Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Слепов Павел Сергеевич

Фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент в анизотропных голографических моделях

01.04.02 Теоретическая физика
АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в отделе теоретической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:
Арефьева Ирина Ярославна, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность – 01.04.02)

Официальные оппоненты:

- **Алкалаев Константин Борисович**, доктор физико-математических наук, высококвалифицированный ведущий научный сотрудник Лаборатории квантовой теории поля Отделения теоретической физики им. И.Е. Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (специальность – 01.04.02)

- **Андреев Олег Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник сектора физики высоких энергий Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук (специальность – 01.04.02)

Ведущая организация:
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Международной межправительственной организации Объединенный институт ядерных исследований

Защита состоится 14 сентября 2022 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.02 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института имени В. А. Стеклова РАН и на сайте http://www.mi-ras.ru/dis/ref22/slepov/dis.pdf

Автореферат разослан «___» июля 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.022.02 при МИАН,
доктор физико-математических наук, профессор Ю.Н. Дрожжинов

1 Актуальность темы исследования

Современное описание физики высоких энергий строится на основе квантовой теории поля [1–3]. Одной из важнейших задач в квантовой хромодинамике (КХД), которая описывает сильные взаимодействия, является изучение нового состояния вещества – кварк-глюонной плазмы (КГП) и ее фазовой диаграммы в плоскости (μ, T) [4, 5]. Предполагается, что данный тип материи преобладал в ранней Вселенной в первые 10 микросекунд после Большого взрыва [6]. В 2005 году КГП была открыта в экспериментах по столкновению тяжелых ионов на RHIC (The Relativistic Heavy Ion Collider, Релятивистский Коллайдер Тяжелых Ионов).

Хорошо известно, что пертурбативные методы неприменимы для изучения КГП. Одним из непертурбативных методов изучения КХД является рассмотрение ее на решетке. Несмотря на большой успех в решении различных задач, модель КХД на решетке по-прежнему имеет трудности с изучением теории с ненулевым химическим потенциалом из-за известной проблемы знака.

Альтернативным на сегодняшний день инструментом для изучения КХД вне рамок теории возмущений, а следовательно, и КГП является голографический метод [7], [5]. Голографический метод в качестве механизма изучения моделей вне рамок теории возмущений был впервые сформулирован Х. Малдасеной в 1997 году [8]. В его работе была показана дуальность между $N = 4$ суперсимметричной теорией Янга-Миллса в пределе т'Хоофта и теорией суперструн (типа IIB) в пространстве $AdS_5 \times S_5$. Дальнейшее развитие голографического подхода [9–11] стимулировало его широкое применение в различных областях физики, в том числе в описании фазовой структуры КХД, что непосредственно связано с экспериментальными программами на RHIC, LHC (Large Hadron Collider, Большой Адронный Коллайдер) и NICA (Nuclotron-based Ion Collider fAcility, «основанный на нуклотроне ионный коллайдер») по столкновению тяжелых ионов (СТИ).

Особенно стоит отметить успех применения методов AdS/CFT соответствия при изучении транспортных коэффициентов КГП в работах П. Ковтуна, Дж. Поликастро, А.О. Старинца и Д.Т. Сона, [12–14]. Было обнаружено, что для широкого класса голографических моделей отношение сдвиговой вязкости к плотности энтропии постоянно и мало, $\eta/s = 1/4\pi$. Результаты экспериментов на RHIC и LHC оказались достаточно близки к предсказанным с голографической точки зрения. Таким образом, КГП можно считать почти идеальной жидкостью с чрезвычайно малой вязкостью, а идея о том, что с помощью голографии может быть построена модель для СТИ, получила экспериментальную поддержку и находится в центре внимания специалистов [5, 7] (и ссылки в них).

Фазовая диаграмма была экспериментально изучена только для двух частных случаев: малых химических потенциалов μ при больших значениях температуры T (RHIC, LHC) и конечных значений химического потенциала (SPS, т.е. Super Proton Synchrotron, Протонный суперсинхротрон) при малых значениях температуры T. Экспериментальное исследование фазовой диаграммы между данными частными случаями – одна из главных задач ускорительных комплексов FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research, Центр по Исследованию Ионов и Антипротонов) и NICA, которые находятся в стадии строительства. Для получения фазовых диаграмм потребуется проанализировать результаты экспериментов по сканированию энергии пучка

в СТИ.

Голографическая дуальность обеспечивает эффективный подход к изучению фазовых переходов КХД [5,7] и может рассматриваться как новый тип феноменологии. Это подразумевает, что голографическая КХД должна описывать КХД во всех энергетических масштабах – то есть воспроизводить поведение КХД на малых расстояниях (β-функция) и результаты КХД на решетке на больших расстояниях (конфайнмент и т.д.). В промежуточных энергетических масштабах и экстремальных условиях (высокая плотность или ненулевые значения химического потенциала) голографическая КХД должна предоставлять теоретические результаты, которые согласуются с результатами экспериментальных исследований, или предсказывать новые результаты. Голографическая КХД – это 5-мерная теория. Как правило, 5-мерная метрика представляет собой деформированную версию 5-мерного пространства-времени AdS-Шварцшильда или AdS-Рейсснера-Нордстрема-Шварцшильда. Модель, как привило, включает скалярное (дилатонное) поле. Оказывается, что это поле описывает бегущую константу связи в 4-мерной квантовой теории, а 5-я координата играет роль энергетической шкалы.

Существуют две большие группы голографических моделей: так называемые модели "сверху вниз" ("top down"), связанные со струнными моделями, и модели "снизу вверх" ("bottom up"). Последние – это феноменологические модели, которые должны быть найдены методом проб и ошибок, чтобы улавливать свойства КГП, установленные различными методами, и в то же время иметь возможность предсказывать новые. Типичные примеры таких явлений связаны с ненулевым химическим потенциалом и магнитными полями.

Изотропные голографические модели КХД с подходом "снизу вверх" рассматривались в многочисленных работах. Эти модели рассматривались для изучения фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент [15–19], для изучения кирального фазового перехода, а также для поиска фазового перехода кваркония. Одним из популярных методов построения голографической КХД в рамках подхода "снизу вверх" является метод реконструкции потенциала для моделей с действием Эйнштейна с полями дилатона и Максвелла. Он заключается в том, чтобы начать с заданной формы метрики, которая представляет собой деформированную форму AdS_5, а затем найти потенциал дилатона, который поддерживает заданную форму метрики. Деформация метрики реализуется фактором деформации, который в свою очередь определяет функцию почернения и, следовательно, термодинамику модели. Выбор фактора деформации в метриках сильно влияет на структуру фазовых переходов голографической КХД.

В качестве основного принципа при выборе фактора деформации обычно используется согласие с основными характеристиками результатов на решетке. К сожалению, вычисления на решетке не могут предоставить нам полную картину фазовой диаграммы КХД и показывают только ее отдельные части. Отсутствие общей схемы изучения различных режимов в КХД является основой для разработки голографического подхода к КХД. Оказалось, что фазовая диаграмма, описывающая тяжелые кварки, может быть получена путем деформации AdS_5 с помощью фактора деформации, который является полиномом. Для простейшего квадратичного многочлена [18, 20] модель воспроизводит некоторые особенности фазовой диаграммы, описывающей тяжелые кварки, в то время как для воспроизведения фазовой диа-

граммы легких кварков необходимо использовать логарифмическую функцию [19].

В контексте СТИ отметим, что существует очевидная неэквивалентность продольного и поперечного направлений, т. е. анизотропия в веществе, полученном в СТИ. Считается, что КГП, сформированная в СТИ, изначально находится в анизотропном состоянии и изотропизация происходит примерно на $0.5 \div 2$ Фм/с $\sim 10^{-24}$ с после столкновения. Поэтому кажется естественным предположить, что в экспериментах по сканированию пучка будет изучаться фазовый переход в анизотропной КХД (с параметром анизотропии, который зависит от времени). Как уже отмечалось выше, использовать КХД на анизотропной решетке для изучения фазовой диаграммы в плоскости (μ, T) пока оказывается невозможным из-за проблемы знака.

В связи с тем, что сразу после СТИ КГП представляет собой анизотропное вещество, важной задачей является учет этой анизотропии в голографической теории. Для голографического описания анизотропной КХД следует включить в рассмотрение дополнительное поле Максвелла, поддерживающее анизотропию в метрике [21–23]. В этих моделях вводится параметр ν, который при значении $\nu = 4.5$ воспроизводит экспериментальные результаты для зависимости энергии от общей множественности частиц, рожденных при столкновении тяжелых ионов (результаты ATLAS и ALICE; ATLAS – это сокращение от "A Toroidal LHC ApparatuS", "Тороидальный аппарат на БАК"; ALICE – это сокращение от "A Large Ion Collider Experiment", "Эксперимент на Большом ионном коллайдере"). Стоит отметить, что изотропные голографические модели не смогли воспроизвести экспериментальную зависимость множественности от энергии ([21] и ссылки в ней), поэтому для их воспроизведения были рассмотрены анизотропные модели с параметром ν.

Также установлено, что в результате нецентральных СТИ в физическом 4-мерном пространстве-времени возникает сильное магнитное поле [24]. Это внешнее магнитное поле приводит к анизотропии другого типа и явлению прямого/обратного магнитного катализа. Этот вид анизотропии следует учесть в рамках голографического подхода [25, 26]. Сильные магнитные поля присутствуют в нейтронных звездах и магнетарах, а также в ранней космологии. Эта анизотропия для улучшенной голографической КХД с действием Максвелла была рассмотрена в [25, 26].

Таким образом, есть несколько причин рассмотреть анизотропные модели: воспроизвести экспериментальные данные для зависимости энергии от общей множественности [21], описать явление магнитного катализа [25] и учесть анизотропную геометрию в СТИ.

Чтобы иметь дело с анизотропной голографической КХД, рассматривается действие Эйнштейна с полем дилатона и полями Максвелла для поддержки анизотропии в метриках. Такая анизотропная модель была рассмотрена для восстановления картины фазового перехода, характерного для тяжелых кварков в [22]. Отметим, что на самом деле в этой модели не вычисляются массы кварков и не включаются в действие и уравнения движения. Модель эффективно демонстрирует свойства тяжелых или легких кварков при фазовом переходе конфайнмент/деконфайнмент.

Различные изотропные голографические модели КХД различаются выбором фактора деформации [18–20]. Модели с различными факторами деформации описывают различные феноменологические модели. В изотропном случае существуют специаль-

ные факторы деформации, которые описывают КХД для легких или тяжелых кварков [18, 19]. В этих работах вид фактора деформации выбирается таким образом, чтобы воспроизвести характерную для легких и тяжелых кварков фазовую структуру, подтвержденную вычислениями на решетке (т.н. "Columbia plots" [28]).

Голографические модели, поддержанные действием Эйнштейна с полями дилатона и Максвелла, характеризуются Ван-дер-Ваальсовым типом зависимости температуры T от размера горизонта z_h. При определенных значениях параметров голографической модели функция $z_h(T)$ становится многозначной, то есть одному и тому же значению температуры соответствует несколько значений z_h. В таком случае с помощью изучения поведения свободной энергии определяются стабильные и нестабильные термодинамические фазы, а также фазовые переходы между ними. Как правило, в таких моделях значительную роль играет фазовый переход первого рода, известный при нулевом значении химического потенциала как фазовый переход Хокинга-Пейджа [29].

Предполагается, что фазовая структура для легких кварков имеет область кроссовера при малых химических потенциалах и фазовый переход первого рода при больших химических потенциалах. Фазовая структура для тяжелых кварков, напротив, при малых химических потенциалах имеет фазовый переход первого рода и кроссовер при больших химических потенциалах. Различие в поведении голографических моделей для тяжелых и легких кварков обусловлено различием в зависимостях температуры от размера горизонта в этих моделях. В тексте химический потенциал и температура будут указаны в единицах ГэВ и z_h в ГэВ$^{-1}$.

Стоит также уточнить используемую терминологию. На протяжении всего текста диссертации обсуждается фазовый переход первого рода. Словосочетания фазовый переход типа Хокинга-Пейджа, фазовый переход большая/маленькая черная дыра, а также сокращение BH-BH (от "Small Black Hole/ Large Black Hole") будут использоваться как синонимичные выражения.

Голографические вычисления для моделей тяжелых и легких кварков существенно различаются, поскольку решения для модели тяжелых кварков могут быть выражены явно, в отличие от модели легких кварков, где решение представлено в квадратурах. Поэтому построение полностью анизотропной модели легких кварков является более сложной задачей.

Оказывается, что конкретный вид диаграммы (μ, T), описывающей фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент в анизотропных средах зависит от ориентации пары кварков относительно оси анизотропии. Ось анизотропии в КГП определяется осью СТИ. В работе [22] изучались случаи продольной и поперечной ориентации петель Вильсона и было показано, что они соответствуют двум разным кривым на фазовой диаграмме (μ, T). Очевидно, что в реальном эксперименте, особенно для больших химических потенциалов, ориентация пары кварков должна быть случайной, вызывая размытие линии фазового перехода. В этой связи представляет интерес изучение картины фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент для произвольной ориентации пары кварков.

Экспериментальный поиск фазового перехода в КХД в основном связан с измерением флуктуаций множественности частиц, которые, как ожидается, будут про-

являть немонотонное поведение вблизи фазового перехода. Считается, что для правильного понимания экспериментальных результатов требуется тщательный анализ динамических процессов, которые будут оказывать влияние вблизи линии фазового перехода, особенно – критической конечной точки. Отметим, что имеются указания на то, что местоположение данной точки на фазовой диаграмме определяется исключительно нарушением киральной симметрии.

Существует несколько теоретических подходов к поиску фазовых переходов КХД. Однако, как уже было отмечено, подход, связанный с вычислениями на решетке, сталкивается с трудностями при ненулевом химическом потенциале. Голографическая дуальность же обеспечивает альтернативный подход к изучению фазовых переходов КХД. При таком подходе возникает естественная возможность изучения фазовых переходов и энтропии в рамках одной и той же голографической модели. Важную роль при этом играет энтропия квантовой зацепленности – величина, поведение которой описывает термализацию.

Энтропия квантовой зацепленности с голографической точки зрения имеет метод вычисления, подобный вычислению петель Вильсона. В 2006 году С. Рю и Т. Такаянаги [30] предложили формулу, в которой задача вычисления энтропии зацепленности некоторой области в квантовой теории связывалась с нахождением минимальной гиперповерхности в дуальной метрике.

Начиная с термодинамического подхода Л.Д. Ландау к столкновениям в физике высоких энергий, множественность частиц связывается с энтропией системы [31]. В работе [32] высказана гипотеза о связи флуктуации энтропии квантовой зацепленности с флуктуациями множественности образования частиц в СТИ. Таким образом, изучение энтропии зацепленности является важным в контексте изучения КГП, а сама энтропия зацепленности может выступать пробником для фазовых переходов.

2 Цели и задачи диссертации

В диссертации ставились следующие цели и задачи:

1) Построение анизотропных решений для голографических моделей, описываемых действием Эйнштейна с полем дилатона и тремя полями Максвелла, которые имеют диагональный вид метрики с двумя функциями анизотропии и факторами деформации, характерными для легких и тяжелых кварков.

2) Изучение влияния поведения петель Вильсона на картину фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент в случае модели с одной функцией анизотропии и фактором деформации для тяжелых кварков. Исследование полученной структуры фазовых переходов в зависимости от угла между парой кварков и осью столкновения тяжелых ионов.

3) Изучение структуры фазовых переходов в голографической модели с фактором деформации для легких кварков с одной функцией анизотропии. Изучение термодинамики и определение местоположения на фазовой диаграмме фазового перехода первого рода. Исследование поведения петель Вильсона и натяжения струны в зависимости от анизотропии в этой модели.

4) Изучение структуры фазовых переходов в голографической модели с фактором деформации для тяжелых кварков с двумя функциями анизотропии. Изучение термодинамики и определение местоположения на фазовой диаграмме фазового перехода первого рода. Исследование поведения петель Вильсона и натяжения струны в зависимости от анизотропии в этой модели.

5) Вычисление голографической энтропии зацепленности в полностью и частично анизотропных случаях. Изучение влияния фазовых переходов на поведение энтропии зацепленности на примере модели с одной функцией анизотропии и фактором деформации для тяжелых кварков.

3 Научная новизна и практическая значимость

Все выдвигаемые на защиту результаты являются новыми, получены автором лично или при его непосредственном участии. Результаты, полученные в рамках данной диссертации, имеют теоретическое значение. Тем не менее, также они дают качественные и количественные предсказания для экспериментально наблюдаемых величин, а потому могут быть использованы для феноменологического описания КГП или для построения более скорректированной модели на их основе. Таким образом, результаты представляют интерес в контексте будущих экспериментов по столкновению тяжелых ионов на установках FAIR, NICA, для программ RHIC BES II и CERN, III.

4 Методы исследования

Используемые методы исследования базируются на дуальности гравитация/калибровочная теория. При вычислении энтропии квантовой зацепленности используется предписание Рю-Такаянаги.

5 Положения, выносимые на защиту

1. Построены специальные полностью анизотропные решения уравнений Эйнштейна типа черной дыры для различных случаев фактора деформации в метрике (факторы деформации соответствуют моделям с легкими и тяжелыми кварками).

2. Для голографической модели с частичной анизотропией для тяжелых кварков получена структура фазовых переходов в зависимости от угла между парой кварков и осью столкновений тяжелых ионов.

3. Получена и исследована структура фазовых переходов для анизотропной голографической модели для легких кварков с частичной анизотропией. Выявлена сильная зависимость корнельского потенциала, и следовательно, натяжения струны от параметра анизотропии и ориентации.

4. Получена и исследована структура фазовых переходов для голографичекой анизотропной модели для тяжелых кварков в полностью анизотропном случае.

Получены уравнения для определения положения динамической стенки в случае полностью анизотропной метрики для времениподобных петель Вильсона. Выявлен эффект обратного магнитного катализа и найдены положения на фазовых диаграммах критических конечных точек.

5. Вычислена энтропия голографической зацепленности для области в форме параллелепипеда, ориентация которого относительно линии столкновения тяжелых ионов и прицельного параметра характеризуется углами Эйлера, в полностью анизотропной голографической модели с тремя различными анизотропными функциями. В частном случае модели с одной нетривиальной функцией анизотропии и фактором деформации для тяжелых кварков изучена зависимость голографической энтропии зацепленности от термодинамических (температура, химический потенциал) и геометрических (параметра анизотропии, толщины и ориентации зацепленных областей) параметров. Обнаружены скачки энтропии зацепленности вблизи линии фазового перехода первого рода.

6 Публикации по теме диссертации

Представленные в диссертации результаты опубликованы в 7 статьях [33–39] в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus.

1) I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Holographic model for heavy quarks in anisotropic hot dense QGP with external magnetic field," JHEP **07**, 161 (2021) [arXiv:2011.07023 [hep-th]].

2) I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Holographic anisotropic model for light quarks with confinement-deconfinement phase transition," JHEP **06**, 090 (2021) [arXiv:2009.05562 [hep-th]].

3) I. Y. Aref'eva, A. Patrushev and P. Slepov, "Holographic entanglement entropy in anisotropic background with confinement-deconfinement phase transition," JHEP **07**, 043 (2020) [arXiv:2003.05847 [hep-th]].

4) I. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Orientation Dependence of Confinement-Deconfinement Phase Transition in Anisotropic Media," Phys. Lett. B **792**, 470-475 (2019) [arXiv:1808.05596 [hep-th]].

5) И. Я. Арефьева, К. А. Ранну, П. С. Слепов, "Анизотропные решения в голографической модели для тяжелых кварков с внешним магнитным полем", ТМФ, 207:1 (2021), 44–57

6) И. Я. Арефьева, К. А. Ранну, П. С. Слепов, "Анизотропное решение в голографической модели для легких кварков во внешнем магнитном поле", ТМФ, 210:3 (2022), 416–421

7) P. S. Slepov, "A Way To Improve the String Tension Dependence on Temperature in Holographic Model," Phys. Part. Nucl. **52**, no.4, 560-563 (2021)

7 Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались автором на семинарах отделов теоретической и математической физики Математического института им. Стеклова РАН, отдела квантовой теории поля Физического института им. Лебедева РАН, а также неоднократно были представлены автором на различных международных конференциях:

- XXV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов», (Сборник тезисов докладов, стр.187-188), Москва, Россия, 2018
- XX Международном семинаре по физике высоких энергий «QUARKS», Валдай, Россия, 2018
- XXVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов», (Сборник тезисов докладов, стр.728-730), Москва, Россия, 2019
- «XXIV International Workshop High Energy Physics and Quantum Field Theory», Сочи, Россия, 2019
- «RFBR grants for NICA», Дубна, Россия, 2020
- «Frontiers of Holographic Duality-2», Москва, Россия, 2020
- Рабочем совещании «Problems of Duality and Holography», Москва, Россия, 2020
- «Frontiers of Holographic Duality-3», Москва, Россия, 2021

Доклады на некороых из них опубликованы в трудах конференций:

1) P. Slepov, "Holographic study of Wilson loop in the anisotropic background with confinement/deconfinement phase transition," EPJ Web Conf. **191**, 05011 (2018)

2) P. Slepov, "Entanglement entropy in strongly correlated systems with confinement/deconfinement phase transition and anisotropy," EPJ Web Conf. **222**, 03024 (2019)

8 Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из Введения, пяти Глав основного текста, Заключения и Списка литературы. Общий объем диссертации 142 страницы, включая 70 рисунков и 160 ссылок.

9 Благодарности

Прежде всего хотелось бы выразить глубокую благодарность научному руководителю, ведущему научному сотруднику МИАН им. Стеклова, член-корреспонденту РАН, доктору физ.-мат. наук, профессору Арефьевой Ирине Ярославне за постановку научных задач и их плодотворное обсуждение, знакомство с методами современной теоретической физики, соавторам Кристине Аллановне Ранну и Александру Владимировичу Патрушеву за успешное сотрудничество. Также автор хотел бы поблагодарить отдел теоретической физики за возможность проведения подобного исследования.

Диссертация отражает результаты, полученные в рамках проектов по грантам «Базис» №18-1-1-80-4 и №21-1-5-127-1, РФФИ №18-02-40069 мега и РНФ №20-12-00200, а также в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение №075-15-2019-1614).

10 Содержание диссертации

Во **Введении** дан краткий обзор современного состояния области, относящейся к теме диссертации. Также сформулированы цели и задачи данного исследования, объяснена их значимость и описана структура диссертации.

В **Главе 1** строятся новые специальные полностью анизотропные решения уравнений Эйнштейна и полей материи 5-мерной теории с действием

$$S = \int \frac{d^5x\sqrt{-g}}{16\pi G_5}\big[R - \frac{f_1(\phi)}{4}\,F^{(1)2} - \frac{f_2(\phi)}{4}\,F^{(2)2} - \frac{f_B(\phi)}{4}\,F^{(B)2} - \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\big], \quad (1)$$

где ϕ — скалярное поле дилатона с потенциалом $V(\phi)$, $F^{(a)}_{MN} = \partial_M A^{(a)}_N - \partial_N A^{(a)}_M$ — тензор напряженности полей Максвелла $A^{(a)}_N$, $f_a(\phi)$ — функции взаимодействия, связанные с полями Максвелла, $a = 1, 2, B$, $-g$ и G_5 — детерминант пятимерной метрики и пятимерная гравитационная постоянная, соответственно.

Действие (1) представляет собой обобщение действия обычно используемого для изотропных голографических моделей [15–19], когда остается только поле дилатона и поле Максвелла $A^{(1)}_M$, связаное с введением химического потенциала, а также расширенную версию действия включающего поле $A^{(2)}_M$, используемого в [22]. С его помощью учитывают пространственную анизотропию между продольным и поперечными направлениями в столкновениях тяжелых ионов, что как показано в [21], в рамках голографической модели позволяет воспроизвести зависимость множественности рожденных частиц от энергии. Действие (1) по сравнению с ранее рассмотренными случаями содержит третье поле Максвелла $A^{(B)}_M$, которое позволяет учитывать магнитное поле, возникающее при нецентральных столкновениях тяжелых ионов.

Уравнения движения для полей материи и гравитационные уравнения, соответственно, имеют вид

$$D_M D^M\phi + V'(\phi) + \sum_{a=1,2,B}\frac{f'_a(\phi)}{4}\,F^{(a)\,2} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_M(\sqrt{-g}\,f_a\,F^{(a)\,MN}) = 0 \qquad \text{нет суммирования по } a, \qquad a = 1, 2, B, \quad (3)$$

$$R_{MN} - \frac{1}{2}\,g_{MN}R = T^{(\phi)}_{MN} + \sum_{a=1,2,B} T^{(a)}_{MN}, \quad (4)$$

где $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$, и

$$T^{(\phi)}_{MN} = \frac{1}{2}(\partial_M\phi\partial_N\phi - \frac{1}{2}g_{MN}\partial_K\phi\partial^K\phi) - \frac{1}{2}g_{MN}V(\phi), \quad (5)$$

$$T^{(a)}_{MN} = \frac{1}{2}f_a\left(F^{(a)}_{ML}F^{(a)\,L}_N - \frac{1}{4}\,g_{MN}F^{(a)\,2}\right). \quad (6)$$

Специальные решения уравнений (2)–(4), которые представляют интерес для голографического описания КХД, строятся в рамках анзаца

$$ds^2 = \frac{L^2\mathfrak{b}(z)}{z^2}\big[-\,g(z)dt^2 + dx^2 + \left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{2}{\nu}}dy_1^2 + e^{c_B z^2}\left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{2}{\nu}}dy_2^2 + \frac{dz^2}{g(z)}\big], \quad (7)$$

$$\mathfrak{b}(z) = e^{2\mathcal{A}(z)}, \quad (8)$$

$$\phi = \phi(z), \quad (9)$$

$$A^{(1)}_M = A_t(z)\delta^0_M, \quad F^{(2)}_{y_1y_2} = q, \quad F^{(B)}_{xy_1} = q_B, \quad (10)$$

где L — размерный множитель, в случае недеформированной метрики Пуанкаре соответствующий радиусу AdS_5; обозначения в (2)–(6) и (7)–(10) связаны как $X^0 \equiv t, \quad X^1 \equiv x, \quad X^2 \equiv y_1, \quad X^3 \equiv y_2, \quad X^4 \equiv z$; $\mathfrak{b}(z)$ — фактор деформации, функция $\mathcal{A}(z)$ связана с $\mathfrak{b}(z)$ выражением (8); $g(z)$ — так называемая функция почернения, ν — параметр анизотропии, обусловленной продольно/поперечной несимметричностью СТИ; c_B — коэффициент анизотропии, связанной с внешним магнитным полем, возникающим при нецентральных СТИ. Поля ϕ и $A_M^{(1)}$ зависят только от координаты z; q и q_B — постоянные.

Различный выбор $\mathcal{A}(z)$ соответствует моделям для тяжелых или легких кварков и, в соответствии с предыдущими работами [18,19,22], в которых изучались изотропные модели, мы рассматриваем

$$\mathcal{A}_{HQ}(z) = -\,cz^2/4, \qquad \mathcal{A}_{LQ}(z) = -\,a\,\ln(bz^2+1) \tag{11}$$

и опираясь на [22], функцию f_1 выбираем в виде

$$f_{1\,HQ}(z) = z^{-2+\frac{2}{\nu}}, \qquad f_{1\,LQ}(z) = e^{-cz^2-\mathcal{A}(z)}\; z^{-2+\frac{2}{\nu}}. \tag{12}$$

Здесь индекс HQ обозначает тяжелые кварки, а индекс LQ — легкие кварки, $\mathcal{A}(z)$ как в (11), a, b, c — параметры модели.

Уравнения движения (2)–(4) для (7)–(10) имеют вид

$$\phi'' + \phi'\left(\frac{g'}{g} + \frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{\nu+2}{\nu z} + c_B z\right) + \left(\frac{z}{L}\right)^2 \frac{\partial f_1}{\partial \phi}\,\frac{(A_t')^2}{2\mathfrak{b}g} - \left(\frac{L}{z}\right)^{2-\frac{4}{\nu}} \frac{\partial f_2}{\partial \phi}\,\frac{q^2\; e^{-c_B z^2}}{2\mathfrak{b}g} - \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{2}{\nu}} \frac{\partial f_B}{\partial \phi}\,\frac{q_B^2}{2\mathfrak{b}g} - \left(\frac{L}{z}\right)^2 \frac{\mathfrak{b}}{g}\,\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \tag{13}$$

$$A_t'' + A_t'\left(\frac{\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} + \frac{f_1'}{f_1} + \frac{\nu-2}{\nu z} + c_B z\right) = 0, \tag{14}$$

$$g'' + g'\left(\frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{\nu+2}{\nu z} + c_B z\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \frac{f_1 (A_t')^2}{\mathfrak{b}} - \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{2}{\nu}} \frac{q_B^2\; f_B}{\mathfrak{b}} = 0, \tag{15}$$

$$\mathfrak{b}'' - \frac{3(\mathfrak{b}')^2}{2\mathfrak{b}} + \frac{2\mathfrak{b}'}{z} - \frac{4\mathfrak{b}}{3\nu z^2}\left(1 - \frac{1}{\nu} + \left(1 - \frac{3\nu}{2}\right) c_B z^2 - \frac{\nu c_B^2 z^4}{2}\right) + \frac{\mathfrak{b}\,(\phi')^2}{3} = 0, \tag{16}$$

$$2g'\;\frac{\nu-1}{\nu} + 3g\;\frac{\nu-1}{\nu}\left(\frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}} - \frac{4\,(\nu+1)}{3\nu z} + \frac{2c_B z}{3}\right) + \left(\frac{L}{z}\right)^{1-\frac{4}{\nu}} \frac{L\,q^2\,e^{-c_B z^2} f_2}{\mathfrak{b}} = 0, \tag{17}$$

$$2g'\left(1 - \frac{1}{\nu} + c_B z^2\right) + 3g\left[\left(1 - \frac{1}{\nu} + c_B z^2\right)\left(\frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}} - \frac{4}{3\nu z} + \frac{2c_B z}{3}\right) - \frac{4\,(\nu-1)}{3\nu z}\right] + \left(\frac{L}{z}\right)^{1-\frac{4}{\nu}} \frac{L\,q^2\,e^{-c_B z^2}\,f_2}{\mathfrak{b}} - \left(\frac{z}{L}\right)^{1+\frac{2}{\nu}} \frac{L\,q_B^2 f_B}{\mathfrak{b}} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\mathfrak{b}''}{\mathfrak{b}} + \frac{(\mathfrak{b}')^2}{2\mathfrak{b}^2} + \frac{3\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}}\left(\frac{g'}{2g} - \frac{\nu+1}{\nu z} + \frac{2c_B z}{3}\right) - \frac{g'}{3zg}\left(5 + \frac{4}{\nu} - 3c_B z^2\right) + \frac{8}{3z^2}\left(1 + \frac{3}{2\nu} + \frac{1}{2\nu^2}\right) - \frac{4c_B}{3}\left(1 + \frac{3}{2\nu} - \frac{c_B z^2}{2}\right) + \frac{g''}{3g} + \frac{2}{3}\left(\frac{L}{z}\right)^2 \frac{\mathfrak{b}V}{g} = 0, \tag{19}$$

где $' = \partial/\partial z$. Рассматривая изотропный случай, т. е. положив в уравнениях (13)–(19) $\nu = 1$ и $f_2 = f_B = c_B = 0$, и нормировав радиус AdS, $L = 1$, получим выражения, полностью совпадающие с уравнениями движения (2.12)–(2.16) в [19].

Отметим, что на анзанце (7)–(10) вместо уравнений в частных производных (2)–(4) мы получаем систему уравнений (13)–(19). Уравнение (13) является следствием остальных соотношений (14)–(19). Далее вычитая (18) из (17), мы получаем выражение для функции взаимодействия f_B

$$f_B = 2\left(\frac{L}{z}\right)^{\frac{2}{\nu}} \mathfrak{b} g \, \frac{c_B z}{q_B^2}\left(\frac{g'}{g} + \frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{2}{\nu z} + c_B z\right) \tag{20}$$

и уравнение (15) примет вид

$$g'' + g'\left(\frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{\nu+2}{\nu z} - c_B z\right) - 2g\left(\frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{2}{\nu z} + c_B z\right) c_B z - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \frac{f_1 (A_t')^2}{\mathfrak{b}} = 0. \tag{21}$$

Для случая тяжелых кварков из уравнений (14) и (21) с учетом (11) и (12) получаются следующие выражения для A_t и g:

$$A_t(z) = \mu \, \frac{e^{\frac{1}{4}(c-2c_B)z^2} - e^{\frac{1}{4}(c-2c_B)z_h^2}}{1 - e^{\frac{1}{4}(c-2c_B)z_h^2}}, \tag{22}$$

$$g(z) = e^{c_B z^2}\left\{1 - \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}(2c_B-c)z^2\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}(2c_B-c)z_h^2\right)}\right. \tag{23}$$

$$\left. - \frac{\mu^2\,(2c_B-c)^{-\frac{1}{\nu}}}{4L^2\left(1 - e^{(c-2c_B)\frac{z_h^2}{4}}\right)^2}\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}\,(2c_B-c)\,z^2\right)\right)\right.$$

$$\left. \times\left[1 - \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}\,(2c_B-c)z^2\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}\,(2c_B-c)z_h^2\right)}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;(2c_B-c)z_h^2\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;(2c_B-c)z^2\right)}\right]\right\}.$$

При решении уравнений (14) и (15) использовались следующие граничные условия: $A_t(0) = \mu$, $A_t(z_h) = 0$, $g(0) = 1$, $g(z_h) = 0$, где $z_h > 0$ — параметр, определяющий размер горизонта. Функция взаимодействия f_B для случая тяжелых кварков приобретает вид

$$f_B = -\,2\left(\frac{z}{L}\right)^{-\frac{2}{\nu}} e^{-\frac{1}{2}cz^2}\,\frac{c_B z}{q_B^2}\, g\left(\frac{3cz}{2} + \frac{2}{\nu z} - c_B z - \frac{g'}{g}\right), \tag{24}$$

а f_2 определяется из (17)

$$f_2 = 4\left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{4}{\nu}} e^{-\frac{1}{2}(c-2c_B)z^2}\,\frac{\nu-1}{q^2\nu z}\, g\left(\frac{\nu+1}{\nu z} + \frac{3c-2c_B}{4}\, z - \frac{g'}{2g}\right), \tag{25}$$

в (24) и (25) вид g дается (23). Зависимость дилатонного поля от переменной z опре-

деляется из (16):

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{4\nu}\Big(2\sqrt{2}\,\sqrt{\nu-1}\left[\log\left(\frac{z^2}{z_0^2}\right) - \log\Big(8(\nu-1) + 4\nu c_B z^2 + 3(3c-2c_B)\nu^2 z^2 \right.$$
$$+ 2\sqrt{2}\,\sqrt{\nu-1}\sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z^4}\Big)$$
$$+ \log\Big(8(\nu-1) + 4\nu c_B z_0^2 + 3(3c-2c_B)\nu^2 z_0^2$$
$$\left. +2\sqrt{2}\,\sqrt{\nu-1}\,\sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z_0^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z_0^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z_0^4}\Big)\right] \qquad (26)$$
$$+\sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z^4}$$
$$-\sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z_0^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z_0^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z_0^4} + \frac{4c_B + 3(3c-2c_B)\nu}{\sqrt{3c^2-4c_B^2}}$$
$$\times \log\left(\frac{4c_B + 3(3c-2c_B)\nu^2 z^2 + \sqrt{3c^2-4c_B^2}\,\sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z^4}}{4c_B + 3(3c-2c_B)\nu^2 z_0^2 + \sqrt{3c^2-4c_B^2}\sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z_0^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z_0^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z_0^4}}\right)\Big\},$$

здесь выбрано граничное условие $\phi(z_0) = 0$, z_0 — точка из промежутка $0 \le z_0 \le z_h$. Граничное условие $z_0 = 0$ соответствует [19], а $z_0 = z_h$ было использовано в [22]. Оказывается, что вид граничного условия $z_0 = z_0(z_h)$ определяет поведение натяжения струны в зависимости от температуры. Вид потенциала как функции от z определяется из (19):

$$V = -\frac{e^{\frac{1}{2}cz^2}}{4L^2\nu^2}\Big\{\big[8(1+2\nu)(1+\nu) + 2(3+2\nu)(3c-2c_B)\nu z^2 + (3c-2c_B)^2\nu^2 z^4\big]g$$
$$- \big[2(4+5\nu) + 3(3c-2c_B)\nu z^2\big]\,g' + 2g''\nu^2 z^2\Big\}. \qquad (27)$$

Вид зависимостей потенциала и функций взаимодействия как функций от ϕ определяется из $V(\phi) = V(z(\phi))$, $f_a(\phi) = f_a(z(\phi))$, где при конкретных рассматриваемых во 2 — 5 главах параметрах, $\phi(z)$ — обратимая функция. Вид полученных потенциала V и функций взаимодействия f_2, f_B зависит от поля ϕ, а также от параметров деформированной метрики (ν, c, c_B, и т.д.) и вида f_1.

Для случая легких кварков получается следующее решение:

$$A_t = \mu\frac{e^{(2c-c_B)z^2/2} - e^{(2c-c_B)z_h^2/2}}{1 - e^{(2c-c_B)z_h^2/2}}, \qquad (28)$$

$$g = e^{c_B z^2}\left[1 - \frac{I_1(z)}{I_1(z_h)} + \frac{\mu^2\,(2c-c_B)\,I_2(z)}{L^2\left(1 - e^{(2c-c_B)z_h^2/2}\right)^2}\left(1 - \frac{I_1(z)}{I_1(z_h)}\,\frac{I_2(z_h)}{I_2(z)}\right)\right], \qquad (29)$$

где

$$I_1(z) = \int_0^z \left(1+b\xi^2\right)^{3a} e^{-3c_B\xi^2/2}\,\xi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\xi,\ I_2(z) = \int_0^z \left(1+b\xi^2\right)^{3a} e^{(c-2c_B)\xi^2}\,\xi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\xi, \quad (30)$$

$$f_B = -2\left(\frac{z}{L}\right)^{-2/\nu} e^{-cz^2/2} g\left(\frac{3cz}{2} + \frac{2}{\nu z} - c_B z - \frac{g'}{g}\right), \quad (31)$$

$$f_2 = 2\left(\frac{z}{L}\right)^{2-4/\nu} \frac{e^{c_B z^2}(\nu-1)}{q^2\nu^2 z^2(1+bz^2)^{2a}} \left(\left(2+2\nu-\nu c_B z^2 + \frac{6ab\nu z^2}{1+bz^2}\right) g - g'\nu z\right), \quad (32)$$

$$\phi = \int_{z_0}^{z} \sqrt{\frac{4(\nu-1)}{\nu^2\xi^2} - 2c_B\left(3-\frac{2}{\nu}\right) - 2c_B^2\xi^2 + \frac{12ab}{1+b\xi^2}\left(1+2\,\frac{1+ab\xi^2}{1+b\xi^2}\right)}\, d\xi, \quad (33)$$

$$V(z) = -\frac{(1+bz^2)^{2a}\ z}{2L^2} \quad (34)$$
$$\times \left[2\left\{2\,\frac{(1+\nu)(1+2\nu) + \big(2+(2+3a)(3+2\nu)\nu\big)bz^2 + (1+\nu+3a\nu)(1+2\nu+6a\nu)b^2z^4}{(1+bz^2)^2\nu^2z^2} - c_B\left(2+\frac{3}{\nu}+\frac{12abz^2}{1+bz^2}\right) + c_B^2 z^2\right\} g\, z - \left(5+3\left(\frac{6ab}{1+bz^2}-c_B\right)z^2+\frac{4}{\nu}\right) g' + g'' z\right].$$

В последующих главах эти решения используются для анализа структуры фазовых переходов.

В **Главе 2** изучаются времениподобные петли Вильсона, и на основе их поведения устанавливается структура фазовых переходов в плоскости (μ, T) для частично анизотропной голографической модели с одной нетривиальной функцией анизотропии и фактором деформации для модели тяжелых кварков.

В разделе 2.1 описывается соответствующая голографическая модель и ее термодинамика — выясняется, когда имеет место фазовый переход первого рода (переход типа Хокинга-Пейджа). Для этого рассматривается решение (22)–(27) из Главы 1 для тяжелых кварков с $\nu \geq 1$ и $c_B = 0$. Температура дается формулой $T = |g'(z_h)|/4\pi$, а выражения для плотностей энтропии и свободной энергии следующие:

$$s(z_h, c, \nu) = \frac{e^{-\frac{3}{4}cz_h^2}}{4z_h^{1+2/\nu}}, \qquad F(z_h, c, \nu, \mu) = \int_{z_h}^{z_{h_2}} s(z_h, c, \nu)\, T'(z_h, c, \nu, \mu)\, dz_h, \quad (35)$$

где z_{h_2} – второй горизонт, т. е. в данной точке $T(z_{h_2}) = 0$. Рассматриваются значения $z_h \leq z_{h_2}$, если z_{h_2} существует, и $z_h < \infty$ в противном случае. Для рассматриваемых функций почернения функция $z_h(T)$ – трехзначна и имеет вид поведения Ван-дер-Ваальса при $0 < \mu < \mu_{cr}(\nu)$. Свободная энергия показывает зависимость от температуры в виде так называемого "ласточкиного хвоста" в этом диапазоне химических потенциалов. Петля в форме "ласточкиного хвоста" исчезает при $(\mu, T) = (\mu_{cr}(\nu), T_{cr}(\nu))$. При $\mu \geq \mu_{cr}$ функция свободной энергии возрастает плавно, пока температура убывает. Наименьшие значения свободной энергии соответствуют термодинамически стабильным фазам.

В разделе 2.2 рассматривается вычисление голографических времениподобных петель Вильсона, которые имеют вид прямоугольного контура, 2 длинные стороны которого вытянуты во временном направлении, а две другие вдоль вектора $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Согласно голографическому подходу [9], голографическое значение Вильсоновской петли W_H задается минимальным значением действия Намбу-Гото

S для пробной струны со специальным мировым листом в заданной метрике, т.е. $W_H = e^{-S_{min}}$. При этом

$$S = \int \frac{d\tau\, d\xi}{2\pi\alpha'} \sqrt{|\det h_{\alpha\beta}|}, \quad h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \mathcal{G}_{s,MN}, \quad \mathcal{G}_{s,MN} = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi(z)} \mathcal{G}_{MN}, \tag{36}$$

здесь $\mathcal{G}_{MN}$ — метрика (7), X^M связаны с координатами в метрике (7) следующим образом $X^0 \equiv t$, $X^1 \equiv x$, $X^2 \equiv y_1$, $X^3 \equiv y_2$, $X^4 \equiv z$; α' - константа. Мировой лист специального вида параметризован как: $t = \tau$, $x = \xi \cos\theta$, $y_1 = \xi \sin\theta$, $y_2 = const$, $z = z(\xi)$, и ищется минимум S по возможным конфигурациям $z = z(\xi)$.

Определитель индуцированной метрики $h_{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$\det h_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\mathfrak{b}_s(z(\xi))}{z(\xi)^2}\right)^2 \left(g(z(\xi))\left(z(\xi)^{2-\frac{2}{\nu}} \sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + z'(\xi)^2\right), \tag{37}$$

где $\mathfrak{b}_s(z) = \mathfrak{b}(z) \exp\left(\sqrt{2/3}\ \phi(z)\right)$ – фактор деформации в струнном фрейме. Действие (36) записывается в виде:

$$S \;=\; \mathfrak{t}\,\mathcal{S}, \qquad \mathcal{S} = \int d\xi\ M(z(\xi))\sqrt{\mathcal{F}(z(\xi)) + (z'(\xi))^2}, \qquad \mathfrak{t} = \int \frac{d\tau}{2\pi\alpha'}, \tag{38}$$

где

$$M(z) = \frac{\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}, \quad \mathcal{F}(z) = g(z)\left(z^{2-\frac{2}{\nu}} \sin^2\theta + \cos^2\theta\right). \tag{39}$$

Нахождение экстремального значения S соответствует нахождению решений для динамической системы с действием $\mathcal{S}$ как в (38), динамической переменной $z = z(\xi)$ и временем ξ. Предполагаются граничные условия: $z(\pm\ell/2) = 0$ (или регуляризованные граничные условия $z(\pm\ell/2) = \epsilon$). Эта система имеет первый интеграл:

$$\frac{M(z)\mathcal{F}(z)}{\sqrt{\mathcal{F}(z) + (z')^2}} = \mathcal{I}. \tag{40}$$

Из (40) определяем точку поворота z_*, где $z'(\xi) = 0$ и $M(z_*)\sqrt{\mathcal{F}(z_*)} = \mathcal{I}$. Находя z' из (40), получаем выражения для расстояния между концами струны на границе ℓ и значения действия $\mathcal{S}$:

$$\frac{\ell}{2} = \int_0^{z_*} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}(z)}}\ \frac{dz}{\sqrt{\frac{\mathcal{V}^2(z)}{\mathcal{V}^2(z_*)} - 1}}, \qquad \frac{\mathcal{S}}{2} = \int_\epsilon^{z_*} \frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{V}(z_*)}\ \frac{M(z)dz}{\sqrt{\frac{\mathcal{V}^2(z)}{\mathcal{V}^2(z_*)} - 1}}, \tag{41}$$

где $\mathcal{V}(z)$ эффективный потенциал: $\mathcal{V}(z) \equiv M(z)\sqrt{\mathcal{F}(z)}$. Здесь введено ультрафиолетовое обрезание ϵ (что соответствует регуляризованной границе $z = \epsilon$), поскольку $M(z)$ имеет сингулярное поведение около нуля $z \sim 0$:

$$M(z) \underset{z\sim 0}{\sim} \frac{M_0}{z^k}, \ \ k \geq 1.$$

Мы видим, что S и ℓ действительны, если потенциал – убывающая функция на интервале $0 < z < z_*$, $\mathcal{V}(z) > \mathcal{V}(z_*)$; $z_* \leq z_{min} < z_h$, где z_{min} – это локальный минимум $\mathcal{V}(z)$. Интересно изучить асимптотики S при больших ℓ. Для того, чтобы $\ell \to \infty$ и $S \to \infty$ мы берем $z_* = z_{min}$. В самом деле, изучая поведение асимптотик S и ℓ, оказывается, что условие конфайнмент/деконфайнмент для петли Вильсона

напрямую связано с наличием стационарной точки, $\mathcal{V}'|_{z=z_{min}} = 0$, которая называется точкой динамической стенки и удовлетворяет уравнению:

$$z = z_{DW}: \ \frac{M'(z)}{M(z)} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)} = 0. \tag{42}$$

Выбирая верхнюю точку $z_* = z_{DW}$, мы получаем $S \sim \sigma_{DW}\ell$ и для натяжения струны:

$$\sigma_{DW} = M(z_{DW})\sqrt{\mathcal{F}(z_{DW})} = \frac{\mathfrak{b}_s(z_{DW})}{z^2}\sqrt{g(z_{DW})\left(z^{2-\frac{2}{\nu}}\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)}. \tag{43}$$

В нашем случае эффективный потенциал зависит от фактора деформации, скалярного поля и угла. Для того, чтобы найти стационарные точки $\mathcal{V}(z)$ мы решаем уравнение (42) для эффективного потенциала с произвольным углом. Это уравнение имеет вид:

$$\Sigma(z, z_h, \mu, c, \nu) - \Theta(z, \nu, \theta) = 0, \tag{44}$$

где $\Sigma(z, z_h, \mu, c, \nu)$ не зависит от θ:

$$\Sigma(z, z_h, \mu, c, \nu) \equiv -cz + \frac{1}{\nu z}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{3c\,\nu^2 z^2\left(\frac{cz^2}{2} + 3\right) + 4\nu - 4} + \frac{g'(z)}{2g(z)}, \tag{45}$$

и $\Theta(z, \nu, \theta)$ содержит угловую зависимость:

$$\Theta(z, \nu, \theta) \equiv \frac{2}{z} - \frac{\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) z^{1-\frac{2}{\nu}}\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + z^{2-\frac{2}{\nu}}\sin^2(\theta)}. \tag{46}$$

Уравнение (44) трансцендентно и наличие/отсутствие у него корней по переменной z выясняется численно. Для каждого значения θ и фиксированных параметров c, ν находятся (μ, z_h), при которых уравнение (44) перестает иметь корни, что в плоскости (μ, T) графически отображается как линии фазового перехода для петли Вильсона. Оказывается, что при различных значениях угла θ линии фазового перехода для петли Вильсона различны, что может быть проинтерпретировано как появление кроссовера - некоторой размазки фазового перехода.

Комбинируя фазовые переходы, соответствующие петлям Вильсона, с линиями для перехода типа Хокинга-Пейджа, рассмотренными в разделе 2.3, построена и описана фазовая диаграмма конфайнмент/деконфайнмент. Для каждого значения угла получается своя структура фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент. В разделе 2.4 представлено обсуждение полученных результатов.

В **Главе 3** рассматривается анизотропная голографическая модель для легких кварков с частичной анизотропией. Изучается термодинамика и фазовый переход первого рода в полученной модели, а также поведение петель Вильсона. Сравнивая местоположение фазового перехода для петель Вильсона с положениями фазового перехода первого рода, получается фазовая структура в плоскости (μ, T).

В разделе 3.1 рассматривается решение из Главы 1 для легких кварков с $\nu \geq 1$ и $c_B = 0$. В разделе 3.2 изучены свойства решения (28)–(34) в зависимости от параметров голографической модели. В разделе 3.3 изучена термодинамика полученных решений и фазовый переход типа Хокинга-Пейджа.

В разделе 3.4 следуя подходу изложенному в разделе 2.2, рассматриваются петли Вильсона в анизотропной метрике с одним анизотропным параметром ν и фактором деформации, соответствующим модели легких кварков. Условие фазового перехода конфайнмент /деконфайнмент для контура, как и в разделе 2.2 характеризующегося уголом θ, определяется уравнением (42). Натяжение струны задается формулой (43). В данном случае мы рассматриваем граничное условие $\phi(z_0) = 0$. Оказывается,что $\sigma(z, z_0)$ зависит от параметра z_0. Чтобы получить наилучшее соответствие изотропным вычислениям на решетке $\sigma(T)$, мы используем функцию

$$z_0 = 10 \exp(-z_h/4) + 0.1. \tag{47}$$

Для анизотропнных случаев, где отсутствуют решеточные данные, мы используем подобную функцию и получаем температурную зависимость. Для некоторых наборов параметров $\sigma(T)$ оказывается многозначной функцией температуры T. В результате, при температурах меньших фазового перехода первого рода происходит скачок натяжения струны от σ_1 к значению натяжения струны σ_2, $\sigma_1 > \sigma_2$, что может быть интерпретировано как переход между фазой кваркония и адронной фазой КГП.

В разделе 3.5 представлены полученные фазовые диаграммы с фазовыми переходами, соответствующим петлям Вильсона, и линиями для перехода типа Хокинга-Пейджа. В отличие от модели тяжелых кварков линия фазового перехода типа Хокинга-Пейджа в плоскости (μ, T) длится до $T = 0$ и не пропадает при достаточно больших T. Кроме того, продольная ориентация пар кварков не вносит вклад в фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент, поэтому влияние разделяется между переходом типа Хокинга-Пейджа и поперечной петлей Вильсона. Отметим, что некоторые интересные особенности уже проявляются в модели легких кварков при малой анизотропии. Например, для слабой анизотропии $\nu = 1.03$ область кроссовера существенно сужается.

В **Главе 4** рассматривается голографичекая анизотропная модель для тяжелых кварков с двумя нетривиальными функциями анизотропии. Данную модель можно назвать полностью анизотропной, поскольку с помощью замены переменной метрику можно привести к виду с тремя функциями анизотропии.

В разделе 4.1 рассматривается решение из Главы 1 для тяжелых кварков. В разделе 4.2 изучены свойства решения (22)–(27) в зависимости от параметров голографической модели. В частности определены допустимые значения параметра c_B, который характеризует внешнее магнитное поле.

В разделе 4.3 изучена термодинамика полученных решений и фазовый переход типа Хокинга-Пейджа. При больших абсолютных значениях c_B происходит уменьшение температуры фазового перехода, то есть имеет место эффект обратного магнитного катализа. Кроме того, длина линии перехода типа Хокинга-Пейджа также уменьшается и в конечном итоге вырождается. Однако первичная анизотропия ослабляет эти эффекты, поэтому фазовый переход первого рода сохраняется при больших абсолютных значениях c_B. Например, фазовый переход первого рода все еще существует для $c_B = -0.018$ и $\nu = 4.5$, принимая во внимание, что при $c_B = -0.001$ и $\nu = 1$ его уже нет. Оба параметра анизотропии ν и c_B понижают температуру фазового перехода первого рода. В этом же разделе показаны 3D-графики для положений критических конечных точек (точки окончания фазового перехода первого рода) в зависимости от c_B, химического потенциала и температуры для различных значений первичной

анизотропии.

В разделе 4.4 рассматриваются петли Вильсона в полностью анизотропной метрике и находятся условия фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент для полностью анизотропной метрики в струнном фрейме:

$$\mathcal{G}_{s,MN}dX^M dX^N = \frac{L^2}{z^2}\,\mathfrak{b}_s(z)\left[-g(z)dt^2+\mathfrak{g}_1 dx^2+\mathfrak{g}_2 dy_1^2+\mathfrak{g}_3 dy_2^2+\frac{dz^2}{g(z)}\right], \tag{48}$$

где $\mathfrak{b}_s(z) = \mathfrak{b}(z)\exp\big(\sqrt{2/3}\ \phi(z)\big)$ – фактор деформации в струнном фрейме и $\mathfrak{g}_i$ – функции анизотропии. Рассматривается времениподобная петля Вильсона пространственно ориентированная вдоль вектора $\vec{n} = (\cos\vartheta\sin\alpha, \sin\vartheta\sin\alpha, \cos\alpha)$. Как и в предыдущих главах, следуя голографическому подходу, мы вычисляем значение действия Намбу-Гото в метрике (48):

$$S = \int \frac{d\tau\, d\xi}{2\pi\alpha'}\sqrt{|\det h_{\alpha\beta}|}, \qquad h_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{s,MN}\,\partial_\alpha X^M\,\partial_\beta X^N, \tag{49}$$

для пробной струны с мировым листом параметризованным как

$$\begin{aligned} &X^0 \equiv t = \tau, \quad X^1 \equiv x = \xi\cos\vartheta\sin\alpha, \quad X^2 \equiv y_1 = \xi\sin\vartheta\sin\alpha,\\ &\qquad\qquad X^3 \equiv y_2 = \xi\cos\alpha, \qquad\quad X^4 \equiv z = z(\xi). \end{aligned} \tag{50}$$

и находим его экстемальное значение при вариации $z(\xi)$. Действие Намбу-Гото имеет вид аналогичный (37)

$$S = \mathfrak{t}\,\mathcal{S}, \qquad \mathcal{S} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} d\xi\ M\left(z(\xi)\right)\ \sqrt{\mathcal{F}(z\left(\xi\right)) + \left(z'(\xi)\right)^2}, \tag{51}$$

$$M\left(z\right) = \frac{\mathfrak{b}_s\left(z\right)}{z^2}, \quad \mathfrak{t} = \int\frac{d\tau}{2\pi\alpha'},\ \mathcal{F}\left(z\right) = g\left(z\right)\left(\mathfrak{g}_1\cos^2\vartheta\sin^2\alpha + \mathfrak{g}_2\sin^2\vartheta\sin^2\alpha + \mathfrak{g}_3\cos^2\alpha\right),$$

а эффективный потенциал имеет вид

$$\mathcal{V}\left(z\right) = \frac{\mathfrak{b}_s\left(z\right)}{z^2}\sqrt{g\left(z\right)\left(\mathfrak{g}_1\cos^2\vartheta\sin^2\alpha + \mathfrak{g}_2\sin^2\vartheta\sin^2\alpha + \mathfrak{g}_3\cos^2\alpha\right)}.$$

Следуя методу, описанному в Главе 2, точки динамической стенки для петель Вильсона WLx, WLy_1 и WLy_2, пространственно ориентированных вдоль осей x, y_1 и y_2, соответственно, определяются условиями стационарности соответствующих эффективных потенциалов, которые для метрики (7) имеют вид:

$$WLx: \qquad -cz + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\phi'(z) + \frac{g'}{2g} - \frac{2}{z}\,\Big|_{z=z_{DWx}} = 0, \tag{52}$$

$$WL_{y_1}: \qquad -cz + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\phi'(z) + \frac{g'}{2g} - \frac{\nu+1}{\nu z}\,\Big|_{z=z_{DWy_1}} = 0, \tag{53}$$

$$WL_{y_2}: \qquad -cz + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\phi'(z) + \frac{g'}{2g} - \frac{\nu+1}{\nu z} + c_B z\,\Big|_{z=z_{DWy_2}} = 0. \tag{54}$$

Очевидно, что для $c_B = 0$ выражения (53) и (54) становятся эквивалентными, и полагая $\nu = 1$ все уравнения (52)–(54) сводятся к (52). Линии на плоскости (μ, z_h), и

поэтому на плоскости (μ, T), где уравнения (52)–(54) перестают иметь действительные решения, интерпретируются как линии фазового перехода для петли Вильсона. В разделе 4.4 представлены фазовые диаграммы с фазовыми переходами, соответствующим петлям Вильсона, и линиями для перехода типа Хокинга-Пейджа для модели тяжелых кварков. Оказывается, что структура переходов существенным образом зависит от ν и c_B. Например, при $\nu = 1$ и увеличении магнитного поля линия фазового перехода первого рода оказывается выше линии для петли Вильсона. При $\nu = 4.5$ и увеличении магнитного поля, напротив, линия фазового перехода первого рода оказывается ниже линии для петли Вильсона. В разделе 4.5 обсуждаются полученные результаты.

В **Главе 5** вычисляется энтропия голографической зацепленности специальных областей в пятимерной полностью анизотропной голографической модели с тремя различными анизотропными функциями с метрикой (48).

В разделе 5.1 описывается постановка задачи. В разделе 5.2 приведено определение энтропии зацеленности в голографическом подходе. Энтропия зацеленности используется для исследования корреляций в квантовых системах. Если система разделена на две пространственно непересекающиеся области A и $\bar{A}$, энтропия зацепленности $S(A)$ дает оценку объема потери информации при ограничении на подсистему, связанную с областью A. Вычисление энтропии зацепленности для сильно взаимодействующей квантовой системы, в частности КХД, — сложная задача. Однако можно вычислить голографическую энтропию зацепленности, которая в силу голографической дуальности совпадает с энтропией зацепленности

В разделе 5.3 проведены вычисления голографической энтропии зацеленности для областей, имеющих форму параллелепипедов $\mathcal{P}$, две стороны которых длинные, а одна короткая, т.е. для параллелепипедов, которые выглядят как тонкие плиты. Ориентация этих параллелепипедов задается углами Эйлера (ϕ, θ, ψ) относительно осей x, y^1, y^2. Ось x выбирается вдоль линии столкновения, ось y^1 выбирается в поперечном направлении вдоль направления прицельного параметра b, а ось y^2 выбирается вдоль возникающего магнитного поля. Вложение мирового 3-мерного объема (плиты) с координатами $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ в 5-мерное пространство с метрикой (48) задается формулами

$$\begin{aligned} x^0(\xi) &= const, \\ x(\xi) &= \sum_{j=1,2,3} a_{1j}(\phi,\theta,\psi)\,\xi^j, \quad y^{k-1}(\xi) = \sum_{j=1,2,3} a_{kj}(\phi,\theta,\psi)\,\xi^j, \quad k = 2,3, \\ z &= z(\xi^1), \end{aligned} \tag{55}$$

x, y^1, y^2 – пространственные координаты в (48), $a_{ij}(\phi, \theta, \psi)$ являются элементами матрицы вращений $||a_{ij}||$,

$$\begin{aligned} &a_{11} = \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi, \quad a_{12} = -\cos\psi\sin\phi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi, \\ &a_{13} = \sin\theta\sin\psi, \quad a_{21} = \cos\theta\cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi, \\ &a_{22} = \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi, \qquad a_{23} = -\cos\psi\sin\theta, \\ &a_{31} = \sin\phi\sin\theta, \qquad a_{32} = \cos\phi\sin\theta, \qquad a_{33} = \cos\theta. \end{aligned} \tag{56}$$

Здесь ϕ – это угол между ξ^1 осью и линией узлов N, θ –это угол между ξ^3 и y^2 осями, ψ – это угол между линией узлов N и осью x^1.

Согласно предписанию Рю-Такаянаги [30], голографическая энтропия зацепленности находится как экстремальное значение действия Намбу-Гото относительно вариации $z(\xi^1)$

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\left(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 + \frac{z'^2}{g}\left(\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2\right)\right)} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \tag{57}$$

где

$$\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2 = \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 a_{31}^2(\phi,\theta,\psi) + \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 a_{21}^2(\phi,\theta,\psi) + \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 a_{11}^2(\phi,\theta,\psi), \qquad z' = \partial_{\xi_1} z(\xi^1).$$

Поскольку нет зависимости подынтегрального выражения от ξ^2, ξ^3, мы можем выполнить интегрирование по этим переменным, которое дает размеры параллелепипеда во втором и третьем направлениях:

$$\mathfrak{s} \equiv \frac{\mathcal{S}}{L_1 L_2} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\left(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 + \frac{z'^2}{g}\left(\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2\right)\right)} d\xi^1. \tag{58}$$

Здесь ℓ, L_1, L_2 длины параллелепипеда в первом, втором и третьем направлениях. Действие (58), как и (38),— действие Борна-Инфельда, которое имеет интеграл движения. Отсюда следуют соотношения

$$\frac{\ell}{2} = \int_0^{z_*} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}(z)}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\mathcal{V}^2(z)}{\mathcal{V}^2(z_*)} - 1}}, \qquad \frac{\mathfrak{s}}{2} = \int_\epsilon^{z_*} \frac{M(z)dz}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)}}}, \tag{59}$$

где

$$M(z) = \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^{3/2} \frac{(\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2)^{1/2}}{g^{1/2}}, \ \mathcal{F}(z) = \frac{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 g}{(\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2)}, \ \mathcal{V}(z) = \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3} \tag{60}$$

и z_*, как и в (41), точка поворота.

В разделе 5.4 получены выражения для плотности энтропии зацепленности, которая определяется как $\eta = d\mathfrak{s}(\ell)/d\ell$. Преимущество работы с плотностью энтропии зацепленности заключается в том, что она не имеет расходимостей. Для фиксированной температуры T (т.е. фиксированного z_h) плотность энтропии зацепленности определяется величиной эффективного потенциала $\mathcal{V}$, определенного в (60), $\eta(z_*) = \mathcal{V}(z_*)/4$. Отметим, что зависимость потенциала $\mathcal{V}$ от z_* одинакова для разных ориентаций области зацепленности,

$$\eta(z_*) = \frac{L^3\mathfrak{b}_s^{3/2}(z_*)}{4z_*^3}(\mathfrak{g}_1(z_*)\mathfrak{g}_2(z_*)\mathfrak{g}_3(z_*))^{1/2}, \tag{61}$$

однако, зависимость плотности от угла существует потому, что z_* зависит от ориентации.

В разделах 5.5 и 5.6 представлены численные результаты зависимости голографической энтропии зацепленности и ее плотности от термодинамических (температура, химический потенциал) и геометрических (параметры анизотропии, толщины и ориентации зацепленных областей) параметров для случая тяжелых кварков с одной анизотропией. Оказывается, что голографическая энтропия зацепленности и ее плотность претерпевают скачки на линии фазового перехода первого рода, которые существенным образом зависят от анизотропии и ориентации. В разделе 5.7 обсуждаются полученные результаты.

В **Заключении** сформулированы Положения диссертации, выносимые на защиту, приведенные выше в пункте 5.

Список литературы

[1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, "Введение в теорию квантованных полей." – Наука, 1984.

[2] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, "Введение в квантовую теорию калибровочных полей." – Наука, 1988.

[3] Вайнберг С. "Квантовая теория поля." – Физматлит, 2003.

[4] N. Cabibbo and G. Parisi, "Exponential Hadronic Spectrum and Quark Liberation," Phys. Lett. B **59**, 67-69 (1975)

[5] И.Я. Арефьева, "Голографическое описание кварк-глюонной плазмы, образующейся при столкновениях тяжелых ионов", УФН, **184:6** (2014).

[6] Д. С. Горбунов и В. А. Рубаков, "Введение в теорию ранней Вселенной," 2009.

[7] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, "Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions," Cambridge University Press (2014) [arXiv:1101.0618 [hep-th]].

[8] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [hep-th/9711200].

[9] J. M. Maldacena, "Wilson loops in large N field theories," Phys. Rev. Lett. **80**, 4859-4862 (1998) [arXiv:hep-th/9803002 [hep-th]].

[10] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from noncritical string theory," Phys. Lett. B **428**, 105-114 (1998) [hep-th/9802109].

[11] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math.Phys. **2**, 253-291 (1998) [hep-th/9802150].

[12] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, "The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma," Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001) [arXiv:hep-th/0104066 [hep-th]].

[13] D. T. Son and A. O. Starinets, "Minkowski space correlators in AdS / CFT correspondence: Recipe and applications," JHEP **09**, 042 (2002) [arXiv:hep-th/0205051 [hep-th]].

[14] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, "Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics," Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005) [arXiv:hep-th/0405231 [hep-th]].

[15] U. Gursoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti and F. Nitti, "Holography and Thermodynamics of 5D Dilaton-gravity", JHEP, **0905**, 033 (2009) [arXiv:0812.0792 [hep-th]].

[16] U. Gursoy and E. Kiritsis, "Exploring improved holographic theories for QCD: Part I," JHEP **0802**, 032 (2008) [arXiv:0707.1324 [hep-th]].

[17] U. Gursoy, E. Kiritsis and F. Nitti, "Exploring improved holographic theories for QCD: Part II," JHEP **0802**, 019 (2008) [arXiv:0707.1349 [hep-th]].

[18] Y. Yang and P.-H. Yuan, "Confinement-deconfinement phase transition for heavy quarks in a soft wall holographic QCD model," JHEP **1512**, 161 (2015) [arXiv:1506.05930 [hep-th]].

[19] M.-W. Li, Y. Yang, P.-H. Yuan, "Approaching Confinement Structure for Light Quarks in a Holographic Soft Wall QCD Model", Phys. Rev. **D 96**, 066013 (2017), [arXiv:1703.09184 [hep-th]].

[20] O. Andreev and V. I. Zakharov, "On Heavy-Quark Free Energies, Entropies, Polyakov Loop, and AdS/QCD," JHEP **04**, 100 (2007) [arXiv:hep-ph/0611304 [hep-ph]].

[21] I. Y. Aref'eva and A. A. Golubtsova, "Shock waves in Lifshitz-like spacetimes," JHEP **04**, 011 (2015) [arXiv:1410.4595 [hep-th]].

[22] I. Ya. Aref'eva and K. A. Rannu, "Holographic Anisotropic Background with Confinement-Deconfinement Phase Transition", JHEP **05**, 206 (2018), [arXiv:1802.05652 [hep-th]].

[23] I. Y. Aref'eva, "Theoretical Studies of the Formation and Properties of Quark–Gluon Matter under Conditions of High Baryon Densities Attainable at the NICA Experimental Complex," Phys. Part. Nucl. **52**, no.4, 512-521 (2021)

[24] V. Skokov, A. Y. Illarionov and V. Toneev, "Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions," Int. J. Mod. Phys. A **24**, 5925-5932 (2009) [arXiv:0907.1396 [nucl-th]].

[25] H. Bohra, D. Dudal, A. Hajilou and S. Mahapatra, "Anisotropic string tensions and inversely magnetic catalyzed deconfinement from a dynamical AdS/QCD model", Phys. Lett. B **801**, 135184 (2020) [arXiv:1907.01852 [hep-th]].

[26] S. He, Y. Yang and P. H. Yuan, "Analytic Study of Magnetic Catalysis in Holographic QCD", [arXiv:2004.01965 [hep-th]].

[27] D. Dudal and S. Mahapatra, "Interplay between the holographic QCD phase diagram and entanglement entropy," JHEP **1807**, 120 (2018) [arXiv:1805.02938 [hep-th]].

[28] F. R. Brown, F. P. Butler, H. Chen, N. H. Christ, Z. h. Dong, W. Schaffer, L. I. Unger and A. Vaccarino, "On the existence of a phase transition for QCD with three light quarks," Phys. Rev. Lett. **65**, 2491-2494 (1990)

[29] S. W. Hawking and D. N. Page, "Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space," Commun. Math. Phys. **87**, 577 (1983)

[30] S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT," Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001].

[31] L. D. Landau "On the multiplicity of particles formation in ultra-relativistic particles collisions," Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. V.17, P.54 (1953)
E. Fermi, Progr. Theoret. Phys. 1950. V.5. P. 570.
I.Ya. Pomeranchuk, DAN SSSR. 1951. V.78. P. 884.

[32] I. Aref'eva, "Holographic Entanglement Entropy for Heavy Ions Collisions," Phys.Part.Nucl.Lett. 16 (2019) no.5., 486-492

[33] I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Holographic model for heavy quarks in anisotropic hot dense QGP with external magnetic field," JHEP **07**, 161 (2021) [arXiv:2011.07023 [hep-th]].

[34] I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Holographic anisotropic model for light quarks with confinement-deconfinement phase transition," JHEP **06**, 090 (2021) [arXiv:2009.05562 [hep-th]].

[35] I. Y. Aref'eva, A. Patrushev and P. Slepov, "Holographic entanglement entropy in anisotropic background with confinement-deconfinement phase transition", JHEP **07**, 043 (2020) [arXiv:2003.05847 [hep-th]].

[36] I. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Orientation Dependence of Confinement-Deconfinement Phase Transition in Anisotropic Media," Phys. Lett. B **792**, 470-475 (2019) [arXiv:1808.05596 [hep-th]].

[37] P. S. Slepov, "A Way To Improve the String Tension Dependence on Temperature in Holographic Model," Phys. Part. Nucl. **52**, no.4, 560-563 (2021)

[38] И. Я. Арефьева, К. А. Ранну, П. С. Слепов, "Анизотропное решение в голографической модели для легких кварков во внешнем магнитном поле", ТМФ, 210:3 (2022), 416–421; Theoret. and Math. Phys., 210:3 (2022), 363–367

[39] И. Я. Арефьева, К. А. Ранну, П. С. Слепов, "Анизотропные решения в голографической модели для тяжелых кварков с внешним магнитным полем", ТМФ, 207:1 (2021), 44–57; Theoret. and Math. Phys., 207:1 (2021), 434–446