{D}_{++}} \frac{\mathsf{E}(\eta X_\infty | \mathscr{F}_t)}{X_t}.$$

Далее почти дословно воспроизводится доказательство леммы 4 в [60], для чего требуется только разветвленность, а не выпуклая разветвленность множества $\mathscr{X}_> := \operatorname{fork}(\mathscr{X}) \cap \mathscr{D}_{++}$. Сначала доказывается, что для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ найдется такая последовательность (X^n) из $\mathscr{X}_>$, что случайные величины $\frac{\mathsf{E}(\eta X^n_\infty | \mathscr{F}_t)}{X^n_t}$ монотонно возрастают к Y_t. Затем проверяется супермартингальное свойство процесса YX для любого $X \in \mathscr{X}_>$. Наконец проверяется, что математическое

ожидание $\mathsf{E}Y_t$ непрерывно справа, откуда у процесса Y существует модификация из $\mathbb{D}_+$, которую мы и будем обозначать с этого момента Y.

Пусть теперь $X \in \mathscr{X}$. Тогда для любого натурального n процесс $X^n := (1-1/n)X + 1/n$ лежит в $\mathscr{X} \cap \mathscr{X}_>$, поэтому $X^n Y$ — супермартингал. Отсюда элементарно следует, что XY — супермартингал. Очевидно, $Y_t \geq \mathsf{E}(\eta|\mathscr{F}_t)$ при каждом t, откуда $Y_\infty \geq \eta$. С другой стороны, $Y_0 = \sup_{X \in \mathscr{X}_>} \mathsf{E}\eta X_\infty \leq 1$. Поэтому $Z := Y/Y_0 \in \mathscr{D}$ и $Z_\infty \geq \eta$. □

3.4 Следствие

В качестве приложения для *разветвленного* и *выпуклого* семейства случайных процессов получаем обобщение результата Д. Б. Рохлина (см. [8]), где рассматривается *разветвленно-выпуклое* семейство. Понятие *разветвленности*, даже в сочетании с выпуклостью, слабее свойства *разветвленно-выпуклости*, где в определении 3.3 вместо $\mathbb{1}_B$ и $\mathbb{1}_{\Omega \setminus B}$ стоят h и $(1-h)$ соответственно и h — $\mathscr{F}_s$-измеримая случайная величина со значениями в $[0,1]$.

Аналогичные объекты вводились, например, в совместной работе Ю. Кабанова, К. Кардараса и Ш. Сонга [39].

Следствие 3.1. *Пусть $\mathscr{W} \subseteq \mathbb{D}_+$ — выпуклое и разветвленное семейство случайных процессов, $1 \in \mathscr{W}$ и $X_0 = 1$ для любого $X \in \mathscr{W}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *множество*

$$\{X_t : X \in \mathscr{W},\, t \in \mathbb{R}_+\}$$

ограничено по вероятности;

(ii) *существует супермартингальная плотность Y для семейства $\mathscr{W}$ с*

$$\mathsf{P}(Y_\infty > 0) = 1.$$

Замечание 3.2. Следуя терминалогии [8], мы могли бы говорить о существовании *эквивалентной* супермартингальной плотности, где "эквивалентными" называются плотности с условием $Y_\infty > 0$.

Доказательство. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) элементарна и доказывается так же, как и в [8]. Докажем (i) $\Rightarrow$ (ii), для чего введем семейство процессов

$$\mathscr{X} := \{X^t \colon X \in \mathscr{W},\, t \in \mathbb{R}_+\},$$

где X^t обозначает процесс, остановленный в момент t: $X^t_s = X_{s\wedge t}$. Так как $\mathscr{W}$ развлетвлено и $1 \in \mathscr{W}$, имеем $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{W}$. Очевидно, что семейство $\mathscr{X}$ удовлетворяет предположению 3.4 и является развлетвленным.

(i) означает, что множество $\mathscr{A} = \{X_\infty : X \in \mathscr{X}\}$ ограничено по вероятности. По теореме Яна ([61], Теорема 1) существует $\eta \in L^\infty_+$ с $\mathsf{P}(\eta > 0) = 1$ и с $\sup_{X\in\mathscr{X}} \mathsf{E}\eta X_\infty \le 1$. Теорема 3.1 влечет существование супермартингальной плотности Y для семейства $\mathscr{X}$ с $Y_\infty \ge \eta$. Но легко видеть, что Y является супермартингальной плотностью и для семейства $\mathscr{W}$. $\square$

Заключение

Итоги выполненного исследования. Диссертация посвящена развитию двойственных методов в задаче максимизации полезности в финансовой математике, а также некоторым смежным вопросам. В настоящей работе рассмотрены двойственные описания оптимального значения ожидаемой робастной полезности и свойство производных классов функций Юнга, которые сопряжены в смысле Фенхеля.

Выводы диссертации заключаются в следующем:

1) **Доказано**, что функции, играющие роль производных для всех функций из классов функций Юнга, которые сопряжены одна к другой в смысле Фенхеля, взаимно обратные в обобщенном смысле.

2) **Доказана** теорема о соотношении между исходной и двойственной задачей для задачи максимизации робастной полезности со случайным вкладом в терминальный момент времени и с функцией полезности, конечной на полупрямой.

3) **Изучена** структура поляр $\mathscr{D}$ подмножеств $\mathscr{A}$ конуса L^0_+, соответствующих терминальным значениям капиталов инвестиционных стратегий $X \in \mathscr{X}$. А именно, **доказан** критерий для сужения поляры множества терминальных капиталов в определении двойственной задачи для задачи максимизации робастной полезности, до выпуклого подмножества терминальных значений всех супермартингальных плотностей.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. В завершении перечислим некоторые возможные перспективы дальнейших исследований:

1) В зависимости от вида функции полезности U **изучить** структуру пространства $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})$, а также двойственного пространства $L^{\hat{U}}(\mathscr{Q})^*$.

2) Пусть $U : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. **Исследовать** задачу максимизации робастной полезности, используя полученные в [31] результаты. **Найти** двойственную задачу. **Установить** минимаксные соотношения.

3) **Изучить** структуру *разветвленных семейств*.

4) Пусть семейство $\mathscr{X}$ является *разветвленным*. Каждый процесс X из $\mathscr{X}$ представляется в виде стохастической экспоненты от некоторого процесса Y. Все такие процессы Y образуют семейство $\mathscr{Y}$. **Найти** необходимые условия на семейство процессов $\mathscr{Y}$.

Список литературы

[1] *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

[2] *Гущин А. А.* О расширении понятия f-дивергенции // Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 468–489.

[3] *Гущин А. А.* Двойственная характеризация цены в задаче максимизации робастной полезности // Теория вероятн. и ее примен., 2010, т. 55, в. 4, с. 680–704.

[4] *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматлит, 1958.

[5] *Мейер П.-А.* Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.

[6] *Морозов И. С.* Расширение класса допустимых стратегий в задаче максимизации робастной полезности с конечной на $\mathbb{R}$ функцией полезности // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 5, с. 617–634.

[7] *Морозов И. С.* Стохастические задачи максимизации робастной полезности: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.05: защищена 28.10.11, Моск. гос. университет им. М. В. Ломоносова, М., 2011, 93 с.

[8] *Рохлин Д. Б.* О существовании эквивалентной супермартингальной плотности для разветвленно-выпуклого семейства случайных процессов // Матем. заметки, 2010, т. 87, в. 4, с. 594–603.

[9] *Фарвазова А. А.* Об одном свойстве преобразования Фенхеля. // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, в. 3, с. 474–478.

[10] *Фарвазова А. А.* Двойственная задача для максимизации робастной полезности в терминах супермартингальных мер // тез. докл. в сборнике Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2021», М.: МАКС Пресс, 2019.

[11] *Фарвазова А. А.* Двойственная задача максимизации робастной полезности // тез. докл. в сборнике Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2021», М.: МАКС Пресс, 2021.

[12] *Фёльмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008.

[13] *Хасанов Р. В.* О задаче максимизации полезности в случае неограниченного случайного вклада. // Вестн. Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика, 2013, №3, с. 10–21.

[14] *Ширяев А. Н., Черный А. С.* Векторный стохастический интеграл и фундаментальные теоремы теории арбитража // Стохастическая финансовая математика, Сборник статей, Труды МИАН, М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2002, т. 237, с. 12–56.

[15] *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики, т. 1–2. М.: МЦНМО, 2016.

[16] *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

[17] *Backhoff Veraguas J. D., Fontbona J.* Robust utility maximization without model compactness // SIAM Journal on Financial Mathematics, 2016, Vol. 7, №1, p. 70–103.

[18] *Barndorff-Nielsen O. E., Shiryaev A. N.* Change of time and change of measure, 2nd ed., Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab., 21, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015, xviii+326 pp.

[19] *Bellini F., Frittelli M.* On the Existence of Minimax Martingale Measures // Math. Finance, 2002, Vol. 12, №1, p. 1–21.

[20] *Biagini S.* An Orlicz spaces duality for utility maximization in incomplete markets // Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V, Progress Probab., Birkhäuser, Basel, 2007, Vol. 59, Part 2, p. 445–455.

[21] *Biagini S., Černý A.* Convex duality and Orlicz spaces in expected utility maximization // Math. Finance, 2020, Vol. 30, Issue 1, p. 85–127.

[22] *Biagini S., Frittelli M.* Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes // Finance Stoch., 2005, Vol. 9, №4, p. 493–517.

[23] *Biagini S., Frittelli M.* The supermartingale property of the optimal portfolio process for general semimartingales // Finance Stoch., 2007, Vol. 11, №2, p. 253–266.

[24] *Biagini S., Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Ann. Appl. Probab., 2008, Vol. 18, №3, p. 929–966.

[25] *Bismut J.-M.* Conjugate convex functions in optimal stochastic control // J. Math. Anal. Appl., 1973, Vol. 44, №2, p. 384–404.

[26] *Brannath W., Schachermayer W.* A bipolar theorem for $L^0_+(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ // In: Seminaire de Probabilites XXXIII, Lecture Notes in Math.. Berlin: Springer, 1999, Vol. 1709, 349–354.

[27] *Brezis H.* Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations // Universitext. Springer, 2011.

[28] *Burgert C., Rüschendorf L.* Optimal consumption strategies under model uncertainty // Stat. Decisions, 2005, Vol. 23, №1, p. 1–14.

[29] *Delbaen F., Grandits P., Rheinlander T., Samperi D., Schweizer M., Stricker, C.* Exponential hedging and entropic penalties // Math. Finance, 2002, Vol. 12, №2, p. 99–123.

[30] *Embrechts P., Hofert M.* A note on generalized inverses // Math. Meth. of Oper. Res., 2013, Vol. 77, №3, p. 423–432.

[31] *Farvazova A. A.* Dual problem of robust utility maximization. // Moscow University Mathematics Bulletin, 2022, Vol. 77, №4, p. 176–182.

[32] *Farvazova A. A.* Robust utility maximization in terms of supermartingale measures. // Moscow University Mathematics Bulletin, 2022, Vol. 77, №1, p. 20–26.

[33] *Föllmer H., Gundel A.* Robust projections in the class of martingale measures // Illinois J. Math., 2006, Vol. 50, №2, p. 439–472.

[34] *Föllmer H., Kramkov D.* Optional decompositions under constraints // Probab. Theory Related Fields, 1997, Vol. 109, №1, p. 1–25.

[35] *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin expected utility with nonunique prior // J. Math. Econom., 1989, Vol. 18, №2, p. 141–153.

[36] *Gundel A.* Robust utility maximization for complete and incomplete market models // Finance Stoch., 2005, Vol. 9, №2, p. 151–176.

[37] *Gushchin A.* On robust utility maximization // International Conference "Modern Stochastics: Theory and Application", Kyiv, Ukraine, 2006, p. 134–135.

[38] *Gushchin A. A., Khasanov R. V., Morozov I. S.* Some functional analytic tools for utility maximization // Modern stochastics and applications, Springer, Cham, Springer Optim. Appl., 2014, Vol. 90, p. 267–285.

[39] *Kabanov Y. M., Kardaras C., Song S.* No arbitrage of the first kind and local martingale numéraires // Finance Stoch., 2016, Vol. 20, №4, p. 1097–1108.

[40] *Kabanov Y. M., Stricker C.* On the optimal portfolio for the exponential utility maximization: remarks to the six-author paper // Math. Finance, 2002, Vol. 12, №2, p. 125–134.

[41] *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Prob., 1999, Vol. 9, №3, p. 904–950.

[42] *Kramkov D., Schachermayer W.* Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Prob., 2003, Vol. 13, №4, p. 1504–1516.

[43] *Maccheroni F., Marinacci M.* Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences // Econometrica, 2006, Vol. 74, №6, p. 1447–1498.

[44] *Matoussi A., Possamaï D., Zhou C.* Robust utility maximization in nondominated models with 2BSDE: the uncertain volatility model // Mathematical Finance, 2015, Vol. 25, №2, p. 258–287.

[45] *Merton R. C.* Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case // Rev. Econom. and Statist., 1969, Vol. 51, №3, p. 247–257.

[46] *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model // J. Econom. Theory, 1971, Vol. 3, №4, p. 373–413.

[47] *Neufeld A., Nutz M.* Robust utility maximization with Lévy processes // Mathematical Finance, 2018, Vol. 28, №1, p. 82–105.

[48] *Pennanen T.* Convex duality in optimal investment under illiquidity // Math. Program., 2014, Vol. 148, p. 279–295.

[49] *Pliska S. R.* A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios // Math. Oper. Res., 1986, Vol. 11, №2, p. 370–382.

[50] *Rao M. M., Ren Z. D.* Theory of Orlicz Spaces. N. Y.: Marcel Dekker, 1991.

[51] *Rockafellar R. T.* Integrals which are convex functionals, I // Pacific J. Math., 1968, Vol. 24, №3, p. 525–539.

[52] *Rockafellar R. T.* Integrals which are convex functionals, II // Pacific J. Math., 1971, Vol. 39, №2, p. 439–469.

[53] *Rosenberg R.* Orlicz spaces based on families of measures // Studia Math., 1970, Vol. 35, p. 15–49.

[54] *Samuelson P. A.* Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming // Rev. Econom. and Statist., 1969, Vol. 51, №3, p. 239–246.

[55] *Savage L.* The foundations of statistics. N. Y.: Wiley, 1954.

[56] *Schachermayer W.* Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative // Ann. Appl. Probab., 2001, Vol. 11, №3, p. 694–734.

[57] *Schied A., Wu C.-T.* Duality theory for optimal investments under model uncertainty // Stat. Decisions, 2005, Vol. 23, №3, p. 199–217.

[58] *Tobin J.* Liquidity preference as behavior towards risk // Rev. Econ. Stud., 1958, Vol. 25, p. 68–85.

[59] *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, 1944.

[60] *Zitkovic G. A.* A filtered version of the bipolar theorem of Brannath and Schachermayer // J. Theoret. Probab., 2002, Vol. 15, №1, p. 41–61.

[61] *Yan J. A.* Caracterisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1 . // In: Seminaire de Probabilites XIV, Lecture Notes in Math.. Berlin: Springer, 1980, Vol. 784, p. 220–222.

[62] *Yosida K., Hewitt E.* Finitely additive measures. // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 72, №1. 46–66.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] *Фарвазова А. А.* Об одном свойстве преобразования Фенхеля. // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, в. 3, с. 474–478.

Farvazova A. A. On a property of the Fenchel transform. // Chebyshevskii Sbornik, 2021, Vol. 22, №3, p. 474–478.

Объем: 0.58 п.л.. Входит в перечень ВАК. Индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. JIF SJR: 0.305 (Q3).

[2] *Фарвазова А. А.* Двойственная задача максимизации робастной полезности. // Вестн. Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика, 2022, №4, с. 15–21.

Farvazova A. A. Dual problem of robust utility maximization. // Moscow University Mathematics Bulletin, 2022, Vol. 77, №4, p. 176–182.

Объем: 0.69 п.л.. Входит в перечень ВАК. Индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. JIF SJR: 0.607 (Q2).

[3] *Фарвазова А. А.* Максимизация робастной полезности в терминах супермартингальных мер. // Вестн. Моск. ун-та, Серия 1. Математика. Механика, 2022, №1, с. 19–25.

Farvazova A. A. Robust utility maximization in terms of supermartingale measures. // Moscow University Mathematics Bulletin, 2022, Vol. 77, №1, p. 20–26.

Объем: 0.69 п.л.. Входит в перечень ВАК. Индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS. JIF SJR: 0.607 (Q2).

Тезисы докладов на научных конференциях

[4] *Фарвазова А. А.* Двойственная задача для максимизации робастной полезности в терминах супермартингальных мер // тез. докл. в сборнике Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2021», М.: МАКС Пресс, 2019. Объем: 0.12 п.л..

[5] *Фарвазова А. А.* Двойственная задача максимизации робастной полезности // тез. докл. в сборнике Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2021», М.: МАКС Пресс, 2021. Объем: 0.12 п.л..