Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Слепов Павел Сергеевич

Фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент в анизотропных голографических моделях

01.04.02 Теоретическая физика
ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор
Арефьева Ирина Ярославна

Москва — 2022

Оглавление

Введение 4
Глава 1. Полностью анизотропные решения 18
1.1 Случай тяжелых кварков 18
1.2 Решение для модели тяжелых кварков 22
1.3 Случай легких кварков 24
1.4 Решение для модели легких кварков 25
Глава 2. Петли Вильсона в анизотропной голографической модели 28
2.1 Постановка задачи 28
2.2 Фазовая диаграмма 32
2.3 Описание фазовой диаграммы 37
2.4 Обсуждение 40
Глава 3. Голографическая анизотропная модель для легких кварков с фазовым переходом конфайнмент/деконфайнмент 41
3.1 Постановка задачи 41
3.2 Решения для модели легких кварков 41
3.3 Термодинамика модели 48
3.4 Времениподобные петли Вильсона 53
3.5 Обсуждение 59
Глава 4. Голографическая анизотропная модель для тяжелых кварков с фазовым переходом конфайнмент/деконфайнмент 63
4.1 Постановка задачи 63
4.2 Решения для модели тяжелых кварков 63
4.3 Термодинамика модели 71
4.4 Времениподобные и пространственноподобные петли Вильсона 77
4.5 Обсуждение 86
Глава 5. Голографическая энтропия зацепленности для анизотпропной метрики с фазовым переходом конфайнмент/деконфайнмент 89
5.1 Постановка задачи 89

5.2 Анизотропные голографические модели 93
5.3 Голографическая энтропия зацепленности 94
5.4 Плотность энтропии зацепленности 107
5.5 Численные результаты для энтропии зацепленности вблизи фазового перехода первого рода 107
5.6 Численные результаты для плотности энтропии зацепленности вблизи фазового перехода первого рода . . . 116
5.7 Обсуждение 126
Заключение 127
Список литературы 128

Введение

Современное описание физики высоких энергий строится на основе квантовой теории поля [1–3]. Одной из важнейших задач в квантовой хромодинамике (КХД), которая описывает сильные взаимодействия, является изучение нового состояния вещества – кварк-глюонной плазмы (КГП) и ее фазовой диаграммы в плоскости (μ, T) [4, 5]. Предполагается, что данный тип материи преобладал в ранней Вселенной в первые 10 микросекунд после Большого взрыва [6]. В 2005 году КГП была открыта в экспериментах по столкновению тяжелых ионов на RHIC (The Relativistic Heavy Ion Collider, Релятивистский Коллайдер Тяжелых Ионов) [7–10].

Хорошо известно, что пертурбативные методы неприменимы для изучения КГП. Одним из непертурбативных методов изучения КХД является рассмотрение ее на решетке. Несмотря на большой успех в решении различных задач, модель КХД на решетке по-прежнему имеет трудности с изучением теории с ненулевым химическим потенциалом из-за известной проблемы знака [11, 12].

На сегодняшний день альтернативным инструментом для изучения КХД вне рамок теории возмущений, а следовательно, и для изучения КГП является голографический метод [13–15], [4]. Голографический метод в качестве механизма изучения моделей вне рамок теории возмущений был впервые сформулирован Х. Малдасеной в 1997 году [16]. В его работе была показана дуальность между $N = 4$ суперсимметричной теорией Янга-Миллса в пределе т'Хоофта и теорией суперструн (типа IIB) в пространстве $AdS_5 \times S_5$. Дальнейшее развитие голографического подхода [17, 18] стимулировало его широкое применение в различных областях физики, в том числе в описании фазовой структуры КХД, что непосредственно связано с экспериментальными программами на RHIC, LHC (Large Hadron Collider, Большой Адронный Коллайдер) и NICA (Nuclotron-based Ion Collider fAcility, «основанный на нуклотроне ионный коллайдер») по столкновению тяжелых ионов (СТИ).

Особенно стоит отметить успех применения методов AdS/CFT соответствия при изучении транспортных коэффициентов КГП в работах П. Ковтуна, Дж. Поликастро, А.О. Старинца и Д.Т. Сона [19,20]. Было обнаруже-

но, что для широкого класса голографических моделей отношение сдвиговой вязкости к плотности энтропии постоянно и мало, $\eta/s = 1/4\pi$ [19,21,22]. Результаты экспериментов на RHIC и LHC оказались достаточно близки к предсказанным с голографической точки зрения. Таким образом, КГП можно считать почти идеальной жидкостью с чрезвычайно малой вязкостью, а идея о том, что с помощью голографии может быть построена модель для СТИ, получила экспериментальную поддержку и находится в центре внимания специалистов [4, 13–15].

Фазовая диаграмма была экспериментально изучена только для двух частных случаев: малых химических потенциалов μ при больших значениях температуры T (RHIC, LHC) и конечных значений химического потенциала (SPS, т.е. Super Proton Synchrotron, Протонный суперсинхротрон) при малых значениях температуры T. Экспериментальное исследование фазовой диаграммы между данными частными случаями – одна из главных задач ускорительных комплексов FAIR (Facility for Antiproton and Ion Research, Центр по Исследованию Ионов и Антипротонов) и NICA, которые находятся в стадии строительства [5]. Для получения фазовых диаграмм потребуется проанализировать результаты экспериментов по сканированию энергии пучка в СТИ.

Голографическая дуальность обеспечивает эффективный подход к изучению фазовых переходов КХД [4, 13–15] и может рассматриваться как новый тип феноменологии. Это подразумевает, что голографическая КХД должна описывать КХД во всех энергетических масштабах – то есть воспроизводить поведение КХД на малых расстояниях (β-функция) и результаты КХД на решетке на больших расстояниях (конфайнмент и т.д.). В промежуточных энергетических масштабах и экстремальных условиях (высокая плотность или ненулевые значения химического потенциала) голографическая КХД должна предоставлять теоретические результаты, которые согласуются с результатами экспериментальных исследований, или предсказывать новые результаты. Голографическая КХД – это 5-мерная теория. Как правило, 5-мерная метрика представляет собой деформированную версию 5-мерного пространства-времени AdS-Шварцшильда или AdS-Рейсснера-Нордстрема-Шварцшильда. Модель, как правило, включает скалярное (дилатонное) поле. Оказывается, что это поле описывает бегущую константу связи в 4-мерной квантовой теории, а 5-я координата играет роль энергетической шкалы. Отметим, что многие принципиальные вопросы голографии также обсуждаются в рамках AdS_3/CFT_2 [23–28].

Существуют две большие группы голографических моделей: так называемые модели "сверху вниз" ("top down"), связанные со струнными моделями [29, 30], и модели "снизу вверх" ("bottom up"). Последние – это феноменологические модели, которые должны быть найдены методом проб и ошибок, чтобы иметь возможность улавливать свойства КГП, установленные различными методами, и в то же время иметь возможность предсказывать новые. Типичные примеры таких явлений связаны с ненулевым химическим потенциалом и магнитными полями.

Изотропные голографические модели КХД с подходом "снизу вверх" рассматривались в многочисленных работах. Эти модели рассматривались для изучения фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент [31–46], для изучения кирального фазового перехода [41, 43–45, 47], а также для поиска фазового перехода кваркония [48]. Одним из популярных методов построения голографической КХД в рамках подхода "снизу вверх" является метод реконструкции потенциала для моделей с действием Эйнштейна с полями дилатона и Максвелла. Он заключается в том, чтобы начать с заданной формы метрики, которая представляет собой деформированную форму AdS_5 [15], а затем найти потенциал дилатона, который поддерживает заданную форму метрики. Деформация метрики реализуется фактором деформации, который в свою очередь определяет функцию почернения и, следовательно, термодинамику модели. Выбор фактора деформации в метриках сильно влияет на структуру фазовых переходов голографической КХД.

В качестве основного принципа при выборе фактора деформации обычно используется согласие с основными характеристиками результатов на решетке. К сожалению, вычисления на решетке не могут предоставить нам полную картину фазовой диаграммы КХД и показывают только ее отдельные части. Отсутствие общей схемы изучения различных режимов в КХД является основой для разработки голографического подхода к КХД. Оказалось, что фазовая диаграмма, описывающая тяжелые кварки, может быть получена путем деформации AdS_5 с помощью фактора деформации, который является полиномом. Для простейшего квадратичного многочлена [40, 49] модель воспроизводит некоторые особенности фазовой диаграммы, описывающей тяжелые кварки, в то время как для воспроизведения фазовой диаграммы легких кварков необходимо использовать логарифмическую функцию [32, 42].

В контексте СТИ отметим, что существует очевидная неэквивалент-

ность продольного и поперечного направлений, т. е. анизотропия в веществе, полученном в СТИ. Считается, что КГП, сформированная в СТИ, изначально находится в анизотропном состоянии и изотропизация происходит примерно на $0.5 \div 2$ Фм/с $\sim 10^{-24}$ с после столкновения [50]. Поэтому кажется естественным предположить, что в экспериментах по сканированию пучка будет изучаться фазовый переход в анизотропной КХД (с параметром анизотропии, который зависит от времени). Как уже отмечалось выше, использовать КХД на анизотропной решетке [51–54] для изучения фазовой диаграммы в плоскости (μ, T) пока оказывается невозможным из-за проблемы знака.

В связи с тем, что сразу после СТИ КГП представляет собой анизотропное вещество [50], важной задачей является учет этой анизотропии в голографической теории [55]. Для голографического описания анизотропной КХД следует включить в рассмотрение дополнительное поле Максвелла, поддерживающее анизотропию в метрике [56–59]. В этих моделях вводится параметр ν, который при значении около $\nu = 4.5$ воспроизводит экспериментальные результаты для зависимости энергии от общей множественности частиц, рожденных при столкновении тяжелых ионов (результаты ATLAS и ALICE [60,61]; ATLAS – это сокращение от "A Toroidal LHC ApparatuS", "Тороидальный аппарат на БАК"; ALICE – это сокращение от "A Large Ion Collider Experiment", "Эксперимент на Большом ионном коллайдере"). Стоит отметить, что изотропные голографические модели не смогли воспроизвести экспериментальную зависимость множественности от энергии ([56] и ссылки в ней), поэтому для ее воспроизведения были рассмотрены анизотропные модели с параметром ν.

Также установлено, что в результате нецентральных СТИ в физическом 4-мерном пространстве-времени возникает сильное магнитное поле [62–65]. Это внешнее магнитное поле приводит к анизотропии другого типа и явлению прямого/обратного магнитного катализа. Этот вид анизотропии следует учесть в рамках голографического подхода [46, 47, 66–72]. Сильные магнитные поля присутствуют в нейтронных звездах и магнетарах [73], а также в ранней космологии [74]. Эта анизотропия для улучшенной голографической КХД с действием Максвелла была рассмотрена в [46, 66, 71, 72] и для моделей с бранами в пределе Венециано в [67, 69, 70]. В контексте СТИ также интерес представляет описание вращающейся КГП [75] и эффектов, связанных с ее завихренностью [76, 77].

Таким образом, есть несколько причин для рассмотрения анизотроп-

ных моделей: воспроизвести экспериментальные данные для зависимости энергии от общей множественности [56], описать явление магнитного катализа [70, 71] и учесть анизотропную геометрию в СТИ.

Чтобы иметь дело с анизотропной голографической КХД, рассматривается действие Эйнштейна с полем дилатона и полями Максвелла для поддержки анизотропии в метриках. Такая анизотропная модель была рассмотрена для восстановления картины фазового перехода, характерного для тяжелых кварков в [57]. Отметим, что на самом деле массы кварков в этой модели не вычисляются и не включаются в действие и уравнения движения. Модель демонстрирует свойства тяжелых или легких кварков при фазовом переходе конфайнмент/деконфайнмент эффективно.

Различные изотропные голографические модели КХД различаются выбором фактора деформации [38, 40, 42, 78–85]. Модели с различными факторами деформации описывают различные феноменологические модели. В изотропном случае существуют специальные факторы деформации, которые описывают КХД для легких или тяжелых кварков [40, 42]. В этих работах вид фактора деформации выбирается таким образом, чтобы воспроизвести характерную для легких и тяжелых кварков фазовую структуру, подтвержденную вычислениями на решетке (т.н. "Columbia plots" [86–88]).

Голографические модели, поддерживаемые действием Эйнштейна с полями дилатона и Максвелла, характеризуются Ван-дер-Ваальсовым типом зависимости температуры T от размера горизонта z_h. При определенных значениях параметров голографической модели функция $z_h(T)$ становится многозначной, то есть одному и тому же значению температуры соответствует несколько значений z_h (Рис.1). В таком случае с помощью изучения поведения свободной энергии определяются стабильные и нестабильные термодинамические фазы, а также фазовые переходы между ними. Как правило, в таких моделях значительную роль играет фазовый переход первого рода, известный при нулевом значении химического потенциала как фазовый переход Хокинга-Пейджа [89].

Качественный вид фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент в (μ, T)-плоскости для различных масс кварков в изотропных средах представлен на Рис.2. Предполагается, что фазовая структура для легких кварков имеет область кроссовера при малых химических потенциалах и фазовый переход первого рода при больших химических потенциалах (Рис.2.A). Фазовая структура для тяжелых кварков, напротив, при малых химических

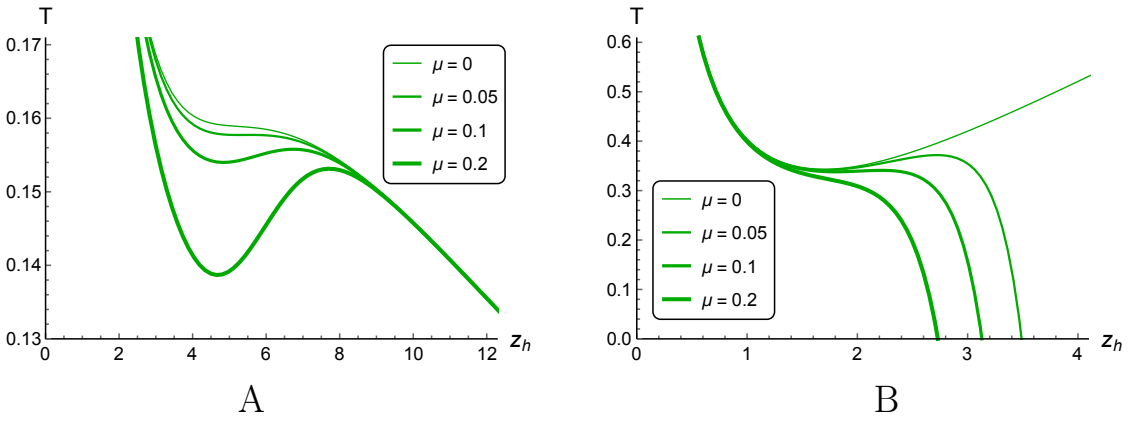


Рис. 1: Температура как функция горизонта для различных химических потенциалов μ в изотропной модели для легких (A) и тяжелых (B) кварков [40, 42].

потенциалах имеет фазовый переход первого рода и кроссовер при больших химических потенциалах (Рис.2.B). Различие в поведении голографических моделей для тяжелых и легких кварков обусловлено различием в зависимостях температуры от размера горизонта в этих моделях (Рис.1). Здесь и далее химический потенциал и температура указаны в единицах ГэВ и z_h в ГэВ$^{-1}$.

Стоит также уточнить дальнейшую терминологию. На протяжении всего текста диссертации будет происходить обсуждение фазового перехода первого рода. Словосочетания фазовый переход типа Хокинга-Пейджа, фазовый переход большая/маленькая черная дыра, а также сокращение BH-BH (от "Small Black Hole/ Large Black Hole") будут использоваться как синонимичные выражения.

Голографические вычисления для моделей тяжелых и легких кварков существенно различаются, поскольку решения для модели тяжелых кварков могут быть выражены явно, в отличие от модели легких кварков, где решение представлено в квадратурах. Поэтому построение полностью анизотропной модели легких кварков является более сложной задачей.

Оказывается, что конкретный вид диаграммы (μ, T), описывающей фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент в анизотропных средах зависит от ориентации пары кварков относительно оси анизотропии. Ось анизотропии в КГП определяется осью СТИ. В работе [57] изучались случаи продольной и поперечной ориентации петель Вильсона и было показано, что они соответствуют двум разным кривым на фазовой диаграмме (μ, T). Очевидно, что в реальном эксперименте, особенно для больших химических

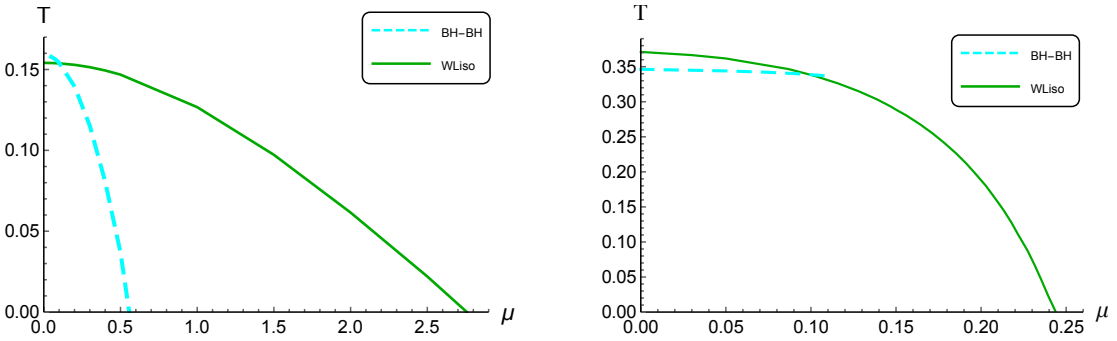


Рис. 2: Голографические фазовые диаграммы КХД для легких (A) и тяжелых (B) кварков в изотропном случае [40, 42]. Здесь фазовые переходы первого рода типа Хокинга-Пейджа (BH-BH) обозначены пунктирными линиями. Фазовые переходы для петли Вильсона (WLiso) обозначены сплошными линиями.

потенциалов, ориентация пары кварков должна быть случайной, вызывая размытие линии фазового перехода. В этой связи представляет интерес изучение картины фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент для произвольной ориентации пары кварков.

Экспериментальный поиск фазового перехода в КХД в основном связан с измерением флуктуаций множественности частиц [90–93], которые, как ожидается, будут проявлять немонотонное поведение вблизи фазового перехода. Считается, что для правильного понимания экспериментальных результатов требуется тщательный анализ динамических процессов, которые будут оказывать влияние вблизи линии фазового перехода, особенно – критической конечной точки. Отметим, что имеются указания на то, что местоположение данной точки на фазовой диаграмме определяется исключительно нарушением киральной симметрии (см., например, [94, 95]).

Существует несколько теоретических подходов к поиску фазовых переходов КХД. Однако, как уже было отмечено, подход, связанный с вычислениями на решетке, сталкивается с трудностями при ненулевом химическом потенциале. Голографическая дуальность же обеспечивает альтернативный подход к изучению фазовых переходов КХД. При таком подходе возникает естественная возможность изучения фазовых переходов и энтропии в рамках одной и той же голографической модели. Важную роль при этом играет энтропия квантовой зацепленности – величина, поведение которой описывает термализацию.

Энтропия квантовой зацепленности с голографической точки зрения имеет метод вычисления, подобный вычислению петель Вильсона. В 2006 году С. Рю и Т. Такаянаги [96, 97] предложили формулу, в которой задача вычисления энтропии зацепленности некоторой области в квантовой теории связывалась с нахождением минимальной гиперповерхности в дуальной метрике.

Начиная с термодинамического подхода Л.Д. Ландау к столкновениям в физике высоких энергий, множественность частиц связывается с энтропией системы [98]. В работе [99] высказана гипотеза о связи флуктуации энтропии квантовой зацепленности с флуктуациями множественности образования частиц в СТИ. Таким образом, изучение поведения энтропии зацепленности является важным в контексте изучения КГП, а сама энтропия зацепленности может выступать пробником для фазовых переходов.

Цели и задачи диссертации

В диссертации ставились следующие цели и задачи:

1) Построение анизотропных решений для голографических моделей описываемых действием Эйнштейна с полем дилатона и тремя полями Максвелла, которые имеют диагональный вид метрики с двумя функциями анизотропии и факторами деформации, характерными для легких и тяжелых кварков.

2) Изучение влияния поведения петель Вильсона на картину фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент в случае модели с одной функцией анизотропии и фактором деформации для тяжелых кварков. Исследование полученной структуры фазовых переходов в зависимости от угла между парой кварков и осью столкновения тяжелых ионов.

3) Изучение структуры фазовых переходов в голографической модели с фактором деформации для легких кварков с одной функцией анизотропии. Изучение термодинамики и определение местоположения на фазовой диаграмме фазового перехода первого рода. Исследование поведения петель Вильсона и натяжения струны в зависимости от анизотропии в этой модели.

4) Изучение структуры фазовых переходов в голографической модели с

фактором деформации для тяжелых кварков с двумя функциями анизотропии. Изучение термодинамики и определение местоположения на фазовой диаграмме фазового перехода первого рода. Исследование поведения петель Вильсона и натяжения струны в зависимости от анизотропии в этой модели.

5) Вычисление голографической энтропии зацепленности в полностью и частично анизотропных случаях. Изучение влияния фазовых переходов на поведение энтропии зацепленности на примере модели с одной функцией анизотропии и фактором деформации для тяжелых кварков.

Методы исследования

Используемые методы исследования базируются на дуальности гравитация/ калибровочная теория. При вычислении энтропии квантовой зацепленности используется предписание Рю-Такаянаги.

Основные результаты и их новизна

Все выдвигаемые на защиту результаты являются новыми, получены автором лично или при его непосредственном участии.

Теоретическая и практическая значимость результатов

Результаты, полученные в рамках данной диссертации, имеют теоретическое значение. Тем не менее, также они дают качественные и количественные предсказания для экспериментально наблюдаемых величин, а потому могут быть использованы для феноменологического описания КГП или для построения более скорректированной модели на их основе. Таким образом, результаты представляют интерес в контексте будущих экспериментов по столкновению тяжелых ионов на установках FAIR, NICA, для программ RHIC BES II и CERN III.

Публикации

Представленные в диссертации результаты опубликованы в 7 статьях [100–106] в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus:

1) I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Holographic model for heavy quarks in anisotropic hot dense QGP with external magnetic field," JHEP **07**, 161 (2021) [arXiv:2011.07023 [hep-th]].

2) I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Holographic anisotropic model for light quarks with confinement-deconfinement phase transition," JHEP **06**, 090 (2021) [arXiv:2009.05562 [hep-th]].

3) I. Y. Aref'eva, A. Patrushev and P. Slepov, "Holographic entanglement entropy in anisotropic background with confinement-deconfinement phase transition," JHEP **07**, 043 (2020) [arXiv:2003.05847 [hep-th]].

4) I. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Orientation Dependence of Confinement-Deconfinement Phase Transition in Anisotropic Media," Phys. Lett. B **792**, 470-475 (2019) [arXiv:1808.05596 [hep-th]].

5) И. Я. Арефьева, К. А. Ранну, П. С. Слепов, "Анизотропные решения в голографической модели для тяжелых кварков с внешним магнитным полем", ТМФ, 207:1 (2021), 44–57; Theoret. and Math. Phys., 207:1 (2021), 434–446

6) И. Я. Арефьева, К. А. Ранну, П. С. Слепов, "Анизотропное решение в голографической модели для легких кварков во внешнем магнитном поле", ТМФ, 210:3 (2022), 416–421; Theoret. and Math. Phys., 210:3 (2022), 363–367

7) P. S. Slepov, "A Way To Improve the String Tension Dependence on Temperature in Holographic Model," Phys. Part. Nucl. **52**, no.4, 560-563 (2021)

Апробация результатов

Представленные результаты докладывались автором на семинарах отделов теоретической и математической физики Математического института им. Стеклова РАН, отдела квантовой теории поля Физического института им. Лебедева РАН, а также неоднократно были представлены автором на различных международных конференциях:

- XXV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов», (Сборник тезисов докладов, стр.187-188), Москва, Россия, 2018

- XX Международном семинаре по физике высоких энергий «QUARKS», Валдай, Россия, 2018

- XXVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов», (Сборник тезисов докладов, стр.728-730), Москва, Россия, 2019

- «XXIV International Workshop High Energy Physics and Quantum Field Theory», Сочи, Россия, 2019
- «RFBR grants for NICA», Дубна, Россия, 2020
- «Frontiers of Holographic Duality-2», Москва, Россия, 2020
- Рабочем совещании «Problems of Duality and Holography», Москва, Россия, 2020
- «Frontiers of Holographic Duality-3», Москва, Россия, 2021

Доклады на некоторых из них опубликованы в трудах конференций:

1) P. Slepov, "Holographic study of Wilson loop in the anisotropic background with confinement/deconfinement phase transition," EPJ Web Conf. **191**, 05011 (2018)

2) P. Slepov, "Entanglement entropy in strongly correlated systems with confinement/deconfinement phase transition and anisotropy," EPJ Web Conf. **222**, 03024 (2019)

Содержание диссертации по главам

Текст диссертации организован следующим образом. Диссертация состоит из 5 глав.

В Главе 1 строятся новые полностью анизотропные решения уравнений Эйнштейна для различных случаев фактора деформации. Находятся решения типа черных дыр в пятимерной полностью анизотропной голографической модели для легких и тяжелых кварков. Модель поддерживается действием Эйнштейна с полем дилатона и полями Максвелла. Первое поле Максвелла связано с введением химического потенциала. Второе и третье соответственно поддерживают разные типы анизотропии: связанную с пространственной анизотропией в столкновениях тяжелых ионов и воспроизводящей зависимость множественности рожденных частиц от энергии, и анизотропию, связанную с внешним магнитным полем. В разделе 1.1 обсуждается случай тяжелых кварков и получаются уравнения движения. В разделе 1.2 строится полностью анизотропное решение для тяжелых кварков. В разделе 1.3 обсуждается случай легких кварков, и в разделе 1.4 строится полностью анизотропное решение для легких кварков.

В Главе 2 изучается влияние времениподобных петель Вильсона на структуру фазовых переходов в плоскости (μ, T). Рассматривается частично анизотропная голографическая модель с одной нетривиальной функцией анизотропии и фактором деформации для тяжелых кварков. Формулируется условие фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент для петель Вильсона. Вычисляются ориентированные под углом времениподобные петели Вильсона. Описывается полученная фазовая диаграмма конфайнмент/деконфайнмент. В разделе 2.1. обсуждается постановка задачи. В разделах 2.2 и 2.3 описывается полученная фазовая диаграмма. В разделе 2.4 обсуждаются результаты главы.

В Главе 3 подробно рассматривается анизотропная голографическая модель для легких кварков с частичной анизотропией. Изучается поведение функций решения в зависимости от параметров голографической модели. Изучается термодинамика и фазовый переход первого рода в полученной модели, а также поведение петель Вильсона. Сравнивая местоположение фазового перехода для петель Вильсона с положениями фазового перехода первого рода получается фазовая структура в плоскости (μ, T). Также изучается поведение корнельского потенциала в этой анизотропной модели. Исследуется асимптотика корнельского потенциала на больших расстояниях. Также изучается нетривиальная зависимость корнельского потенциала от граничных условий поля дилатона и других параметров модели. В разделе 3.1 обсуждается постановка задачи. В разделе 3.2 изучаются полученные решения. В разделе 3.3 описывается термодинамика модели. В разделе 3.4. обсуждаются времениподобные петли Вильсона и полученная фазовая диаграмма. В разделе 3.5 обсуждаются результаты главы.

В Главе 4 подробно рассматривается голографичекая анизотропная модель для тяжелых кварков с двумя нетривиальными функциями анизотропии. Данную модель можно назвать полностью анизотропной, поскольку с помощью замены переменной метрику можно привести к диагональному виду с тремя функциями анизотропии. Изучается поведение функций решения в зависимости от параметров голографической модели. Изучается термодинамика и фазовый переход первого рода в полученной модели, а также поведение петель Вильсона. Рассматриваются общие формулы для определения положения динамической стенки для времениподобных и пространственноподобных петель Вильсона. В результате сравнения местоположения фазового перехода для времениподобных петель Вильсона с положениями фазового перехода первого рода, получается фазовая структура в плоскости (μ, T). Исследуется влияние магнитного поля на фазовую

диаграмму конфайнмент/деконфайнмент и явление магнитного катализа. В разделе 4.1 обсуждается постановка задачи. В разделе 4.2 изучаются полученные решения. В разделе 4.3 описывается термодинамика модели. В разделе 4.4 обсуждаются времениподобные и пространственноподобные петли Вильсона и полученная фазовая диаграмма. В разделе 4.5 обсуждаются результаты главы.

В Главе 5 рассматривается общая пятимерная полностью анизотропная голографическая модель с тремя различными анизотропными функциями. Вычисляется энтропия голографической зацепленности области в форме параллелепипеда, ориентация которого относительно линии столкновения тяжелых ионов и прицельного параметра характеризуется углами Эйлера. Изучается зависимость голографической энтропии зацепленности и ее плотности от термодинамических (температура, химический потенциал) и геометрических (параметры анизотропии, толщины и ориентации запутанных областей) параметров, производится анализ полученных выражений и их перенормировка. В качестве частного случая для численных вычислений рассматривается модель с одной нетривиальной функцией анизотропии и фактором деформации для тяжелых кварков. Исследуется поведение энтропии зацепленности и ее плотности вблизи фазового перехода. В разделе 5.1. обсуждается постановка задачи. В разделе 5.2 рассматриваются полностью анизотропные модели. В разделе 5.3 вычисляется голографическая энтропия зацепленности. В разделе 5.4 вычисляется плотность энтропии зацепленности. В разделах 5.5 и 5.6 представлены численные результаты для голографической энтропии зацепленности и ее плотности вблизи фазового перехода первого рода. В разделе 5.7 обсуждаются результаты главы.

В заключении формулируются основные результаты диссертации и приводится список литературы.

Благодарности

Прежде всего хотелось бы выразить глубокую благодарность научному руководителю, ведущему научному сотруднику МИАН им. Стеклова, член-корреспонденту РАН, доктору физ.-мат. наук, профессору Арефьевой Ирине Ярославне за постановку научных задач и их плодотворное обсуждение, знакомство с методами современной теоретической физики, соавторам Кристине Аллановне Ранну и Александру Владимировичу Патрушеву за успешное сотрудничество. Также автор хотел бы поблагодарить отдел теоретической физики за возможность проведения подобного исследования.

Диссертация отражает результаты, полученные в рамках проектов по грантам «Базис» №18-1-1-80-4 и №21-1-5-127-1, РФФИ №18-02-40069 мега и РНФ №20-12-00200, а также в МЦМУ МИАН при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение №075-15-2019-1614).

Глава 1. Полностью анизотропные решения

1.1 Случай тяжелых кварков

Как уже отмечалось во Введении, модели для изотропной голографической КХД с действием Эйнштейна с полем дилатона и тензором Максвелла были рассмотрены во многих работах [31, 32, 35–46].

Здесь представлено построение решения для полностью анизотропной голографической модели для тяжелых кварков. Эта модель описывает анизотропию двух видов: связанную с зависимостью множественности от энергии (и обеспечиваемую вторым полем Максвелла в действии) и связанную с магнитным полем (и обеспечиваемую третьим полем Максвелла в действии). Первое поле Максвелла введено для описания химического потенциала. Мы начинаем рассмотрение с деформированной анизотропной метрики, а затем получаем потенциал дилатона и ряд функций взаимодействия из уравнений Эйнштейна с полем дилатона и тензорами Максвелла. Вид деформации метрики выбирается таким образом, чтобы воспроизвести фазовую структуру, характерную для тяжелых кварков и подтверждаемую вычислениями на решетке. Рассмотрим действие:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\,\sqrt{-g}\Big[R-\frac{f_1(\phi)}{4}\,F^{(1)2}-\frac{f_2(\phi)}{4}\,F^{(2)2} \\ &- \frac{f_B(\phi)}{4}\,F^{(B)2}-\frac{1}{2}\,\partial_M\phi\partial^M\phi-V(\phi)\Big], \end{aligned} \tag{1.1}$$

где ϕ — скалярное поле дилатона с потенциалом $V(\phi)$, $F^{(a)}_{MN}=\partial_M A^{(a)}_N-\partial_N A^{(a)}_M$ — тензор напряженности полей Максвелла $A^{(a)}_N$, $f_a(\phi)$ — функции взаимодействия, связанные с полями Максвелла, $a=1,2,B$, $-g$ и G_5 — детерминант пятимерной метрики и пятимерная гравитационная постоянная, соответственно.

Действие (1.1) представляет собой обобщение действия обычно используемого для изотропных голографических моделей [31, 33, 34, 40, 42], когда остается только поле дилатона и поле Максвелла $A^{(1)}_M$, связаное с введением химического потенциала, а также расширенную версию действия включающего поле $A^{(2)}_M$, используемого в [57]. С его помощью учитывают пространственную анизотропию между продольным и поперечными направлениями в столкновениях тяжелых ионов, что как показано в [56], в рамках голографической модели позволяет воспроизвести зависимость множественности рожденных частиц от энергии. Действие (1.1) по сравнению с ранее рассмотренными случаями содержит третье поле Максвелла $A^{(B)}_M$, которое поз-

воляет учитывать магнитное поле, возникающее при нецентральных столкновениях тяжелых ионов.

Уравнения движения для полей материи и гравитационные уравнения, соответственно, имеют вид

$$D_M D^M \phi + V'(\phi) + \sum_{a=1,2,B} \frac{f_a'(\phi)}{4}\, F^{(a)\,2} = 0, \tag{1.2}$$

$$\partial_M(\sqrt{-g}\, f_a\, F^{(a)\,MN}) = 0, \quad \text{нет суммирования по } a, \quad a = 1, 2, B \tag{1.3}$$

$$R_{MN} - \frac{1}{2}\, g_{MN} R = T^{(\phi)}_{MN} + \sum_{a=1,2,B} T^{(a)}_{MN}, \tag{1.4}$$

где

$$T^{(\phi)}_{MN} = \frac{1}{2}(\partial_M\phi\partial_N\phi - \frac{1}{2} g_{MN}\partial_K\phi\partial^K\phi) - \frac{1}{2} g_{MN} V(\phi), \tag{1.5}$$

$$T^{(a)}_{MN} = \frac{1}{2} f_a \left(F^{(a)}_{ML} F^{(a)\,L}_N - \frac{1}{4}\, g_{MN} F^{(a)\,2} \right). \tag{1.6}$$

Специальные решения уравнений (1.2)-(1.4), которые представляют интерес для голографического описания КХД, строятся в рамках анзаца

$$ds^2 = \frac{L^2 \mathfrak{b}(z)}{z^2}\big[- g(z) dt^2 + dx^2 + \left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{2}{\nu}} dy_1^2 + e^{c_B z^2} \left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{2}{\nu}} dy_2^2 + \frac{dz^2}{g(z)}\big], \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{b}(z) = e^{2\mathcal{A}(z)}, \tag{1.8}$$

$$\phi = \phi(z), \tag{1.9}$$

$$A^{(1)}_M = A_t(z)\delta^0_M, \quad F^{(2)}_{y_1 y_2} = q, \quad F^{(B)}_{x y_1} = q_B \tag{1.10}$$

где L — размерный множитель, в случае недеформированной метрики Пуанкаре соответствующий радиусу AdS_5; $\mathfrak{b}(z)$ — фактор деформации, функция $\mathcal{A}(z)$ связана с $\mathfrak{b}(z)$ выражением (1.8); $g(z)$ — так называемая функция почернения, ν — параметр анизотропии, обусловленной продольно/поперечной несимметричностью СТИ; c_B — коэффициент анизотропии, связанной с внешним магнитным полем, возникающим при нецентральных СТИ. Поля ϕ и $A^{(1)}_M$ зависят только от координаты z; q и q_B — постоянные.

Различный выбор $\mathcal{A}(z)$ соответствует моделям для тяжелых или легких кварков и, в соответствии с предыдущими работам [40, 42, 57], в которых

изучались изотропные модели, мы рассматриваем

$$\mathcal{A}_{HQ}(z) = -\,cz^2/4, \qquad \mathcal{A}_{LQ}(z) = -\,a\,\ln(bz^2+1) \tag{1.11}$$

и опираясь на [40, 42, 57], функцию f_1 выбираем в виде

$$f_{1\,HQ}(z) = z^{-2+\frac{2}{\nu}}, \qquad f_{1\,LQ}(z) = e^{-cz^2-\mathcal{A}(z)}\ z^{-2+\frac{2}{\nu}}. \tag{1.12}$$

Здесь индекс HQ обозначает тяжелые кварки, а индекс LQ — легкие кварки, $\mathcal{A}$ задается (1.11), a, b, c – параметры модели.

Чтобы поле $F^{(B)}_{MN}$ было отлично от $F^{(2)}_{MN}$, имеется два варианта: $F^{(B)}_{xy_1} = q_B$ и $F^{(B)}_{xy_2} = q_B$, мы будем рассматривать случай $F^{(B)}_{xy_1} = q_B$.

Уравнения движения (1.2)-(1.4) для (1.7)-(1.10) имеют вид

$$\phi'' + \phi'\left(\frac{g'}{g} + \frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{\nu+2}{\nu z} + c_B z\right) + \left(\frac{z}{L}\right)^2 \frac{\partial f_1}{\partial\phi}\,\frac{(A_t')^2}{2\mathfrak{b}g}$$
$$- \left(\frac{L}{z}\right)^{2-\frac{4}{\nu}} \frac{\partial f_2}{\partial\phi}\,\frac{q^2\,e^{-c_B z^2}}{2\mathfrak{b}g} - \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{2}{\nu}} \frac{\partial f_B}{\partial\phi}\,\frac{q_B^2}{2\mathfrak{b}g} - \left(\frac{L}{z}\right)^2 \frac{\mathfrak{b}}{g}\,\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0, \tag{1.13}$$

$$A_t'' + A_t'\left(\frac{\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} + \frac{f_1'}{f_1} + \frac{\nu-2}{\nu z} + c_B z\right) = 0, \tag{1.14}$$

$$g'' + g'\left(\frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{\nu+2}{\nu z} + c_B z\right) - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \frac{f_1 (A_t')^2}{\mathfrak{b}} - \left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{2}{\nu}} \frac{q_B^2\ f_B}{\mathfrak{b}} = 0, \tag{1.15}$$

$$\mathfrak{b}'' - \frac{3(\mathfrak{b}')^2}{2\mathfrak{b}} + \frac{2\mathfrak{b}'}{z} - \frac{4\mathfrak{b}}{3\nu z^2}\left(1 - \frac{1}{\nu} + \left(1 - \frac{3\nu}{2}\right) c_B z^2 - \frac{\nu c_B^2 z^4}{2}\right) + \frac{\mathfrak{b}\,(\phi')^2}{3} = 0, \tag{1.16}$$

$$2g'\ \frac{\nu-1}{\nu} + 3g\ \frac{\nu-1}{\nu}\left(\frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}} - \frac{4\,(\nu+1)}{3\nu z} + \frac{2c_B z}{3}\right) + \left(\frac{L}{z}\right)^{1-\frac{4}{\nu}} \frac{L\,q^2\,e^{-c_B z^2} f_2}{\mathfrak{b}} = 0, \tag{1.17}$$

$$2g'\left(1 - \frac{1}{\nu} + c_B z^2\right) + 3g\left[\left(1 - \frac{1}{\nu} + c_B z^2\right)\left(\frac{\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}} - \frac{4}{3\nu z} + \frac{2c_B z}{3}\right) - \frac{4\,(\nu-1)}{3\nu z}\right]$$
$$+ \left(\frac{L}{z}\right)^{1-\frac{4}{\nu}} \frac{L\,q^2\,e^{-c_B z^2}\,f_2}{\mathfrak{b}} - \left(\frac{z}{L}\right)^{1+\frac{2}{\nu}} \frac{L\,q_B^2 f_B}{\mathfrak{b}} = 0, \tag{1.18}$$

$$\frac{\mathfrak{b}''}{\mathfrak{b}} + \frac{(\mathfrak{b}')^2}{2\mathfrak{b}^2} + \frac{3\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}}\left(\frac{g'}{2g} - \frac{\nu+1}{\nu z} + \frac{2c_B z}{3}\right) - \frac{g'}{3zg}\left(5 + \frac{4}{\nu} - 3c_B z^2\right)$$
$$+ \frac{8}{3z^2}\left(1 + \frac{3}{2\nu} + \frac{1}{2\nu^2}\right) - \frac{4c_B}{3}\left(1 + \frac{3}{2\nu} - \frac{c_B z^2}{2}\right) + \frac{g''}{3g} + \frac{2}{3}\left(\frac{L}{z}\right)^2 \frac{\mathfrak{b}V}{g} = 0, \tag{1.19}$$

где $' = \partial/\partial z$.

При решении уравнений (1.14), (1.15) и (1.16) использовались следующие граничные условия:

$$A_t(0) = \mu, \quad A_t(z_h) = 0, \tag{1.20}$$

$$g(0) = 1, \quad g(z_h) = 0, \tag{1.21}$$

$$\phi(z_0) = 0. \tag{1.22}$$

где $z_h > 0$ — параметр, определяющий положение горизонта, z_0 — точка из промежутка $0 \leq z_0 \leq z_h$. Граничное условие $z_0 = 0$ соответствует [42], а $z_0 = z_h$ было использовано в [57]. Оказывается, что вид граничного условия $z_0 = z_0(z_h)$ определяет поведение натяжения струны в зависимости от температуры. Подробнее этот вопрос обсуждается в Главе 3.

Рассматривая изотропный случай, т. е. положив в уравнениях (1.13)–(1.19) $\nu = 1$ и $f_2 = f_B = c_B = 0$, и нормировав радиус AdS, $L = 1$, получим выражения, полностью совпадающие с уравнениями движения (2.12)–(2.16) в [42].

Отметим, что на анзанце (1.7)-(1.10) вместо уравнений в частных производных (1.2)-(1.4) мы получаем систему уравнений (1.13)–(1.19). Уравнение (1.13) является следствием остальных соотношений (1.14)-(1.19), что проверяется непостредственно. Далее вычитая (1.18) из (1.17), мы получаем выражение для функции взаимодействия f_B

$$f_B = 2\left(\frac{L}{z}\right)^{\frac{2}{\nu}} \mathfrak{b} g \, \frac{c_B z}{q_B^2}\left(\frac{g'}{g} + \frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{2}{\nu z} + c_B z\right) \tag{1.23}$$

и уравнение (1.15) примет вид

$$g'' + g'\left(\frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{\nu+2}{\nu z} - c_B z\right) - 2g\left(\frac{3\mathfrak{b}'}{2\mathfrak{b}} - \frac{2}{\nu z} + c_B z\right) c_B z - \left(\frac{z}{L}\right)^2 \frac{f_1 (A_t')^2}{\mathfrak{b}} = 0. \tag{1.24}$$

Функция взаимодействия f_B для случая тяжелых кварков приобретает вид

$$f_B = -\,2\left(\frac{z}{L}\right)^{-\frac{2}{\nu}} e^{-\frac{1}{2}cz^2} \, \frac{c_B z}{q_B^2} \, g\left(\frac{3cz}{2} + \frac{2}{\nu z} - c_B z - \frac{g'}{g}\right), \tag{1.25}$$

а f_2 определяется из (1.17)

$$f_2 = 4\left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{4}{\nu}} e^{-\frac{1}{2}(c-2c_B)z^2} \, \frac{\nu-1}{q^2 \nu z} \, g\left(\frac{\nu+1}{\nu z} + \frac{3c-2c_B}{4}\, z - \frac{g'}{2g}\right). \tag{1.26}$$

Зависимость дилатонного поля от переменной z определяется из (1.16). Вид потенциала как функции от z определяется из (1.19).

Вид зависимостей потенциала и функций взаимодействия как функций от ϕ определяется из $V(\phi) = V(z(\phi))$, $f_a(\phi) = f_a(z(\phi))$, где при конкретных рассматриваемых во 2 — 5 Главах параметрах, $\phi(z)$ — обратимая функция (см. Рис. 14 в Главе 3, Рис. 32 в Главе 4). Вид полученных потенциала V и функций взаимодействия f_2, f_B зависит от поля ϕ, а также от параметров деформированной метрики (ν, c, c_B, и т.д.) и вида f_1. В последующих главах

будет явно продемонстрировано, что вид потенциала и функций взаимодействия f_2, f_B как функций от ϕ, будет зависеть от параметров метрики, характеризующих её деформацию (см. Рис. 15, Рис. 16 в Главе 3 и Рис. 32 A-D, Рис. 33 в Главе 4), а также от положения горизонта (см. Рис. 32 E-H в Главе 4).

1.2 Решение для модели тяжелых кварков

Таким образом, чтобы получить голографическое описание поведения тяжелых кварков, выберем $\mathfrak{b} = e^{-\frac{cz^2}{2}}$ и $f_1 = z^{-2+\frac{2}{\nu}}$ и система (1.13)—(1.19) имеет следующее решение:

$$A_t = \mu\, \frac{e^{\frac{1}{4}(c-2c_B)z^2} - e^{\frac{1}{4}(c-2c_B)z_h^2}}{1 - e^{\frac{1}{4}(c-2c_B)z_h^2}}, \tag{1.27}$$

$$g = e^{c_B z^2}\left\{1 - \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}(2c_B-c)z^2\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}(2c_B-c)z_h^2\right)}\right. \tag{1.28}$$

$$- \frac{\mu^2\,(2c_B-c)^{-\frac{1}{\nu}}}{4L^2\left(1-e^{(c-2c_B)\frac{z_h^2}{4}}\right)^2}\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}\,(2c_B-c)\,z^2\right)\right)$$

$$\left.\times\left[1 - \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}\,(2c_B-c)z^2\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;\frac{3}{4}\,(2c_B-c)z_h^2\right)}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;(2c_B-c)z_h^2\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;0\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\nu}\,;(2c_B-c)z^2\right)}\right]\right\},$$

$$f_B = -\,2\left(\frac{z}{L}\right)^{-\frac{2}{\nu}} e^{-\frac{1}{2}cz^2}\,\frac{c_B z}{q_B^2}\,g\left(\frac{3cz}{2} + \frac{2}{\nu z} - c_B z - \frac{g'}{g}\right), \tag{1.29}$$

$$f_2 = 4\left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{4}{\nu}} e^{-\frac{1}{2}(c-2c_B)z^2}\,\frac{\nu-1}{q^2\nu z}\,g\left(\frac{\nu+1}{\nu z} + \frac{3c-2c_B}{4}\,z - \frac{g'}{2g}\right), \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
\phi = \frac{\sqrt{2}}{4\nu}\Big\{ & 2\sqrt{2}\,\sqrt{\nu-1}\left[\log\left(\frac{z^2}{z_0^2}\right) - \log\Big(8(\nu-1) + 4\nu c_B z^2 + 3(3c-2c_B)\nu^2 z^2\right. \\
& \left. + 2\sqrt{2}\,\sqrt{\nu-1}\sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z^4}\Big)\right. \\
& \left. + \log\Big(8(\nu-1) + 4\nu c_B z_0^2 + 3(3c-2c_B)\nu^2 z_0^2\right. \\
& \left. + 2\sqrt{2}\,\sqrt{\nu-1}\,\sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z_0^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z_0^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z_0^4}\Big)\right] \\
& + \sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z^4} \\
& - \sqrt{8(\nu-1) + 8c_B\nu z_0^2 + 6(3c-2c_B)\nu^2 z_0^2 + (3c^2-4c_B^2)\nu^2 z_0^4} + \frac{4c_B + 3(3c-2c_B)\nu}{\sqrt{3c^2-4c_B^2}}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\times \log\left(\frac{4c_B+3(3c-2c_B)\nu^2z^2+\sqrt{3c^2-4c_B^2}\,\sqrt{8(\nu-1)+8c_B\nu z^2+6(3c-2c_B)\nu^2z^2+(3c^2-4c_B^2)\nu^2z^4}}{4c_B+3(3c-2c_B)\nu^2z_0^2+\sqrt{3c^2-4c_B^2}\sqrt{8(\nu-1)+8c_B\nu z_0^2+6(3c-2c_B)\nu^2z_0^2+(3c^2-4c_B^2)\nu^2z_0^4}}\right)\Bigg\},$$

$$\begin{aligned} V &= -\frac{e^{\frac{1}{2}cz^2}}{4L^2\nu^2}\Big\{\big[8(1+2\nu)(1+\nu)+2(3+2\nu)(3c-2c_B)\nu z^2+(3c-2c_B)^2\nu^2z^4\big]g \\ &\quad -\big[2(4+5\nu)+3(3c-2c_B)\nu z^2\big]\,g'+2g''\nu^2z^2\Big\}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Напомним, что решение (1.27)–(1.32) получено для внешнего магнитного поля $F_{xy_1}^{(B)}=q_B$.

Таким образом, построено голографическое решение, феноменологически описывающее анизотропную КГП при конечной температуре в магнитном поле для модели тяжелых кварков. Данная модель является обобщением предыдущего решения [57], которое служит пределом нулевого магнитного поля.

Магнитное поле $F^{(B)}$ описывается двумя параметрами: зарядом $F_{xy_1}^{(B)}=q_B$ и коэффициентом в метрике c_B. Первый характеризует само поле Максвелла, а второй – деформацию метрики, связанную с присутствием внешнего магнитного поля. В нашей модели функция взаимодействия имеет простейшую гауссову форму [68,71,72] и зависит от коэффициента c_B и заряда q_B, которые не связаны друг с другом явно. Такая параметризация выбрана для большей общности модели. В результате магнитный заряд почти не влияет на основные свойства данной голографической модели КГП, так что фактически мы рассматриваем c_B как эффективный параметр поля Максвелла $F_{xy_1}^{(B)}$ и выбираем $q_B=1$. Однако это вовсе не означает, что большинство свойств решения совершенно не зависит от того, насколько сильно внешнее магнитное поле. Мы всегда можем связать параметры c_B и q_B, задав выражение для коэффициента связи как функцию заряда: $c_B=f(q_B)$. Отметим, что хотя явная связь c_B с величиной магнитного поля не установлена, есть соображения, предполагающие, что $B^2=-c_B$ [71, 109]. Построенное решение оказывается весьма чувствительно к взаимодействию с внешним магнитным полем. Устойчивость модели требует отрицательной степени экспоненты в соответствующем множителе, определяющем анизотропию вдоль оси y_2. Присутствие внешнего магнитного поля также оказывает существенное влияние на поведение температуры и как следствие на фазовый переход, обусловленный метрикой и соответствующий коллапсу маленьких черных дыр в большие. Были обнаружены такие эффекты как обратный магнитный катализ и вырождение фазового перехода в магнитном поле. Эти явления описываются подробно в Главе 4.

1.3 Случай легких кварков

Аналогично полностью анизотропной голографической модели для тяжелых кварков можно построить модель для случая легких кварков. Модель также включает два типа анизотропии: анизотропию, воспроизводящую зависимость множественности от энергии, и анизотропию, вызванную внешним магнитным полем. Как и прежде рассматривается действие Эйнштейна со скалярным полем (дилатоном) и тремя тензорами Максвелла, и находится решение соответствующих уравнений движения для метрики в виде, обеспечивающем поведение, характерное для эффективной модели легких кварков. Решение в общем виде определяет 5-мерный анзац деформированной метрики. Потенциал дилатона и ряд функций взаимодействия вычисляются из уравнений движения. Действие и метрика в такой форме уже использовались ранее для голографического решения для тяжелых кварков. Чтобы построить частный случай легких кварков применяется фактор деформации специального вида. Напомним, что вид фактора деформации выбирается именно таким, чтобы воспроизвести характерную для легких кварков фазовую структуру, подтвержденную вычислениями на решетке (т.н. "Columbia plots" [86–88]). Заметим также, что численные вычисления в полностью анизотропной модели для легких кварков сложнее, чем в аналогичной модели для тяжелых кварков.

В эйнштейновском фрейме действие и анзац метрики имеют вид такой же, как и для тяжелых кварков (1.1)-(1.8). Уравнения движения, также имеют вид (1.13)-(1.19)

Выключив магнитное поле, то есть положив в выражениях (1.13)–(1.19) $c_B = q_B = f_B = 0$, получим уравнения движения для частично анизотропного случая. Исключив анизотропию, то есть приняв $\nu = 1$ и $f_2 = 0$, получим выражения, полностью совпадающие с уравнениями движения из [42]. Таким образом (1.13)-(1.19) представляют собой анизотропные уравнения в общем виде, подходящие для описания и тяжелых, и легких кварков и включающие изотропные решения в качестве частного случая.

Разница между случаем тяжелых кварков и случаем легких кварков заключена в форме фактора деформации $\mathfrak{b}(z)$. При использовании фактора деформации $\mathfrak{b}(z) = e^{-\frac{cz^2}{2}}$, получается фазовая диаграмма конфайнмент/деконфайнмент, соответствующая картине, характерной для тяжелых кварков. Чтобы получить вариант для легких кварков, примем $\mathfrak{b}(z) = e^{2\mathcal{A}(z)}$, где $\mathcal{A}(z) = -a\ln(bz^2+1)$ [42]. Запишем также граничные условия в

виде:

$$A_t(0) = \mu, \quad A_t(z_h) = 0, \tag{1.33}$$

$$g(0) = 1, \quad g(z_h) = 0, \tag{1.34}$$

$$\phi(z_0) = 0, \tag{1.35}$$

где $z_0 = 0$ соответствует [42] и $z_0 = z_h$ соответствует [57]. Выбор граничных условий для скалярного поля подробно обсуждается в Главе 3.

Примем $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$, чтобы согласовать решение с результатами [42] в изотропном случае. Эти значения параметров обусловлены спектром масс ρ-мезона с учетом возбуждений и вычислениями для температуры фазового перехода на решетке [42], см. также более ранние работы [110, 111].

1.4 Решение для модели легких кварков

Как и в предыдущих случаях, чтобы решить систему уравнений движения (1.13)–(1.19), требуется определить вид функции взаимодействия f_1. Выберем f_1, исходя из соответствия изотропному случаю [42], учтем фактор деформации и получим

$$f_1 = e^{-cz^2 - \mathcal{A}(z)} z^{-2+\frac{2}{\nu}} = (1 + bz^2)^a \, e^{-cz^2} z^{-2+\frac{2}{\nu}}. \tag{1.36}$$

Решение (1.14) с функцией взаимодействия (1.36) и граничными условиями (1.33) – (1.35) имеет вид:

$$A_t = \mu \, \frac{e^{(2c-c_B)z^2/2} - e^{(2c-c_B)z_h^2/2}}{1 - e^{(2c-c_B)z_h^2/2}} \bigg|_{c_B \to 0} = \mu \, \frac{e^{cz^2} - e^{cz_h^2}}{1 - e^{cz_h^2}}, \tag{1.37}$$

$$A_t(z) = \mu - \rho \, z^2 + \ldots, \qquad \rho = - \frac{\mu \, (2c - c_B)}{2 \left(1 - e^{(2c-c_B)z_h^2/2}\right)}. \tag{1.38}$$

Решая (1.13)–(1.19) с функцией взаимодействия (1.36) и граничными

условиями (1.33) – (1.35), получим

$$g = e^{c_B z^2}\left[1 - \frac{I_1(z)}{I_1(z_h)} + \frac{\mu^2\,(2c - c_B)}{L^2\left(1 - e^{(2c-c_B)\frac{z_h^2}{2}}\right)^2}\right. \tag{1.39}$$
$$\left.\times\left\{\left(e^{(2c-c_B)\frac{z^2}{2}} - e^{(2c-c_B)\frac{z_h^2}{2}}\right) I_1(z) - (2c - c_B)\, I_2(z)\left(1 - \frac{I_1(z)}{I_1(z_h)}\,\frac{I_2(z_h)}{I_2(z)}\right)\right\}\right],$$

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_0^z \left(1 + b\xi^2\right)^{3a} e^{-3c_B\xi^2/2}\,\xi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\xi, \\ I_2(z) &= \int_0^z e^{(2c-c_B)\xi^2/2}\int_0^\xi \left(1 + b\chi^2\right)^{3a} e^{-3c_B\chi^2/2}\,\chi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\chi\,d\xi, \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$f_B = -\,2\left(\frac{z}{L}\right)^{-2/\nu} e^{-cz^2/2} g\left(\frac{3cz}{2} + \frac{2}{\nu z} - c_B z - \frac{g'}{g}\right), \tag{1.41}$$

$$f_2 = 2\left(\frac{z}{L}\right)^{2-4/\nu}\frac{\nu - 1}{q^2\nu^2 z^2}\,\frac{e^{c_B z^2}\left(\left(2 + 2\nu - \nu c_B z^2 + \dfrac{6ab\nu z^2}{1 + bz^2}\right) g - g'\nu z\right)}{(1 + bz^2)^{2a}}, \tag{1.42}$$

$$\phi = \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{4(\nu - 1)}{\nu^2\xi^2} - 2c_B\left(3 - \frac{2}{\nu}\right) - 2c_B^2\xi^2 + \frac{12ab}{1 + b\xi^2}\left(1 + 2\,\frac{1 + ab\xi^2}{1 + b\xi^2}\right)}\,d\xi, \tag{1.43}$$

$$V(z) = -\frac{(1 + bz^2)^{2a}\; z}{2L^2} \tag{1.44}$$
$$\times\left[2\left\{2\,\frac{(1+\nu)(1+2\nu) + \big(2 + (2+3a)(3+2\nu)\nu\big)bz^2 + (1 + \nu + 3a\nu)(1 + 2\nu + 6a\nu)b^2z^4}{(1 + bz^2)^2\nu^2 z^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - c_B\left(2 + \frac{3}{\nu} + \frac{12abz^2}{1 + bz^2}\right) + c_B^2 z^2\right\} g\, z - \left(5 + 3\left(\frac{6ab}{1 + bz^2} - c_B\right) z^2 + \frac{4}{\nu}\right) g' + g'' z\right].$$

С помощью интегрирования по частям выражение для функции почернения можно упростить, что особенно важно с точки зрения численных вычислений:

$$g = e^{c_B z^2}\left[1 - \frac{I_1(z)}{I_1(z_h)} + \frac{\mu^2\,(2c - c_B)\, I_2(z)}{L^2\left(1 - e^{(2c-c_B)z_h^2/2}\right)^2}\left(1 - \frac{I_1(z)}{I_1(z_h)}\,\frac{I_2(z_h)}{I_2(z)}\right)\right], \tag{1.45}$$

где $I_1(z)$ задается прежним выражением (1.40), а $I_2(z)$ переопределена как

$$I_2(z) = \int_0^z \left(1 + b\xi^2\right)^{3a} e^{(c-2c_B)\xi^2}\,\xi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\xi. \tag{1.46}$$

Получено голографическое решение с двумя функциями анизотропии, феноменологически описывающее анизотропную плазму из легких кварков во внешнем магнитном поле, для которого изотропное решение [42] служит пределом нулевого магнитного поля и отсутствия пространственной анизотропии. Поскольку решение найдено в квадратурах, дальнейшее его исследование требует численных вычислений. Заметим, что эти вычисления в полностью анизотропном решении для легких кварков оказываются существенно сложнее, чем в аналогичном решении для тяжелых кварков.

Следует отметить, что вид функции взаимодействия f_B для третьего тензора Максвелла не выбирается, а выводится при решении уравнений движения. В последующих главах описываться результаты, полученные на основе решений из Главы 1.

Глава 2. Петли Вильсона в анизотропной голографической модели

2.1 Постановка задачи

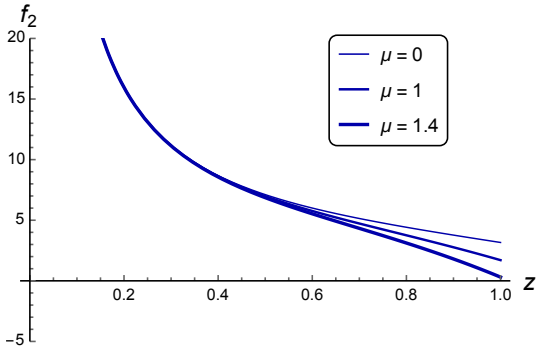
2.1.1 Метрика

В этой главе в голографической модели с ненулевой пространственной анизотропией изучается влияние анизотропии на поведение петель Вильсона и структуру фазовых переходов. Для этого рассматривается решение из Главы 1, уравнения (1.27)–(1.32), для тяжелых кварков с $\nu \geq 1$ и $c_B = 0$. Этот частный случай анизотропного решения был получен ранее в работе [57].

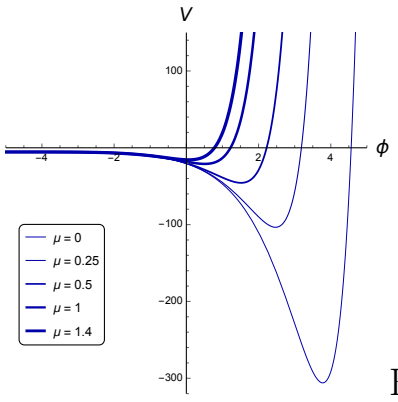
Таким образом, рассматривается 5-мерное действие Эйнштейна с полем дилатона и двумя полями Максвелла:

$$S = \int \frac{d^5x\sqrt{-\det g}}{16\pi G_5}\left[R - \frac{f_1(\phi)}{4}F^2_{(1)} - \frac{f_2(\phi)}{4}F^2_{(2)} - \frac{1}{2}\partial_M\phi\partial^M\phi - V(\phi)\right], \quad (2.1)$$

где $F^2_{(1)}$ и $F^2_{(2)}$ - квадраты тензоров Максвелла, $f_1(\phi)$ и $f_2(\phi)$ - калибровочные кинетические функции, связанные с соответствующими полями Максвелла, $V(\phi)$ - потенциал скалярного поля ϕ.



A



B

Рис. 3: A) Функция $f_2(z)$ для $z_h = 1$, $c = 1$, $q = 1$ и разных μ в анизотропном случае, $\nu = 4.5$. B) Потенциал скалярного поля $V(\phi)$ для $z_h = 1$, $c = 1$ и разных μ в анизотропном случае, $\nu = 4.5$.

Анзац выбран в следующей форме:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathcal{G}_{MN}dX^M dX^N \\ &= \frac{L^2\mathfrak{b}(z)}{z^2}\left[-g(z)dt^2 + dx^2 + \left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{2}{\nu}}\left(dy_1^2 + dy_2^2\right) + \frac{dz^2}{g(z)}\right], \quad (2.2) \\ \phi &= \phi(z), \qquad A^{(1)}_M = A_t(z)\delta^0_M, \qquad F^{(2)}_{y^1y^2} = q, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{b}(z)$ является фактором деформации и $g(z)$ - функцией почернения; мы положим радиус AdS $L = 1$. Выбирается функция $f_1(z) = z^{-2+\frac{2}{\nu}}$, фактор деформации $\mathfrak{b}(z) = e^{-cz^2/2}$. Функция f_2, непосредственно связанная с анизотропией модели, зависит также от химического потенциала (Рис.3.A). Отметим, что все величины в формулах представлены в безразмерных единицах.

Функция почернения примет следующий вид:

$$g(z) = 1 - \frac{z^{2+\frac{2}{\nu}}}{z_h^{2+\frac{2}{\nu}}} \frac{\mathfrak{G}(-\frac{3}{4}cz^2)}{\mathfrak{G}(-\frac{3}{4}cz_h^2)} + \frac{\mu^2 c z^{2+\frac{2}{\nu}} e^{-\frac{cz_h^2}{2}}}{4\left(1 - e^{-\frac{cz_h^2}{4}}\right)^2} \mathfrak{G}(-cz^2)$$
$$- \frac{\mu^2 c z^{2+\frac{2}{\nu}} e^{-\frac{cz_h^2}{2}}}{4\left(1 - e^{-\frac{cz_h^2}{4}}\right)^2} \frac{\mathfrak{G}(-\frac{3}{4}cz^2)}{\mathfrak{G}(-\frac{3}{4}cz_h^2)} \mathfrak{G}(-cz_h^2), \tag{2.3}$$

где для функции $\mathfrak{G}(x)$ имеется следующее выражение [112]:

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(1 + n + \frac{1}{\nu})}. \tag{2.4}$$

Функция $f_2(z)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{\nu - 1}{q^2\nu^2} z^{-\frac{4}{\nu}} e^{-\frac{cz^2}{2}} \Bigg[4(1+\nu) + 3c\,\nu\, z^2 + 4 \frac{z^{2+\frac{2}{\nu}}}{z_h^{2+\frac{2}{\nu}}} \Bigg\{ \frac{\nu\, e^{\frac{3cz^2}{4}}}{\mathfrak{G}\left(-\frac{3}{4}cz_h^2\right)} \\ &- (1+\nu) \frac{\mathfrak{G}\left(-\frac{3}{4}cz^2\right)}{\mathfrak{G}\left(-\frac{3}{4}cz_h^2\right)} \mathrm{F} - \frac{\mu^2 c\,\nu\, z_h^{2+\frac{2}{\nu}} e^{cz^2 - \frac{cz_h^2}{2}}}{4\left(1 - e^{-\frac{cz_h^2}{4}}\right)^2} \left(1 - e^{-\frac{cz^2}{4}} \frac{\mathfrak{G}\left(-cz_h^2\right)}{\mathfrak{G}\left(-\frac{3}{4}cz_h^2\right)}\right) \Bigg\} \\ &- 3c\,\nu \frac{z^{4+\frac{2}{\nu}}}{z_h^{2+\frac{2}{\nu}}} \frac{\mathfrak{G}\left(-\frac{3}{4}cz^2\right)}{\mathfrak{G}\left(-\frac{3}{4}cz_h^2\right)} \mathrm{F} \Bigg], \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\mathrm{F} = 1 + \frac{\mu^2 c\, z_h^{2+\frac{2}{\nu}} e^{-\frac{cz_h^2}{2}}}{4\left(1 - e^{-\frac{cz_h^2}{4}}\right)^2} \left(\mathfrak{G}\left(-cz_h^2\right) - \mathfrak{G}\left(-cz^2\right) \frac{\mathfrak{G}\left(-\frac{3}{4}cz_h^2\right)}{\mathfrak{G}\left(-\frac{3}{4}cz^2\right)}\right). \tag{2.6}$$

2.1.2 Термодинамика модели

Термодинамические свойства данной анизотропной голографической модели были изучены в [57]. Температура дается формулой $T = |g'(z_h)|/4\pi$.

Выражения для энтропии и свободной энергии следующие:

$$s(z_h, c, \nu) = \frac{e^{-\frac{3}{4}cz_h^2}}{4z_h^{1+2/\nu}}, \quad F(z_h, c, \nu, \mu) = \int_{z_h}^{z_{h_2}} s(z_h, c, \nu)\, T'(z_h, c, \nu, \mu)\, dz_h, \quad (2.7)$$

где z_{h_2} – второй горизонт, т. е. в данной точке $T(z_{h_2}) = 0$. Для рассматриваемых функций почернения функция $z_h(T)$ – трехзначная т.е. имеет тип поведения Ван-дер-Ваальса при $0 < \mu < \mu_{cr}(\nu)$ (Рис.4.A), и свободная энергия показывает зависимость от температуры в виде так называемого "ласточкиного хвоста" в этом диапазоне химических потенциалов (Рис.4.B). Петля в форме "ласточкиного хвоста" исчезает при $(\mu, T) = (\mu_{cr}(\nu), T_{cr}(\nu))$. При $\mu \geq \mu_{cr}$ функция свободной энергии возрастает плавно, пока температура убывает. Наименьшие значения свободной энергии соответствуют термодинамически стабильным фазам.

Линия свободной энергии имеет самопересечение при $T = T_{BB}(\nu, \mu)$, и здесь маленькие черные дыры переходят в большие. Отметим, что при ненулевых значениях химического потенциала фазовый переход Хокинга-Пейджа происходит при температуре больше, чем температура фазового перехода большая/малая черная дыра (Рис.4.B). Поэтому чернодырное решение также доминирует по отношению к термальному AdS для $\mu \neq 0$. Положение линии фазового перехода большая/малая черная дыра определяет фазовую диаграмму в голографической модели. Функция энтро-

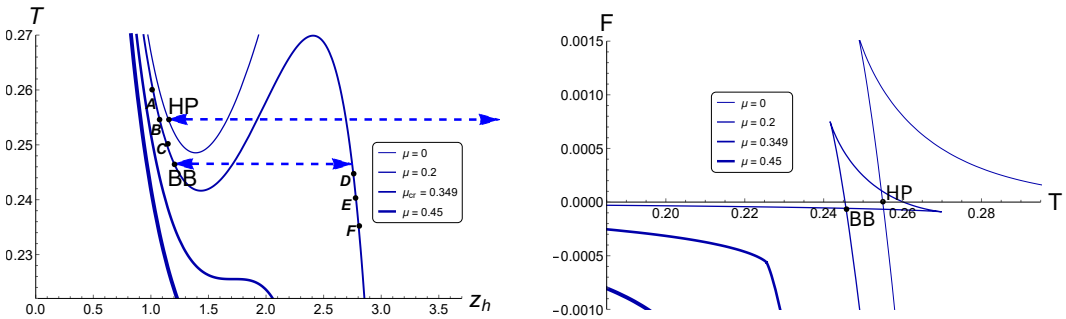


Рис. 4: A) Зависимость температуры $T(z_h, \mu, c, \nu)$ от размеров горизонта z_h для $\nu = 4.5$ и различных значений химического потенциала μ. B) Свободная энергия черной дыры $F(T)$ для различных значений μ в анизотропном случае, $\nu = 4.5$. Пересечение с горизонтальной осью дает значение горизонта для фазового перехода Хокинга-Пейджа $z_{h,HP}(\nu)$, $c = 1$.

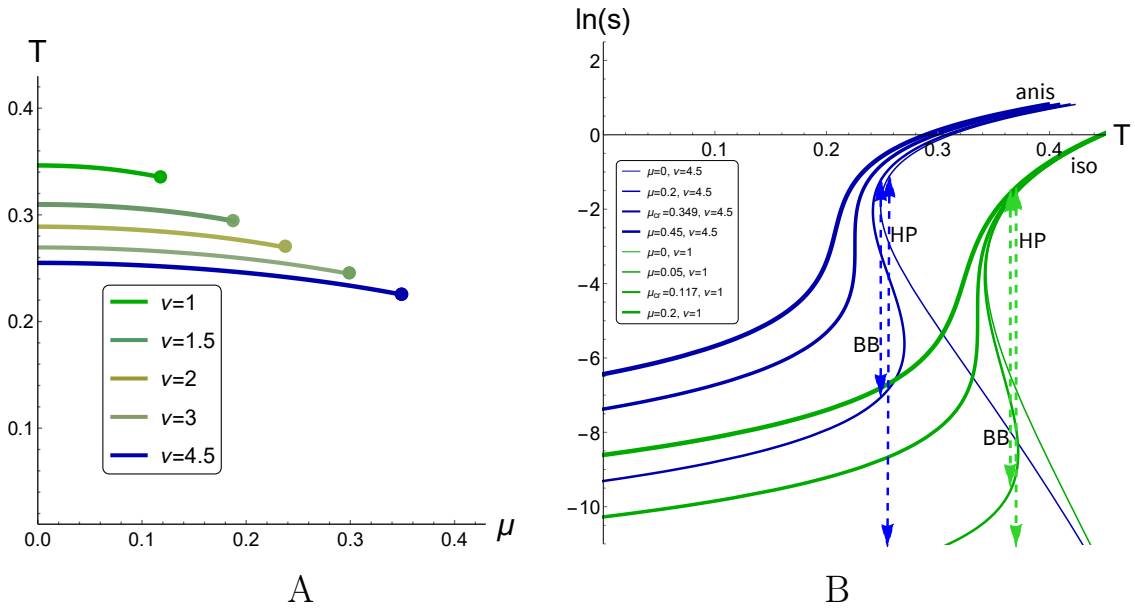


Рис. 5: A) Фазовый переход большая/малая черная дыра в (μ, T)-плоскости для изотропной метрики (зеленая кривая) и для анизотропных метрик для различных $\nu = 1.5, 2, 3, 4.5$ (серо-зеленая, хаки, серо-синяя и синяя кривые соответственно). $\mu_{cr}(\nu = 1) = 0.117, T_{cr}(\nu = 1) = 0.334$, $\mu_{cr}(\nu = 1.5) = 0.189, T_{cr}(\nu = 1.5) = 0.294$, $\mu_{cr}(\nu = 2) = 0.270, T_{cr}(\nu = 2) = 0.237$, $\mu_{cr}(\nu = 3) = 0.299, T_{cr}(\nu = 3) = 0.245$, $\mu_{cr}(\nu = 4.5) = 0.349, T_{cr}(\nu = 4.5) = 0.226$. Точками обозначены критические точки. B) Зависимость термодинамической энтропии от температуры для различных значений химического потенциала для $\nu = 1$ (зеленые кривые) и $\nu = 4.5$ (синие кривые). Пунктирные линии со стрелками показывают скачки термодинамической энтропии при фазовом переходе в точке фазового перехода Хокинга-Пейджа (для нулевого химического потенциала) и в точках фазового перехода большая/малая черная дыра (для ненулевого химического потенциала). В обоих случаях (A и B) $c = 1$.

пии $s(T)$ многозначна для $\mu < \mu_{cr}$ и становится однозначной для химических потенциалов $\mu \geq \mu_{cr}$. Значение μ_{cr} зависит от анизотропного параметра ν, $\mu_{cr}(\nu = 1) = 0.117$, $\mu_{cr}(\nu = 1.5) = 0.189$, $\mu_{cr}(\nu = 2) = 0.270$, $\mu_{cr}(\nu = 3) = 0.299$, $\mu_{cr}(\nu = 4.5) = 0.349$.

На Рис.5.A фазовый переход большая/малая черная дыра на (μ, T)-плоскости представлен для изотропной и анизотропной метрик с разными ν. При значении температуры $T = T_{BB}(\nu, \mu)$ термодинамическая энтропия претерпевает значительный скачок (см. Рис.5.B), где энтропия представлена в логарифмическом масштабе. На этих графиках мы видим, что скачки исчезают при $\mu \geq \mu_{cr}$ ($\mu_{cr} = 0.117$ для $\nu = 1$ и $\mu_{cr} = 0.349$ для $\nu = 4.5$).

Структура термодинамических переходов в данной модели также понадобится при вычислении голографической энтропии зацепленности в Главе 5.

2.2 Фазовая диаграмма

2.2.1 Времениподобные петли Вильсона

Мы рассматриваем среднее значение времениподобных петель Вильсона, ориентированных вдоль вектора $\vec{n}$, таких что $n_x = \cos\theta$, $n_y = \sin\theta$.

Следуя голографическому подходу [113–115], необходимо вычислить значение действия Намбу-Гото для пробной струны в нашей метрике в струнном фрейме:

$$S = \int \frac{d\tau\, d\xi}{2\pi\alpha'} \sqrt{|\det h_{\alpha\beta}|}, \tag{2.8}$$

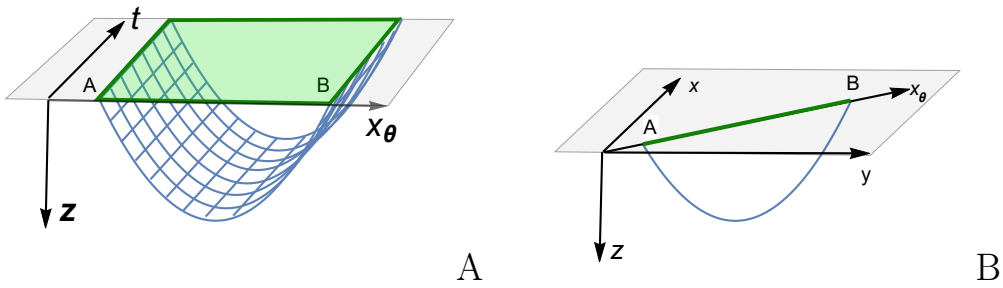
где $h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \mathcal{G}_{s,MN}$, $\mathcal{G}_{s,MN} = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi(z)} \mathcal{G}_{MN}$ и $\mathcal{G}_{MN}$ задается (2.2). Мировой лист, представленный на Рис.6, параметризуется как

$$\begin{aligned} X^0 &\equiv t = \tau, \quad X^1 \equiv x = \xi\cos\theta, \quad X^2 \equiv y_1 = \xi\sin\theta, \\ X^3 &\equiv y_2 = const, \quad X^4 \equiv z = z(\xi). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Компоненты индуцированной метрики $h_{\alpha\beta}$ примут вид:

$$h_{00} = \partial_0 X^M \partial_0 X^N \mathcal{G}_{s,MN} = -g(z(\xi)) \frac{\mathfrak{b}_s(z(\xi))}{z(\xi)^2}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} h_{11} &= \partial_1 X^M \partial_1 X^N \mathcal{G}_{s,MN} \\ &= \frac{\mathfrak{b}_s(z(\xi))}{z(\xi)^2} \left(\cos^2\theta + z(\xi)^{2-\frac{2}{\nu}} \sin^2\theta + \frac{z'(\xi)^2}{g(z(\xi))} \right), \end{aligned} \tag{2.11}$$



A B

Рис. 6: A) Петля Вильсона и мировой лист. B) Проекция мирового листа на фиксированное t.

$$h_{01} = h_{10} = \partial_1 X^M \partial_0 X^N \mathcal{G}_{s,MN} = 0, \tag{2.12}$$

$$\det h_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\mathfrak{b}_s(z(\xi))}{z(\xi)^2}\right)^2 \left(g(z(\xi))\left(z(\xi)^{2-\frac{2}{\nu}}\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + z'(\xi)^2\right). \tag{2.13}$$

Здесь $\mathfrak{b}_s(z) = \mathfrak{b}(z)\exp\big(\sqrt{2/3}\ \phi(z)\big)$ – фактор деформации в струнном фрейме. Действие (2.8) записывается в виде:

$$S \ = \ \mathfrak{t}\,\mathcal{S}, \qquad \mathcal{S} = \int d\xi\ M(z(\xi))\sqrt{\mathcal{F}(z(\xi)) + (z'(\xi))^2}, \tag{2.14}$$

где

$$\mathfrak{t} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int dt, \quad M(z) = \frac{\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}, \quad \mathcal{F}(z) = g(z)\left(z^{2-\frac{2}{\nu}}\sin^2\theta + \cos^2\theta\right). \tag{2.15}$$

Нахождение экстремального значения $\mathcal{S}$ соответствует нахождению решений для динамической системы с действием $\mathcal{S}$ как в (2.14), динамической переменной $z = z(\xi)$ и временем ξ. Предполагаются граничные условия: $z(\pm\ell/2) = 0$ (или регуляризованные граничные условия $z(\pm\ell/2) = \epsilon$).

Введем эффективный потенциал:

$$\mathcal{V}(z) \equiv M(z)\sqrt{\mathcal{F}(z)}, \tag{2.16}$$

и из (2.14) получим выражения для характерной длины струны и действия:

$$\frac{\ell}{2} \ = \ \int_0^{z_*} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}(z)}}\ \frac{dz}{\sqrt{\frac{\mathcal{V}^2(z)}{\mathcal{V}^2(z_*)} - 1}}, \tag{2.17}$$

$$\frac{\mathcal{S}}{2} \ = \ \int_\epsilon^{z_*} \frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{V}(z_*)}\ \frac{M(z)dz}{\sqrt{\frac{\mathcal{V}^2(z)}{\mathcal{V}^2(z_*)} - 1}}, \tag{2.18}$$

где z_* – это точка поворота (она же называется верхней точкой). Здесь мы используем ультрафиолетовое обрезание ϵ, поскольку $M(z)$ имеет сингулярное поведение около нуля $z \sim 0$:

$$M(z) \underset{z\sim 0}{\sim} \frac{M_0}{z^k}, \ \ k \geq 1. \tag{2.19}$$

Мы видим, что $\mathcal{S}$ и ℓ действительны, если потенциал – убывающая функция на интервале $0 < z < z_*$,

$$\mathcal{V}(z) > \mathcal{V}(z_*), \quad 0 < z_* < z_{min}, \tag{2.20}$$

где z_{min} – это локальный минимум $\mathcal{V}(z)$, $z_{min} < z_h$. Интересно изучить асимптотики $\mathcal{S}$ при больших ℓ. Для того, чтобы $\ell \to \infty$ и $\mathcal{S} \to \infty$, мы берем $z_* = z_{min}$. В самом деле, подставляя

$$\frac{\mathcal{V}^2(z)}{\mathcal{V}^2(z_{min})} = 1 + \mathcal{V}_2(z - z_{min})^2 + o((z - z_{min})^2), \qquad \mathcal{V}_2 \equiv \frac{\mathcal{V}''(z_{min})}{\mathcal{V}(z_{min})} \quad (2.21)$$

в выражения характерной длины и действия, получаем:

$$\ell = 2\int_0^{z_{min}} \frac{dz}{\sqrt{\mathcal{F}(z)\,\mathcal{V}_2}\,(z_{min} - z)} \sim \sqrt{\frac{\mathcal{V}(z_{min})}{\mathcal{F}(z_{min})\,\mathcal{V}''(z_{min})}}\,\log(z_{min} - z), \quad (2.22)$$

$$\mathcal{S} = 2\int_\epsilon^{z_{min}} \frac{\mathcal{V}(z)M(z)dz}{\mathcal{V}(z_{min})\sqrt{\mathcal{V}_2}\,(z_{min} - z)} \sim M(z_{min})\sqrt{\frac{\mathcal{V}(z_{min})}{\mathcal{V}''(z_{min})}}\,\log(z_{min} - z), \quad (2.23)$$

поэтому $\ell \to \infty$ при $z \to z_{min} - 0$ и $\mathcal{S} \to \infty$ при $z \to z_{min} - 0$.

Стационарная точка, $\mathcal{V}'|_{z=z_{min}} = 0$, обычно называется точкой динамической стенки, которая удовлетворяет уравнению:

$$z = z_{DW}: \;\; \frac{M'(z)}{M(z)} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}'(z)}{\mathcal{F}(z)} = 0. \quad (2.24)$$

Выбирая верхнюю точку $z_* = z_{DW}$, мы получаем для натяжения струны:

$$S \sim \sigma_{DW}\;\ell, \qquad \sigma_{DW} = M(z_{DW})\,\sqrt{\mathcal{F}(z_{DW})}. \quad (2.25)$$

2.2.2 Фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент

В нашем случае эффективный потенциал зависит от фактора деформации, скалярного поля и угла. Для того, чтобы найти стационарные точки $\mathcal{V}(z)$, мы решаем уравнение (2.24) для потенциала (2.16) с произвольным углом. Это уравнение имеет вид:

$$\Sigma(z, z_h, \mu, c, \nu) - \Theta(z, \nu, \theta) = 0, \quad (2.26)$$

где $\Sigma(z, z_h, \mu, c, \nu)$ не зависит от θ,

$$\Sigma(z, z_h, \mu, c, \nu) \equiv \sigma(z, c, \nu) + \frac{g'(z)}{2g(z)}, \quad (2.27)$$

$$\sigma(z, c, \nu) \equiv -cz + \frac{1}{\nu z}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{3c\,\nu^2 z^2\left(\frac{cz^2}{2} + 3\right) + 4\nu - 4}, \quad (2.28)$$

$$\Theta(z,\nu,\theta) \equiv \frac{2}{z} - \frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right) z^{1-\frac{2}{\nu}} \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + z^{2-\frac{2}{\nu}} \sin^2(\theta)}. \tag{2.29}$$

Уравнения для динамической стенки в частных случаях $\theta = 0,\ \pi/2$ соответствуют уравнениям в [57] и следуют сразу из уравнения (2.26). Для нулевой температуры, то есть $g = 1$, мы получим уравнение:

$$\sigma_\theta(z,c,\nu) \equiv \sigma(z,c,\nu) - \Theta(z,\nu,\theta) = 0. \tag{2.30}$$

Существование/несуществование решений уравнений (2.30) и (2.26) может быть рассмотрено графически на Рис.7. На Рис.7.A. представлены графики $\sigma_x = \sigma_{\theta=0}$, $\sigma_y = \sigma_{\theta=\pi/2}$ и $\sigma_\theta(z,c,\nu,\theta)$ для частного значения угла $\theta = 54°$. Мы видим, что для $c = 0$ нет корней уравнения (2.30), между тем корни для случая петли Вильсона с различной ориентацией и отрицательного c представлены ниже.

Для ненулевой температуры удобнее найти корни уравнения (2.26) как точки пересечения графиков $\Sigma(z,z_h,\mu,c,\nu)$ и $\Theta(z,\nu,\theta)$. В этом случае положение $\Theta(z,\nu,\theta)$ зависит от геометрии кварк-антикварковой пары, в это же время положение $\Sigma(z,z_h,\mu,c,\nu)$ зависит от z_h, μ, c, ν. Мы видим, что при этих фиксированных параметрах пересечение $\Sigma(z,z_h,\mu,c,\nu)$ и $\Theta(z,\nu,\theta)$ зависит от ориентации петли Вильсона. В частности, линия $\Sigma(z,1.5,0,1,4.5)$ на Рис.7.B. пересекает фиолетовую линию и не пересекает пунктирную темно-голубую и синию линии. Это показывает, что для $\theta = 90°$ происходит конфайнмент, но для $\theta = 54°$ и тем более для $\theta = 0°$ не происходит. Исчезновение корней уравнения интерпретируется как исчезновение конфайнмента. Параметры, при которых это происходит, определяют расположение линии фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент для петли Вильсона. Поскольку мы заинтересованы в расположении линии конфайнмент/деконфайнмент на (μ,T)-плоскости, мы используем выражение для температуры $T(z_h,\mu,c,\nu)$. Положения линии фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент для петли Вильсона на (μ,T)-плоскости представлены на Рис.8 сплошными линиями. Видно, что изменяя θ для достаточно большого химического потенциала μ, мы получаем достаточное изменение линий фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент.

Для маленьких значений химических потенциалов ситуация более сложная из-за наличия нестабильности типа Хокинга-Пейджа для метрики. Если температура системы с ненулевым химическим потенциалом уменьшается, но не достигает некоторого критического значения, происходит фазовый переход из большой в маленькую черную дыру при $T_{BB}(\mu)$. Это обобщение соответствующего эффекта в изотропном случае [35,36,38,40,116]. Для нулевого μ фазовый переход Хокинга-Пейджа имеет место при T_{HP}, где

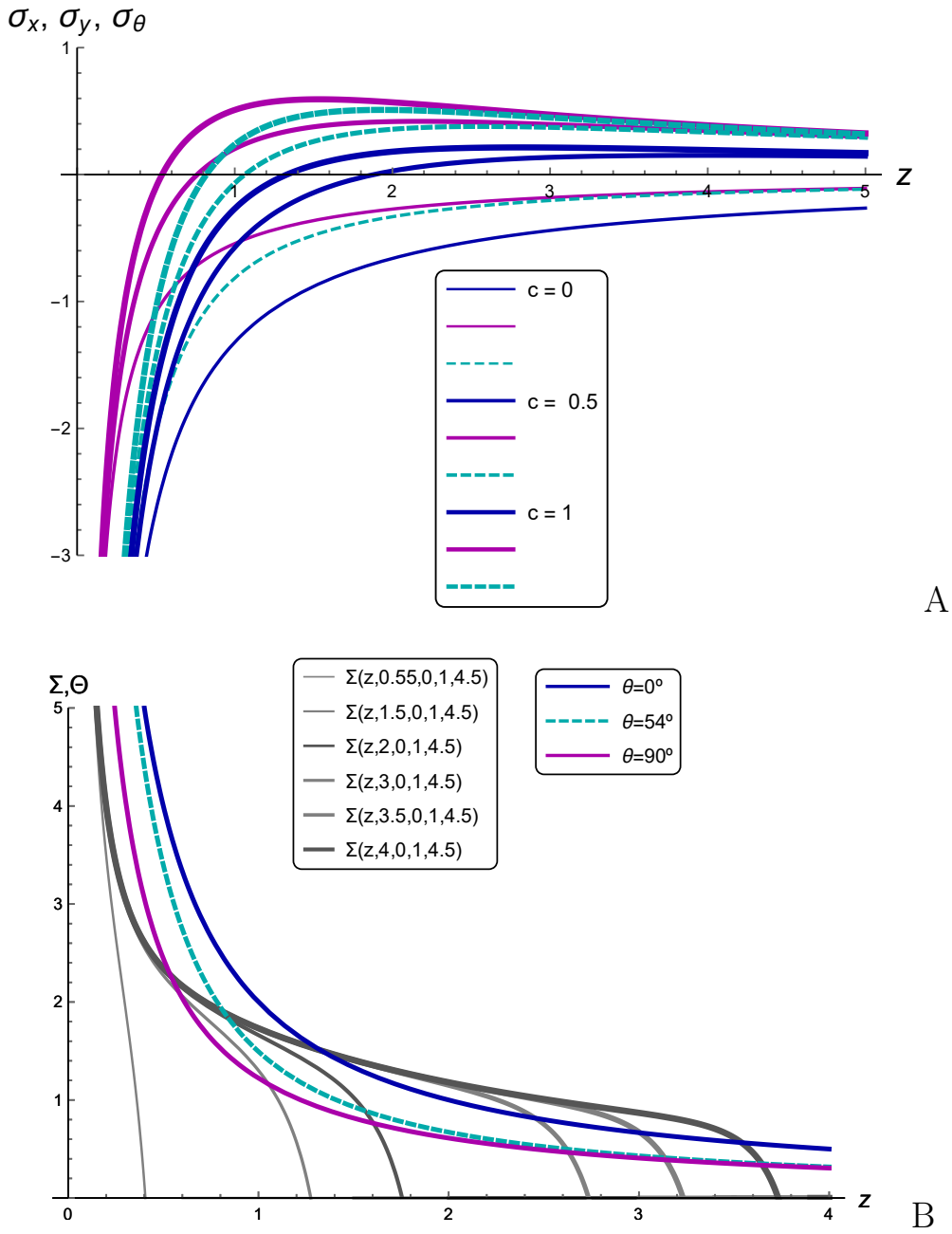


Рис. 7: A) Функции $\sigma_x(z, c, \nu)$ (синие линии), $\sigma_y(z, c, \nu)$ (фиолетовые линии), $\sigma_\theta(z, c, \nu, \theta)$ (голубые пунктирные линии) для угла $\theta = 54°$, $\nu = 4.5$ и для разных c. B) Позиции динамических стенок, соответствующих петлям Вильсона W_{xT}, W_{yT}, $W_{\theta T}$ в анизотропном случае $\nu = 4.5$, даются пересечениями серых линий, представляющих $\Sigma(z)$, и голубой, синей и фиолетовой линий, представляющих другую часть уравнения (2.26) для углов $\theta = 0°, 54°, 90°$. Здесь мы изменяем z_h и c. Во всех случаях, чтобы получить позицию динамической стенки, мы берем минимальную точку пересечения.

свободная энергия равняется нулю и черная дыра растворяется в термодинамически стабильном тепловом газе. Частное значение T_{HP} зависит от параметров c и ν. Расположение фазового перехода типа Хокинга-Пейджа для анизотропного случая $\nu = 4.5$ представлено на Рис.8 пунктирной красной линией. Эта линия начинается в $(0, T_{HP})$ и заканчивается в $(\mu_{cr}^{anis}, T_{cr}^{anis})$. Далее для краткости в этой главе будем называть фазовый переход первого рода при ненулевом химическом потенциале фазовым переходом Хокинга-Пейджа.

2.3 Описание фазовой диаграммы

Фазовая диаграмма в (μ, T)-плоскости фактически определяется относительным расположением линии перехода Хокинга-Пейджа и линий перехода, связанного с петлями Вильсона. При построении фазовой диаграммы положим $c = 1$. В модели определены критические углы $\theta_{cr1} = 45°$, $\theta_{cr2} = 54°$ и $\theta_{cr3} = 65°$. Для критического угла $\theta_{cr1} = 45°$ линия фазового перехода Хокинга-Пейджа (красная пунктирная линия на Рис.8) и линия фазового перехода петли Вильсона (оранжевая линия на Рис.8), имеют только одну общую точку $(\mu_{cr}^{(anis)}, T_{cr}^{(anis)})$ в самом конце фазового перехода Хокинга-Пейджа. В этом случае для $\mu \leq \mu_{cr}^{(anis)}$ линия перехода Хокинга-Пейджа определяет фазы перехода конфайнмент/деконфайнмент. Для угла $\theta_{cr2} = 54°$ верхняя точка (соответствует $\mu = 0$) фазового перехода Хокинга-Пейджа совпадает с верхней точкой фазового перехода петли Вильсона (серая линия на Рис.8), $T_{HP} = T_{\text{top},\theta_{cr2}}$. Для $\theta_{cr3} = 65°$ линия фазового перехода Хокинга-Пейджа и линия фазового перехода петли Вильсона (красная сплошная линия) имеют только одну общую точку $(\mu_{cr}^{(anis)}, T_{cr}^{(anis)})$ в самом конце линии фазового перехода Хокинга-Пейджа. В этом случае вся линия фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент определяется петлей Вильсона потому, что последняя расположена ниже линии фазового перехода Хокинга-Пейджа.

Между этими критическими значениями θ мы будем наблюдать следующую картину.

- При $0° \leq \theta < 45°$ для линий фазового перехода петли Вильсона вблизи нулевых значений химического потенциала играет роль нестабильность метрики, где маленькие черные дыры коллапсируют в большие. Здесь фазовый переход определяется фазовым переходом Хокинга-Пейджа. После превышения некоторого критического значения химического потенциала фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент

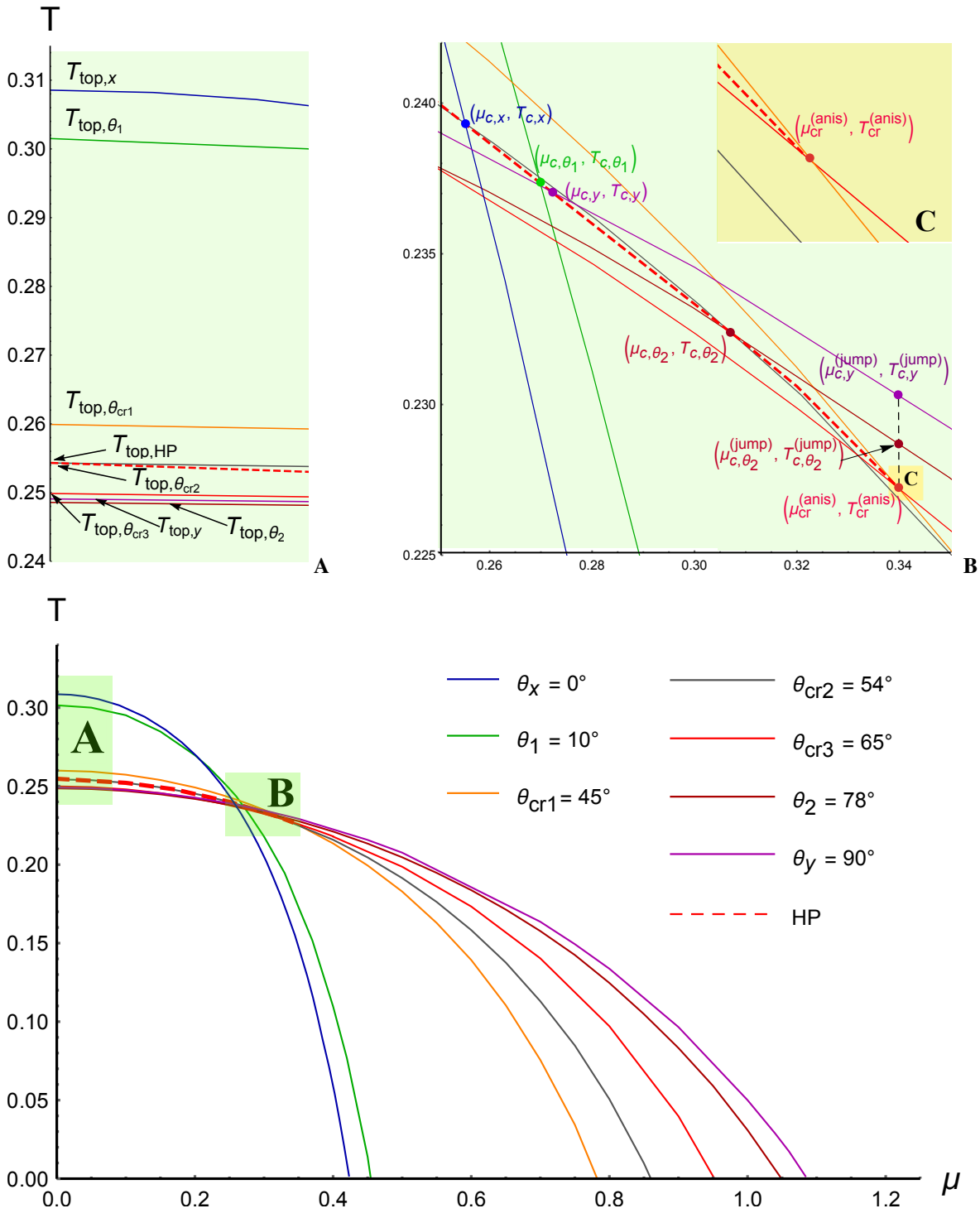


Рис. 8: Диаграммы фазового перехода. Графики A) и B) – увеличенные зеленые области и C) – увеличенная желтая область в B).

больше не определяется нестабильностью метрики и влияние петли Вильсона начинает доминировать, аналогично случаю продольной ориентации, представленному как W_{xT} в [57] и связанному с $\theta_x = 0°$. Зеленая линия на Рис.8 соответствует $\theta_1 = 10°$ и показывает типичное расположение линии перехода петли Вильсона относительно линии перехода Хокинга-Пейджа. Она пересекает переход Хокинга-Пейджа в зеленой точке $(\mu_{c,\theta_1}, T_{c,\theta_1})$, показанной на Рис.8.B). Пересечение линии перехода Хокинга-Пейджа с линией перехода петли Вильсона, соответствующее $\theta_x = 0°$, показано синей точкой на Рис.8.B). При увеличении угла до $\theta_{cr1} = 45°$ пересечение происходит в конечной точке линии перехода Хокинга-Пейджа $(\mu_{cr}^{(anis)}, T_{cr}^{(anis)})$.

- При $\theta_{cr1} = 45°$ линия перехода петли Вильсона пересекается с линией перехода Хокинга-Пейджа в окончании последней (красная точка $(\mu_{cr}^{(anis)}, T_{cr}^{(anis)})$ на Рис.8.C)).

- При $45° < \theta < 54°$ у нас нет пересечений с линией фазового перехода Хокинга-Пейджа, линия перехода петли Вильсона лежит выше. Таким образом, есть скачок от точки окончания линии перехода Хокинга-Пейджа к линии перехода петли Вильсона.

- При $\theta_{cr2} = 54°$ линия перехода петли Вильсона на фазовой диаграмме (серая линия) начинается с $\mu = 0$ в той же точке, что и линия перехода Хокинга-Пейджа, затем проходит над ней и пересекает ее снова. Обратим внимание, что серая линия почти совпадает с линией фазового перехода Хокинга-Пейджа (пунктирная красная линия) на Рис.8.

- При $54° < \theta < 65°$ у нас нет пересечений линии фазового перехода Хокинга-Пейджа и линии перехода петли Вильсона. В этом случае весь фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент определяется линией перехода петли Вильсона.

- При $\theta_{cr3} = 65°$ линия перехода петли Вильсона пересекает линию фазового перехода Хокинга-Пейджа в окончании последней (красная точка $(\mu_{cr}^{(anis)}, T_{cr}^{(anis)})$ на Рис.8.C)).

- При $65° < \theta \leq 90°$ картина аналогична случаю поперечной ориентации, который представлен для W_{yT} в [57] и соответствует $\theta_y = 90°$. Фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент определяется по линии перехода петли Вильсона, начиная с нулевых значений химического потенциала до $\mu_{c,y}$ (фиолетовая точка $(\mu_{c,y}, T_{c,y})$ на Рис.8.B)),

где затем встречается нестабильность метрики. Начиная с этого момента происходит фазовый переход Хокинга-Пейджа до точки $(\mu_{cr}^{(anis)}, T_{cr}^{(anis)})$, где имеется скачок к точке $(\mu_{c,y}^{(jump)}, T_{c,y}^{(jump)})$ на линии перехода петли Вильсона. В качестве примера линии из обозначенного интервала взят случай $\theta_2 = 78^\circ$, который представлен темно-красным цветом. Эта линия пересекает линию Хокинга-Пейджа в точке $(\mu_{c,\theta_2}, T_{c,\theta_2})$, и на Рис.8.B) также показан прыжок из окончания линии перехода Хокинга-Пейджа $(\mu_{cr}^{(anis)}, T_{cr}^{(anis)})$ в темно-красную точку $(\mu_{c,\theta_2}^{(jump)}, T_{c,\theta_2}^{(jump)})$.

2.4 Обсуждение

Таким образом, изучено поведение времениподобных петель Вильсона в 5-мерной анизотропной голографической модели, поддерживаемой действием с полем дилатона и двумя полями Максвелла, сконструированной в [57]. Сформулировано условие фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент для случая произвольного угла. Найдена зависимость линии фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент от ориентации пары кварков. Комбинируя фазовые переходы, соответствующие петлям Вильсона, с нестабильностью Хокинга-Пейджа, приходим к картине на Рис.8. Для каждого значения угла получилась своя структура фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент, особый интерес представляют критические значения углов. Хотелось бы отметить, что возможность экспериментальной проверки описанной нами линии фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент существенно зависит от экспериментальной частоты измерений частиц, особенно после СТИ. Причина этого заключается в том, что эффекты анизотропии ожидаются в среде, созданной в СТИ сразу после столкновения, в момент времени около $0.5 \div 2$ Фм/с. Из-за анизотропии спектр адронов, который создается сгустками, зависит от ориентации, но вскоре эта анизотропия исчезает, и, как следствие, кроссовер – также.

Глава 3. Голографическая анизотропная модель для легких кварков с фазовым переходом конфайнмент/деконфайнмент

3.1 Постановка задачи

В данной главе рассматривается модель для легких кварков с пространственной анизотропией, и в ее рамках изучается структура фазовых переходов. Для этого рассматривается решение из Главы 1 для легких кварков с $\nu \geq 1$ и $c_B = 0$, уравнения (1.37)—(1.44). Как уже было отмечено, предполагается, что фазовая структура для легких кварков имеет область кроссовера при малых химических потенциалах и фазовый переход первого рода при больших химических потенциалах (Рис.2.А). Этот график получен в изотропном случае в [42].

Также в этой главе представлено поведение корнельского потенциала в этой анизотропной модели и обсуждается нетривиальная зависимость корнельского потенциала от граничных условий для поля дилатона и параметра анизотропии. Исследуются конкретные формы зависимости натяжения струны от температуры $\sigma(T)$ и их связь с граничным условием для скалярного поля. В результате предлагается граничное условие, которое позволяет фитировать поведение натяжения струны для КХД на решетке [117].

Вычисления для моделей тяжелых и легких кварков существенно различаются, поскольку решения для модели тяжелых кварков могут быть выражены явно, в отличие от модели легких кварков, где решение представлено в квадратурах. Поэтому исследование анизотропной модели для легких кварков является более сложной задачей, чем для тяжелых.

3.2 Решения для модели легких кварков

Для построения фазовой диаграммы конфайнмент/деконфайнмент и ее последующего анализа нам потребуется подробнее изучить полученное решение для легких кварков в Главе 1 с $\nu \geq 1$ и $c_B = 0$.

3.2.1 Функция почернения $g(z)$

Функция почернения без магнитного поля имеет вид:

$$g = 1 - \frac{\int_0^z \left(1+b\,\xi^2\right)^{3a} \xi^{1+\frac{2}{\nu}}\, d\xi}{\int_0^{z_h} \left(1+b\,\xi^2\right)^{3a} \xi^{1+\frac{2}{\nu}}\, d\xi} + \frac{2\mu^2 c}{L^2\left(1-e^{c z_h^2}\right)^2} \int_0^z e^{c\xi^2} \left(1+b\,\xi^2\right)^{3a} \xi^{1+\frac{2}{\nu}}\, d\xi$$
$$\times \left[1 - \frac{\int_0^z \left(1+b\,\xi^2\right)^{3a} \xi^{1+\frac{2}{\nu}}\, d\xi}{\int_0^{z_h} \left(1+b\,\xi^2\right)^{3a} \xi^{1+\frac{2}{\nu}}\, d\xi} \frac{\int_0^{z_h} e^{c\xi^2} \left(1+b\,\xi^2\right)^{3a} \xi^{1+\frac{2}{\nu}}\, d\xi}{\int_0^z e^{c\xi^2} \left(1+b\,\xi^2\right)^{3a} \xi^{1+\frac{2}{\nu}}\, d\xi}\right]. \qquad (3.1)$$

На Рис.9 мы видим поведение $g(z)$ для различных значений химических потенциалов и параметров анизотропии. Для нулевого μ функция почернения монотонно убывает (Рис.9.A), ненулевые химические потенциалы приводят к появлению второго горизонта, значение которого убывает с увеличением μ. Для маленьких μ второй горизонт не имеет значения, но в какой-то момент он становится меньше фиксированного и продолжает уменьшаться при увеличении μ. С этого момента он начинает играть главную роль, и фиксированный горизонт теряет фактическое влияние.

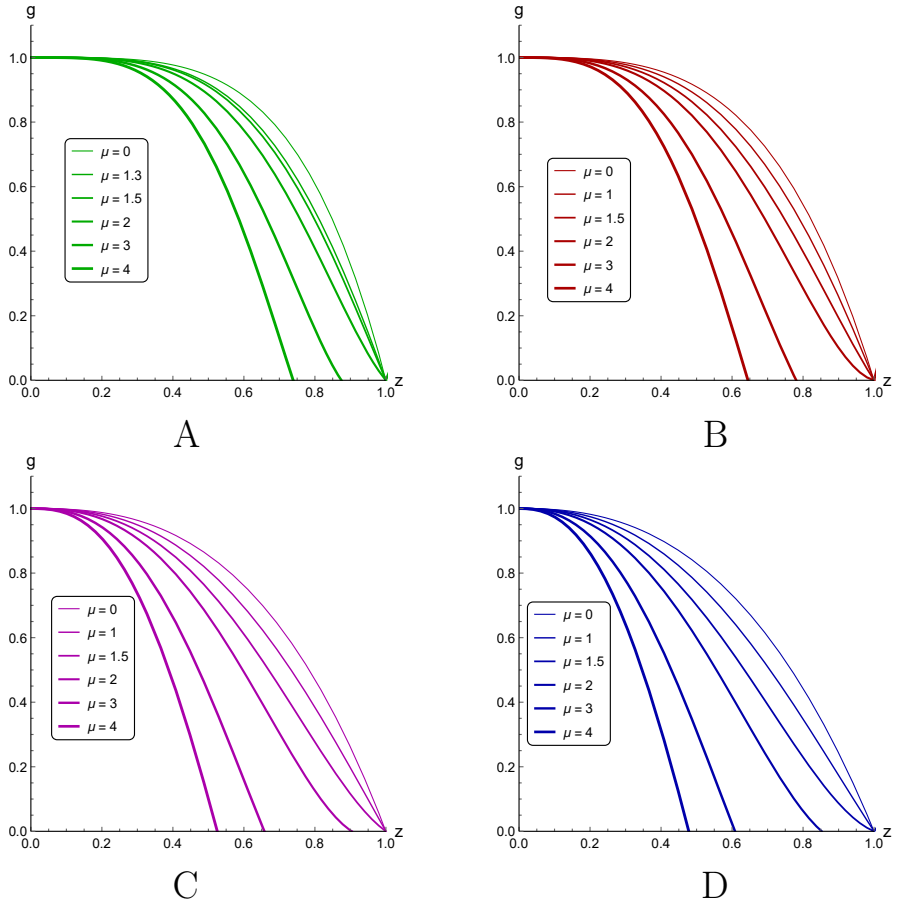


Рис. 9: Функция почернения $g(z)$ для различных μ в изотропном (A) и анизотропном случаях для $\nu = 1.5$ (B), $\nu = 3$ (C), $\nu = 4.5$ (D); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$, $z_h = 1$.

На Рис.10 показаны функции почернения для различных ν и фиксированного химического потенциала. Для нулевого химического потенциала (Рис.10.A) функция почернения убывает быстрее вблизи горизонта для меньших ν, и эта тенденция сохраняется для ненулевых значений μ в той или иной форме. Второй (нефиксированный) горизонт меньше для больших значений ν (Рис.10.C,D).

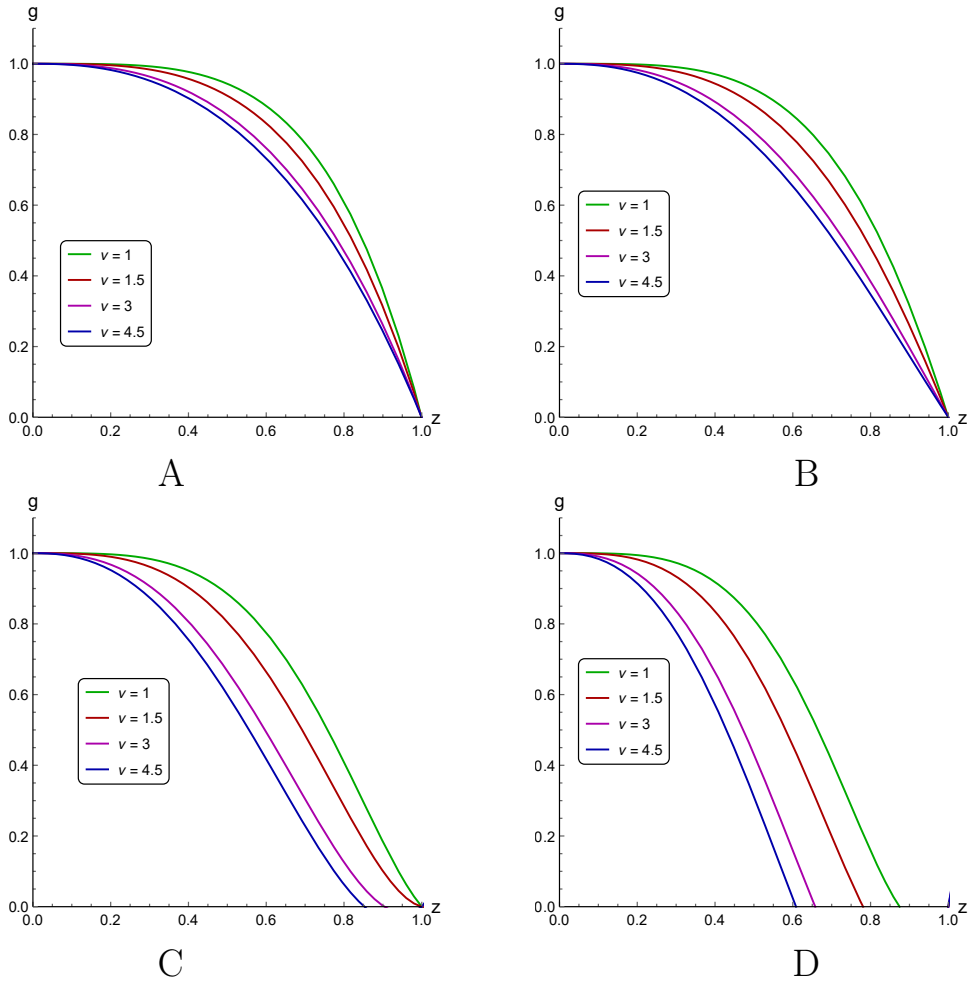
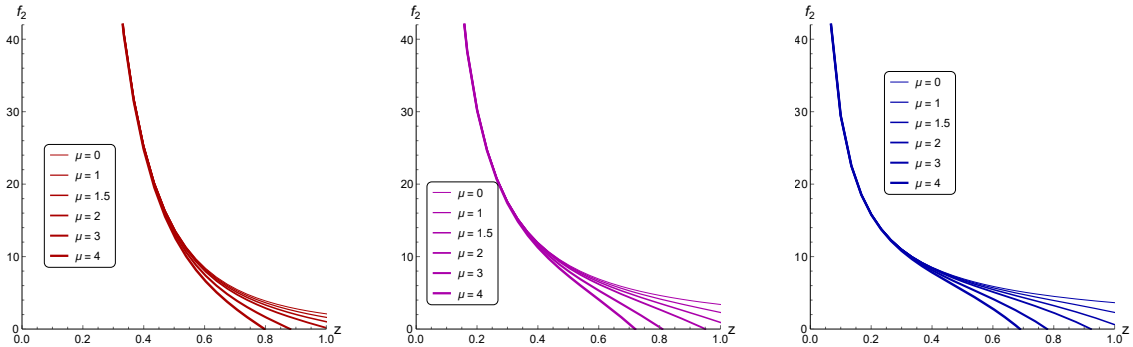
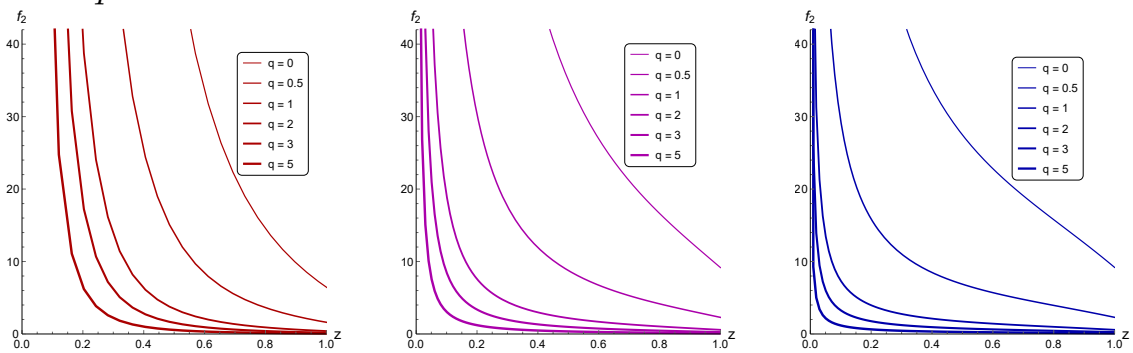


Рис. 10: Функция почернения $g(z)$ в изотропном и анизотропном случаях ($\nu = 1,\ 1.5,\ 3,\ 4.5$) для $\mu = 0$ (A), $\mu = 1$ (B), $\mu = 2$ (C) и $\mu = 3$ (D); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$, $z_h = 1$.



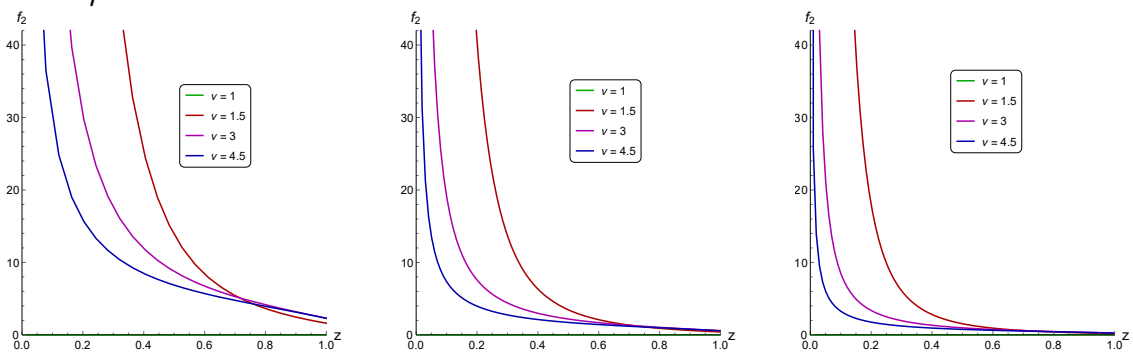
A B C

Рис. 11: Функция взаимодействия $f_2(z)$ для разных μ в анизотропных случаях $\nu = 1.5$ (A), $\nu = 3$ (B), $\nu = 4.5$ (C); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$, $z_h = 1$ и $q = 1$.



A B C

Рис. 12: Функция взаимодействия $f_2(z)$ для разных q в анизотропных случаях $\nu = 1.5$ (A), $\nu = 3$ (B), $\nu = 4.5$ (C); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$, $z_h = 1$ и $\mu = 1$.



A B C

Рис. 13: Функция взаимодействия $f_2(z)$ в изотропном и анизотропном случаях ($\nu = 1,\ 1.5,\ 3, 4.5$) при $q = 1$ (A), $q = 2$ (B), $q = 3$ (C); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$, $z_h = 1$ и $\mu = 1$.

3.2.2 Функция взаимодействия $f_2(z)$

Для f_2 получается выражение:

$$f_2 = -\left(\frac{z}{L}\right)^{1-\frac{4}{\nu}} \frac{e^{2\mathcal{A}}}{L\,q^2}\left[2g'\,\frac{\nu-1}{\nu} + 6g\,\frac{\nu-1}{\nu}\left(\mathcal{A}' - \frac{2\,(\nu+1)}{3\nu z}\right)\right]. \tag{3.2}$$

На Рис.11 показаны функции взаимодействия $f_2(z)$ и их поведение для различных значений химических потенциалов и параметров анизотропии. При нулевом химическом потенциале функция взаимодействия стремится к нулю, и чем больше μ и ν, тем быстрее убывает $f_2(z)$. Это также видно на Рис.13. Напротив, при большем заряде q $f_2(z)$ убывает медленнее при фиксированном значении химического потенциала (Рис.12). В изотропном случае $f_2(z) \equiv 0$ (Рис.13).

Соответствующие решения требуют положительных значений f_2. Как видно из графиков на Рис.10-13, рассматриваемая область удовлетворяет этому требованию.

Обратим внимание, что функция f_1 выбирается нами, в то время как f_2 находится из уравнений движения. Причина этого заключается в следующем. Несмотря на то, что f_1 и f_2 включаются в действие симметрично, их роли совершенно разные. Функция взаимодействия f_1 обеспечивает химический потенциал и связана со спектром Редже, в то время как f_2 определяет анизотропию. Мы используем электрический анзац для первого поля Максвелла и магнитный для второго, как в [56]. Технически можно зафиксировать f_2 и найти f_1 из уравнений движения, но у нас нет ограничений и требований к форме функции f_2.

3.2.3 Скалярное поле $\phi(z)$

Необходимо воспроизвести правильное поведение натяжения струны в зависимости от температуры. Условие $z_0 = z_h$ дает некорректное поведение зависимости натяжения от температуры. В этом случае натяжение $\sigma(T)$ возрастает с ростом T [118]. Причем для случаев тяжелых кварков и легких кварков ситуация одинакова. Решение с граничным условием $\phi(z_0) = 0$ дает

$$\phi = \int_{z_0}^{z} \frac{2\sqrt{\nu - 1 + (2(\nu-1) + 9a\nu^2)\,b\,\xi^2 + (\nu - 1 + 3a(1+2a)\nu^2)\,b^2\,\xi^4}}{(1+b\xi^2)\,\nu\,\xi}\,d\xi. \tag{3.3}$$

В анизотропном случае для $z_0 = 0$ поле дилатона имеет логарифмическую расходимость $\phi(z) \sim \int_0^z dz/z$. В изотропном случае для поля дилатона расходимостей нет, и выражение упрощается как:

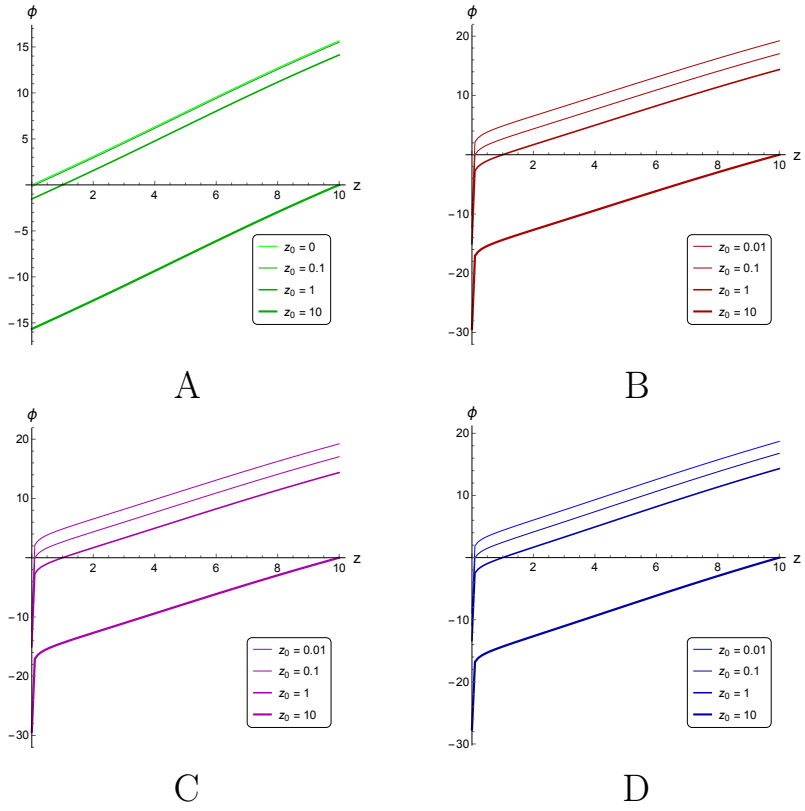


Рис. 14: Скалярное поле $\phi(z)$ в изотропном (A) и анизотропном случаях для $\nu = 1.5$ (B), $\nu = 3$ (C) и $\nu = 4.5$ (D) для $z_0 = 0,\ 0.01,\ 0.1,\ 1,\ 10$; $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$.

$$\phi_{iso} = \int_{z_0}^{z} \frac{2\sqrt{9ab + (3a + 6a^2)\, b^2\, \xi^2}}{(1 + b\xi^2)}\, d\xi. \tag{3.4}$$

Граничные условия сильно влияют на температурную зависимость натяжения струны (т.е. на коэффициент в линейном члене корнельского потенциала). Натяжение струны должно уменьшаться при повышении температуры и падать до нуля после фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент [119, 120]. Чтобы сохранить это поведение, с одной стороны, и избежать расходимостей в анизотропных случаях, с другой стороны, мы обобщаем граничное условие для поля дилатона как $\phi(z_0) = 0$ [121], где z_0 может быть функцией z_h. Условия $z_0 = z_h$ [57] или $z_0 = 0$ [42] — это частные случаи.

Как мы видим на Рис.14.A, даже $z_0 = 0.1$ с трудом можно отличить от $z_0 = 0$ в изотропном случае. Это позволяет предположить, что результаты для достаточно малых z_0 воспроизводят правильное поведение скалярного поля. С другой стороны, разница между случаями различных z_0 может

быть использована для фитирования экспериментальных данных. Зависимость поля дилатона от z — это монотонно возрастающая функция (Рис.14). Эта функция имеет конечное отрицательное значение вблизи $z = 0$ в изотропном случае и убывает быстро в анизотропных случаях (Рис.14.B-D). Мы можем также увидеть в этом случае, что поведение $\phi(z)$ зависит от параметра анизотропии ν довольно слабо.

Поскольку функция $\phi(z)$ монотонна, можно исследовать f_1 и f_2 как функции ϕ (Рис.15). Обе функции убывают быстро и монотонно с увеличением ϕ. Первая (верхняя) строка на Рис.15 представляет $f_1(\phi)$ (Рис.15.A) и $f_2(\phi)$ (Рис.15.B) для $z_0 = 0.01$ и различных анизотропий в логарифмическом масштабе (кроме $f_1(\phi)$ для $\nu = 1$). Вторая (нижняя) строка показывает подобные графики для $z_0 = 0.1$. Увеличение значения z_0 оказывает довольно слабое влияние на форму функций взаимодействия и в основном смещает их влево, к более меньшим значениям ϕ.

3.2.4 Скалярный потенциал $V(\phi)$

Для скалярного потенциала получается:

$$V = -\frac{3g\,z^2 e^{-2\mathcal{A}}}{L}\left[\mathcal{A}'' + 3\mathcal{A}'^2 + \left(\frac{3}{2}\,\frac{g'}{g} - \frac{3(\nu+1)}{\nu z}\right)\mathcal{A}' - \frac{1}{\nu z}\left(\frac{4+5\nu}{6}\,\frac{g'}{g} - \frac{2(\nu+1)\,(2\nu+1)}{3\nu z}\right) + \frac{g''}{6g}\right], \tag{3.5}$$

что переходит в (2.32) из [42] для $L = \nu = 1$. Можно видеть, что потенциал $V(z)$ (3.5) не зависит от граничного условия для дилатонного поля, поскольку система уравнений (1.13)–(1.19) включает в себя производную дилатонного поля, но не само поле дилатона. Однако поведение $V(\phi)$ зависит от него.

На Рис.16 представлены графики $V(\phi, \mu)$ для различных z_0. Скалярный потенциал изображен до горизонта, т.е. $\phi(\epsilon \to 0) \leq \phi \leq \phi(z_h)$. Мы можем увидеть, что увеличение значения z_0 не сильно влияет на форму $V(\phi)$, только сдвигает всю кривую влево к меньшим значениям ϕ. Влияние химического потенциала на скалярное поле заметно, но слабо вблизи горизонта, и поэтому им можно пренебречь.

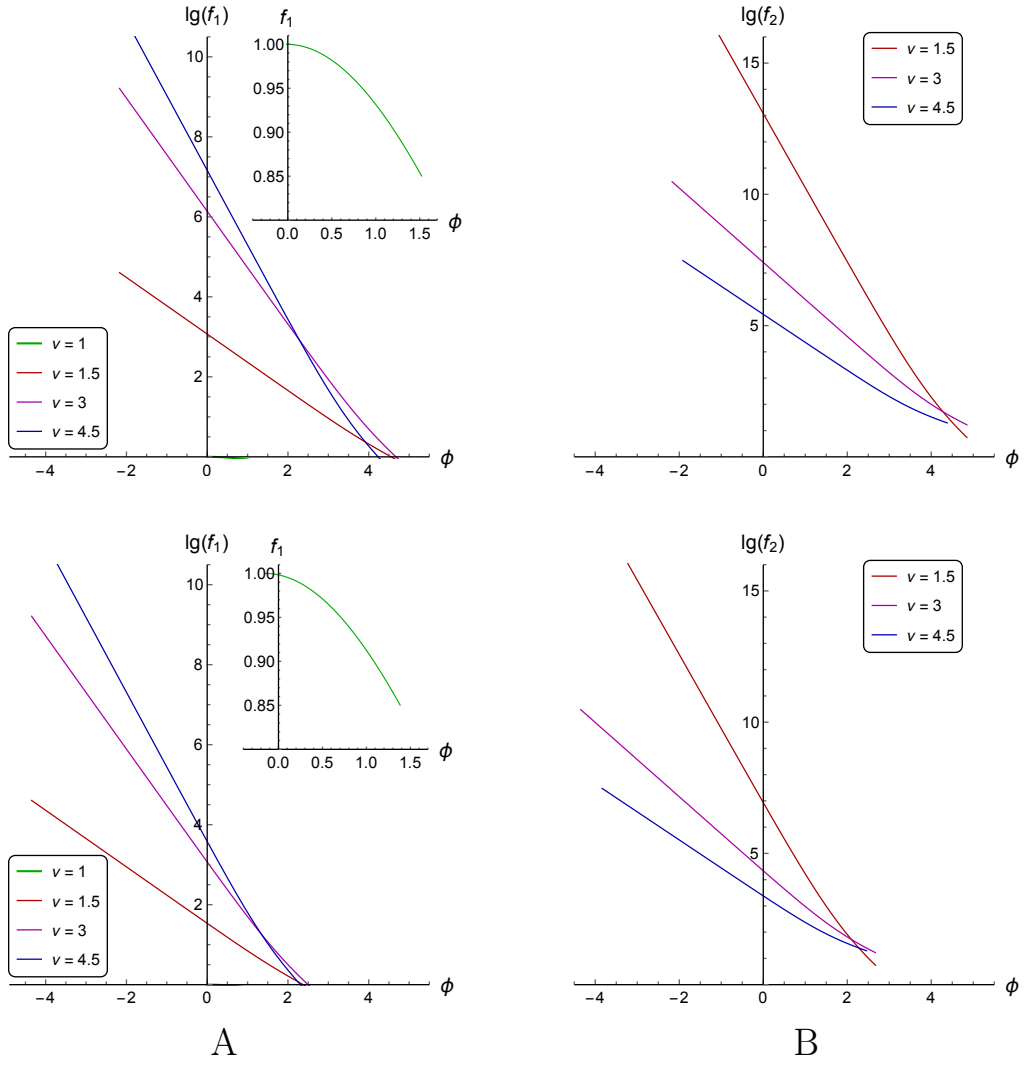


Рис. 15: Функции взаимодействия $f_1(\phi)$ (A) и $f_2(\phi)$ (B) в логарифмическом масштабе для различной анизотропии ν, $z_0 = 0.01$ (1-ая строка) и $z_0 = 0.1$ (2-ая строка), $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$ и $q = 1$.

3.3 Термодинамика модели

Температура в данной модели может быть записана как:

$$T = \frac{|g'|}{4\pi}\Big|_{z=z_h} = \frac{1}{4\pi}\left|-\frac{\left(1+bz_h^2\right)^{3a} z_h^{1+\frac{2}{\nu}}}{\int_0^{z_h}\left(1+b\,\xi^2\right)^{3a}\xi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\xi}\left[1-\frac{2\mu^2 c\,e^{2cz_h^2}}{L^2\left(1-e^{cz_h^2}\right)^2}\right.\right. \tag{3.6}$$
$$\left.\left.\times\left(1-e^{-cz_h^2}\frac{\int_0^{z_h} e^{c\xi^2}\left(1+b\,\xi^2\right)^{3a}\xi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\xi}{\int_0^{z_h}\left(1+b\,\xi^2\right)^{3a}\xi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\xi}\right)\int_0^{z_h}\left(1+b\,\xi^2\right)^{3a}\xi^{1+\frac{2}{\nu}}\,d\xi\right]\right|.$$

Рис.17.A показывает, что в изотропном случае для $\mu = 0$ температура – это монотонно убывающая функция горизонта.

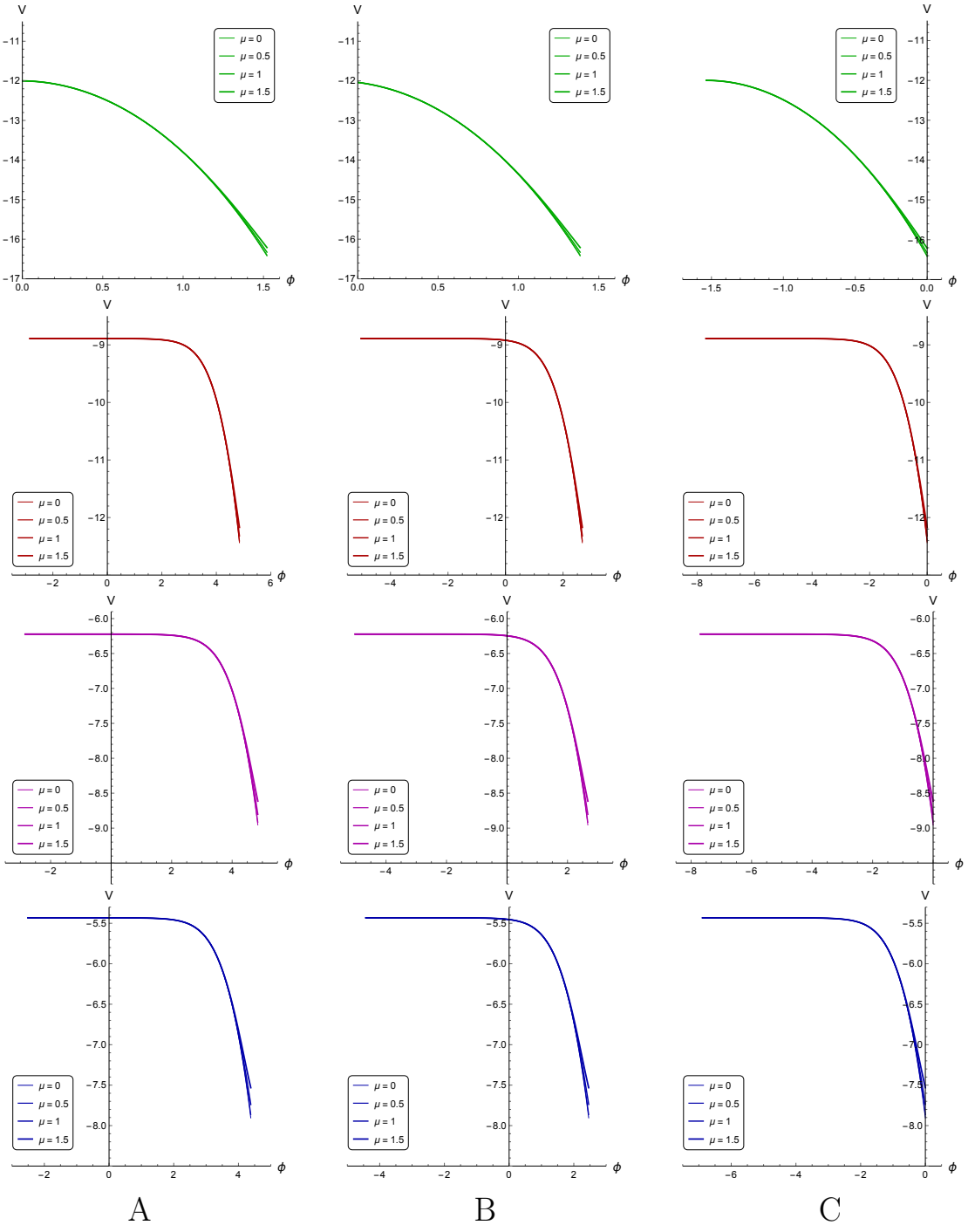


Рис. 16: Потенциал скалярного поля $V(\phi)$ для различных μ в изотропном (1-ая строка) и анизотропном случаях для $\nu = 1.5$ (2-ая строка), $\nu = 3$ (3-я строка) и $\nu = 4.5$ (4-ая строка) для различных $z_0 = 0.01$ (A), $z_0 = 0.1$ (B) и $z_0 = 1$ (C); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$ и $z_h = 1$.

Увеличение химического потенциала делает функцию $z_h(T)$ трехзначной на некотором интервале, и появляется локальный минимум. Как мы увидим ниже, это напрямую связано с фазовым переходом Хокинга-

Пейджа. Действительно, в изотропном случае фазовый переход первого рода для легких кварков не должен существовать вблизи нулевого химического потенциала, и мы должны увидеть пересечение (Рис.27.B). Чем больше химический потенциал, тем меньшим становится значение температуры при этом локальном минимуме. При $\mu \approx 0.557$ локальная минимальная температура $T_{min} = 0$ и появляется "второй горизонт".

В анизотропном случае подобное поведение температуры сохраняется, но это трехзначная функция уже для $\mu = 0$ и второй горизонт появляется примерно на $\mu \approx 0.852$ для $\nu = 1.5$ (Рис.17.B), $\mu \approx 1.218$ для $\nu = 3$ (Рис.17.C) и $\mu \approx 1.336$ для $\nu = 4.5$ (Рис.17.D). Это указывает на то, что линия фазового перехода типа Хокинга-Пейджа должна существовать даже

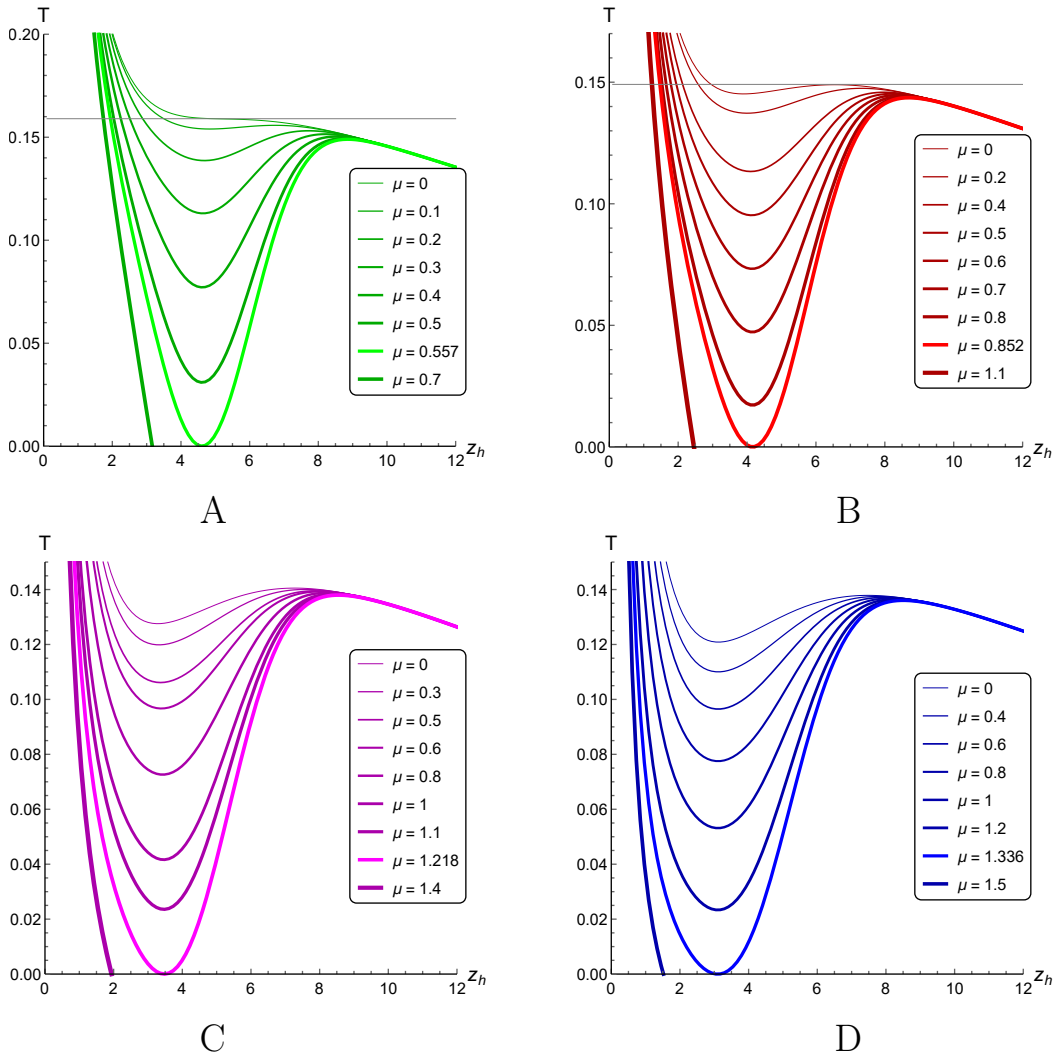


Рис. 17: Температура как функция горизонта для различных μ в изотропном (A) и анизотропном случаях для $\nu = 1.5$ (B), $\nu = 3$ (C), $\nu = 4.5$ (D); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$.

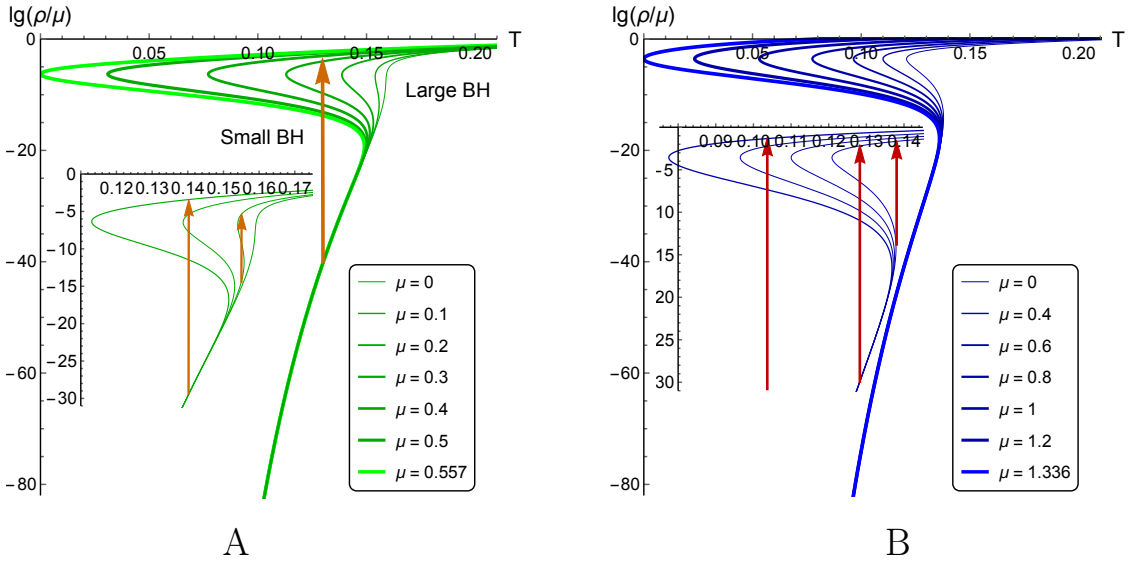


Рис. 18: Плотность $\rho/\mu(T)$ в логарифмическом масштабе для различных μ для $\nu = 1$ (A) и $\nu = 4.5$ (B); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$. Внутренние графики показывают увеличенные фрагменты основных графиков.

при отсутствии химического потенциала, и Рис.19.B подтверждает это.

Энтропия в данной модели имеет вид:

$$s = \left(\frac{L}{z_h}\right)^{1+\frac{2}{\nu}} \frac{\left(1+bz_h^2\right)^{-3a}}{4}. \tag{3.7}$$

Она убывает монотонно и быстро с увеличением горизонта z_h (Рис.19.A).

Фазовый переход большая/малая черная дыра (BH-BH), вызванный трехзначностью функции температуры, приводит к скачку плотности ρ, которая является коэффициентом в разложении A_t:

$$A_t = \mu - \rho z^2 + \cdots = \mu - \frac{c\mu z^2}{1-e^{cz_h^2}} + \ldots, \qquad \rho = -\frac{c\mu}{1-e^{cz_h^2}}. \tag{3.8}$$

На Рис.18 отношение ρ/μ в зависимости от температуры для первичного изотропного решения ($\nu = 1$, Рис.18.A) и анизотропного решения ($\nu = 4.5$, Рис.18.B) изображено в логарифмическом масштабе. Вертикальные красные стрелки показывают направление перехода BH-BH. Функция ρ/μ является трехзначной функцией T как и ожидалось, и мы можем видеть, что этот фазовый переход из маленьких черных дыр (большое z_h) в большие (малое z_h) сопровождается резким повышением плотности при любом соответствующем химическом потенциале.

Чтобы получить линию перехода типа Хокинга-Пейджа (BH-BH фазовый переход), нам нужно рассмотреть свободную энергию как функцию

температуры:

$$F = \int_{z_h}^{z_{h_2}} s\, T' dz. \tag{3.9}$$

Когда $T \geq 0$, т.е. для малых химических потенциалов, мы интегрируем

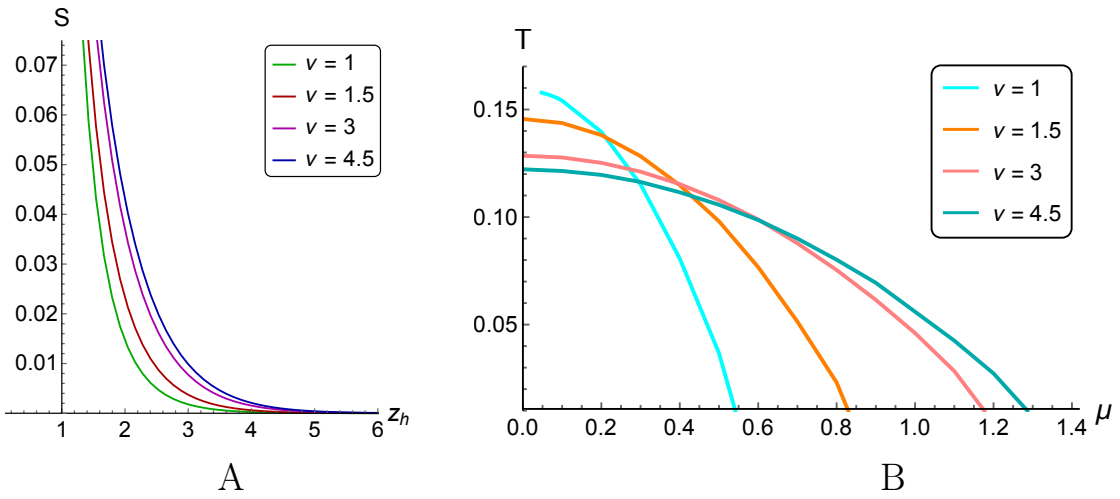


Рис. 19: Энтропия как функция горизонта (A) и линии фазового перехода типа Хокинга-Пейджа $T(\mu)$ для изотропного ($\nu = 1$) и анизотропного ($\nu = 1.5,\ 3,\ 4.5$) случаев (B); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$.

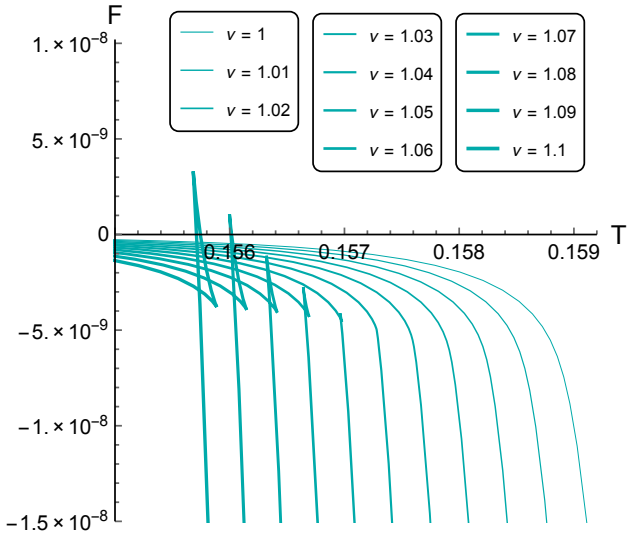


Рис. 20: Свободная энергия как функция температуры $F(T)$ для $\mu = 0$ в изотропном ($\nu = 1$) и слабо анизотропном ($\nu = 1.01,\ 1.02,\ 1.03,\ 1.04,\ 1.05,\ 1.06,\ 1.07,\ 1.08,\ 1.09,\ 1.1$) случаях; $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$.

до $z_{h_2} = \infty$. Когда появляется второй горизонт, где $T = 0$, следует интегрировать до его значения, т.е. до $z_{h_2} = 4.609$ для $\nu = 1$, $\mu = 0.557$, до $z_{h_2} = 4.163$ для $\nu = 1.5$, $\mu = 0.852$ и до $z_{h_2} = 3.102$ для $\nu = 4.5$, $\mu = 1.336$. Эти условия определяют конечную точку фазовой диаграммы, т.е. максимально допустимый химический потенциал μ_{max} для выбранного ν.

На Рис.19.B изображен фазовый переход типа Хокинга-Пейджа для $\nu =$ 1, 1.5, 3, 4.5. В изотропном случае фазовый переход BH-BH начинается с критической точки $\mu_c = 0.04779$, $T_c = 0.1578$, что полностью согласуется с предыдущим результатом [42].

Для фазового перехода типа Хокинга-Пейджа свободная энергия должна быть многозначной функцией температуры. Графически это отображается в виде "ласточкиного хвоста". Точка, в которой кривая свободной энергии пересекается сама с собой, определяет температуру фазового перехода типа Хокинга-Пейджа. На Рис.20 изображена свободная энергия в зависимости от температуры для различных значений ν в отсутствие химического потенциала. Мы видим гладкую кривую свободной энергии при $1 \leq \nu \leq 1.04$, поэтому никакого самопересечения и фазового перехода типа Хокинга-Пейджа для $\mu = 0$ не существует. При $\nu = 1.05$ на кривой появляется тупой угол — это зародыш "ласточкиного хвоста". Чем больше становится μ, тем более выраженным является "ласточкин хвост". Таким образом, включение анизотропии приводит к тому, что разрыв между $\mu = 0$ и начальной точкой линии фазового перехода типа Хокинга-Пейджа на фазовой диаграмме конфайнмент/деконфайнмент закрывается. Небольшой анизотропии, начиная с $\nu = 1.05$, достаточно, чтобы сделать этот тип фазового перехода существующим для всех значений химического потенциала $0 \leq \mu \leq \mu_{max}$.

3.4 Времениподобные петли Вильсона

Следуя изложенному подходу в Главе 2, рассматриваются петли Вильсона в анизотропной метрике и находятся условия фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент. Вычисления петель Вильсона сделаны в струнном фрейме. Для определения условия фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент и струнного натяжения σ_{DW} необходимо изучить асимптотики действия Намбу-Гото для пробной струны S при большой характерной длине струны ℓ. При $\ell \to \infty$ имеем

$$S \sim \sigma_{DW}\, \ell. \tag{3.10}$$

Следуя Главе 2, мы рассматриваем мировой лист, параметризованный как

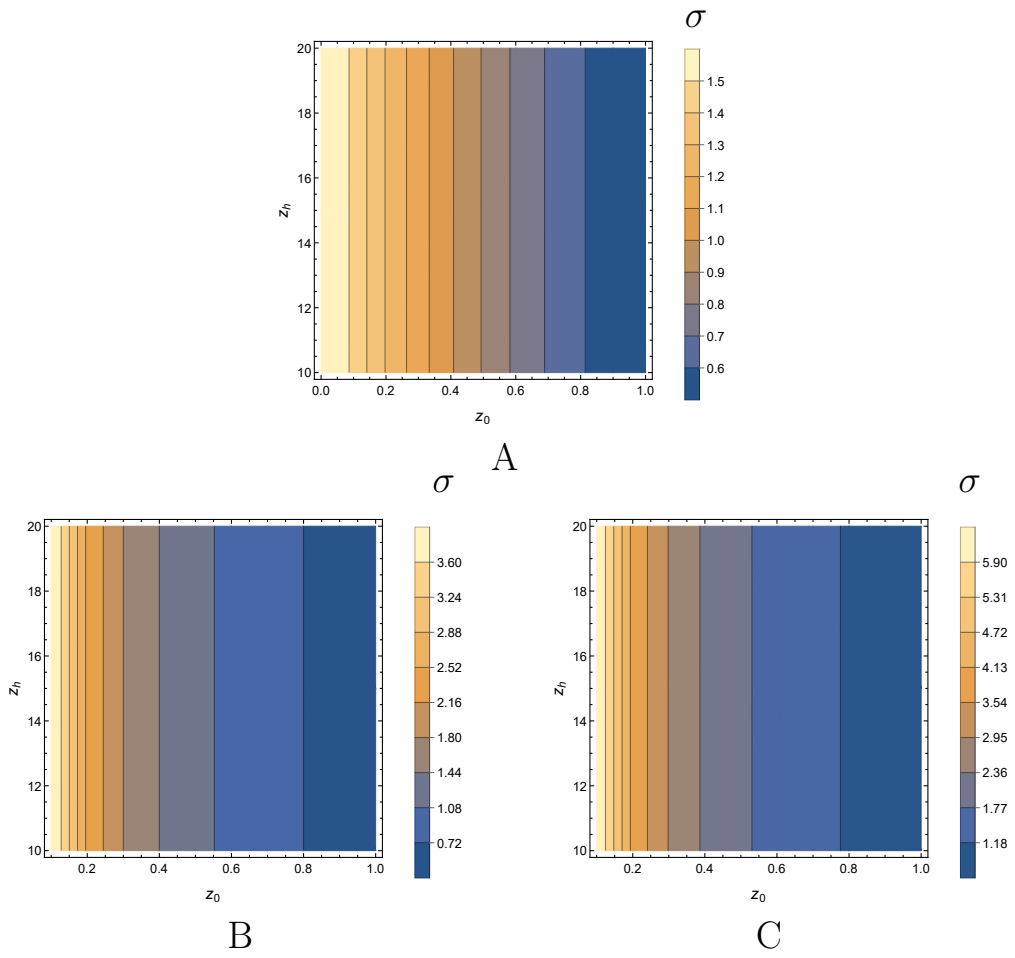


Рис. 21: Контурный график для натяжения струны как функции z_0 и z_h для $\mu = 0$, $\nu = 1$ (A) и для $\mu = 0.2$, $\nu = 4.5$, продольное (B) и поперечное (C) направления; $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$.

$$X^0 \equiv t,\ X^1 \equiv x = \xi\cos\theta,\ X^2 \equiv y_1 = \xi\sin\theta,\ X^3 \equiv y_2 = const,\ X^4 \equiv z = z(\xi).$$

Угол θ определяется ориентацией петли Вильсона в рассматриваемой метрике. Натяжение струны

$$\sigma(z_{DW}, z_0) = \frac{\mathfrak{b}(z_{DW})}{z^2}\, e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi(z_{DW},z_0)} \sqrt{g(z_{DW})\left(z^{2-\frac{2}{\nu}}\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)}, \quad (3.11)$$

очевидно, зависит от граничных условий для поля дилатона. Точка z_{DW} определяет положение динамической стенки, т.е. точку, где $\partial\sigma/\partial z = 0$. В изотропном случае этот результат совпадает с [42].

Представлена зависимость натяжения струны от точки z_0 и горизонта z_h для изотропного случая (Рис.21.A) и обеих ориентаций в анизотропном случае (Рис.21.B,C). Поведение $\sigma(T)$ аналогично для $\nu = 1$ и $\nu \neq 1$. Добавление химического потенциала также не меняет основной картины. Для

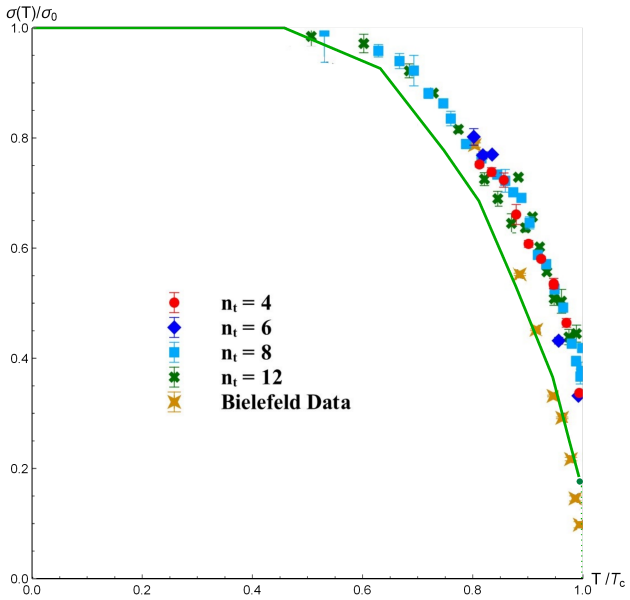


Рис. 22: Зеленая кривая показывает натяжение струны, как функцию температуры для $z_0 = 10\exp(-z_h/4)+0.1$, $\mu = 0$, $\nu = 1$, $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$. Точки с различными обозначениями показывают результаты вычислений на решетке, полученных в [119].

фиксированного значения z_h большее значение z_0 приводит к меньшему σ. Однако натяжение струны для фиксированного z_0 зависит от z_h слабо во всех случаях (Рис.24). Из-за граничного условия $z_0 = const < z_h$ натяжение струны медленно уменьшается с температурой до самого конца, где оно резко падает до нуля. Это поведение сохраняется для любых значений ν, μ и θ.

Поведение натяжения струны в КХД на решетке обсуждалось в [119, 120, 122, 123]. Было показано, что $\sigma(T)$ – это убывающая функция, но разные факторы могут влиять на конкретную форму кривой. Поэтому фитирование экспериментальных данных может помочь уточнить параметры модели. В частности, интересно рассмотреть границу z_0, как функцию $z_0 = f(z_h, z_{DW}, \dots)$ и использовать ее для фитирования решеточных результатов.

Чтобы получить наилучшее соответствие изотропному $\sigma(T)$ с вычислениями на решетке [119, 120], мы используем функцию

$$z_0 = 10\exp(-z_h/4) + 0.1. \tag{3.12}$$

В этом случае натяжение струны убывает значительно быстрее, чем для $z_0 = 0$ (Рис.22). Для анизотропных случаев, где у нас отсутствуют решеточные данные, мы используем подобную функцию (3.12) и получаем

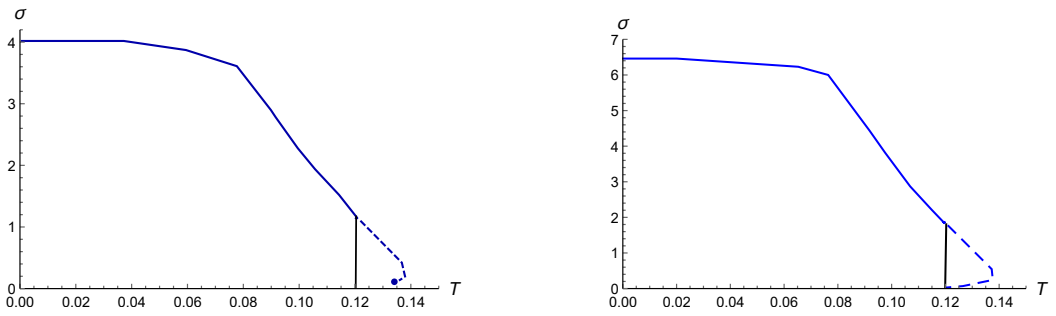


Рис. 23: Натяжение струны как функция температуры для $z_0 = 10\exp(-z_h/4) + 0.1$, $\mu = 0.2$, $\nu = 4.5$, продольная (A) и поперечная (B) ориентация; $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$. Сплошные линии – реализованные значения натяжения струны; черные сплошные линии (A,B) — BH-BH фазовый переход; пунктирные синии линии – натяжение струны для температур выше, чем температура BH-BH фазового перехода, $T > T_{BH-BH}$.

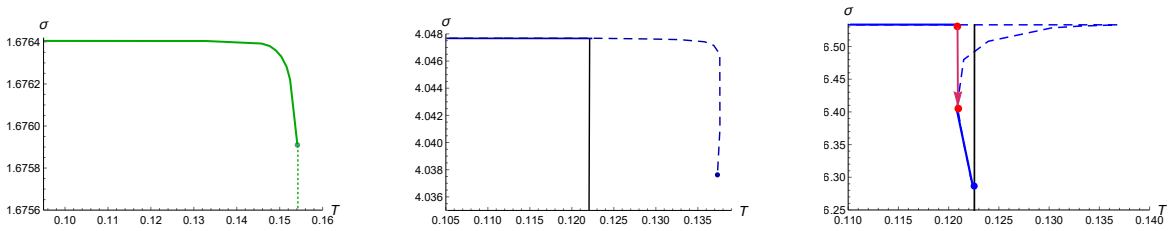
температурную зависимость (Рис.23.A и B).

На Рис.24, 25 представлено натяжение струны в зависимости от температуры для различных z_0 и различных значений химического потенциала μ. Черные сплошные линии на графиках B (продольная ориентация) и C (поперечная ориентация) показывают BH-BH фазовый переход, когда связная конфигурация струны в первой термодинамической фазе изменяется на несвязанную конфигурацию струны во второй термодинамической фазе; пунктирные синие линии показывают значения натяжения струны для температур, превышающих температуру BH-BH фазового перехода. В анизотропных случаях $\nu \neq 1$ (A, B) натяжение струны $\sigma(T)$ может быть многозначной функцией для некоторых значений температуры.

На всех графиках на Рис.24 и Рис.25 $\sigma(T)$ может быть многозначной функцией из-за многозначной функции температуры T от размера горизонта z_h. Чтобы понять поведение натяжения струны в зависимости от температуры, мы должны использовать знания о структуре BH-BH фазовых переходов.

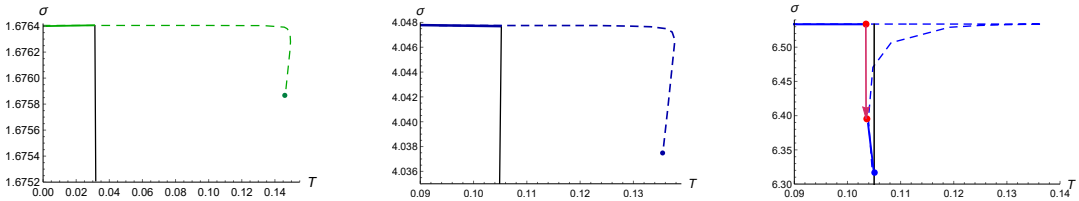
В рассматриваемом случае имеются две термодинамические фазы — малые черные дыры и большие черные дыры — и фазовый переход между ними. Конечная точка $\sigma(T)$ на всех графиках обозначена синей или зеленой точкой. После этой точки динамическая стена (DW) для эффективного потенциала больше не существует, и связанная конфигурация струны исчезает, что указывает на фазовый переход для петли Вильсона.

На Рис.24, 25 сплошные линии (вертикальные) показывают BH-BH фа-



A B C

Рис. 24: Натяжение струны как функция от температуры для $z_0 = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 1$ (A) и $z_0 = 0.1$, $\mu = 0$, $\nu = 4.5$, продольная (B) и поперечная (C) ориентация; $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$. Сплошные линии – реализованные значения натяжения струны; зеленая пунктирная линия (A) – фазовый переход вильсоновской петли; черные сплошные линии (B,C) — BH-BH фазовый переход; пунктирные синии линии – натяжение струны для температур выше, чем температура BH-BH фазового перехода, $T > T_{BH-BH}$. В поперечном случае (C) натяжение струны – это трехзначная функция и натяжение струны имеет фазовый переход, который происходит при меньших температурах, чем температура BH-BH фазового перехода. Красная стрелка показывает скачки натяжения струны.



A B C

Рис. 25: Натяжение струны как функция от температуры для $z_0 = 0$, $\mu = 0.5$, $\nu = 1$ (A) и $z_0 = 0.1$, $\mu = 0.5$, $\nu = 4.5$, продольная (B) и поперечная (C) ориентация; $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$. Сплошные линии – реализованные значения натяжения струны; черные сплошные линии (A,B,C) — BH-BH фазовый переход; пунктирные линии – натяжение струны для температур выше, чем температура BH-BH фазового перехода, $T > T_{BH-BH}$, т.е. натяжения струны в нестабильной фазе. В поперечном случае (C) натяжение струны – это трехзначная функция и натяжение струны имеет фазовый переход, который происходит при меньших температурах, чем температура BH-BH фазового перехода. Красная стрелка показывает скачки натяжения струны.

зовый переход для выбранного набора параметров и ориентации. Для изотропного случая (Рис.25.A) и продольной ориентации в анизотропном случае (Рис.24.B, Рис.25.B) многозначная (обозначена пунктиром) ветка лежит

довольно далеко от перехода ВН-ВН и не мешает ему. Поперечная ориентация имеет специфическую особенность: многозначная ветвь пересекает линию перехода ВН-ВН и, таким образом, начинает играть значительную роль в общем процессе фазового перехода. Натяжение струны имеет фазовый переход при более низких температурах, чем температура ВН-ВН фазового перехода. При этой температуре связанная конфигурация струны с первым значением натяжения струны σ_1 в первой термодинамической фазе заменяется связанной конфигурацией струны со вторым значением натяжения струны σ_2 во второй термодинамической фазе, $\sigma_1 > \sigma_2$. Красные стрелки на Рис.24.С и Рис.25.С показывают эти скачки натяжения струны. Мы также видим, что ненулевой химический потенциал подавляет этот эффект, делая интервал, в котором самая нижняя часть многозначной $\sigma(T)$-ветви реализуется, более узким (сравнивая Рис.24.С для $\mu = 0$ и Рис.25.С для $\mu = 0.5$).

Чтобы получить полную картину фазовой структуры, нам нужно рассмотреть линии, соответствующие петлям Вильсона и зависящие от ориентации пары кварков. Здесь остаются применимыми все рассуждения Главы 2. Уравнения для динамической стенки записываются в виде:

$$-\frac{4abz}{1+bz^2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\phi'+\frac{g'}{2g}=\frac{2}{z}, \tag{3.13}$$

$$-\frac{4abz}{1+bz^2}+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\phi'+\frac{g'}{2g}=\frac{\nu+1}{\nu z} \tag{3.14}$$

для продольного (x) и поперечного (y) направлений соответственно.

Результирующие линии фазового перехода, определенные петлями Вильсона (наряду с линиями фазового перехода типа Хокинга-Пейджа) для изотропного и анизотропного случаев, показаны на Рис.26.

На Рис.26.А изображен изотропный случай. Фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент в основном определяется фазовым переходом типа Хокинга-Пейджа (ВН-ВН переход). Петля Вильсона доминирует в маленькой области кроссовера для $0 < \mu < 0.104$, т.е. до точки $(0.104, 0.153)$, где две линии фазовых переходов пересекаются.

Визуально в анизотропном случае изотропная линяя, связанная с петлей Вильсона, переходит в линию, соответствующую продольной петле Вильсона. Начиная с $\mu = 0$ продольная линия для петли Вильсона лежит выше линии перехода типа Хокинга-Пейджа и фактически не влияет на фазовый переход. При большей анизотропии линия продольной петли Вильсона имеет более низкие значения температуры, но разница между ней и

линией для перехода типа Хокинга-Пейджа увеличивается с ν (Рис.26.A-D). Линия фазового перехода, соответствующая поперечной петле Вильсона, почти совпадает с линией перехода типа Хокинга-Пейджа, поэтому нет очевидной области кроссовера, и влияние поперечной петли Вильсона и перехода типа Хокинга-Пейджа на линию фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент с трудом можно было различить друг от друга.

3.5 Обсуждение

В этой главе была рассмотрена анизотропная голографическая модель для легких кварков. Эта модель, инвариантная в поперечных направлениях с нетривиальной функцией анизотропии, поддерживается действием Эйнштейна с полем дилатона и двумя полями Максвелла. Аналогичная модель для тяжелых кварков была представлена в [57]. Были обнаружены характерные особенности, присущие описанию легких кварков в рамках голографического подхода. Рассмотрены термодинамические свойства и их влияние на фазовую диаграмму конфайнмент/деконфайнмент.

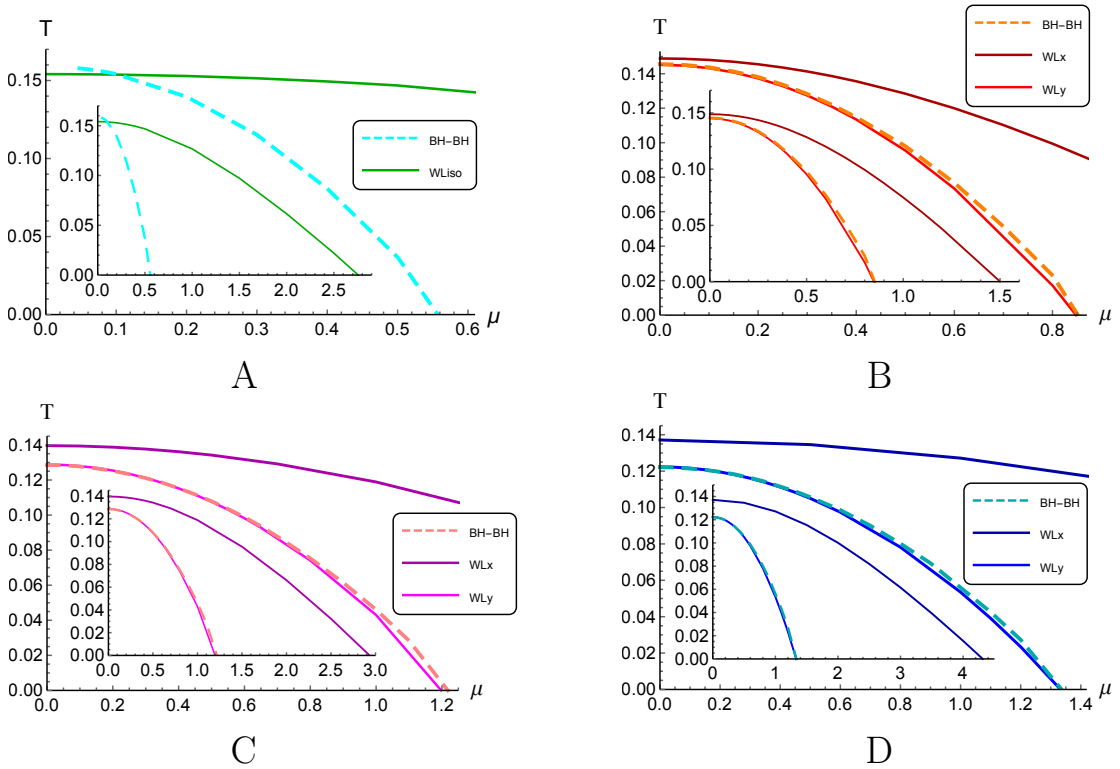


Рис. 26: Фазовая диаграмма конфайнмент/деконфайнмент в изотропном (A) и анизотропном случаях случаях для $\nu = 1.5$ (B), $\nu = 3$ (C), $\nu = 4.5$ (D); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$. Пунктирные линии показывают фазовые переходы типа Хокинга-Пейджа (BH-BH).

В отличие от модели тяжелых кварков (Рис.27.B) [57], линяя фазового перехода типа Хокинга-Пейджа длится до $T = 0$ и не пропадает при достаточно больших T (Рис.27.A).

Кроме того, продольная ориентация пар кварков не вносит вклад в фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент, поэтому влияние разделяется между переходом типа Хокинга-Пейджа и поперечной петлей Вильсона. Передача главной роли в фазовом переходе выглядит довольно плавно и не сопровождается скачками, как это было в модели тяжелых кварков.

Графики на Рис.28 показывают особенности фазовой диаграммы более подробно. Для $\nu = 3$ (Рис.28.C) и $\nu = 4.5$ (Рис.28.D) фазовый переход типа Хокинга-Пейджа доминирует для маленьких химических потенциалов (до $\mu = 0.3$ и $\mu = 0.2$ соответственно), затем поперечная петля Вильсона контролирует фазовый переход, обеспечивая узкую полосу кроссовера для больших химических потенциалов. Однако эти эффекты кажутся достаточно слабо влияющими на фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент для легких кварков.

При $\nu = 1.5$ линия для поперечной петли Вильсона лежит прямо под линией фазового перехода типа Хокинга-Пейджа, поэтому, строго говоря, именно поперечная составляющая определяет фазовый переход от конфайнмента к деконфайнменту (Рис.28.B). С другой стороны, линия фазового перехода типа Хокинга-Пейджа расположена слишком близко, чтобы сделать кроссовер ощутимым.

Отметим, что некоторые интересные особенности проявляются в модели легких кварков при малой анизотропии. Например, для слабой анизотропии

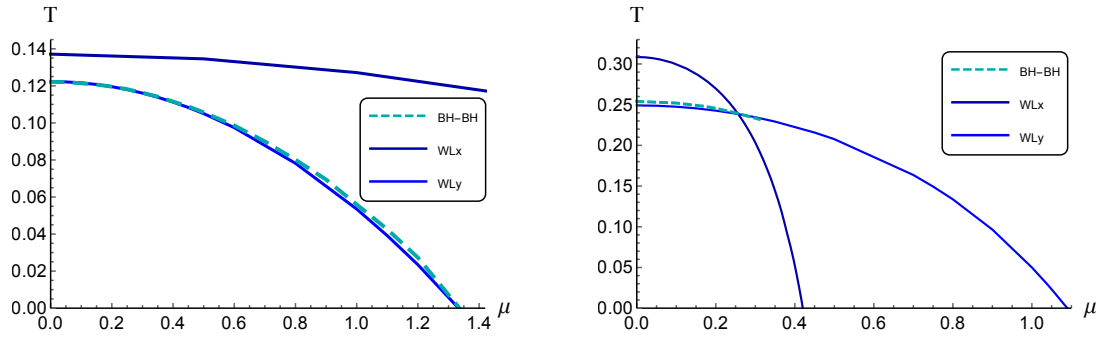


Рис. 27: Голографические фазовые диаграммы КХД для легких кварков (A) и для тяжелых кварков (B) в анизотропном случае [57]. Здесь фазовые переходы типа Хокинга-Пейджа (большая/малая черная дыра или BH-BH) обозначены пунктирными линиями. Фазовый переход для петли Вильсона для различных ориентаций (WLx и WLy) показан сплошными линиями.

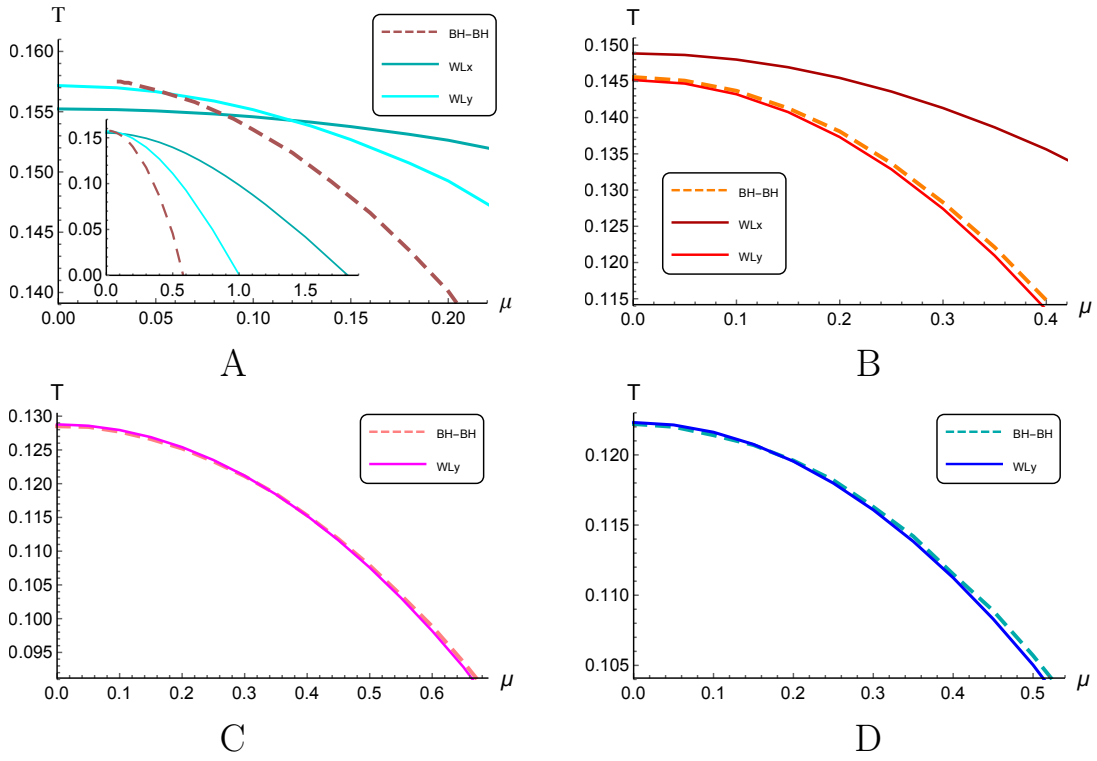


Рис. 28: Фазовые диаграммы конфайнмент/деконфайнмент при $\nu = 1.03$ (A), $\nu = 1.5$ (B), $\nu = 3$ (C), $\nu = 4.5$ (D); $a = 4.046$, $b = 0.01613$, $c = 0.227$.

$\nu = 1.03$ (Рис.28.A), где фазовый переход первого рода все еще конкурирует с фазовым переходом для петли Вильсона при малых химических потенциалах, а различная ориентация петель Вильсона уже существенно влияет на фазовую структуру.

Как правило, картина фазового перехода при такой незначительной анизотропии такая же, как и в изотропном случае. Когда включена анизотропия, область кроссовера сужается. Для $\nu = 1.03$ она заканчивается в точке $(0.085; 0.155)$. На самом деле длина кроссовера, по-видимому, является наиболее существенным проявлением анизотропии. Его ширина не может быть большой поскольку линии для продольных и поперечных петель Вильсона довольно близки друг к другу и при $\mu > 0.073$ обе они лежат выше линии перехода типа Хокинга-Пейджа и не влияют на фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент.

Благодаря изменению граничных условий для поля дилатона форма зависимости натяжения струны от температуры $\sigma(T)$ в изотропном случае может быть качественно согласована с результатами на решетке (Рис.22). Сохраняя то же граничное условие для анизотропного случая, мы получаем реалистичное поведение для натяжения струны. В обеих моделях для тяжелых и легких кварков $\sigma(T)$ может быть многозначной функцией для

высоких температур. Появление многозначной $\sigma(T)$ является следствием многозначной функции температуры T от размера горизонта z_h для некоторых наборов параметров. Конечная точка $\sigma(T)$ интерпретируется как точка фазового перехода, связанного с петлей Вильсона (т. е. от σ происходит скачок к нулю, и связанная конфигурация заменяется несвязанной). Также σ претерпевает скачок к нулю из-за ВН-ВН фазового перехода, где фазовый переход происходит из первой термодинамической фазы со связанной конфигурацией струны во вторую термодинамической фазу с несвязанной конфигурацией струны. Как было показано на Рис.24.С и Рис.25.С, натяжение струны σ претерпевает фазовый переход – скачок натяжения струны от σ_1 к значению натяжения струны σ_2, $\sigma_1 > \sigma_2$. Этот переход происходит при более низких температурах, чем температура ВН-ВН фазового перехода, и может быть интерпретирован как переход между фазой кваркония и адронной фазой КГП.

В обеих моделях (для тяжелых и легких кварков) $\sigma(T)$ может быть многозначной функцией для больших температур. Появление многозначного поведения $\sigma(T)$ интерпретируется как переход, связанный с петлей Вильсона (т. е. σ уходит в ноль, и связанная конфигурация заменяется несвязанной). Для слабой анизотропизации ($\nu = 1.01 \div 1.05$) переход ВН-ВН конкурирует с переходом для петли Вильсона, а при малых химических потенциалах ($\mu = 0 \div 0.1$) переход для петли Вильсона является доминирующим. Результирующие графики фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент на (μ, T)-плоскости для масс легких и тяжелых кварков в анизотропных средах показаны на Рис.27 и Рис.28. Мы видим, что структура фазовых переходов более сложна в анизотропном случае, чем в изотропном (Рис.27 и Рис.28 могут быть сравнены с Рис.2).

Глава 4. Голографическая анизотропная модель для тяжелых кварков с фазовым переходом конфайнмент/деконфайнмент

4.1 Постановка задачи

В этой главе рассматривается решение с двумя функциями анизотропии из Главы 1 для тяжелых кварков и изучается структура фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент для данной модели. Особое внимание уделяется изучению зависимости фазовой структуры от магнитного поля. Метрика поддерживается действием Эйнштейна с полем дилатона и тремя полями Максвелла. Анизотропная голографическая модель для тяжелых кварков с одной функцией анизотропии была рассмотрена в [57], а в Главе 2 описана фазовая диаграмма конфайнмент/деконфайнмент в этой же модели для ориентированных под углом петель Вильсона. Как показано в Главе 2, модель описывает кроссовер для фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент. Это происходит потому, что расположение на фазовой диаграмме линии перехода конфайнмент/деконфайнмент зависит от ориентации пары кварков относительно оси столкновения. Эта модель также указывает на взаимосвязь флуктуаций множественности, то есть энтропии зацепленности, с фазовыми переходами (Глава 5).

Рассматриваемая модель описывает два различных типа анизотропии: анизотропию для воспроизведения множественности от энергии (этот тип анизотропии поддерживается 2-м полем Максвелла в действии) и анизотропию, связанную с магнитным полем (этот тип поддерживается 3-м полем Максвелла). Первое поле Максвелла вводится для описания конечного ненулевого химического потенциала. Напомним, что фактор деформации выбран таким образом, чтобы воспроизвести типичную для тяжелых кварков фазовую структуру, подтвержденную вычислениями на решетке (т.н. "Columbia plot") [86–88]. Отметим, что на самом деле мы не вычисляем массы кварков и не включаем их в действие и уравнения движения. Модель эффективно демонстрирует свойства тяжелых или легких кварков при фазовом переходе конфайнмент/деконфайнмент.

4.2 Решения для модели тяжелых кварков

Для исследования фазовой структуры конфайнмент/деконфайнмент необходимо поподробнее изучить свойства полученных в Главе 1 решений для тяжелых кварков, уравнения (1.27)—(1.32) со значением $c = 0.227$.

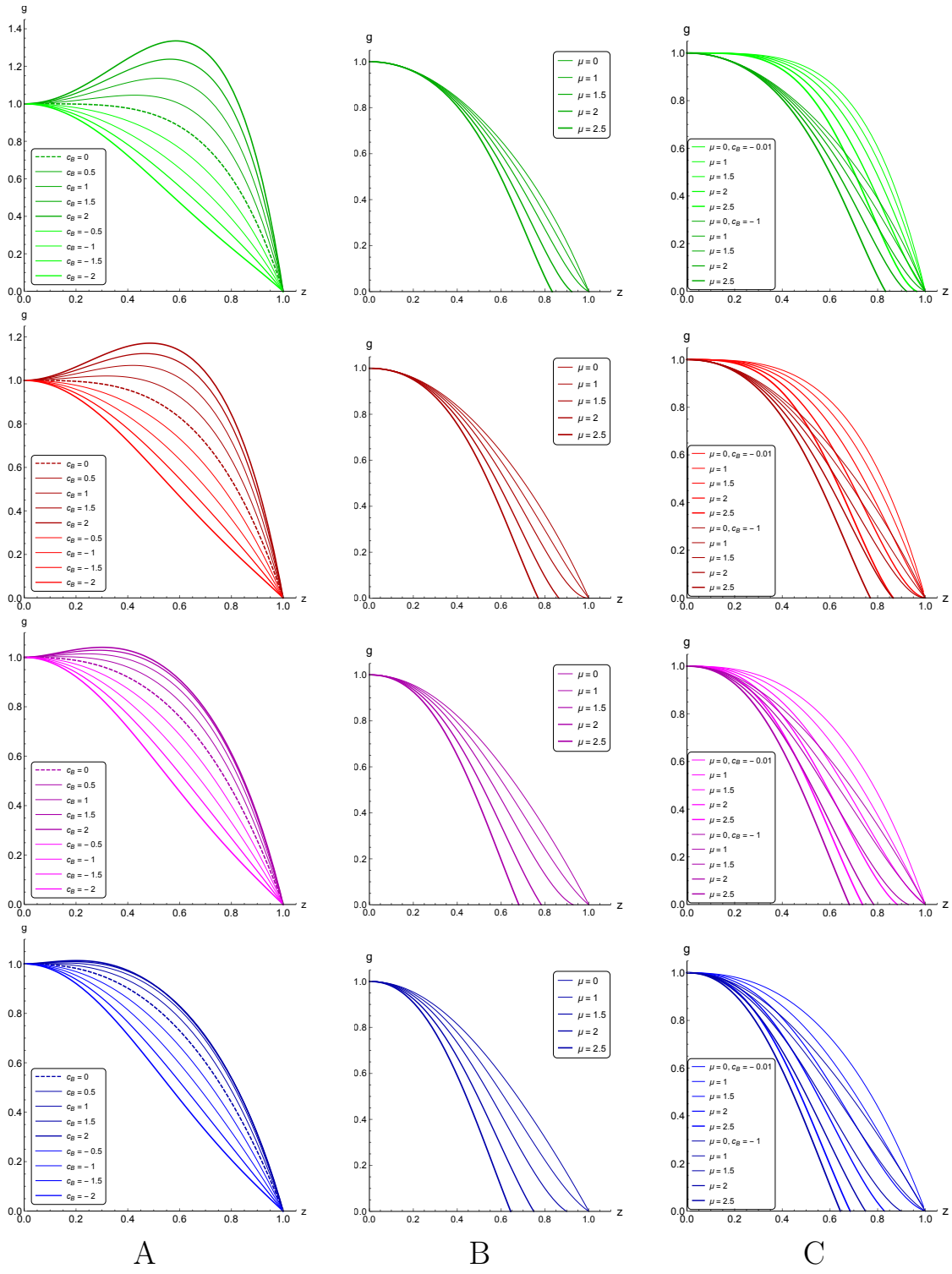


Рис. 29: Функция почернения $g(z)$ для различных c_B, $\mu = 0$ (A), для различных μ, $c_B = -1$ (B) и для различных μ, $c_B = -0.01$ (светлые кривые) и $c_B = -1$ (темные кривые) (C); $\nu = 1$ (1-ая строка), $\nu = 1.5$ (2-ая строка), $\nu = 3$ (3-я строка) и $\nu = 4.5$ (4-ая строка), $c = 0.227$, $z_h = 1$.

Как мы можем видеть, функция почернения (1.2) на самом деле не зависит от магнитного заряда q_B, но зависит от коэффициента c_B, который характеризует влияние внешнего магнитного поля на метрику вдоль направления y_2 (Рис.29.A). Положительные c_B вызвают появление локального максимума функции почернения над горизонтом. Этот максимум выражен тем ярче, чем больше значения c_B. Отрицательные c_B уменьшают значения функции почернения до горизонта. Полагая $c_B = 0$, мы переходим к предыдущей модели без внешнего магнитного поля [57]. Отметим, что ограничение на значения параметров, которое получается, — это $c \neq 2c_B$, так как $c = 2c_B$ приводит к сингулярному поведению инвариантов кривизны. Положим $q_B = 1$ в большинстве последующих вычислений.

На Рис.29.A можно заметить, что первичная анизотропия КГП, параметризованная ν, подавляет влияние внешнего магнитного поля на функцию почернения. Более того, это подавление различно для положительных и отрицательных значений коэффициента c_B. При $\nu = 4.5$ разница между $c_B = 0$ и $c_B = 0.5$ является наименьшей в сравнении со случаями более слабой анизотропии, в то время как кривые при $c_B = 1.5$ и $c_B = 2$ с трудом можно отличить друг от друга.

На Рис.29.B изображена функция почернения в зависимости от химического потенциала для $c_B = -1$ и первичной анизотропии ($1 \leq \nu \leq 4.5$). Можно увидеть, что наличие магнитного поля не меняет картину в целом: увеличение химического потенциала по-прежнему приводит к уменьшению значений функции почернения и уменьшению значения горизонта черной дыры, как это было в [57]. Увеличение первичной анизотропии (большие значения ν) усиливает влияние химического потенциала на поведение функции почернения.

На Рис.29.C сравниваются зависимости функции почернения от μ для различных c_B. Для большего абсолютного значения c_B химический потенциал демонстрирует более слабое влияние на функцию почернения для небольших z, но сильнее влияет на положение горизонта. При отсутствии первичной анизотропии ($\nu = 1$ на Рис.29.C) это влияние на положение горизонта наиболее очевидно.

Функция взаимодействия f_B (1.29) зависит от коэффициента c_B и магнитного заряда q_B. Прежде всего, поведение f_B вынуждает нас ограничиваться только $c_B < 0$, при $c_B > 0$ f_B принимает отрицательные значения при $z < z_h$, таким образом нарушая нулевое энергетическое условие (Рис.30.A). При $\nu = 1,\ 1.5$ f_B монотонно убывает. Большая первичная анизотропия ($\nu = 3,\ 4.5$) приводит к более сложному поведению функции и даже к появлению локального максимума. Этот эффект более значителен для больших абсолютных значений c_B.

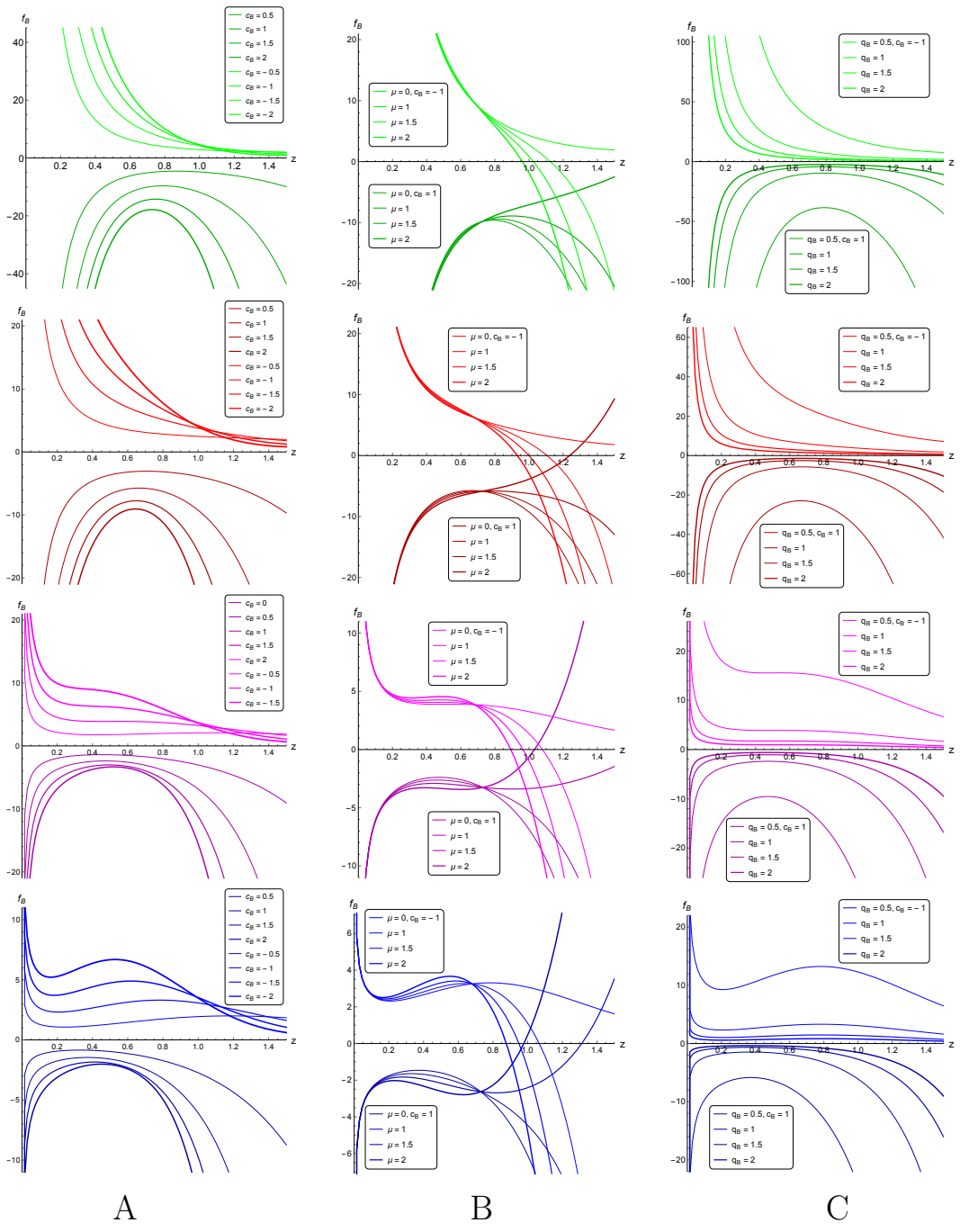


Рис. 30: Функция взаимодействия $f_B(z)$ для различных c_B, $\mu = 0$, $q_B = 1$ (A), при различных μ, $c_B = \pm 1$, $q_B = 1$ (B) и для различных q_B, $\mu = 0$, $c_B = \pm 1$ (C); $\nu = 1$ (1-ая строка), $\nu = 1.5$ (2-ая строка), $\nu = 3$ (3-я строка) и $\nu = 4.5$ (4-ая строка), $c = 0.227$, $z_h = 1$.

С увеличением химического потенциала функция взаимодействия f_B при значениях $c_B < 0$ убывает быстрее (Рис.30.B) и достигает отрицательных значений. Однако это не означает, что при большом химическом потенциале f_B нарушает нулевое энергетическое условие. Мы не должны за-

бывать, что сам горизонт z_h смещается в меньшую сторону значений из-за больших химических потенциалов. Можно убедится, что $f_B(z_h)$ положительна в интересующем нас интервале.

В соответствии с граничными условиями $g(z_h) = 0$. Таким образом выражение (1.29) может быть упрощено как

$$f_B(z_h) = 2\left(\frac{z}{L}\right)^{-\frac{2}{\nu}} e^{-\frac{1}{2}cz^2}\ \frac{c_B z}{q_B^2}\ g'(z_h) > 0, \tag{4.1}$$

На первом горизонте (тот, который действительно имеет значение) функция почернения убывает, поэтому $g'(z_h) < 0$. Если мы также возьмем $c_B < 0$, их произведение положительное, все остальные множители в (4.1) также являются положительными, поэтому $f_B(z_h) > 0$ для любого отрицательного c_B в интервале до z_h, который нам нужен.

До сих пор мы говорили только о зависимостях от c_B, которые характеризуют связь между метрикой и внешним магнитным полем, но ничего не говорят о силе самого этого магнитного поля. Это качество описывается зарядом q_B.

Из (1.29) мы видим, что функция взаимодействия f_B зависит от обратного квадрата заряда q_B. Таким образом, чем больше q_B, чем быстрее f_B стремится к нулю и тем дольше находится в его окрестности (Рис.30.C).

Напомним, что, в отличие от третьего Максвелла $F^{(B)}_{MN}$, второе поле Максвелла $F^{(2)}_{MN}$ не является физическим и служит для поддержания первичной анизотропии, задаваемой параметром ν в решении типа черной дыры в рамках голографического подхода.

Поведение функции взаимодействия f_2 в этой модели довольно похоже на ее поведение в отсутствие внешнего магнитного поля [57] (Рис.31). В основном эта функция монотонно убывает, большие химические потенциалы и большие q – заряды $F^{(2)}_{\mu\nu}$ – обеспечивают более быстрое убывание. Эти эффекты очевиднее для больших ν. Рассматривать в данном контексте случай $\nu = 1$ не имеет смысла, так как $F^{(2)}_{MN} \equiv 0$ и его функция взаимодействия f_2 не существуют.

При достаточно больших абсолютных значениях коэффициента c_B (например, $c_B = -1$) функция f_2 имеет локальный минимум, что очевиднее для большей первичной анизотропии (Рис.31.C). Но этот эффект подавляется химическим потенциалом.

Покажем, что f_2 не нарушает нулевое энергетическое условие над гори-

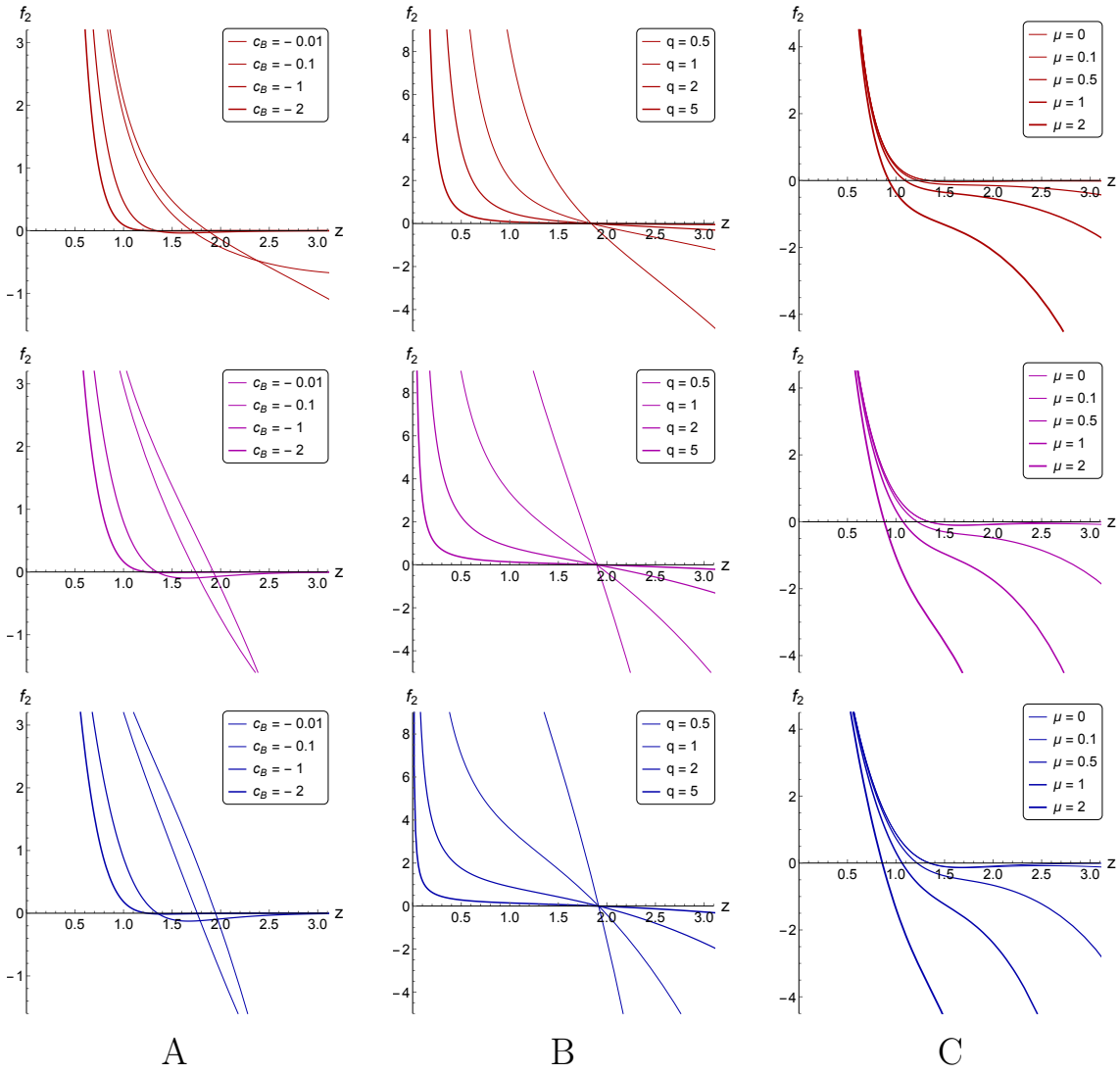


Рис. 31: Функция взаимодействия $f_2(z)$ для различных c_B, $\mu = 0$, $q = 1$ (A), для различных q $\mu = 0$, $c_B = -1$ (B), для различных μ, $c_B = -1$, $q = 1$ (C); $\nu = 1.5$ (1-ая строка), $\nu = 3$ (2-ая строка) и $\nu = 4.5$ (3-я строка), $c = 0.227$, $z_h = 1$.

зонтом, как мы сделали это выше для f_B:

$$f_2(z_h) = 4\left(\frac{z}{L}\right)^{2-\frac{4}{\nu}} e^{-\frac{1}{2}(c-2c_B)z^2}\ \frac{\nu-1}{q^2\nu z}\ (-g')\,. \tag{4.2}$$

На первом горизонте $g(z_h) = 0$ и $g'(z_h) < 0$. Поскольку f_2 имеет значение только для $\nu > 1$, все множители в (4.2) положительные, поэтому $f_2(z_h) > 0$ и нулевое энергетическое условие не нарушается.

В отличие от предыдущей модели легких кварков, в этот раз $z_0 = 0$ неприменимо даже для $\nu = 1$. Но мы можем взять z_0 достаточно малым, чтобы поддерживать связь с изотропным пределом [40].

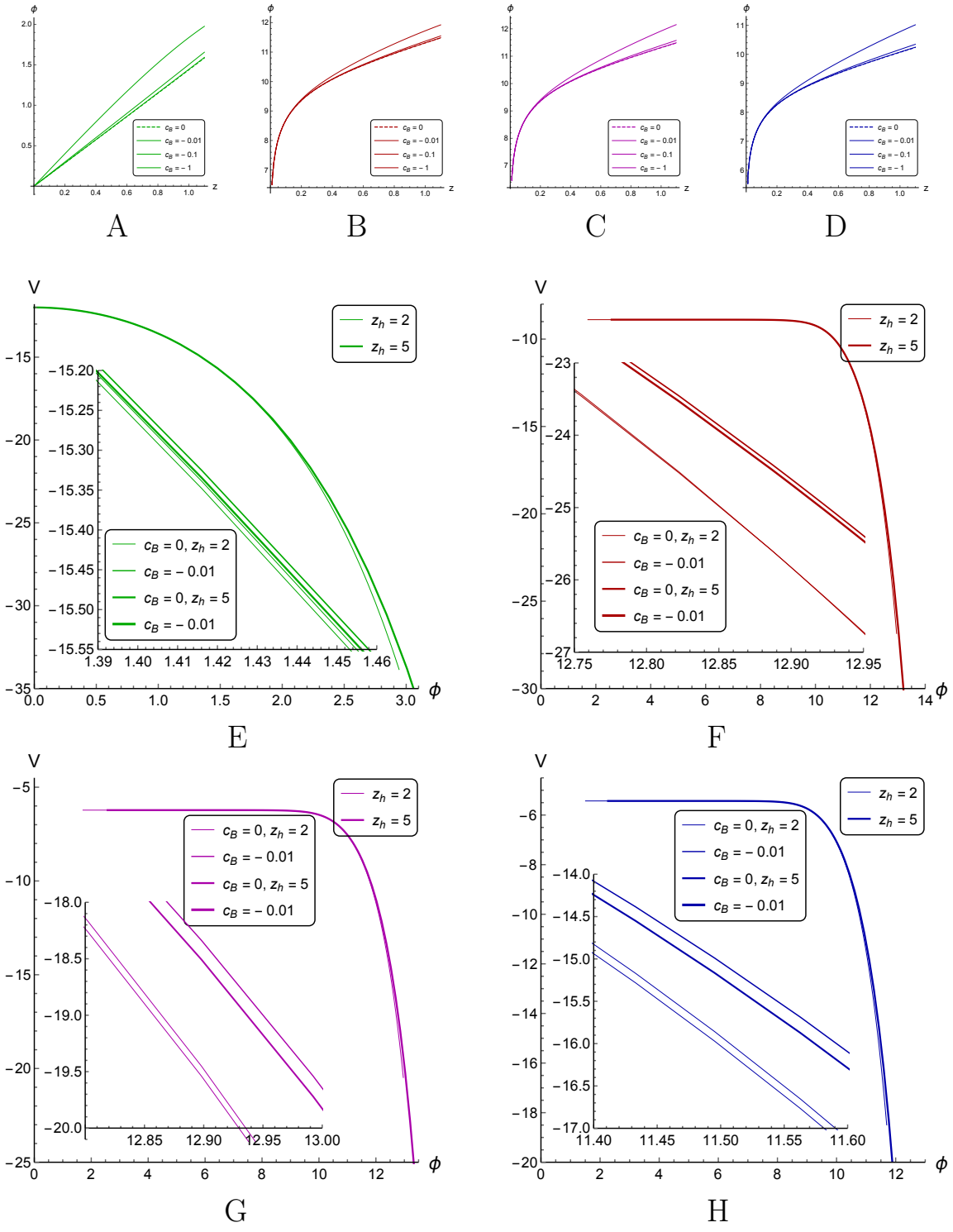


Рис. 32: Скалярное поле $\phi(z)$ для различных c_B при $\nu = 1$ (A), $\nu = 1.5$ (B), $\nu = 3$ (C), $\nu = 4.5$ (D); скалярный потенциал $V(\phi)$ для различных c_B и z_h при $\nu = 1$ (E), $\nu = 1.5$ (F), $\nu = 3$ (G), $\nu = 4.5$ (H) $\mu = 0.1$, $c = 0.227$.

Скалярное поле не зависит от q_B, которое характеризует внешнее магнитное поле $F^{(B)}_{MN}$. Зависимость от коэффициента связи c_B довольно незна-

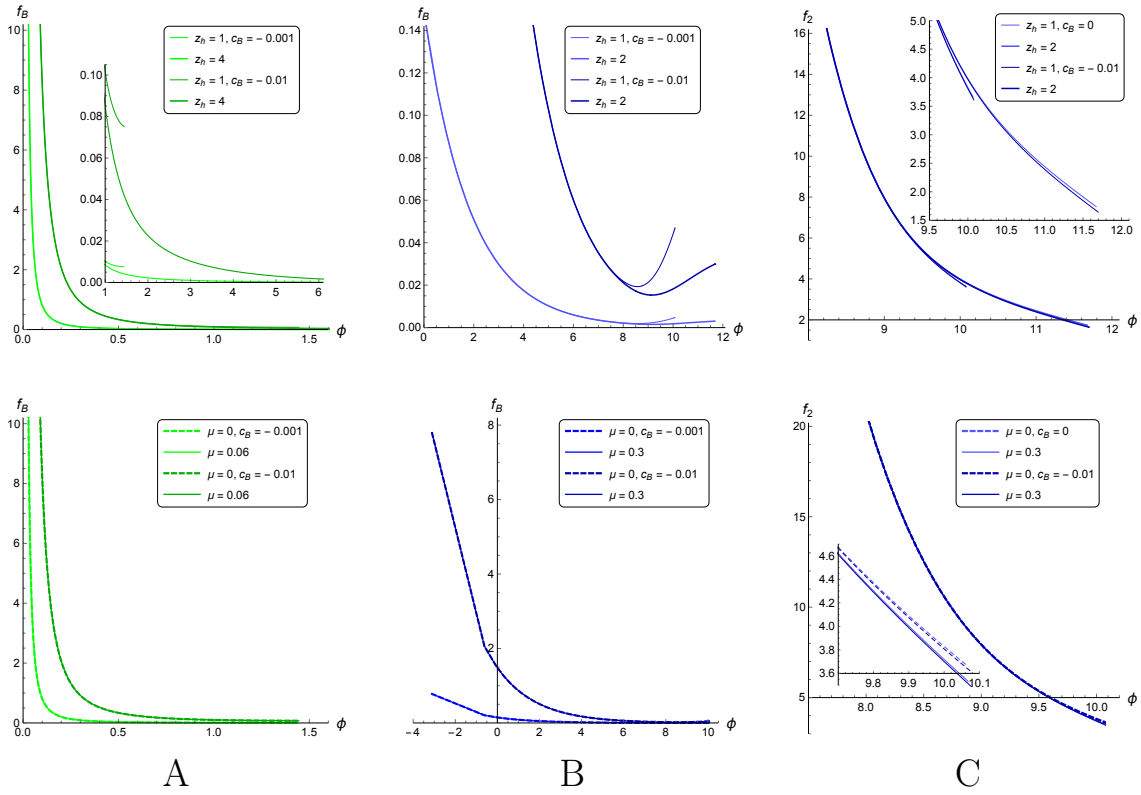


Рис. 33: Функция взаимодействия $f_B(\phi)$ для $c_B = -0.001, -0.01$, $\nu = 1$, (A), $\nu = 4.5$ (B) и функция взаимодействия $f_2(\phi)$ для $c_B = 0, -0.01$ (C) при $\mu = 0$ и различных размеров горизонта (1-ая строка) $z_h = 1, 4$ (A) и $z_h = 1, 2$ (B,C) и для $z_h = 1$ и различных химических потенциалов (2-ая строка) $\mu = 0, 0.06$ (A) и $\mu = 0, 0.3$ (B,C).

чительная и ослабевает с ростом первичной анизотропии, параметризованной ν (Рис.32.A).

Мы заинтересованы в $z \in [0; z_h]$, поэтому изучаем скалярный потенциал $V(\phi)$ для $z < z_h$. Для больших z_h скалярный потенциал достигает более низких значений (кривая $V(\phi)$ становится длиннее). Но в той же области плоскости $(\phi, V(\phi))$ скалярный потенциал незначительно зависит от горизонта (Рис.32.E-H). Коэффициент c_B, характеризующий связь с внешним магнитным полем, существенно не влияет на скалярный потенциал. Для первичного изотропного случая $\nu = 1$ это влияние сравнимо с влиянием z_h (Рис.32.E) и даже меньше, чем влияние z_h при $\nu \neq 1$ (Рис.32.F-H). В этом интервале изменение скалярного потенциала, связанного с химическим потенциалом, настолько мало, что его невозможно изобразить в этом масштабе. Поэтому мы видим, что первичная анизотропия является самым сильным фактором, влияющим на скалярный потенциал, в то время как влияние магнитного поля и химического потенциала незначительно.

Для полноты картины мы также приводим зависимость функций взаимодействия f_B и f_2 от поля дилатона ϕ (Рис.33). Обе функции отображают различное поведение вблизи $z = z_h$, и поэтому вблизи $\phi = \phi(z_h)$ (Рис.33 1-ая строка). Кривые для различных z_h имеют различную длину. Как будет показано далее, нам в действительности нужно $c_B \in (-0.01; 0)$, $\mu \in [0; 0.06]$ для $\nu = 1$ и $c_B \in (-0.02; 0)$, $\mu \in [0; 0.3]$ для $\nu = 4.5$. На Рис.33.A,B (2-ая строка) мы видим, что кривые f_B для различных химических потенциалов в пределах этих фактических интервалов невозможно отличить друг от друга. Для f_2 зависимость от химического потенциала более заметна, но все же незначительна (Рис.33.C). Также функция f_2 почти не зависит от магнитного поля. Функция f_B действительно зависит от c_B, поскольку входит в уравнение (1.29) как фактор с помощью функции почернения $g(z)$. Этот эффект обусловлен тем, что в данной модели функция взаимодействия f_B была получена из уравнений движения в качестве решения.

4.3 Термодинамика модели

4.3.1 Температура и энтропия

Для рассматриваемой модели тяжелых кварков температура и энтропия могут быть записаны как:

$$T = \frac{|g'|}{4\pi}\Big|_{z=z_h}, \qquad s = \frac{1}{4}\left(\frac{L}{z_h}\right)^{1+\frac{2}{\nu}} e^{-\frac{1}{4}(3c-2c_B)z_h^2}. \tag{4.3}$$

На Рис.34 мы видим, что функция $z_h(T)$ многозначна для $c_B > -0.02 \div -0.01$ (для различных ν). При большей анизотропии неоднозначность температуры сохраняется до большего абсолютного значения c_B.

Температурная зависимость от химического потенциала при наличии магнитного поля похожа на результаты в [57] (Рис.34.C). Для большей анизотропии неоднозначность температуры сохраняется для больших значений μ: до $\mu \approx 0.05$ для $\nu = 1$, $\mu \approx 0.3$ для $\nu = 4.5$.

Поведение энтропии как функции температуры для различных значений c_B (Рис.34.B) и химического потенциала μ (Рис.34.D) убеждает нас в сделанных выше выводах. Следовательно, фазовый переход типа Хокинга-Пейджа в присутствии магнитного поля, существенно зависит от c_B. При значениях $c_B < -0.02 \div -0.01$ для различных ν фазовый переход первого рода вообще не имеет места. Отметим, что функции температуры и энтропии не содержат заряда q_B явно. Таким образом c_B оказывается параметром, который может фитировать фазовый переход первого рода.

Интерес также представляет поведение барионной плотности ρ вблизи фазового перехода. Как и в Главе 3, трехзначность функции $z_h(T)$ играет здесь ключевую роль. Плотность ρ определяется как коэффициент в разложении A_t:

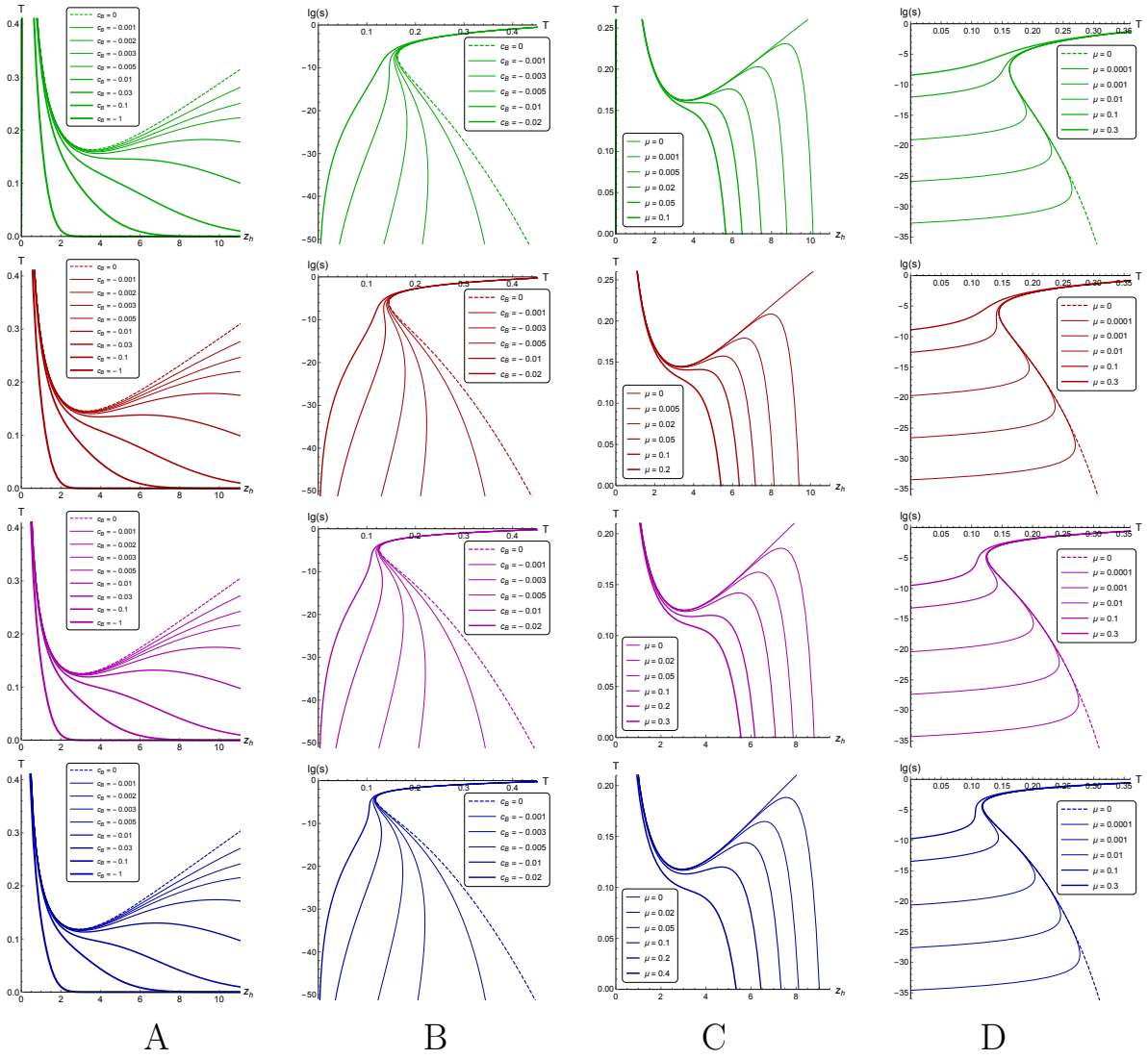


Рис. 34: Температура $T(z_h)$ (A) и энтропия $s(T)$ в логарифмическом масштабе (B) для различных c_B, $\mu = 0$; температура $T(z_h)$ (C) и энтропия $s(T)$ в логарифмическом масштабе (D) для различных μ, $c_B = -0.001$; $\nu = 1$ (1-ая строка), $\nu = 1.5$ (2-ая строка), $\nu = 3$ (3-я строка) и $\nu = 4.5$ (4-ая строка), $c = 0.227$.

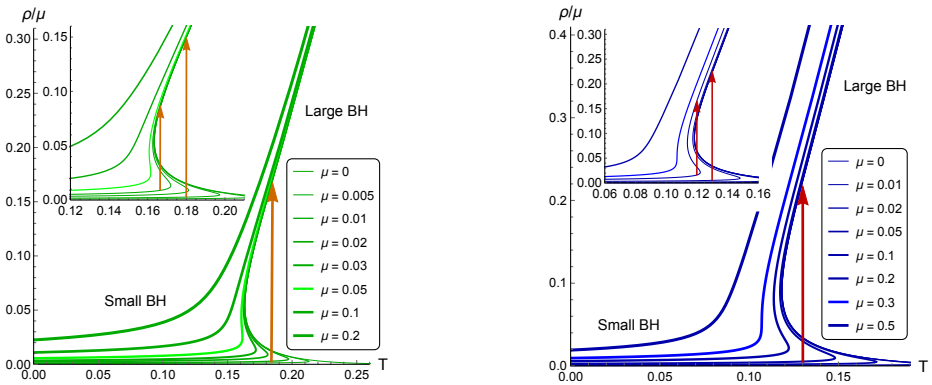


Рис. 35: Плотность $\rho/\mu(T)$ для различных μ при $\nu = 1$ (A) и $\nu = 4.5$ (B); $c = 0.227$, $c_B = 0$.

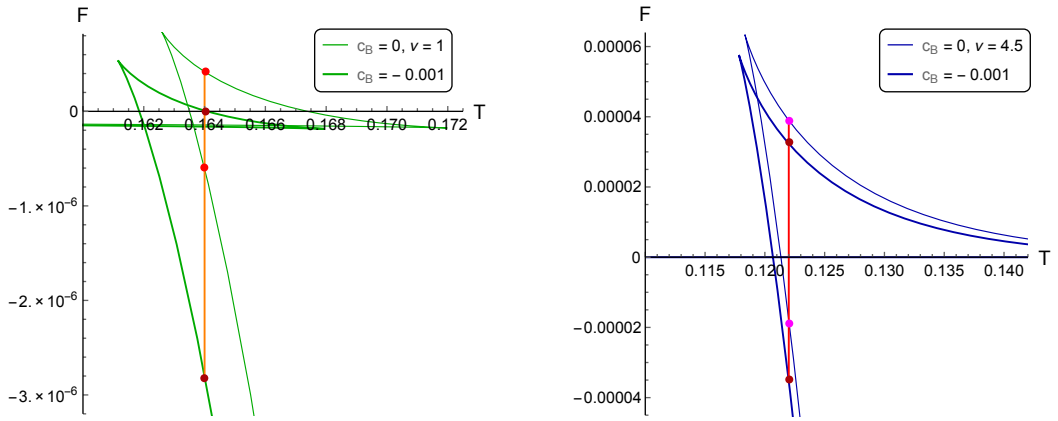
$$A_t = \mu - \rho z^2 + \cdots = \mu + \frac{(c - 2c_B)\,\mu z^2}{4\left(1 - e^{\frac{1}{4}(c-2c_B)z_h^2}\right)} + \ldots, \tag{4.4}$$

$$\rho = -\frac{(c - 2c_B)\,\mu}{4\left(1 - e^{\frac{1}{4}(c-2c_B)z_h^2}\right)}. \tag{4.5}$$

На Рис.35 изображено отношение плотности к химическому потенциалу ρ/μ в зависимости от температуры для первичного изотропного решения ($\nu = 1$, Рис.35.A) и анизотропного решения ($\nu = 4.5$, Рис.35.B). Вертикальные стрелки показывают положение перехода BH-BH. Функция ρ/μ является трехзначной функцией T, как и ожидалось, и мы видим, что коллапс от маленьких черных дыр (большие z_h) к большим черным дырам (меньшие z_h) сопровождается резким повышением плотности для любого соответствующего химического потенциала. На Рис.35 $c_B = 0$, а для c_B достаточно близкого к нулю, сохранится неоднозначность функции $T(z_h)$, и кривые плотности будут незначительно отличаться от случая нулевого магнитного поля.

4.3.2 Свободная энергия и фазовый переход первого рода

Для изучения BH-BH фазового перехода, который зависит от метрики, необходимо рассмотреть свободную энергию как функцию температуры. Согласно первому закону термодинамики, дифференциал свободной энергии при фиксированном объеме определяется как $dF = -sdT - \rho d\mu - MdB$, где ρ – барионная плотность, M представляет намагниченность, связанную



A B

Рис. 36: Разность свободных энергий $\Delta F(T)$ для $c_B = 0$ и $c_B = -0.001$, $\nu = 1$ (A) и $\nu = 4.5$ (B); $c = 0.227$, $\mu = 0.03$ и $T = 0.164$. Разность свободных энергий и T в единицах ГэВ.

с B. Для фиксированного химического потенциала μ и магнитного поля B, свободная энергия может быть оценена следующим интегралом [31,57,70,72]

$$F = -\int sdT = \int_{z_h}^{\infty} s\,T' dz, \tag{4.6}$$

где мы нормировали свободную энергию так, чтобы она была равна нулю при $z_h \to \infty$. При наличии второго горизонта z_{h_2} требуется интегрировать до него, как и ранее.

Поведение свободной энергии дает нам BH-BH фазовый переход. На Рис.36 показаны различные значения $\Delta F_{BH}(T, \mu)$. Вертикальные линии показывают выбранную температуру $T = 0.164$ (Рис.36.A,B). Она оранжевая для $\nu = 1$ (Рис.36.A) и красная для $\nu = 4.5$ (Рис.36.B). Здесь все величины указаны в ГэВ.

При отсутствии магнитного поля разность свободных энергий между двумя состояниями – это расстояние между двумя красными точками, расположенными на оранжевой температурной вертикали для $\nu = 1$ (Рис.36.A) и между двумя фиолетовыми точками, расположенными на красной температурной вертикали для $\nu = 4.5$ (Рис.36.B). При $c_B = -0.001$ разность свободных энергий – это расстояние между двумя темно-красными точками на одних и тех же температурных вертикалях. Однако на масштабах Рис.36.B кривые для $c_B = 0$ и $c_B = -0.001$ почти совпадают, поэтому красные и фиолетовые точки на этом графике довольно близки друг к другу.

На Рис.37 представлены линии BH-BH фазового перехода для различ-

ных значений первичной и вторичной анизотропии. На Рис.37.A-D представлены линии BH-BH фазового перехода для различных значений параметра первичной анизотропии, Рис.37.A для $\nu = 1$, Рис.37.B для $\nu = 1.5$, Рис.37.C для $\nu = 3$ и Рис.37.D для $\nu = 4.5$.

Прежде всего, большие абсолютные значения c_B приводят к снижению температуры перехода, поэтому имеет место эффект обратного магнитного катализа. Кроме того, длина линии перехода типа Хокинга-Пейджа также уменьшается и в конечном итоге вырождается. Однако первичная анизотропия ослабляет эти эффекты, поэтому BH-BH фазовый переход сохраняется при больших абсолютных значениях c_B. Например, фазовый переход первого рода все еще существует для $c_B = -0.018$ и $\nu = 4.5$ (Рис.37.D), тогда как при $c_B = -0.001$ и $\nu = 1$ его уже нет (Рис.37.A).

На Рис.37.E все линии BH-BH фазового перехода представлены на одном графике. Можно увидеть, что расстояние между линиями для одних и тех же пар значений c_B уменьшается при больших ν, в то время как их длина вдоль оси μ, наоборот, растет. Оба параметра анизотропии ν и c_B снижают температуру перехода, но другие их эффекты на фазовый переход первого рода можно считать противоположными.

Мы также можем рассмотреть положения "свободных концов" линий BH-BH фазового перехода (будем называть их критическими конечными точками для тяжелых кварков, CEP_{HQ}). На Рис.38 эти положения изображены на T–μ (Рис.38.A), μ–c_B (Рис.38.B) и T–c_B (Рис.38.C) плоскостях. Для $\nu = 1$ температура CEP_{HQ} относительно быстро падает с ростом абсолютного значения c_B, в то время как для $\nu = 4.5$ эта температура почти постоянна (Рис.38.A,C). На Рис.39 показаны 3D-графики для положений CEP_{HQ} в зависимости от c_B, химического потенциала и температуры для различных значений первичной анизотропии.

Сравнивая полученные результаты с результатами других работ, отметим, что изменение фактора деформации путем добавления члена dz^5 изменяет обратный магнитный катализ на прямой магнитный катализ для достаточно большого значения параметра d [45]. Если рассматривать фактор деформации с добавленным членом pz^4, то получается прямой магнитный катализ для малых и средних магнитных полей, в то время как для больших значений магнитного поля наблюдается обратный магнитный катализ [72].

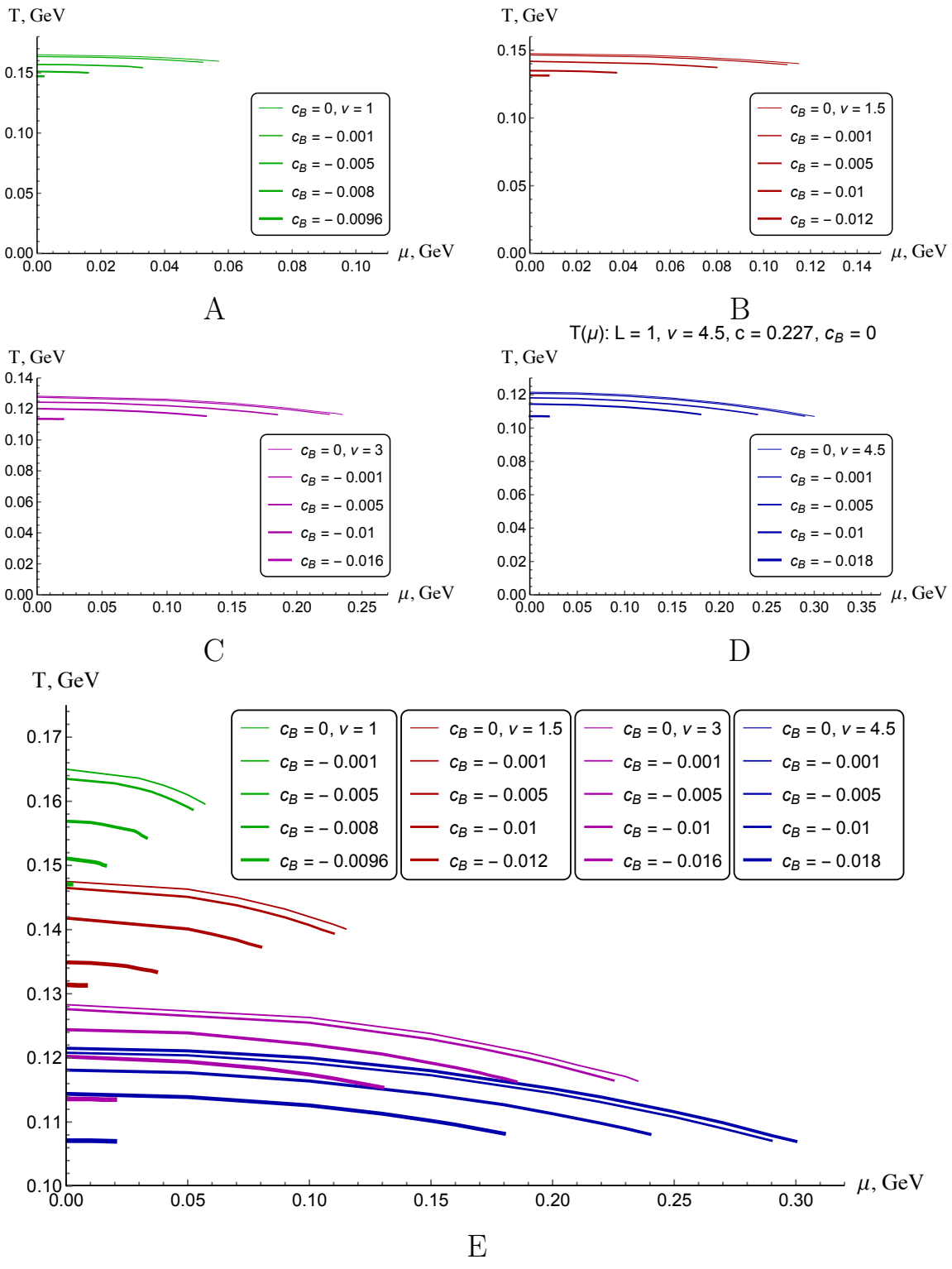


Рис. 37: Линии фазового перехода первого рода в зависимости от c_B для $\nu = 1$ (A), $\nu = 1.5$ (B), $\nu = 3$ (C), $\nu = 4.5$ (D) и все вместе (E); $c = 0.227$.

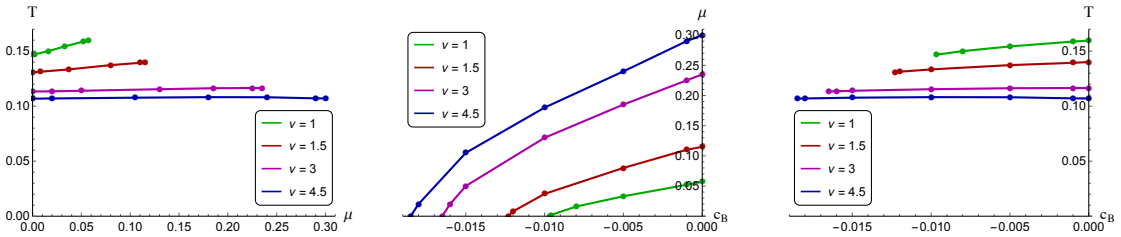


Рис. 38: Положение критических конечных точек CEP_{HQ} для модели тяжелых кварков в зависимости от μ и T (A), c_B и μ (B), c_B и T (C) для $\nu = 1,\ 1.5,\ 3,\ 4.5$, $c = 0.227$. T и μ в единицах ГэВ, c_B в ГэВ^2.

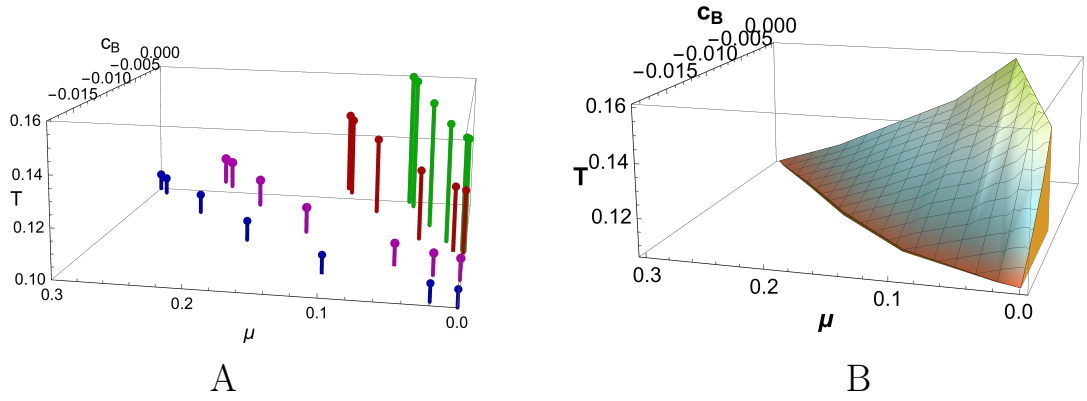


Рис. 39: Температура критических конечных точек CEP_{HQ} для модели тяжелых кварков в зависимости от c_B и μ для $1 \le \nu \le 4.5$ как набор точек (A) и как 3D-поверхность (B), $c = 0.227$. T и μ в единицах ГэВ, c_B в ГэВ^2.

4.4 Времениподобные и пространственноподобные петли Вильсона

4.4.1 Времениподобные петли Вильсона

Для вычисления времениподобной петли Вильсона, ориентированной вдоль вектора $\vec{n}$

$$n_{x1} = \cos\vartheta \sin\alpha, \quad n_{x2} = \sin\vartheta \sin\alpha, \quad n_{x3} = \cos\alpha, \tag{4.7}$$

используется метрика:

$$ds^2 = \mathcal{G}_{s,MN} dX^M dX^N \tag{4.8}$$

$$= \frac{L^2 \mathfrak{b}_s(z)}{z^2} \left[-g(z)dt^2 + \mathfrak{g}_1 dx^2 + \mathfrak{g}_2 dy_1^2 + \mathfrak{g}_3 dy_2^2 + \frac{dz^2}{g(z)} \right], \tag{4.9}$$

где $\mathfrak{b}_s(z) = \mathfrak{b}(z) \exp\left(\sqrt{2/3}\ \phi(z)\right)$ – фактор деформации в струнном фрейме и $\mathfrak{g}_i$ – соответствующие $\mathcal{G}_{MN}$ компоненты метрики (функции анизотропии).

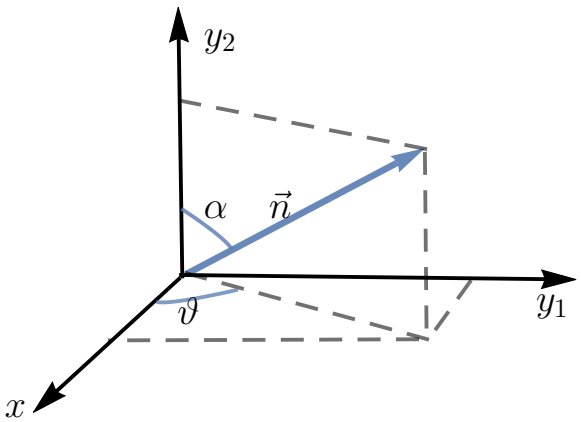


Рис. 40: Параметризация мирового листа для петли Вильсона с ориентацией, заданной вектором $\vec{n}$.

Как и в предыдущих главах, следуя голографическому подходу, мы вычисляем значение действия Намбу-Гото для пробной струны в нашей метрике в струнном фрейме:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\tau\, d\xi \sqrt{|\det h_{\alpha\beta}|}, \qquad h_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{s,MN}\,\partial_\alpha X^M\,\partial_\beta X^N. \tag{4.10}$$

Мировой лист параметризуется как (Рис.40)

$$\begin{aligned} X^0 \equiv t = \tau, \quad X^1 \equiv x = \xi\cos\vartheta\sin\alpha, \quad X^2 \equiv y_1 = \xi\sin\vartheta\sin\alpha, \\ X^3 \equiv y_2 = \xi\cos\alpha, \qquad X^4 \equiv z = z(\xi). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Действие Намбу-Гото имеет вид

$$S = \mathfrak{t}\mathcal{S}, \qquad \mathcal{S} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} d\xi\; M\left(z(\xi)\right)\; \sqrt{\mathcal{F}(z\left(\xi\right)) + \left(z'(\xi)\right)^2}, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} M\left(z(\xi)\right) &= \frac{\mathfrak{b}_s\left(z(\xi)\right)}{z^2(\xi)}, \qquad \mathfrak{t} = \int \frac{d\tau}{2\pi\alpha'}, \\ \mathcal{F}\left(z(\xi)\right) &= g\left(z(\xi)\right)\left(\mathfrak{g}_1\cos^2\vartheta\sin^2\alpha + \mathfrak{g}_2\sin^2\vartheta\sin^2\alpha + \mathfrak{g}_3\cos^2\alpha\right) \end{aligned}$$

и введем эффективный потенциал

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\left(z(\xi)\right) &\equiv M\left(z(\xi)\right)\sqrt{\mathcal{F}\left(z(\xi)\right)} \\ &= \frac{\mathfrak{b}_s\left(z(\xi)\right)}{z^2(\xi)}\sqrt{g\left(z(\xi)\right)\left(\mathfrak{g}_1\cos^2\vartheta\sin^2\alpha + \mathfrak{g}_2\sin^2\vartheta\sin^2\alpha + \mathfrak{g}_3\cos^2\alpha\right)}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Действие $\mathcal{S}$ (4.12) определяет динамическую систему с динамической переменной $z = z(\xi)$ и временем ξ. Эта система имеет первый интеграл

$$\frac{M(z(\xi))\mathcal{F}(z(\xi))}{\sqrt{\mathcal{F}(z(\xi)) + (z'(\xi))^2}} = \mathcal{I}. \tag{4.14}$$

Из (4.14) мы определяем "верхнюю точку" или точку поворота z_* (наиболее удаленное положение минимальной поверхности от границы), где $z'(\xi) = 0$:

$$M(z_*)\sqrt{F(z_*)} = \mathcal{I}. \tag{4.15}$$

Находя z' из (4.14), можно получить выражение для длины струны ℓ и действия $\mathcal{S}$ (4.12):

$$\frac{\ell}{2} = \int_0^{z_*} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}(z)}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\mathcal{V}^2(z)}{\mathcal{V}^2(z_*)} - 1}}, \tag{4.16}$$

$$\frac{\mathcal{S}}{2} = \int_\epsilon^{z_*} \frac{M(z)dz}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)}}}. \tag{4.17}$$

Чтобы получить натяжение струны, мы должны рассчитать асимптотику $\mathcal{S}$ при $\ell \to \infty$. Если стационарная точка $\mathcal{V}(z)$ существует в области $0 < z < z_h$,

$$\mathcal{V}'\Big|_{z_{DW}} = 0, \tag{4.18}$$

мы называем эту точку точкой динамической стенки (DW) и принимаем положение верхней точки z_* равным положению DW, $z_* = z_{DW}$. Вблизи этой точки мы получаем

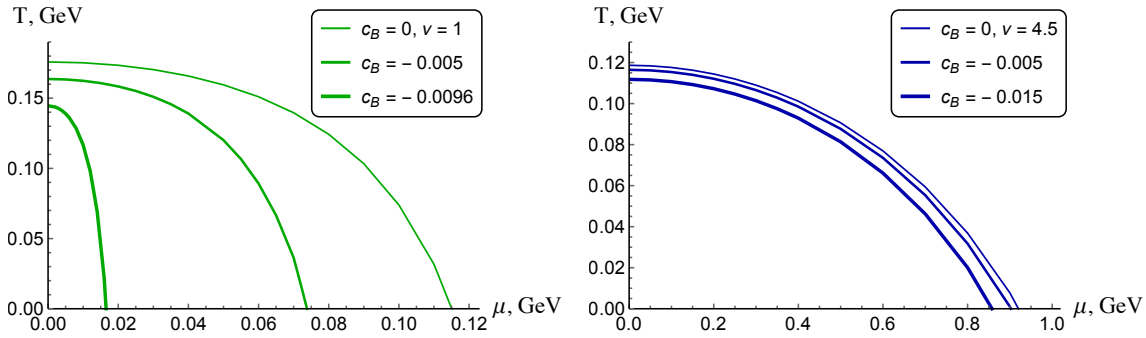
$$\ell \underset{z\to z_{DW}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{F(z_{DW})}} \sqrt{\frac{\mathcal{V}(z_{DW})}{\mathcal{V}''(z_{DW})}} \log(z - z_{DW}) \underset{z\to z_{DW}}{\to} \infty, \tag{4.19}$$

$$\mathcal{S} \underset{z\to z_{DW}}{\sim} M(z_{DW}) \sqrt{\frac{\mathcal{V}(z_{DW})}{\mathcal{V}''(z_{DW})}} \log(z - z_{DW}). \tag{4.20}$$

Следовательно, для натяжения струны мы получаем

$$\mathcal{S} \sim \sigma_{DW} \cdot \ell\,, \qquad \sigma_{DW} = M(z_{DW})\sqrt{F(z_{DW})}. \tag{4.21}$$

Если в области $0 < z < z_h$ нет стационарной точки $\mathcal{V}(z)$, натяжение струны становится равным



A B

Рис. 41: Линии фазового перехода для петель Вильсона WLy_2, различных c_B и для $\nu = 1$ (A) и $\nu = 4.5$ (B); $c = 0.227$.

$$\sigma_h = M(z_h)\sqrt{F(z_h)}. \tag{4.22}$$

Таким образом, точки поворота для петель Вильсона WLx, WLy_1 и WLy_2, ориентированных вдоль осей x, y_1 и y_2 соответственно, определяются уравнениями:

$$WLx: \qquad -cz + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\phi'(z) + \frac{g'}{2g} - \frac{2}{z}\Big|_{z=z_{DWx}} = 0, \tag{4.23}$$

$$WL_{y_1}: \qquad -cz + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\phi'(z) + \frac{g'}{2g} - \frac{\nu+1}{\nu z}\Big|_{z=z_{DWy_1}} = 0, \tag{4.24}$$

$$WL_{y_2}: \qquad -cz + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\phi'(z) + \frac{g'}{2g} - \frac{\nu+1}{\nu z} + c_B z\Big|_{z=z_{DWy_2}} = 0. \tag{4.25}$$

Очевидно, что для $c_B = 0$ выражения (4.24) и (4.25) становятся эквивалентными, а при $\nu = 1$ все уравнения (4.23)-(4.25) сводятся к (4.23). Линии на плоскости (μ, z_h), и поэтому на плоскости (μ, T), где уравнения (4.23)-(4.25) перестают иметь действительные решения, интерпретируются как линии фазового перехода для петли Вильсона. Расположение в плоскости (μ, T) линий фазовых переходов для петель Вильсона WLx и WLy_1 рассматривалось ранее в Главе 2.

На Рис.41 изображены линии фазового перехода для петли Вильсона WLy_2. Случай $c_B = 0$ очевидно соответствует также линии WLy_1. Мы видим, что появление внешнего магнитного поля ($c_B \neq 0$) заставляет линию фазового перехода для петли Вильсона сжиматься. Для $\nu = 1$ максимальный химический потенциал при $T = 0$ уменьшается быстрее, чем

максимальная температура при $\mu = 0$. Для $\nu = 4.5$ сжатие линии фазового перехода, соответствующей петле Вильсона WLy_2, намного слабее и выглядит почти концентрическим.

В метриках с нестабильностью необходимо также проверить, находится ли поверхность для петли Вильсона в зоне стабильности [59]. Это позволяет определить роль различных линий фазовых переходов в общей картине конфайнмента/деконфайнмента.

Здесь возможны различные ситуации. Для заданного μ динамическая стенка может находиться вне зоны нестабильности (маленькая прямоугольная розовая область на Рис.42.A) или пересечь зону нестабильности, начиная с некоторой температуры (большая прямоугольная розовая область на Рис.42.A). В первом случае скачок в стабильную зону сохраняет конфайнмент. Детальный анализ показывает, что натяжение струны уменьшается с $\sigma_* = \sigma(z_{DW^*})$ в нестабильной фазе до $\sigma = \sigma(z_{DW})$ в стабильной. Здесь z_{DW} вычисляется для z_h, и z_{DW^*} вычисляется для z_h^*, таких, что $T(z_h^*, \mu) = T(z_h, \mu)$. Можно было бы интерпретировать фазу, когда динамические стенки существуют для z_h и z_h^*, как фазы кваркония (Рис.42.B). Если динамическая стенка находится в нестабильной зоне, мы теряем линейное взаимодействие между кварками в фазе кваркония (Рис.42.C).

Это именно та ситуация, которая имеет место для $\nu = 1$ в рассматриваемой модели (первая строка на Рис.43). Динамическая стенка расположена в области нестабильности, и BH-BH фазовый переход заставляет нас оказаться в области деконфайнмента (Рис.43.A,B, первая строка). Таким образом, в отсутствие первичной анизотропии фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент определяется фазовым переходом первого рода (линия BH-BH) до пересечения с линией петли Вильсона (WL-line), обра-

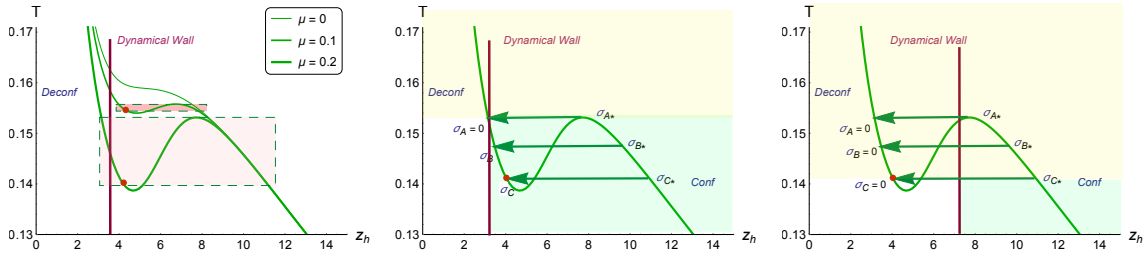


Рис. 42: Схема перехода конфайнмент/деконфайнмент в зависимости от расположения точек BH-BH фазового перехода относительно динамической стенки. Здесь "Dynamical Wall" – динамическая стенка, "Conf" – область конфайнмента, "Deconf" – область деконфайнмента, T в единицах ГэВ и z_h в единицах ГэВ$^{-1}$.

зуя кроссовер. Часть линии BH-BH оказывается в зоне деконфайнмента справа от кроссовера (Рис.44.A,C), что вызывает скачок плотности в КГП. Для больших c_B линии BH-BH фазового перехода лежат над динамической стенкой, это все еще находится в области нестабильности (Рис.43.C, первая строка). Таким образом, вся линия BH-BH служит для скачков плотности в КГП, не разделяя области конфайнмента и деконфайнмента (Рис.44.E).

Для $\nu = 4.5$ ситуация существенно иная, так как динамическая стенка расположена в стабильной области. В отсутствие внешнего магнитного поля фазовый переход первого рода попадает в область деконфайнмента для $0 \leq \mu \leq 0.2448$, закрывая кроссовер сверху до пересечения с линией для петли Вильсона. При $\mu > 0.2448$ BH-BH фазовый переход заставляет нас оказаться в области конфайнмента (Рис.43.A, вторая строка). В этом случае линия BH-BH создает скачок плотности для вещества в фазе конфайнмента, в то время как фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент опре-

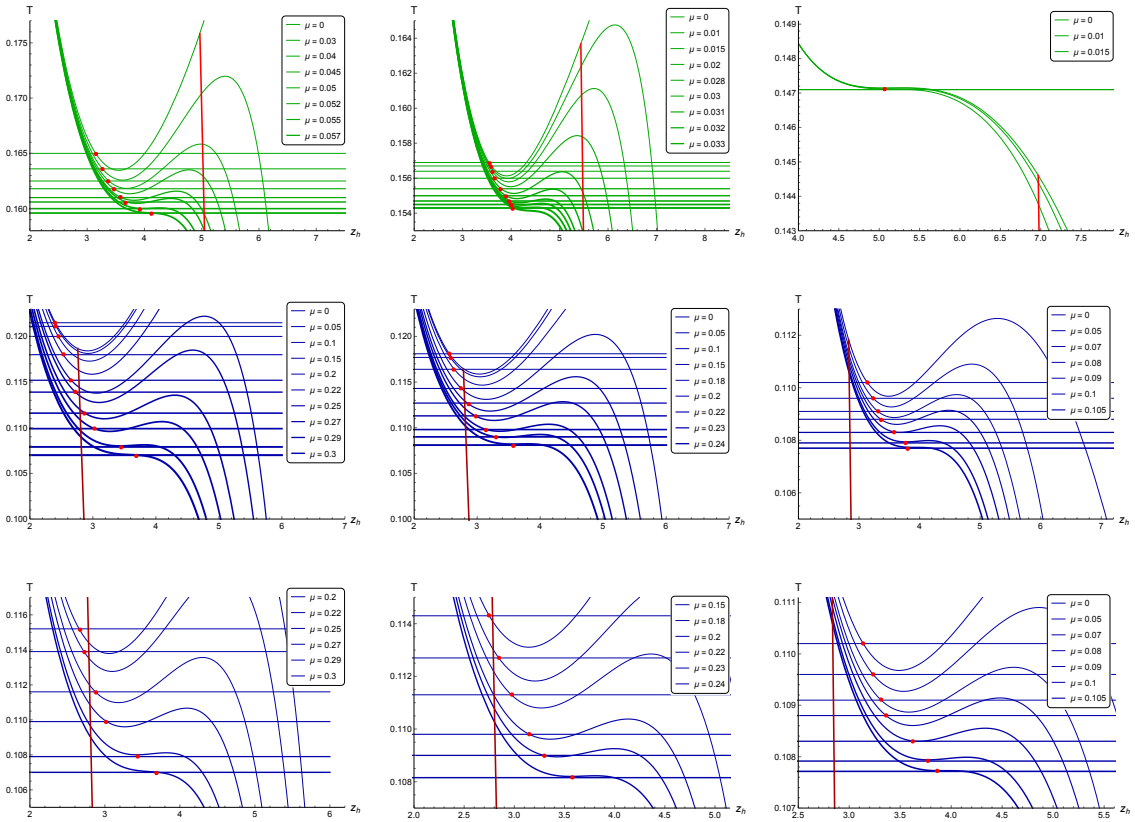


Рис. 43: Расположение точек фазового перехода BH-BH (красные точки) относительно динамической стенки (красные линии) для $\nu = 1$ (первая строка) и $\nu = 4.5$ (вторая и третья строки, третья строка — это увеличение второй) для $c_B = 0$ (A), $c_B = -0.005$ (B), $c_B = -0.0096$ для $\nu = 1$ и $c_B = -0.015$ для $\nu = 4.5$, $c = 0.227$. T в единицах ГэВ и z_h в ГэВ$^{-1}$.

деляется y-ориентированной петлей Вильсона. (Напомним, что для $c_B = 0$ нет никакой разницы между ориентациями y_1 и y_2.) На Рис.43.A на третьей строке показана та же картина более четко, с увеличенным масштабом перехода BH-BH в зоне конфайнмента из Рис.43.A, вторая строка.

Добавление внешнего магнитного поля заставляет линию BH-BH проходить под линией для петли Вильсона в зону конфайнмента раньше, т.е. для меньших значений μ (Рис.43.B, вторая строка и увеличение на Рис.43.B, третья строка). Изогнутый треугольник, ограниченный точкой пересечения слева, температурой конечной критической точки (CEP) справа, линией BH-BH снизу и линией для петли Вильсона (WL) сверху, должен представлять область с более высокой плотностью в зоне конфайнмента (Рис.44.B,D).

Когда коэффициент c_B, связанный с магнитным полем, достигает критического значения $c_{B\,crit} \approx -0.11$ вся линия BH-BH погружается в зону конфайнмента. Поэтому фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент происходит только по линии для петли Вильсона (Рис.43.C, вторая строка и увеличение на Рис.43.C, третья строка), и у нас есть сектор с более высокой плотностью между линиями для BH-BH перехода и для петли Вильсона (WL) (Рис.44.F).

На Рис.44 показаны совместные диаграммы фазовых переходов для линий BH-BH фазового перехода и линий переходов для ориентированных вдоль y_2 петель Вильсона. Мы видим картину, очень похожую на предыдущие результаты для тяжелых кварков.

При $\nu = 1$ без магнитного поля (Рис.44.A) линия BH-BH определяет фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент для $0 \le \mu \le \mu_{by_2} = 0.04666$ до пересечения с линией для y_2-ориентированной петли Вильсона в точке $(0.04666; 0.1617)$.

Если включается внешнее магнитное поле, пересечение между линией BH-BH и линией для петли Вильсона смещается в сторону меньшей температуры и химического потенциала $(0.0235; 0.1558)$ для $c_B = -0.005$ (Рис.44.C), и общая площадь фазы конфайнмента предсказуемо уменьшается. Также линии фазового перехода, соответствующие фазовому переходу первого рода (BH-BH) и для петли Вильсона ($\mathrm{WLy_2}$), становятся ближе друг к другу.

Когда магнитное поле становится почти максимальным ($c_B = -0.0096$), линия BH-BH фазового перехода оказывается выше линии для y_2-ориентированной петли Вильсона без какого-либо пересечения (Рис.44.E).

При $\nu = 4.5$ картину можно назвать противоположной. Без внешнего магнитного поля (Рис.44.B) y_2 линия для петли Вильсона играет главную роль для $\mu \le \mu_{y_2 b} = 0.2448$ до пересечения с линией BH-BH в

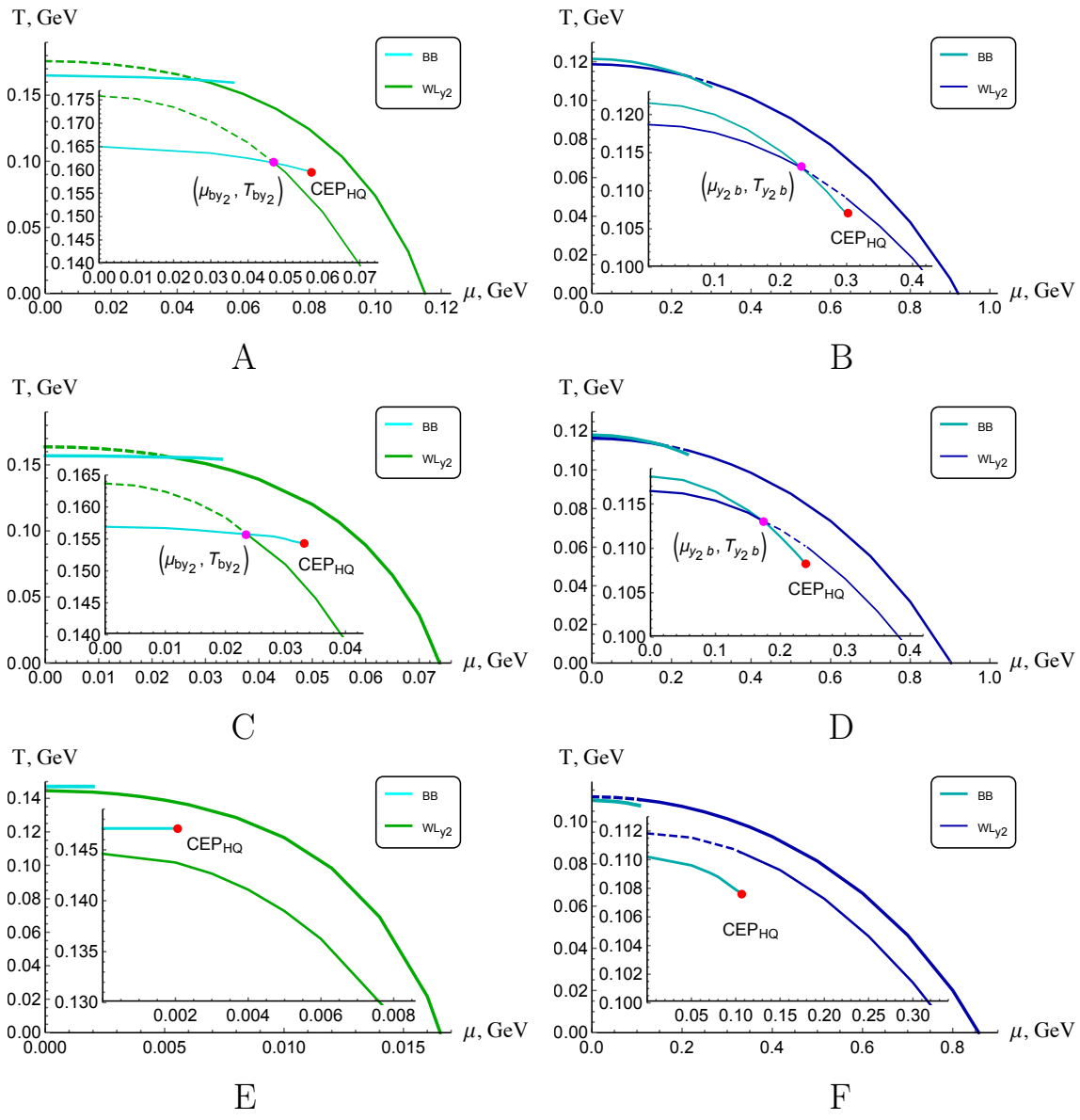


Рис. 44: Фазовая диаграмма для ориентации y_2 для $c_B = 0$, $\nu = 1$ (A) и $\nu = 4.5$ (B), $c_B = -0.005$, $\nu = 1$ (C) и $\nu = 4.5$ (D), $c_B = -0.0096$, $\nu = 1$ (E) и $c_B = -0.015$, $\nu = 4.5$ (F); $c = 0.227$.

$(0.2448; 0.1121)$. Линия ВН-ВН фазового перехода длится до CEP$_{HQ}$ при $(0.3; 0.107)$, где главная роль возвращается к линии для петли Вильсона через скачок к более высокой температуре.

При $c_B = -0.005$ качественно картина остается прежней (Рис.44.D). Линии перехода пересекаются в точке $(0.1753; 0.113)$, т.е. при меньшем химическом потенциале, но немного более высокой температуре.

В конечном счете линия перехода ВН-ВН оказывается полностью расположенной под линией для петли Вильсона до $(0.24, 0.1081)$, где находится ее критическая конечная точка (CEP) (Рис.44.F). Критическое значение c_B

для $T_{BH-BH}|_{\mu=0} = T_{WLy_2}|_{\mu=0}$ около $c_{B\,crit} \approx -0.11$ в этом случае.

4.4.2 Пространственноподобные петли Вильсона

В этой же главе отметим, что для пространственноподобных петель Вильсона в полностью анизотропной голографической модели получаются аналогичные формулы [124]. Пространственноподобные петли Вильсона представляют интерес, поскольку связаны с силой вязкости, действующей на кварк в КГП [58, 125–129]. Для действия Намбу-Гото получается:

$$\mathcal{S} = \int_{\mathcal{W}} \left(\frac{L^2 \mathfrak{b}_s}{z^2}\right) \sqrt{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 a_{33}^2 + \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 a_{23}^2 + \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 a_{13}^2 + \mathfrak{g}_3^2 a_{32}^2 (a_{31}^2 - a_{13}^2) + \frac{z'^2}{g}\,\bar{g}_{22}}\; d\xi^1 d\xi^2, \quad (4.26)$$

а эффективный потенциал имеет вид

$$\mathcal{V} \;=\; \left(\frac{L^2 \mathfrak{b}_s}{z^2}\right) \sqrt{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 a_{33}^2 + \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 a_{23}^2 + \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 a_{13}^2 + \mathfrak{g}_3^2 a_{32}^2 (a_{31}^2 - a_{13}^2)}, \quad (4.27)$$

где

$$\bar{g}_{22}(z, \phi, \theta, \psi) \;=\; \mathfrak{g}_1 a_{12}^2 + \mathfrak{g}_2 a_{22}^2 + \mathfrak{g}_3 a_{32}^2,$$

a_{ij} — элементы матрицы поворота, выраженные с помощью углов Эйлера. Более подробно матрица поворота описывается в Главе 5.

Эффективный потенциал $\mathcal{V}$ может иметь минимум и, следовательно, динамическую стенку. Положение динамической стенки зависит от ориентации пространственноподобной петли Вильсона. Для ориентаций Xy_1, xY_2 и y_1Y_2 (заглавный индекс соответствует большему направлению) уравнения динамической стенки имеют вид:

$$\mathcal{DW}_{xY_1} = \mathcal{DW}_{Xy_1} \;\equiv\; \frac{2\mathfrak{b}_s'(z)}{b_s(z)} + \frac{\mathfrak{g}_1'(z)}{\mathfrak{g}_1(z)} + \frac{\mathfrak{g}_2'(z)}{\mathfrak{g}_2(z)} - \frac{4}{z}\bigg|_{z=z_{DW}} = 0, \quad (4.28)$$

$$\mathcal{DW}_{xY_2} \;\equiv\; \frac{2\mathfrak{b}_s'(z)}{b_s(z)} + \frac{\mathfrak{g}_1'(z)}{\mathfrak{g}_1(z)} + \frac{\mathfrak{g}_3'(z)}{\mathfrak{g}_3(z)} - \frac{4}{z}\bigg|_{z=z_{DW}} = 0, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{DW}_{y_1Y_2} \;\equiv\; \frac{2\mathfrak{b}_s'(z)}{b_s(z)} + \frac{\mathfrak{g}_2'(z)}{\mathfrak{g}_2(z)} + \frac{\mathfrak{g}_3'(z)}{\mathfrak{g}_3(z)} - \frac{4}{z}\bigg|_{z=z_{DW}} = 0. \quad (4.30)$$

Также интересно сравнить формулы для петель Вильсона в полностью анизотропной метрике с формулами для голографической энтропии зацепленности (Глава 5) и формулами для проводимости в [130].

4.5 Обсуждение

В этой главе была представлена голографическая модель для описания анизотропной КГП в магнитном поле для тяжелых кварков. Эта модель является обобщением модели, полученной в [57], которая служит предельным случаем нулевого магнитного поля.

Магнитное поле $F^{(B)}$ характеризуется двумя параметрами – зарядом $F^{(B)}_{xy_1} = q_B$ и параметром c_B. Первый из них характеризует само поле Максвелла, в то время как второй описывает метрическую деформацию из-за наличия внешнего магнитного поля. Такая параметризация была введена для большей общности модели. В данной модели функция с c_B в метрике имеет простейшую гауссову форму [68, 71, 72]. В результате получено, что магнитный заряд почти не влияет на основные свойства голографического описания для КГП, поэтому фактически рассматривается c_B как эффективный фактор для поля Максвелла $F^{(B)}_{xy_1}$ и мы полагаем $q_B = 1$. Однако это вовсе не означает, что структура фазового перехода не зависит от q_B. Дело в том, что мы всегда можем связать эти параметры: $c_B = f(q_B)$. Специфическая форма этой функции является важным аспектом, который должен позволить фитировать результаты на решетке, экспериментальные данные, а также достичь согласия с другими теоретическими соображениями.

Структура фазовых переходов сильно зависит от выбранной модели. Модели, соответствующие легким /тяжелым кваркам, имеют разную структуру. Фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент связан с фазовым переходом первого рода и зависит от расположения динамической стенки (см. раздел 4.4.1). Ожидаемая фазовая структура для промежуточной версии модели между тяжелыми и легкими кварками (т.н. “гибридная” модель) показана на Рис.45.A и Рис.45.B. Область предполагаемого расположения линии фазового перехода первого рода изображена голубым цветом.

Структура фазового перехода зависит от анизотропии, характеризуемой параметрами ν и магнитного поля. Результаты схематически показаны на 3D-диаграммах (μ, ν, T) и (μ, B, T) на Рис.46. Фазовый переход для петли Вильсона обозначен зелеными линиями, BH-BH фазовый переход обозначен голубыми, синими и фиолетовыми линиями. Сплошные линии BH-BH фазовых переходов и перехода для петли Вильсона указывают на фазовый переход конфайнмент/деконфайнмент. На Рис.46.A мы видим, что при увеличении анизотропии BH-BH фазовые переходы и переход для петли Вильсона происходят при более низких температурах для тех же значений химического потенциала. С увеличением ν линия фазового перехода первого порядка удлиняется. На Рис.46.B качественно наблюдается та же ситуация с увеличением магнитного поля, фазовый переход происходит при

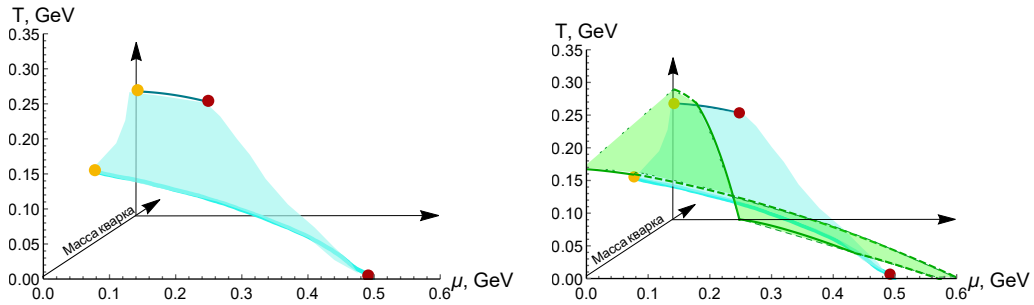


Рис. 45: Схематическое изображение зависимости фазовых переходов от массы кварка. Голубая поверхность показывает фазовый переход первого рода (A), а зеленая поверхность показывает переход конфайнмент/деконфайнмент (A, B). Красная и желтая точки являются критическими конечными точками.

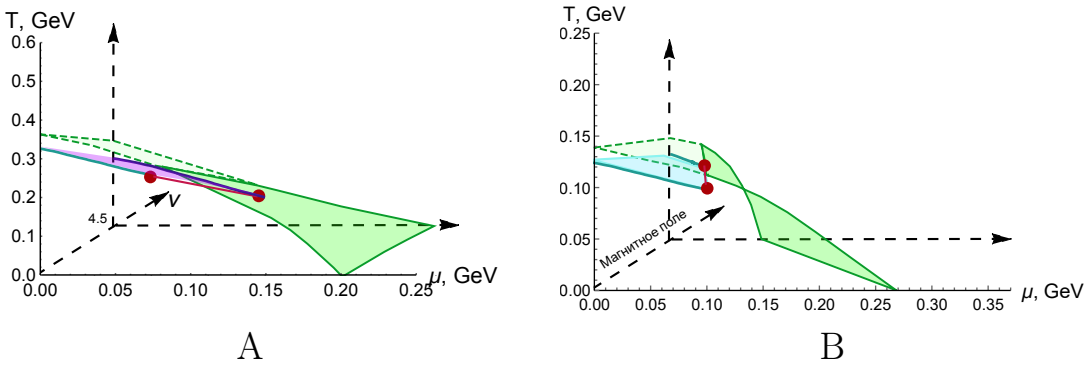


Рис. 46: Схематическое представление структуры фазовых переходов в модели, описывающей тяжелые кварки, в зависимости от анизотропии, вызванной: параметром ν (A), магнитным полем (B).

более низких температурах для тех же значений химического потенциала, но линия фазового перехода первого рода укорачивается.

Чтобы изучить фазовую диаграмму конфайнмент/деконфайнмент, исследовалось поведение натяжение струны в зависимости от ориентации пары кварков. С этой целью исследовалось поведение по-разному ориентированных времениподобных петель Вильсона, определяющих местоположение фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент. Обратим внимание, что в отличие от положения динамических стенок, натяжение струны сильно зависит от граничного условия для скалярного поля. В этой главе представлены расчеты для случая $z_0 = \epsilon \ll 1$.

В рассмотренной модели наблюдается обратный магнитный катализ. Такое поведение отличает эту модель от моделей для тяжелых кварков с полиномами более высокого порядка в факторе деформации. Например, модель,

рассмотренная в [72], демонстрирует прямой магнитный катализ для малых магнитных полей и обратный магнитный катализ для больших. Подобно более простым моделям тяжелых кварков [40, 57], в модели есть конечные критические точки, их положение зависит от значений магнитного поля.

Глава 5. Голографическая энтропия зацепленности для анизотпропной метрики с фазовым переходом конфайнмент/деконфайнмент

5.1 Постановка задачи

В этой главе рассматривается общая анизотропная пятимерная голографическая модель с различными функциями анизотропии, характеризующаяся фазовым переходом типа Ван-дер-Ваальса между малыми и большими черными дырами. Особенностью модели является связь между анизотропией метрики и анизотропией геометрии сталкивающихся тяжелых ионов. Голографическая энтропия зацепленности (ГЭЗ) вычисляется для подсистемы в форме параллелепипеда, ориентация которого относительно линии СТИ и прицельного параметра характеризуется углами Эйлера. Изучается зависимость энтропии зацепленности и ее плотности от термодинамических (температура, химический потенциал) и геометрических (параметры анизотропии, толщины и ориентации областей) параметров. В качестве частного случая рассматривается модель для тяжелых кварков с двумя равными функциями анизотропии [57]. Вычисления в рамках данного случая были проведены в Главе 2 для петель Вильсона с решениями для модели тяжелых кварков (уравнения (1.27)—(1.32)) при $c_B = 0$. Эта модель поддерживается действием Эйнштейна с полем дилатона и двумя полями Максвелла. В этой главе подробно обсуждается ГЭЗ и ее плотность: интересными особенностями этой модели являются скачки энтропии зацепленности и ее плотности вблизи линии фазового перехода первого рода. Эти скачки зависят от параметра анизотропии, химического потенциала и ориентации подсистемы.

Голография с гравитационной стороны позволяет определить термодинамическую энтропию и свободную энергию как функции температуры и химического потенциала. При голографическом подходе процесс термализации дуален образованию черной дыры, то есть процесс термализации в КХД становится связанным с изучением образования черной дыры в 5-мерной гравитации. Процесс термализации удобно описывать, по крайней мере теоретически, отслеживая эволюцию энтропии зацепленности выбранной области.

Энтропию зацепленности трудно вычислить в КХД, но ее можно вычислить на решетке [131–133], см. также [134]. Энтропию зацепленности можно также вычислить с гравитационной стороны. Это называется голографической энтропией зацепленности и определяется как площадь минимальной

поверхности, простирающейся от некоторой определенной поверхности A на границе в балк [96, 97, 135]. При таком подходе существует естественная возможность изучения эволюции энтропии в СТИ (термализации) и структуры фазовых переходов в рамках одной и той же голографической модели.

Начиная с термодинамического подхода Ландау к высокоэнергетическим столкновениям [98], можно связать энтропию шара КГП, произведенного в СТИ, с общей множественностью образования частиц в СТИ. В работе [99] высказана гипотеза о том, что можно связать энтропию зацепленности данной области с множественностью частиц, образующихся в этой области во время СТИ.

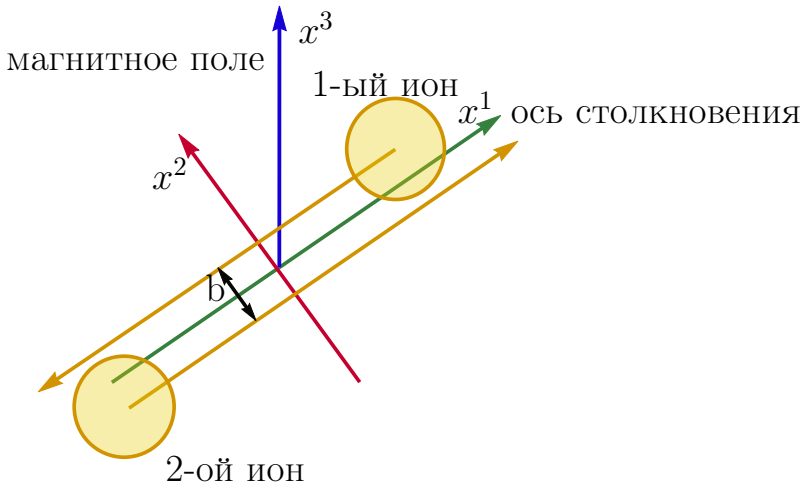


Рис. 47: Ориентация системы координат (x^1, x^2, x^3) относительно столкновения ионов.

ГЭЗ также широко изучалась и применялась при исследовании фазовых переходов в различных голографических моделях КХД [80–83, 136–149]. В частности, в работе [150] было предложено использовать энтропию зацепленности в качестве пробника конфайнмента.

Начнем с наиболее общей анизотропной голографической модели и рассмотрим общую ориентацию зацепленной области в форме плиты по отношению к геометрии СТИ. Естественная система координат, определенная СТИ, такова, что первая ось (продольная ось) направлена вдоль линии столкновения, а вторая (поперечная ось) определяется направлением прицельного параметра (Рис.47). Ориентация зацепленной области может быть задана углами Эйлера (Рис.48). Затем вычисляется энтропия зацепленности для анизотропной модели с симметрией в поперечных направле-

ниях, изученной в [56, 57]. Выбор этой анизотропной модели мотивирован ее предыдущим использованием для голографического описания СТИ [56]. Именно эта модель для специального параметра анизотропии $\nu = 4.5$ воспроизводит зависимость произведенной энтропии от энергии в соответствии с экспериментальными данными для энергетической зависимости от общей множественности частиц, произведенных в СТИ [60]. Как было показано в Главе 2, модель [57] описывает размытие фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент. Как мы увидим далее, модель указывает на связь энтропии зацепленности с фазовыми переходами, что можно проинтерпретировать как связь флуктуаций множественности с фазовыми переходами.

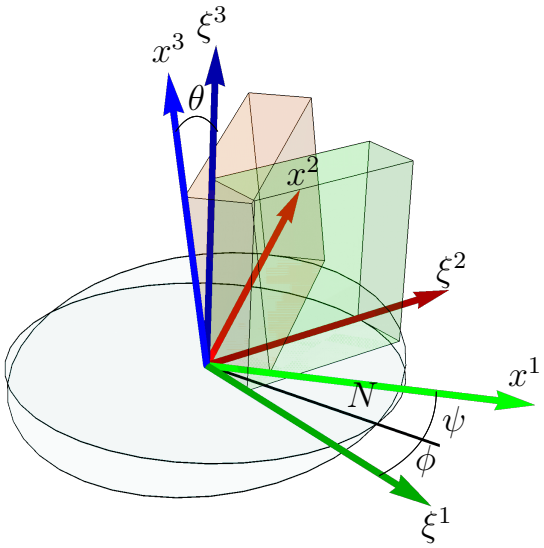


Рис. 48: Зацепленная подсистема представлена зеленой пластинкой. Вращением зеленой пластинки, описываемой углами Эйлера (ϕ, θ, ψ), мы получаем розовую пластинку, ориентированную по осям (x^1, x^2, x^3) связанную с геометрией СТИ и показанную на Рис.47.

Есть много причин использовать анизотропные модели в контексте СТИ [50] и самой КХД [53]. Другие анизотропные голографические модели активно изучались в последние годы в [151–154], и основной мотивацией для этих исследований была также анизотропная природа СТИ.

Мы выбираем область зацепленности в форме пластинки, которая имеет конечную протяженность в одном направлении и бесконечную протяженность в двух других направлениях (Рис.49). Мы неявно предполагаем, что представляющая интерес пластинка расположена внутри области перекрытия двух ионов. В случае пространства-времени с полностью анизотропной

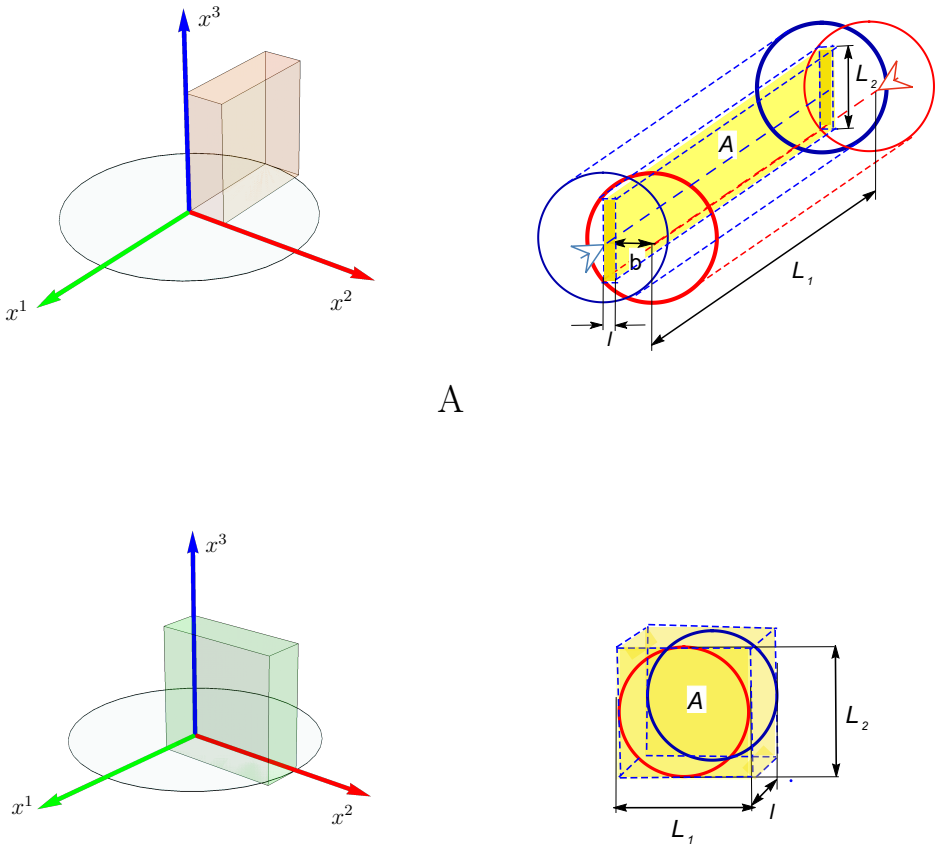


Рис. 49: Схематическое изображение столкновения двух ионов. A) Каждый ион представлен в виде диска с радиусом $D/2$ (синий и красный диски). Траектории центров двух ионов, изображенных точками, показаны пунктирными синими и красными линиями, а направления их движения обозначены толстыми стрелками. Область перекрытия двух ионов, рассматриваемых как два диска, имеет форму области, ограниченной двумя дугами двух окружностей (в поперечном сечении, перпендикулярном линии столкновения ионов). B) Почти центральное столкновение. В левой части каждого графика мы показываем ориентацию рассматриваемых областей.

метрикой (см. (5.1) ниже) проблема нахождения функционала экстремальной области эффективно сводится к нахождению геодезических в некотором вспомогательном 2-мерном евклидовом пространстве. Для модели [57] мы находим, что изменение угла между осью столкновений и направлением наименьшей стороны области зацепленности в форме плиты изменяет длину плиты. При увеличении этого угла увеличивается ГЭЗ, и согласно гипотезе [99] это означает увеличение множественности образования частиц

из этой области.

Это усиление зависит от геометрических (длина) и термодинамических (температура T и химический потенциал μ) параметров. Плотность ГЭЗ [155–158] является более удобным объектом для изучения, поскольку она не содержит ультрафиолетовых расходимостей. ГЭЗ и ее плотность претерпевают скачки, и эти скачки увеличиваются по мере увеличения угла. Кроме того, значения плотности ГЭЗ и ее скачки увеличиваются с увеличением анизотропии.

5.2 Анизотропные голографические модели

Начнем с общей анизотропной голографической модели

$$ds^2 = \mathcal{G}_{s,MN} dx^M dx^N \tag{5.1}$$

$$= \frac{L^2 \mathfrak{b}_s(z)}{z^2} \left[-g(z)dt^2 + \mathfrak{g}_1 dx^2 + \mathfrak{g}_2 dy_1^2 + \mathfrak{g}_3 dy_2^2 + \frac{dz^2}{g(z)} \right], \tag{5.2}$$

Здесь $\mathfrak{b}_s(z) = \mathfrak{b}(z) \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi(z)}$ – это фактор деформации AdS (в струнном фрейме при наличии дилатона), $g(z)$ – это функция почернения и $\mathfrak{g}_i(z)$ – функции анизотропии. В отличие от (4.8), в этой Главе мы будем использовать в 5-мерной метрике (5.1) маленькие "x".

Теперь рассмотрим частный случай. Полагая в предыдущей формуле $\mathfrak{g}_1(z) = 1$ и $\mathfrak{g}_2(z) = \mathfrak{g}_3(z) = \mathfrak{g}(z)$, получим

$$ds^2 = \frac{L^2 \mathfrak{b}_s(z)}{z^2} \left[-g(z)dt^2 + dx^2 + \mathfrak{g}(z) \left((dy^1)^2 + (dy^2)^2 \right) + \frac{dz^2}{g(z)} \right]. \tag{5.3}$$

Метрика (5.3) со специальной формой факторов анизотропии $\mathfrak{g}(z)$ как в [56] и частным случаем фактора деформации $\mathfrak{b}(z)$, описывающего голографическую модель для тяжелых кварков [57] и представляющую интерес для нас:

$$ds^2 = \frac{L^2 \mathfrak{b}(z)}{z^2} \left[-g(z)dt^2 + dx^2 + \left(\frac{z}{L} \right)^{2-\frac{2}{\nu}} \left((dy^1)^2 + (dy^2)^2 \right) + \frac{dz^2}{g(z)} \right], \tag{5.4}$$

где L – радиус AdS и $\mathfrak{b}(z) = e^{-cz^2/2}$. Во всех вычислениях в этой главе мы полагаем $c = 1$. Здесь метрика написана в эйнштейновском фрейме. В следующем параграфе, представляя вычисления для ГЭЗ, мы также используем струнный фрейм с добавленным зависящим от дилатона экспоненциальным префактором [96,150]. Метрика (5.4) поддерживается эйнштейновским

действием с дилатоном и двумя полями Максвелла со специальным потенциалом V для дилатонного поля ϕ и калибровочными функциями f_1 и f_2 для двух полей Максвелла:

$$S = \frac{1}{16\pi G_5}\int d^5x\sqrt{-g}\left[R - \frac{f_1(\phi)}{4}F^{(1)\,2} - \frac{f_2(\phi)}{4}F^{(2)\,2} - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\right], \tag{5.5}$$

где $F^{(1)2}$ и $F^{(2)\,2}$ –это квадраты полей Максвелла.

Выбран анзац для полей Максвелла $A^{(1)}_M = A_t(z)\delta^0_M$, и $F^{(2)}_{y^1y^2} = q$, поля дилатона $\phi = \phi(z)$ и метрики (5.4), удовлетворяющей уравнениям движения для соотношений между фактором деформации $\mathfrak{b}(z)$, дилатоном и функциями $V(\phi)$, $f_1(\phi)$, $f_2(\phi)$ [57].

Анзац (5.4) нарушает изотропию, сохраняя трансляционную и (t,x)-буст инвариатность. Преимущество этой модели в том, что позволяет найти потенциалы V, f_1 и f_2 и функцию почернения g точно.

Другие похожие голографические анизотропные модели имеют симметрию в поперечных направлениях, но нарушают буст-инвариантность в (t,x^1) плоскости, сохраняя ее в плоскостях (t,x^2) и (t,x^3). Они базируются на метрике Матеоса и Транканелли [153, 154]

$$ds^2 = \frac{L^2b(z)}{z^2}\left[-g(z)dt^2 + e^{2h(z)}(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{dz^2}{g(z)}\right]. \tag{5.6}$$

Эта метрика поддерживается действием Эйнштейна с полями аксиона и дилатона.

Термодинамические свойства анизотропной голографической модели для тяжелых кварков описываются подробно в Главах 2 и 4.

5.3 Голографическая энтропия зацепленности

5.3.1 Общие положения

Для некоторой пространственной 3-х мерной области A с границей ∂A голографическая энтропия зацеленности S_{HEE} [96, 97, 135] получается путем экстремизации функционала обьема статической 3-мерной области γ, которая располагается в 5-мерном пространстве $\mathcal{M}$ (AdS_5 или его деформации) и на границе 5-мерного пространства $\partial\mathcal{M}$ совпадает с ∂A

$$S_{HEE} = \frac{1}{4}\min_{\gamma}\int_\gamma d^3\xi\sqrt{|\det \mathcal{G}_{s,MN}\partial_\alpha x^M\partial_\beta x^N|}, \qquad \partial\gamma\Big|_{\partial\mathcal{M}} = \partial A. \tag{5.7}$$

Отметим, что пятимерную гравитационную постоянную мы в дальнейшем положим $G_5 = 1$. Трудно сделать вычисления для произвольных A, см. например, [159]. Мы проведем расчеты для областей, имеющих форму параллелепипедов, две стороны которых длинные, а одна короткая, т.е. для параллелепипедов, которые выглядят как плиты.

Ориентация этих параллелепипедов может быть задана углами Эйлера (ϕ, θ, ψ) относительно осей x^1, x^2, x^3, см. Рис.48. Ось x^1 выбирается вдоль линии столкновения, ось x^2 выбирается в поперечном направлении вдоль направления прицельного параметра b, а ось x^3 выбирается вдоль возникающего магнитного поля, см. Рис.47. На Рис.48 начальная плита ориентирована вдоль осей, заданных геометрией СТИ, и показана зеленым цветом. Повернутая плита, показанная розовым цветом, определяет область зацепленности. Мы собираемся рассчитать ГЭЗ для повернутого розового параллелепипеда.

Зацепленные плиты должны быть в трехмерном перекрытии двух областей ядер, так называемых областей Глаубера, см. Рис.49. Область перекрытия двух ядер зависит от времени. В фиксированный момент времени это трехмерное тело, в котором поперечное сечение, перпендикулярное оси столкновений, имеет форму, ограниченную дугами двух окружностей, сдвинутых относительно друг друга в соответствии с прицельным параметром. Площадь и форма этой области зависят от прицельного параметра b. Площадь перекрытия для периферийного столкновения аппроксимируется параллелепипедом с размерами L_1, L_2 и ℓ. Мы предполагаем, что $L_1, L_2 >> \ell$, каждый ион представлен в виде диска с радиусом $D/2$, а прицельный параметр b существенно меньше, чем D, $b << D$. Площадь перекрытия двух ионов почти цилиндрическая, и мы можем рассмотреть случай очень маленького времени после столкновения, $\ell << D$, $L_1, L_2 \approx D$. Мы рассмотрим два конкретных случая: периферическое столкновение и центральное, см. Рис.49.

Для пространства-времени с метрикой (5.1) задача нахождения функционала экстремальной площади (5.7) для плиты с произвольной ориентацией эффективно сводится к нахождению геодезических в некотором вспомогательном 2-мерном евклидовом пространстве. Чтобы показать это, мы рассматриваем вложение в статической калибровке и предполагаем, что ориентация плиты относительно осей СТИ задается углами Эйлера, см. Рис.48.

У нас

$$\begin{aligned} x^0(\xi) &= const, \\ x^i(\xi) &= \sum_{j=1,2,3} a_{ij}(\phi,\theta,\psi)\,\xi^j, \quad i=1,2,3, \\ x^4(\xi) &= z(\xi^1), \end{aligned} \tag{5.8}$$

x^i – пространственные координаты в (5.1), $a_{ij}(\phi,\theta,\psi)$ являются элементами матрицы вращения

$$M(\phi,\theta,\psi) = \begin{pmatrix} a_{11}(\phi,\theta,\psi) & a_{12}(\phi,\theta,\psi) & a_{13}(\phi,\theta,\psi) \\ a_{21}(\phi,\theta,\psi) & a_{22}(\phi,\theta,\psi) & a_{23}(\phi,\theta,\psi) \\ a_{31}(\phi,\theta,\psi) & a_{32}(\phi,\theta,\psi) & a_{33}(\phi,\theta,\psi) \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

и

$$\begin{aligned} a_{11}(\phi,\theta,\psi) &= \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi, \\ a_{12}(\phi,\theta,\psi) &= -\cos\psi\sin\phi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi, \\ a_{13}(\phi,\theta,\psi) &= \sin\theta\sin\psi, \\ a_{21}(\phi,\theta,\psi) &= \cos\theta\cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi, \\ a_{22}(\phi,\theta,\psi) &= \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi, \\ a_{23}(\phi,\theta,\psi) &= -\cos\psi\sin\theta, \\ a_{31}(\phi,\theta,\psi) &= \sin\phi\sin\theta, \\ a_{32}(\phi,\theta,\psi) &= \cos\phi\sin\theta, \\ a_{33}(\phi,\theta,\psi) &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Здесь ϕ – это угол между осью ξ^1 и линией узлов (N), показанной на Рис.48 черным, θ – это угол между осями ξ^3 и x^3, ψ – это угол между линией узлов N и осью x^1.

Запишем линейный элемент индуцированной метрики как

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad \alpha,\beta=1,2,3 \tag{5.11}$$

и подставляем дифференциалы dx^M из соотношений (5.8) в правую часть из (5.1):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\Big(\sum_i \mathfrak{g}_i(z)dx^{i\,2} + \frac{dx^{4\,2}}{g}\Big) \\ &= \frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\Big(\sum_i \mathfrak{g}_i(z)\Big(\sum_j a_{ij}(\phi,\theta,\psi)d\xi^j\Big)^2 + z'^2\frac{d(\xi^1)^2}{g(z)}\Big). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Мы имеем

$$g_{\alpha\beta} \;=\; \frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\,\bar g_{\alpha\beta} \tag{5.13}$$

и

$$\begin{aligned}
\bar g_{11}(z,\phi,\theta,\psi) &= \mathfrak{g}_1 a_{11}^2+\mathfrak{g}_2 a_{21}^2+\mathfrak{g}_3 a_{31}^2+\frac{z'^2}{g},\\
\bar g_{22}(z,\phi,\theta,\psi) &= \mathfrak{g}_1 a_{12}^2+\mathfrak{g}_2 a_{22}^2+\mathfrak{g}_3 a_{32}^2,\\
\bar g_{33}(z,\phi,\theta,\psi) &= \mathfrak{g}_1 a_{13}^2+\mathfrak{g}_2 a_{23}^2+\mathfrak{g}_3 a_{33}^2,\\
\bar g_{12}(z,\phi,\theta,\psi) &= \mathfrak{g}_1 a_{11}a_{12}+\mathfrak{g}_2 a_{21}a_{22}+\mathfrak{g}_3 a_{13}a_{32},\\
\bar g_{13}(z,\phi,\theta,\psi) &= \mathfrak{g}_1 a_{11}a_{13}+\mathfrak{g}_2 a_{21}a_{23}+\mathfrak{g}_3 a_{31}a_{33},\\
\bar g_{23}(z,\phi,\theta,\psi) &= \mathfrak{g}_1 a_{12}a_{13}+\mathfrak{g}_2 a_{22}a_{23}+\mathfrak{g}_3 a_{32}a_{33},\\
\bar g_{21} &= \bar g_{12},\quad g_{32}=\bar g_{23},\quad \bar g_{32}=\bar g_{23}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Определитель индуцированной метрики

$$\det g_{\alpha\beta} \;=\; \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^3\left(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3+\frac{z'^2}{g}\left(\bar g_{22}\bar g_{33}-\bar g_{23}^2\right)\right) \tag{5.15}$$

и действие Намбу-Гото

$$\mathcal{S}=\int_{\mathcal{P}}\left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^{3/2}\sqrt{\left(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3+\frac{z'^2}{g}\left(\bar g_{22}\bar g_{33}-\bar g_{23}^2\right)\right)}d\xi^1d\xi^2d\xi^3, \tag{5.16}$$

где $g,\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_3$ – функции z и $\bar g_{22},\bar g_{33},\bar g_{23}$ – функции z и углов Эйлера. Поскольку нет зависимости подынтегрального выражения от ξ^2,ξ^3, мы можем выполнить интегрирование по этим переменным, которое дает размеры параллелепипеда во втором и третьем направлениях:

$$\mathfrak{s}\equiv\frac{\mathcal{S}}{L_1L_2}=\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^{3/2}\sqrt{\left(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3+\frac{z'^2}{g}\left(\bar g_{22}\bar g_{33}-\bar g_{23}^2\right)\right)}d\xi^1. \tag{5.17}$$

Здесь ℓ,L_1,L_2 длины параллелепипеда в первом, втором и третьем направлениях. Длина ℓ может быть зафиксирована граничными условиями, см. ниже (5.22). В дальнейшем мы предполагаем $L_1=L_2=1$.

Действие (5.17) – частный случай действия Борна-Инфельда, с которым мы уже встречались в предыдущих главах при описании петель Вильсона:

$$\mathcal{S}=\int_{-\ell/2}^{\ell/2}M(z(\xi))\sqrt{\mathcal{F}(z(\xi))+(z'(\xi))^2}d\xi. \tag{5.18}$$

Это действие определяет динамическую систему с динамической переменной $z = z(\xi)$ и временем ξ. Эффективный потенциал

$$\mathcal{V}(z(\xi)) \equiv M(z(\xi))\sqrt{\mathcal{F}(z(\xi))}. \tag{5.19}$$

У этой системы имеется первый интеграл:

$$\frac{M(z(\xi))\mathcal{F}(z(\xi))}{\sqrt{\mathcal{F}(z(\xi)) + (z'(\xi))^2}} = \mathcal{I}. \tag{5.20}$$

Из (5.20) мы можем найти "верхнюю" точку z_* (наиболее удаленное положение минимальной поверхности от границы), где $z'(\xi) = 0$:

$$M(z_*)\sqrt{F(z_*)} = \mathcal{I}. \tag{5.21}$$

Находя z' из (5.20) можно получить выражение для длины ℓ и действия $\mathcal{S}$ (5.18), которые определяют ГЭЗ S (5.7) с точностью до фактора $1/4$:

$$\frac{\ell}{2} = \int_0^{z_*} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{F}(z)}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{\mathcal{V}^2(z)}{\mathcal{V}^2(z_*)} - 1}}, \tag{5.22}$$

$$\frac{\mathcal{S}}{2} = \int_\epsilon^{z_*} \frac{M(z)dz}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)}}}. \tag{5.23}$$

Для действия (5.17) мы получаем

$$M(z) = \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{(\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2)}{g}}, \tag{5.24}$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 g}{(\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2)}, \tag{5.25}$$

$$\mathcal{V}(z) = \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3}. \tag{5.26}$$

Несколько замечаний, касающихся полученных формул.

- Форма эффективного потенциала $\mathcal{V}(z)$ не зависит от ориентации плитки. Поэтому положение динамической стенки, определенное по минимуму эффективного потенциала $\mathcal{V}(z)$, одинаково для всех ориентаций при фиксированных z_h и ν.

- Выражения для $M(z)$ и $\mathcal{F}(z)$ зависят только от комбинации

$$\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2, \tag{5.27}$$

которая в свою очередь зависит от 3 углов ϕ, ψ и θ:

$$\bar{g}_{22}\bar{g}_{33} - \bar{g}_{23}^2 = \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 a_{31}^2(\phi,\theta,\psi) + \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 a_{21}^2(\phi,\theta,\psi) + \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 a_{11}^2(\phi,\theta,\psi). \tag{5.28}$$

5.3.2 Геометрическая перенормировка

Удобно выполнить перенормировку энтропии зацепленности путем вычитания вклада от "несвязанной" ("disconnected") поверхности из вклада от "связанной" ("connected") [82, 142, 150]. Вклад от "несвязанных" поверхностей дается удвоенной площадью поверхности, свисающей с границы до горизонта $z = z_h$ или до динамической стенки z_{DW} и площадью поверхности вдоль $z = z_h$ или $z = z_{DW}$ (при условии, что динамическая стенка существует для рассматриваемых параметров).

Разность между "связанной" и "несвязанной" частями $S_{CD} \equiv S_{conn} - S_{discon}$ для произвольно ориентированной плитки:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{CD} &= 2\int_\epsilon^{z_*} \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 a_{31}^2 + \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 a_{21}^2 + \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 a_{11}^2}{g(z)}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)}}} \\ &- 2\int_\epsilon^{z_D} \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 a_{31}^2 + \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 a_{21}^2 + \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 a_{11}^2}{g(z)}}\, dz \\ &- \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z_D)}{z_D^2}\right)^{3/2} \sqrt{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3}\Big|_{z=z_D} \ell, \end{aligned} \tag{5.29}$$

где z_D – это минимальное из двух значений z_{DW} и z_h (z_{DW} – это положение динамической стенки, в этой точке $\mathcal{V}'(z_{DW}) = 0$).

Отметим полезное равенство:

$$\frac{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})^2\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})^2\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 + (a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33})^2\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3}{g} = \frac{\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2 a_{31}^2 + \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 a_{21}^2 + \mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3 a_{11}^2}{g}. \tag{5.30}$$

В (5.29) $z = z_D$ – это положение горизонта или динамической стенки. Здесь мы рассматриваем динамическую стенку для ГЭЗ, которая определяется

положением минимума эффективного потенциала $\mathcal{V}(z)$,

$$\mathcal{V}(z) = \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\mathfrak{g}_1(z)\mathfrak{g}_2(z)\mathfrak{g}_3(z)}. \tag{5.31}$$

Интересно отметить, что $\mathcal{V}$ не зависит от углов Эйлера. Динамическая стенка ГЭЗ не совпадает с динамическими стенками для вильсоновских петель, которые зависят от ориентации петель по отношению к оси СТИ.

5.3.3 ГЭЗ для $\mathfrak{g}_1 = 1$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}$ и произвольной ориентации

В этом параграфе мы рассматриваем метрику (5.3). Из общей формулы (5.17) мы получаем

$$\frac{\mathcal{S}}{2} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{s(\mathfrak{g},\phi,\theta,\psi)}\, dz, \tag{5.32}$$

где

$$s(\mathfrak{g},\phi,\theta,\psi) = \mathfrak{g}^2(z) + \Big[a_{21}^2(\phi,\theta,\psi) + a_{31}^2(\phi,\theta,\psi) + a_{11}^2(\phi,\theta,\psi)\mathfrak{g}(z)\Big]\, \frac{\mathfrak{g}(z)\, z'^2}{g(z)},$$

и a_{ij} задаются (5.10) и удовлетворяют соотношению

$$a_{21}^2(\phi,\theta,\psi) + a_{31}^2(\phi,\theta,\psi) + a_{11}^2(\phi,\theta,\psi) = 1. \tag{5.33}$$

Поэтому мы можем использовать новую параметризацию

$$a_{11}(\phi,\theta,\psi) = \cos\varphi, \tag{5.34}$$

и в этом случае

$$s(\mathfrak{g},\phi,\theta,\psi) = \mathfrak{g}^2(z) + \Big[\sin^2\varphi + \mathfrak{g}(z)\cos^2\varphi\Big]\, \frac{\mathfrak{g}(z)\, z'^2}{g(z)}. \tag{5.35}$$

Отметим, что φ – ничто иное, как угол между осями ξ^1 и x^1. В этой параметризации мы получаем

$$\mathcal{V}(\mathfrak{g},\phi,\theta,\psi) = \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \mathfrak{g}(z), \tag{5.36}$$

$$M(\mathfrak{g},\phi,\theta,\psi) = \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\mathfrak{g}(z)}{g(z)}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\mathfrak{g}(z))}, \tag{5.37}$$

$$\mathcal{F}(\mathfrak{g},\phi,\theta,\psi) = \frac{\mathfrak{g}(z)g(z)}{\sin^2\varphi + \mathfrak{g}(z)\cos^2\varphi}. \tag{5.38}$$

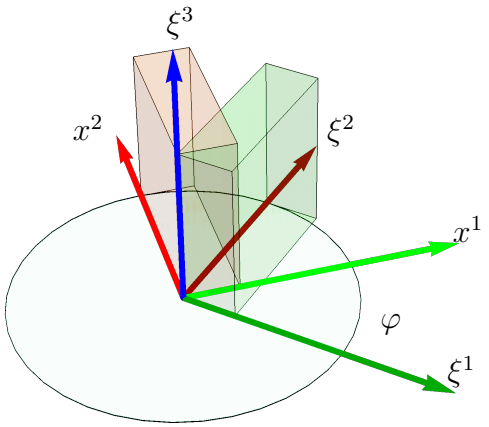


Рис. 50: Ориентация подсистемы определяется углами Эйлера $(\varphi, 0, 0)$. ГЭЗ в геометрии (5.3) инвариантна относительно вращения пластины вокруг оси x^1.

Этот ответ эквивалентен ГЭЗ подсистемы, ориентированной вращением исходной пластины относительно естественных осей СТИ, вокруг оси ξ^3 на угол φ, см. Рис.50.

5.3.4 Применение геометрической перенормировки

В соответствии с (5.29) мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{CD,\varphi} &= 2\int_\epsilon^{z_*} \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\mathfrak{g}(z)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\,\mathfrak{g}(z))}{g(z)}}\,\frac{dz}{\sqrt{1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)}}} \\
&- 2\int_\epsilon^{z_D} \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\mathfrak{g}(z)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\,\mathfrak{g}(z))}{g(z)}}\,dz \\
&- \left(\frac{L^2\mathfrak{b}_s(z)}{z^2}\right)^{3/2} \mathfrak{g}(z)\Big|_{z=z_D} \ell(\mathfrak{g},\varphi),
\end{aligned} \tag{5.39}$$

где

$$\frac{\ell(\mathfrak{g},\varphi)}{2} = \int_0^{z_*} \frac{\sqrt{\sin^2\varphi + \mathfrak{g}(z)\cos^2\varphi}}{\sqrt{\mathfrak{g}(z)g(z)}}\,\frac{\mathcal{V}(z_*)}{\mathcal{V}(z)}\,\frac{dz}{\sqrt{1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)}}}. \tag{5.40}$$

5.3.5 Голографическая энтропия зацепленности для $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = (z/L)^{2-2/\nu}$

Для (5.4) мы получаем следующие выражения для характерной длины и действия

$$\frac{\ell_\varphi}{2} = \int_0^{z_*} \frac{\mathcal{V}(z_*)}{\mathcal{V}(z)} \sqrt{\frac{(\frac{z}{L})^{-2+2/\nu}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{g(z)(1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)})}}\, dz, \quad \mathcal{V}(z) = \left(\frac{L}{z}\right)^{1+2/\nu} \mathfrak{b}_s^{3/2}(z), \tag{5.41}$$

$$\frac{\mathcal{S}_\varphi}{2} = \int_\epsilon^{z_*} \mathcal{V}(z) \sqrt{\frac{(\frac{z}{L})^{-2+2/\nu}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{g(z)(1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)})}}\, dz. \tag{5.42}$$

$M_\varphi(z)$ задается как

$$M_\varphi(z) = \mathcal{V}(z) \sqrt{\frac{\left(\frac{z}{L}\right)^{-2+2/\nu}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{g(z)}} \tag{5.43}$$

и определяет степень расходимости $\mathcal{S}_\varphi$. Около $z = 0$ имеется различное поведение для случаев $\varphi = 0$ и $\varphi \neq 0$. Однако, мы можем использовать универсальную перенормировку (5.29).

Для частного случая продольной ориентации ($\varphi = 0$, индекс xYY) разность между "связанной" и "несвязной" частями, в соответствии с (5.29) имеет вид

$$S_{CD,xYY} = \frac{1}{2}\int_\epsilon^{z_*} \frac{\mathcal{V}(z)\,dz}{\sqrt{g(z)}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)}}} - 1\right] - \frac{1}{2}\int_{z_*}^{z_D} \frac{\mathcal{V}(z)dz}{\sqrt{g(z)}} - \frac{\mathcal{V}(z_D)}{4}\,\ell_{xYY}, \tag{5.44}$$

где

$$\frac{\ell_{xYY}}{2} = \int_0^{z_*} \frac{\mathcal{V}(z_*)}{\mathcal{V}(z)} \frac{dz}{\sqrt{g(z)(1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)})}}. \tag{5.45}$$

Разность между "связанной" и "несвязанной" частями для попречной ориентации ($\varphi = \pi/2$, индекс yXY)

$$S_{CD,yXY} = \frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{z_*} \frac{L^{1-1/\nu}\mathcal{V}(z)}{z^{1-1/\nu}}\frac{dz}{\sqrt{g(z)}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)}}}-1\right] - \frac{1}{2}\int_{z_*}^{z_D} \frac{z^{1-1/\nu}\mathcal{V}(z)}{z^{1-1/\nu}}\frac{dz}{\sqrt{g(z)}} - \frac{\mathcal{V}(z_D)}{4}\,\ell_{yXY}, \tag{5.46}$$

где

$$\frac{\ell_{yXY}}{2} \;=\; \int_0^{z_*} \frac{\mathcal{V}(z_*)}{\mathcal{V}(z)}\frac{L^{1-1/\nu}}{z^{1-1/\nu}}\frac{dz}{\sqrt{g(z)(1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)})}}. \tag{5.47}$$

ГЭЗ – это величина с ультрафиолетовой расходимостью, поэтому для ГЭЗ требуется перенормировка при $z \sim 0$. Обратим внимание на то, что мы можем проанализировать поведение интеграла на верхнем пределе z_*. Если $z_* \neq z_{DW}$ (z_{DW} в точке, где $\mathcal{V}'(z_{DW}) = 0$), то у нас есть интегрируемая сингулярность (поскольку $\mathcal{V}'(z) \neq 0$ для $0 < z < z_*$). Если $z_* = z_{DW}$, то имеется логарифмическая сингулярность.

Теперь мы можем определить степень расходимости для подынтегрального выражения при $z = 0$. Она определяется поведением M вблизи $z = 0$:

$$M(z)\left[\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)})}}-1\right] \underset{z\sim 0}{\sim} \frac{M(z)}{(\mathcal{V}(z))^2} \underset{z\sim 0}{\sim} z^{\kappa_0}. \tag{5.48}$$

Здесь κ_0 определяется асимптотикой M и $\mathcal{V}$ при $z = 0$ и зависит от ориентации, поэтому мы используем индексы для указания различных ориентаций.

С учетом поля дилатона $\phi(z, z_h, c, \nu)$ асимптотика задается формулой (ур. (2.58) в [57]):

$$\phi(z, z_h, c, \nu) \sim -\,k(z_h, \nu, c) + \frac{2\sqrt{\nu-1}}{\nu}\log\left(\frac{z}{z_h}\right), \tag{5.49}$$

где $k(z_h, \nu, c)$ не зависит от z. Поэтому мы имеем следующую асимптотику для функций $\mathfrak{b}_s(z, \nu)$ и $M(z)$ при $z \to 0$:

$$\mathfrak{b}_s(z) \;\underset{z\sim 0}{\sim}\; B_s(\nu, c, z_h)\, z^{\frac{\sqrt{\frac{8}{3}(\nu-1)}}{\nu}}, \tag{5.50}$$

$$M_{xYY}(z) \;\underset{z\sim 0}{\sim}\; z^{\kappa_{xYY}(\nu)} B_s^{3/2}(\nu, c, z_h), \tag{5.51}$$

$$M_{yXY}(z) \;\underset{z\sim 0}{\sim}\; z^{\kappa_{yXY}} B_s^{3/2}(\nu, c, z_h), \tag{5.52}$$

где

$$B_s(\nu,c,z_h) \equiv e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{2\sqrt{\nu-1}}{\nu}\log z_h + k(z_h,\nu,c)\right)}, \quad (5.53)$$

$$\kappa_{xYY}(\nu) \equiv \frac{\sqrt{6(\nu-1)}}{\nu} - 1 - \frac{2}{\nu}, \quad (5.54)$$

$$\kappa_{yXY}(\nu) \equiv \frac{\sqrt{6(\nu-1)}}{\nu} - 2 - 1/\nu. \quad (5.55)$$

Выражение для $B_s(\nu,c,z_h)$:

$$B_s(\nu,c,z_h)^{3/2} = 2^{-\frac{\sqrt{6}\sqrt{\nu-1}}{\nu}-1}3^{-\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\nu-1}}{\nu}}\left(\frac{\sqrt{6}\sqrt{\nu-1}}{\nu} - \frac{1}{\nu} - 1\right) z_*^{-\frac{\sqrt{6}\sqrt{\nu-1}}{\nu}+\frac{1}{\nu}+2} \times$$

$$\times \left(\frac{\mathcal{N}(\nu,c,z_h) - \sqrt{3}\nu\left(cz_h^2+3\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{\nu-1} - 3\sqrt{3}\nu}\right)^{9/4} \left(\frac{9c\nu^2 z_h^2 + \sqrt{2(\nu-1)}\mathcal{N}(\nu,c,z_h) + 8\nu - 8}{\nu-1}\right)^{\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\nu-1}}{\nu}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\nu-1}}{\nu} - \frac{\sqrt{3}\mathcal{N}(\nu,c,z_h)}{4\nu}\right)\left(\frac{z}{z_h}\right)^{\frac{\sqrt{6}\sqrt{\nu-1}}{\nu}}, \quad (5.56)$$

где

$$\mathcal{N}(\nu,c,z_h) = \sqrt{3c\nu^2 z_h^2\left(cz_h^2+6\right) + 8\nu - 8}. \quad (5.57)$$

Асимптотика для потенциала $\mathcal{V}$ при $z \sim 0$:

$$\mathcal{V}(z) = \frac{\mathfrak{b}_s(z)^{3/2}}{z^{2+1/\nu}} \underset{z\sim 0}{\sim} M_{xYY}(z). \quad (5.58)$$

Сравнивая с $\kappa_{xYY}(\nu)$, получаем

$$\kappa_{yXY}(\nu) = \kappa_{xYY}(\nu) - 1 + 1/\nu. \quad (5.59)$$

Подынтегральное выражение (5.48) для случая yXY имеет большую степень расходимости, чем в случае xYY, поэтому

$$\kappa_0 = -\left(2 - 2/\nu + \frac{\sqrt{6(\nu-1)}}{\nu} - 2 - 1/\nu\right) = 3/\nu - \frac{\sqrt{6(\nu-1)}}{\nu}. \quad (5.60)$$

Отметим, что $\kappa_0 > -1$ для $\nu \geq 1$ (см. Рис.51), что означает, что ГЭЗ конечна после геометрической перенормировки для $\nu \geq 1$.

5.3.6 Минимальная перенормировка для $\varphi = 0$

Здесь мы рассматриваем (5.42) в частном случае $\varphi = 0$, т.е. наименьший размер плиты, ориентированной вдоль продольного направления. В обозначениях (5.18) мы получаем:

$$\mathcal{V}_{xYY}(z) = \frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z)}{z^{1+2/\nu}}, \quad M_{xYY}(z) = \frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z)}{z^{1+2/\nu}\sqrt{g(z)}}, \quad \mathcal{F}_{xYY}(z) = g(z). \quad (5.61)$$

Ультрафиолетовые расходимости определяют поведение $M_{xYY}(z)$ при $z \sim 0$ (5.52). Мы видим, что у $M_{xYY}(z)$ есть интегрируемая сингулярность при $z = 0$ для $\nu \geq 1.67$. Для $\nu = 1$ мы представляем перенормировку, и для перенормированной ГЭЗ получается:

$$S_{ren} = \frac{1}{2}\int_\epsilon^{z_*} dz \left[\frac{M(z)}{\sqrt{(1 - \frac{\mathcal{V}^2(z_*)}{\mathcal{V}^2(z)})}} - M_{as}(z)\right] + \frac{1}{2}\int^{z_*} M_{as}(z)dz, \quad (5.62)$$

где последний член обозначает неопределенный интеграл от $M_{as}(z)$, взятый в точке $z = z_*$.

Для случая xYY и $\nu > 1.67$ мы имеем интегрируемую сингулярность. Для случая xYY и $1 < \nu < 1.67$ можно записать перенормировку:

$$S_{xYY,ren} = \frac{1}{2}\int_\epsilon^{z_*} dz \left[\frac{M_{xYY}(z)}{\sqrt{(1 - \frac{\mathcal{V}^2_{xYY}(z_*)}{\mathcal{V}^2_{xYY}(z)})}} - M_{xYY,as}(z)\right] + \frac{1}{2}\int^{z_*} M_{xYY,as}(z)dz, \quad (5.63)$$

где мы используем выражение для неопределенного интеграла от M:

$$\int^{z_*} M_{xYY,as}(z) = B_s(\nu, c, z_h)^{3/2}\frac{z_*^{\kappa_{xYY}(\nu)+1}}{\kappa_{xYY}(\nu)+1}. \quad (5.64)$$

5.3.7 Минимальная перенормировка для $\varphi \neq 0$

Здесь мы рассматриваем конфигурацию для $\varphi \neq 0$. Как мы можем увидеть из (5.42), тип ультрафиолетовой асимптотики такой же, как и для всех $\varphi \neq 0$, и далее для простоты рассмотрим случай $\varphi = \pi/2$. В соответствии с инвариантностью в поперечных направлениях мы можем выбрать $\theta = 0$,

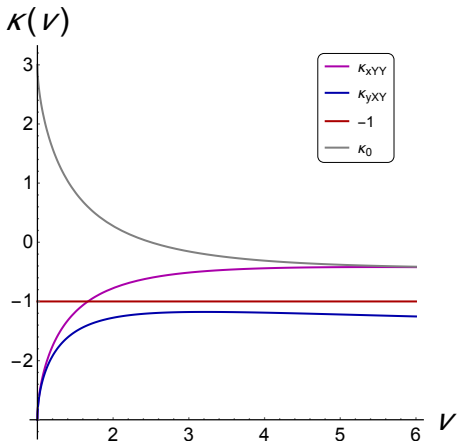


Рис. 51: Функции $\kappa_{yXY}(\nu)$, $\kappa_{xYY}(\nu)$ и κ_0 изображены синей, фиолетовой и серой линиями.

$\psi = 0$. Это соответствует параметризации (5.8) с $\phi = \pi/2$, $\theta = 0$, $\psi = 0$ и в этой конфигурации ориентация маленькой подсистемы определена вдоль поперечного направления y_1. Назовем данную конфигурацию поперечной и обозначим индексом yXY. В обозначениях (5.18) мы имеем:

$$\mathcal{V}_{yXY}(z) = \frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z)}{z^{1+2/\nu}},\ M_{yXY}(z) = \frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z)}{z^{2+1/\nu}\sqrt{g(z)}},\ \mathcal{F}_{yXY}(z) = g(z)\, z^{2-2/\nu}. \quad (5.65)$$

Ультрафиолетовые расходимости определяются асимптотикой $M_{yXY}(z)$ при $z \sim 0$ (5.52). Графики функций $\kappa_{yXY}(\nu)$ и $\kappa_{xYY}(\nu)$ представлены на Рис.51. Мы видим у $M_{yXY}(z)$ неинтегрируемую сингулярность для всех значений ν при $z = 0$.

Для случая yXY и $\nu > 1$ есть неинтегрируемая сингулярность, и мы можем представить перенормировку:

$$S_{yXY,ren} = \frac{1}{2}\int_\epsilon^{z_*} dz \left[\frac{M_{yXY}(z)}{\sqrt{(1 - \frac{\mathcal{V}_{yXY}^2(z_*)}{\mathcal{V}_{yXY}^2(z)})}} - M_{yXY,as}(z)\right] + \frac{B_s(\nu, c, z_h)^{3/2}}{2}\frac{z_*^{\kappa_{yXY}(\nu)+1}}{\kappa_{yXY}(\nu)+1}, \quad (5.66)$$

где

$$\int M_{yXY,as}\, dz = B_s(\nu, c, z_h)^{3/2}\frac{z^{\kappa_{yXY}(\nu)+1}}{\kappa_{yXY}(\nu)+1}. \quad (5.67)$$

5.4 Плотность энтропии зацепленности

Также инструктивно рассмотреть плотность энтропии зацепленности, которая определяется как [155, 156]

$$\eta = \frac{dS(\ell)}{d\ell} \tag{5.68}$$

(сравнивая с [157, 158]). Преимущество работы с плотностью ГЭЗ заключается в том, что у нее нет расходимостей. Для фиксированной температуры T (т.е. фиксированного z_h) плотность энтропии зацепленности может быть получена из (5.23). Мы видим, что она может быть выражена в терминах величины эффективного потенциала $\mathcal{V}$,

$$\eta(z_*) = \frac{dS(z_*)}{d\ell(z_*)} = \frac{\frac{dS(z_*)}{dz_*}}{\frac{d\ell(z_*)}{dz_*}} = \frac{\mathcal{V}(z_*)}{4}. \tag{5.69}$$

Потенциал $\mathcal{V}(z)$ в действии типа Борна-Инфельда (5.17) одинаков для разных ориентаций области зацепленности. Из (5.31) мы получаем

$$\eta(z_*) = \frac{L^3 \mathfrak{b}_s^{3/2}(z_*)}{4 z_*^3} (\mathfrak{g}_1(z_*)\mathfrak{g}_2(z_*)\mathfrak{g}_3(z_*))^{1/2}. \tag{5.70}$$

Однако зависимость плотности от угла существует потому, что длина ℓ, заданная (5.47), зависит от ориентации.

Определение (5.70) требует комментария. Несмотря на то, что плотность энтропии не содержит расходимостей, ее определение может зависеть от конечной перенормировки. В частности, принимая геометрическую перенормировку (5.29), мы имеем

$$\begin{aligned} \eta_{CD} \;=\; & \frac{1}{4}\Big(\mathcal{V}(z_*) - \mathcal{V}(z_D)\Big) = \\ & \frac{L^3}{4}\Big(\frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z_*)}{z_*^3}\,(\mathfrak{g}_1(z_*)\mathfrak{g}_2(z_*)\mathfrak{g}_3(z_*))^{1/2} - \frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z_D)}{z_D^3}(\mathfrak{g}_1(z_D)\mathfrak{g}_2(z_D)\mathfrak{g}_3(z_D))^{1/2}\Big), \end{aligned} \tag{5.71}$$

где $z_D = z_{DW}$ или $z_D = z_h$.

5.5 Численные результаты для энтропии зацепленности вблизи фазового перехода первого рода

В этом и последующем разделах представляются и обсуждаются основные результаты, полученные с помощью численных вычислений. Дальнейшие

	Струнный фрейм (СФ)				Эйнштейновский фрейм (ЭФ)			
	ИЗОТРОП.	АНИЗОТРОПНЫЙ			ИЗОТРОП.	АНИЗОТРОПНЫЙ		
		ПОПР.	φ	ПРОД.		ПОПР.	φ	ПРОД.
ЦВЕТ	Зеленый	Синий	разл.	Фиолетовый	Коричневый	Голубой	разл.	Серый

Таблица 1: Цветовая схема линий, использованных в графиках.

графики представлены в соответствии с цветовой схемой линий (Таблица 1); здесь и далее $L = 1$.

В этом разделе мы представляем графики плотности энтропии зацепленности в зависимости от геометрических характеристик зацепленного региона (ориентации и толщины пластины) и термодинамических характеристик среды (температуры и химического потенциала) для модели (5.4). Мы находим зависимость ГЭЗ пластины от наименьшей длины ℓ численно, представляя интегрирование (5.47) и (5.42), и затем, исключив зависимость от z_*, решаем уравнение (5.47) для заданного ℓ.

В данной конструкции положение динамических стенок и горизонта играет особую роль. На Рис.52 показано появление динамической стенки, когда эффективный потенциал $\mathcal{V}$ имеет седловую точку.

На Рис.52 мы также показываем положение z_{DW} для различных выборов размеров горизонта z_h при $\nu = 1$ (A) и $\nu = 4.5$ (B). Здесь функция $\mathcal{V}$ отмечена сплощными линиями, а $\mathcal{V}'$ – пунктирными. Мы видим, что положение динамической стенки не зависит от положения горизонта. На Рис.52.C показано расположение динамических стенок для произвольного $1 \leq \nu \leq 4.5$.

На Рис.53 мы видим, что ℓ увеличивается, когда z_* подходит к z_{DW} или к горизонту. Положение динамической стенки не зависит ни от ориентации плитки, ни от положения горизонта, см. Рис.52 ниже. На Рис.52 графики представлены для $\nu = 4.5$, $T = 0.25$ и $\mu = 0.2$.

На Рис.53.A представлена зависимость ℓ от z_* для $\nu = 1$, $z_h = 0.5, 1, 1.5$ и $\mu = 0$. Красная пунктирная линия показывает положение динамической стенки. Графики на Рис.53.B показывают зависимость ℓ от z_* для $\nu = 4.5$, $T = 0.25$ и $\mu = 0.2$ для различных углов $\varphi = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/2$. Значение z_* не превышает $z_{DW}(\mu, T)$, положение динамической стенки для заданных μ и T. Здесь $z_{DW} = 0.349$.

Минимальное вычитание для ультрафиолетовой асимптотики в соответствии с приведенными выше формулами в разделах 5.3.6 и 5.3.7 используется для того, чтобы избежать расходимостей в (5.42).

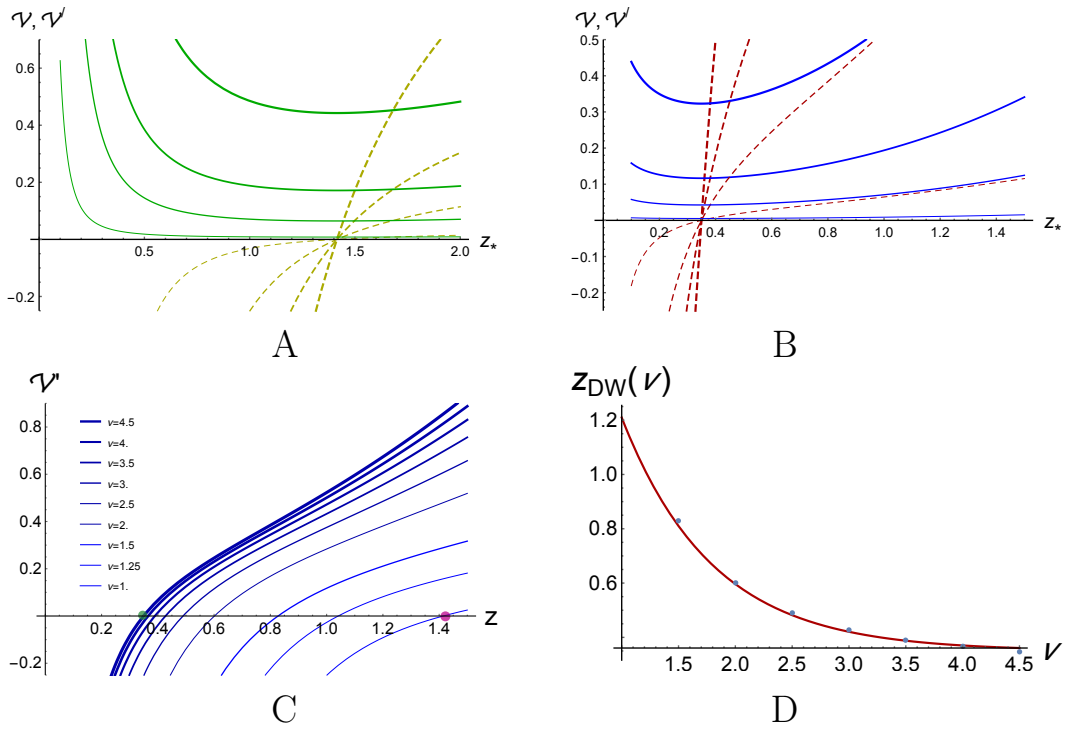


Рис. 52: Положения динамической стенки для ГЭЗ при $\nu = 1$ (A) и $\nu = 4.5$ (B). Сплошные линии показывают $0.15 \cdot \mathcal{V}$, пунктирные линии – $\mathcal{V}'$. Мы видим, что положение динамической стенки не зависит от z_h. Отметим, что только для $z_h < z_{HP}(\nu)$ мы получаем стабильные решения, $z_{HP}(1) = 1.505$, $z_{HP}(4.5) = 1.138$.

5.5.1 Зависимость энтропии зацепленности от длины ℓ

На Рис.54 показана зависимость плиты ГЭЗ от наименьшей длины ℓ при различных значениях температуры. Эти температуры выбраны равноудаленно от температуры фазового перехода первого рода при $\mu = 0.05$ в изотропном случае и отмечены на кривой (z_h, T) точками $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ выше T_{BB} и точками $(\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F})$ ниже T_{BB} для $\mu = 0.05$ (см. Рис.54. A). Для этих температур и $\mu = 0.05$ продемонстрирована зависимость ГЭЗ от ℓ. Здесь ℓ выбирается меньшим, чем ℓ_c – длина, на которой точка поворота соединенной зацепленной поверхности приближается к динамической стенке z_{DW} (см. Рис.53). Мы видим, что ГЭЗ претерпевает скачки, когда температура пересекает линию фазового перехода в точке $T_{BB}(\mu)$. Мы также видим, что эти скачки плавно зависят от ℓ, по крайней мере, для $\ell_{UV} < \ell < \ell_c$.

Похожая картина имеет место для анизотропной метрики. Зависимости ГЭЗ от ℓ для поперечной и продольной ориентаций при равноудаленных значениях температуры вблизи фазового перехода первого рода для $\mu = 0.2$ и $\nu = 4.5$ представлены на Рис.55.A и Рис.55.B, соответственно. Мы видим,

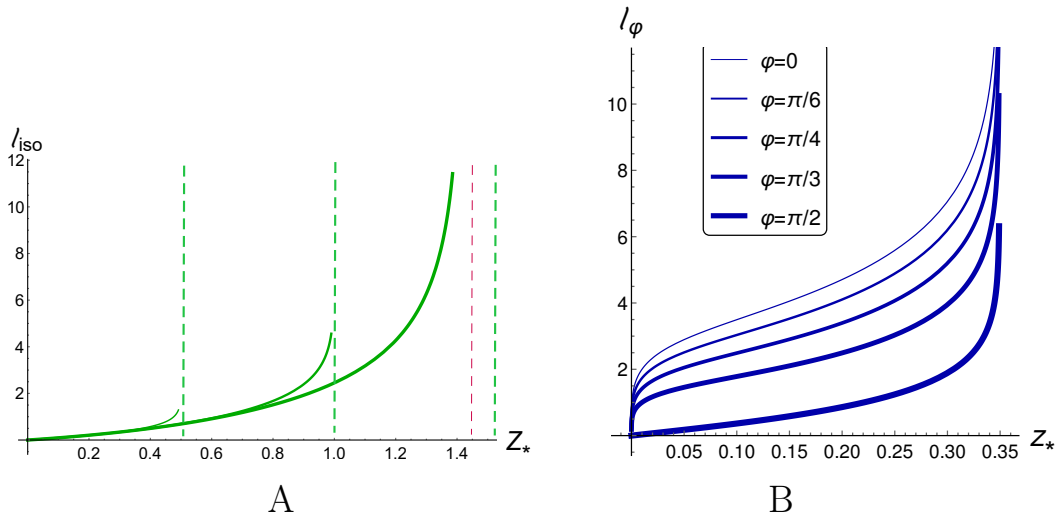


Рис. 53: A) Зависимость длины ℓ от z_* для $\nu = 1$, $z_h = 0.5, 1, 1.5$ и $\mu = 0$. Красная пунктирная линия показывает позицию динамической стенки, $z_{DW} = 1.41$. B) Зависимость длины ℓ от z_* для $\nu = 4.5$, $T = 0.25$ и $\mu = 0.2$ для различных углов $\varphi = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/2$. Отметим, что z_* не превышает положения динамической стенки $z_{DW}(T, \mu)$ для заданных T и μ. Здесь $z_{DW} = 0.349$.

что с уменьшением угла φ от $\varphi = \pi/2$ до $\varphi = 0$ ГЭЗ увеличивается для фиксированного значения ℓ и фиксированных термодинамических параметров (с помощью принятого метода устранения расходимостей).

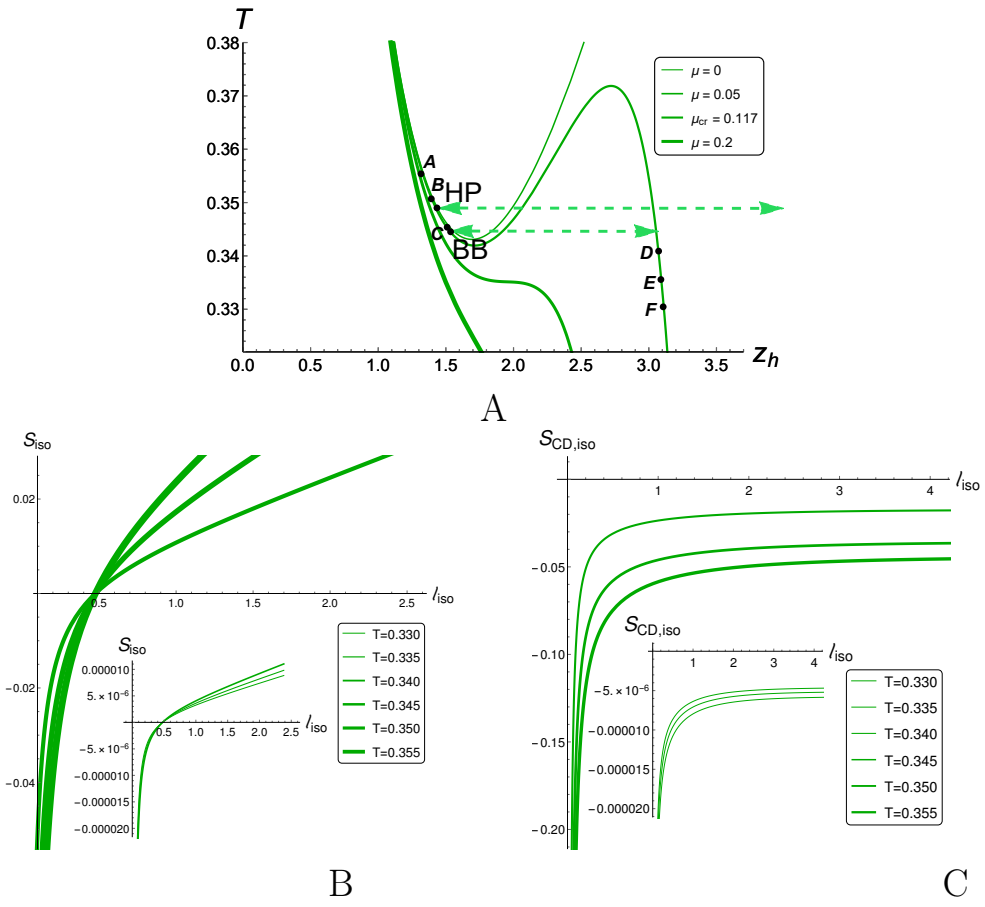


Рис. 54: A) T как функция z_h для различных значений химического потенциала μ. Здесь кривые с разной толщиной соответствуют $\mu = 0, 0.05, 0.117$ и 0.2. Графики B) и C) показывают зависимость ГЭЗ для плиты от ее наименьшей длины ℓ для различных температур, близких к температуре фазового перехода первого рода $T_{BB} = 0.3445$ ($z_h = 1.532$), $\mu = 0.05$ и $\nu = 1$. На графике B) мы используем минимальную схему перенормировки, на графике C) перенормировку CD.

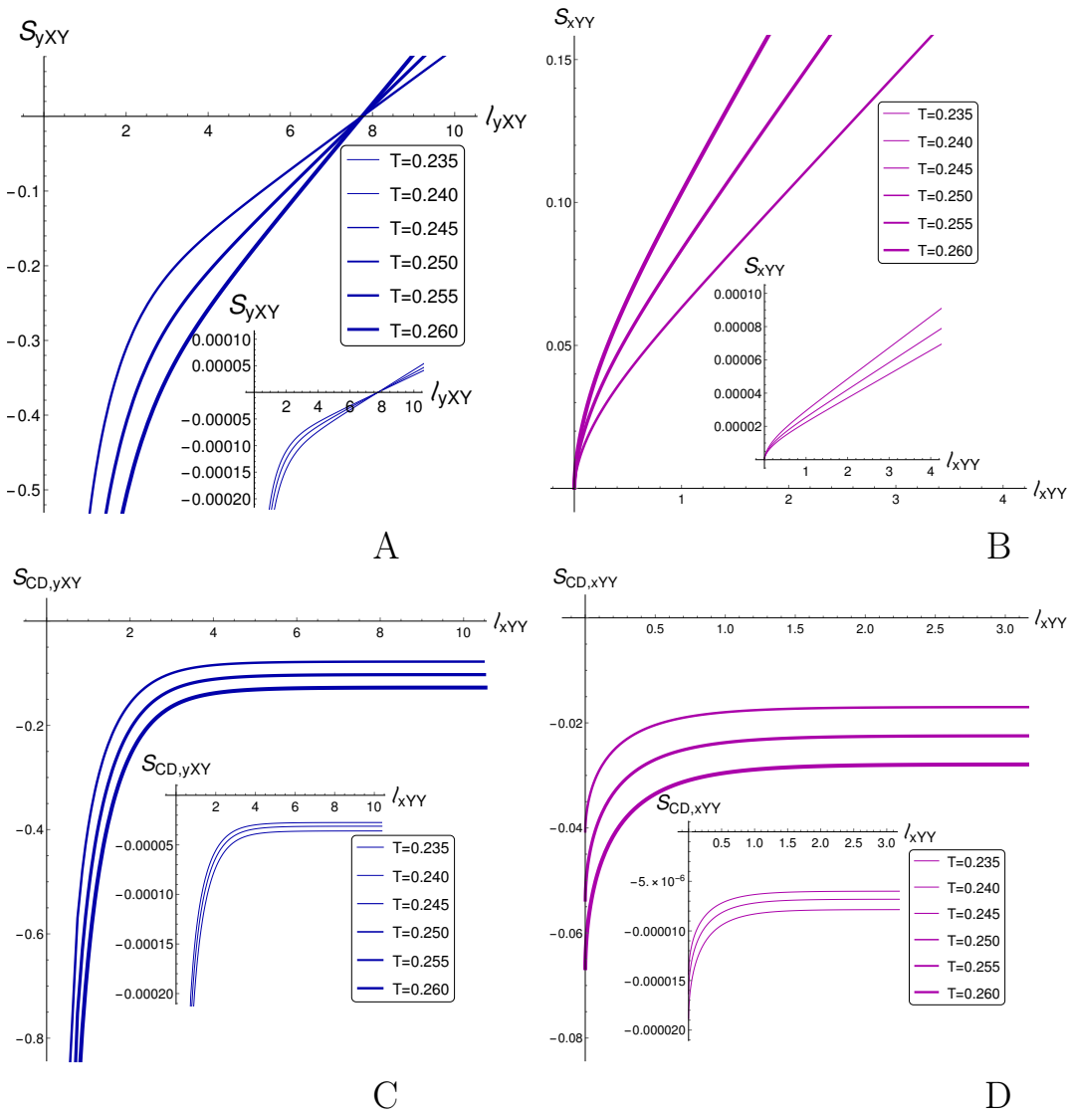


Рис. 55: Зависимости ГЭЗ от наименьшей длины зацепленной плиты ℓ для $\varphi = \pi/2$, поперечной ориентации, и $\varphi = 0$, продольной ориентации, при равноудаленных значениях температуры вблизи фазового перехода первого рода для $\mu = 0.2$ и $\nu = 4.5$ представлены на A) и B) соответственно. Здесь перенормировки ГЭЗ представлены в соответствии с (5.63) и (5.66). На C) и D) мы показываем перенормированную ГЭЗ, представленную в соответствии с (5.46) и (5.44), C) для $\varphi = \pi/2$ и D) для $\varphi = 0$.

Таким образом, мы продемонстрировали, что ГЭЗ зависит от схемы перенормировки.

- Для минимальной схемы перенормировки как продольного, так и поперечного случаев ГЭЗ

– линейно увеличиваются при больших ℓ

$$S_{yXY} \underset{\ell\to\infty}{\sim} C_{yXY}(T,\mu)\ell, \quad S_{xYY} \underset{\ell\to\infty}{\sim} C_{xYY}(T,\mu)\ell, \tag{5.72}$$

и $C_{yXY}(T,\mu) > C_{xYY}(T,\mu)$; область линейной зависимости для продольной ГЭЗ начинается при более низких значениях ℓ по сравнению с поперечным случаем;

– они ведут себя по-разному для $\ell \to 0$

$$S_{xYY} \underset{\ell\to 0}{=} 0, \quad S_{yXY} \underset{\ell\to 0}{\sim} \ell^{-\xi_{yXY}(T,\mu)}, \quad \xi_{yXY}(T,\mu) > 0, \tag{5.73}$$

(сравнивая с результатами в [160]).

- Для перенормировочной схемы CD в поперечном и продольном случаях ГЭЗ

– стремятся к константам при больших значениях ℓ

$$S_{yXY} \underset{\ell\to\infty}{\sim} a_{yXY}(T,\mu), \quad S_{xYY} \underset{\ell\to\infty}{\sim} a_{xYY}(T,\mu) \tag{5.74}$$

и $a_{yXY}(T,\mu) > a_{xYY}(T,\mu)$;

– при малых значениях ℓ у продольного и поперечного случаев различное поведение при $\ell \to 0$

$$S_{xYY,CD} \underset{\ell\to 0}{\sim} \ell^{-\xi_{CD,xYY}(T,\mu)}, \quad S_{yXY,CD} \underset{\ell\to 0}{\sim} \ell^{-\xi_{CD,yXY}(T,\mu)}. \tag{5.75}$$

5.5.2 Зависимость энтропии зацепленности от температуры

Поучительно изобразить зависимость ГЭЗ от температуры для фиксированного значения ℓ вблизи фазового перехода. Для этого мы сначала находим зависимость z_* от длины ℓ (при фиксированном горизонте) и затем вычисляем ГЭЗ из (5.62) и (5.63). Зависимость z_* от z_h для фиксированного значения $\ell = 1$ и различных значений угла φ при химическом потенциале $\mu = 0$ показана голубыми линиями на Рис.56. Зеленая линия на этом графике демонстрирует зависимость z_* от z_h для изотропного случая при $\mu = 0$ для сравнения. Мы отмечаем значительную зависимость от z_h только для небольших значений z_h (больших черных дыр).

Подставляя зависимость z_* от z_h в уравнения (5.62) и (5.63), получаем зависимость ГЭЗ от температуры при фиксированном значении $\ell = 1$ для различных химических потенциалов μ для продольного (A) и поперечного случаев (B). Эти зависимости показаны синими линиями на Рис.57.A и

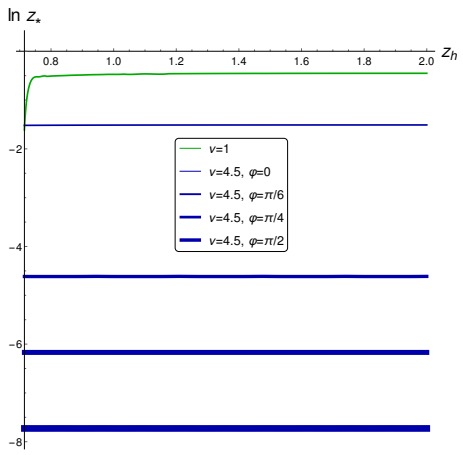


Рис. 56: Зависимость z_* от z_h при фиксированной $\ell = 1$ и различных углов для анизотропного случая (голубые линии для углов $\varphi = 0, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ снизу вверх) и для изотропного случая (зеленые линии) при $\mu = 0$.

Рис.57.В для различных химических потенциалов μ вблизи критического значения $\mu_{cr} = 0.349$ для продольного и поперечного случаев соответственно. Для сравнения зависимости ГЭЗ от температуры для той же плиты показаны зелеными линиями для различных химических потенциалов μ вблизи $\mu_{cr} = 0.117$ для изотропного случая, $\nu = 1$ на обоих графиках.

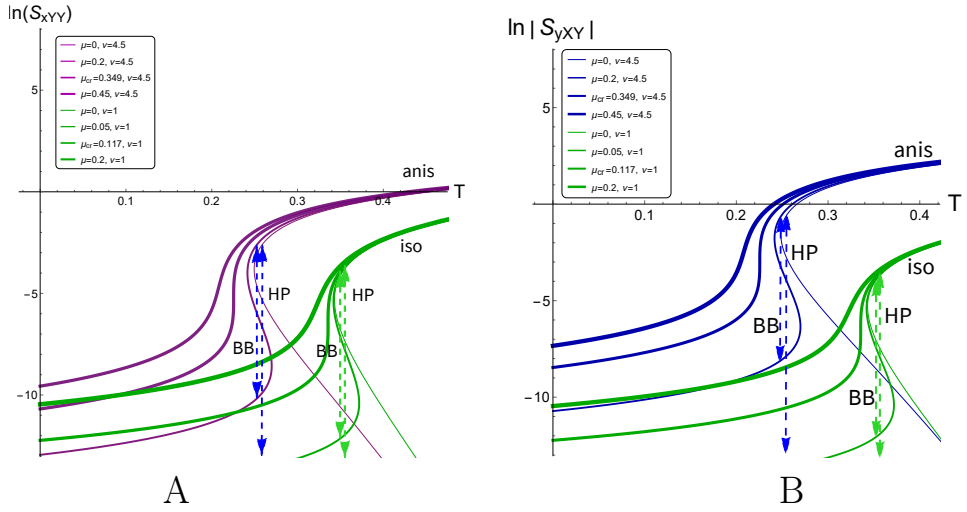


Рис. 57: ГЭЗ плитки с фиксированным значением длины $\ell = 1$ зависит от температуры для А) продольной и В) поперечной ориентаций в анизотропном ($\nu = 4.5$) случае для химических потенциалов выше и ниже критического значения химического потенциала $\mu_{cr} = 0.349$. Для сравнения зависимости ГЭЗ той же самой пластины в изотропной метрике показаны зелеными линиями в обоих случаях.

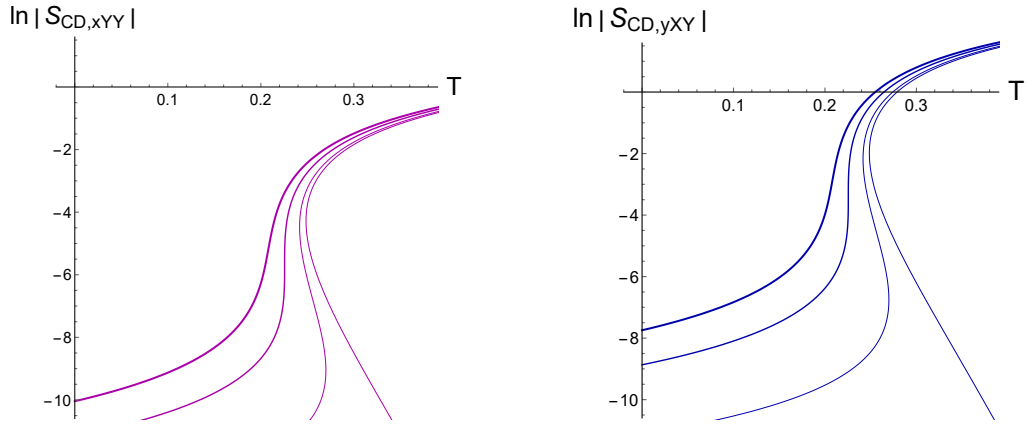


Рис. 58: ГЭЗ плитки с фиксированным значением $\ell = 1$ в зависимости от температуры для A) продольной и B) поперечной ориентаций в анизотропном ($\nu = 4.5$) случае для химического потенциала ниже и выше критического химического потенциала $\mu_{cr} = 0.349$ показаны голубой и фиолетовой линиями с различной толщиной.

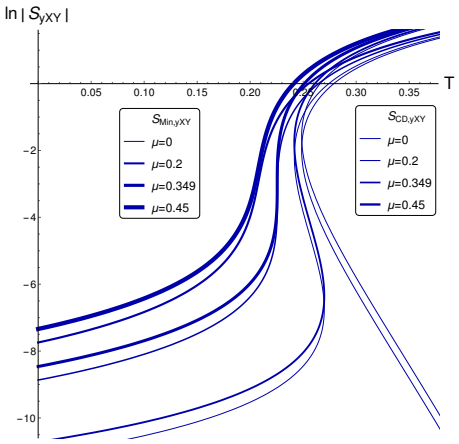


Рис. 59: Сравнение ГЭЗ плитки с фиксированным значением $\ell = 1$, вычисленной двумя различными способами перенормировки вблизи линии фазового перехода.

Графики на Рис.57 показывают, что в окрестности температуры фазового перехода $T = T_{BB}(\nu, \mu)$ ГЭЗ, как термодинамическая энтропия (см Рис.5.B) претерпевает значительные скачки. Из этих графиков мы также видим, что для $\mu > \mu_{cr}$ ($\mu_{cr} = 0.117$ для $\nu = 1$ и $\mu_{cr} = 0.349$ для $\nu = 4.5$) скачки исчезают, аналогично поведению термодинамической энтропии.

Подводя итог этому подразделу, мы отмечаем, что,

- ГЭЗ плиты с постоянной толщиной ℓ увеличивается с повышением температуры и фиксированным химическим потенциалом;

- скачки ГЭЗ вблизи фазового перехода существенно не зависят от типа перенормировки (геометрическая и минимальная перенормировка), см. Рис.59.

5.6 Численные результаты для плотности энтропии зацепленности вблизи фазового перехода первого рода

Плотность энтропии зацепленности, определенная в предыдущем параграфе как (5.70), в нашем случае принимает вид

$$\eta(z_*) = \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z_*)}{z_*^{1+2/\nu}}. \tag{5.76}$$

Если же она определена согласно (5.71), то принимает вид

$$\eta_{CD}(z_*) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z_*)}{z_*^{1+2/\nu}} - \frac{\mathfrak{b}_s^{3/2}(z_D)}{z_D^{1+2/\nu}}\right). \tag{5.77}$$

В этом разделе мы изучаем зависимость плотности энтропии зацепленности (5.76) от температуры и химического потенциала вблизи фазового перехода первого рода. Также мы сравниваем результаты минимальной и геометрической перенормировок (5.76) и (5.77).

5.6.1 Численные результаты для плотности энтропии зацепленности в зависимости от ℓ

На Рис.60 мы показываем зависимость плотности ГЭЗ (5.76) от ℓ при фиксированных значениях температуры и химического потенциала вблизи фазового перехода первого рода для модели (5.4). Мы видим, что функция плотности убывает монотонно в зависимости от длины. Здесь, аналогично соображениям, изложенным в предыдущем разделе 5.5, мы рассматриваем плотность энтропии зацепленности для разных T и μ вблизи точек фазового перехода ($T_{BB} = 0.2457, \mu_{BB} = 0.2$), а именно точки A, B, C и D, E, F, показанные на Рис.4.A. Мы видим, что при прохождении точек фазового перехода (T_{BB}, μ_{BB}) плотности значительно меняются.

На Рис.61 мы показываем зависимость плотности ГЭЗ (5.77) от ℓ при тех же температурах и химическом потенциале, что и на Рис.60. Мы получаем похожее поведение в обоих случаях. Для сравнения мы представляем зависимость плотностей (5.76) и (5.77) от ℓ в изотропном случае на Рис.62.

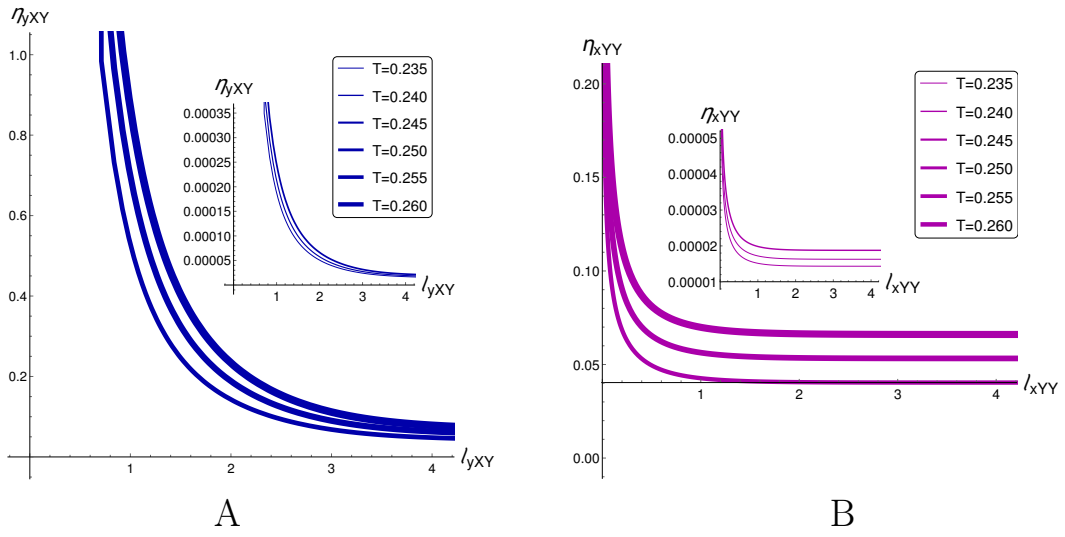


Рис. 60: Зависимость плотности энтропии плитки от ℓ для различных температур вблизи критической температуры при $\mu = 0.2$ для поперечной (A) и продольной (B) ориентаций. Плотность претерпевает скачок вблизи фазового перехода большая/малая черная дыра ($T_{BB} = 0.2457$ для $\mu = 0.2$).

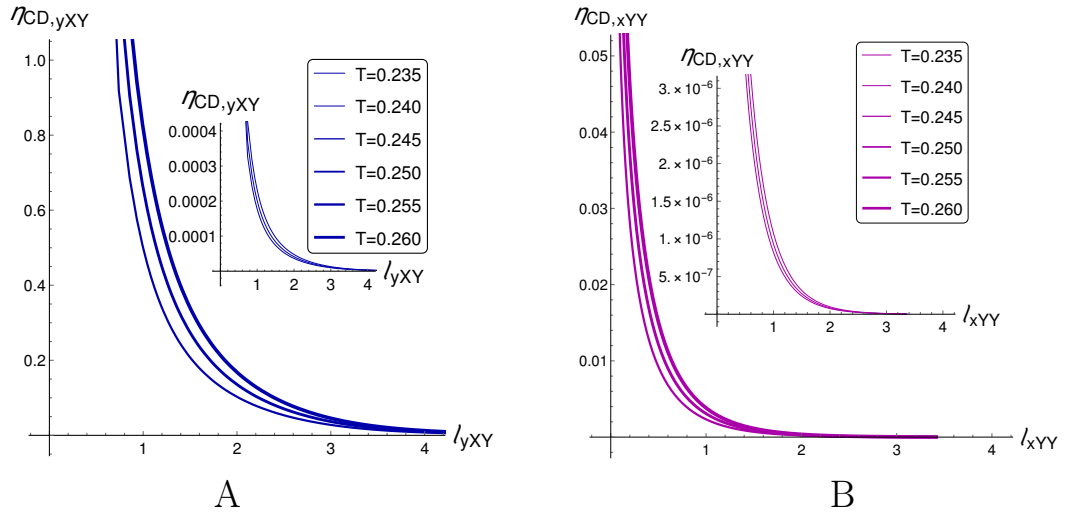
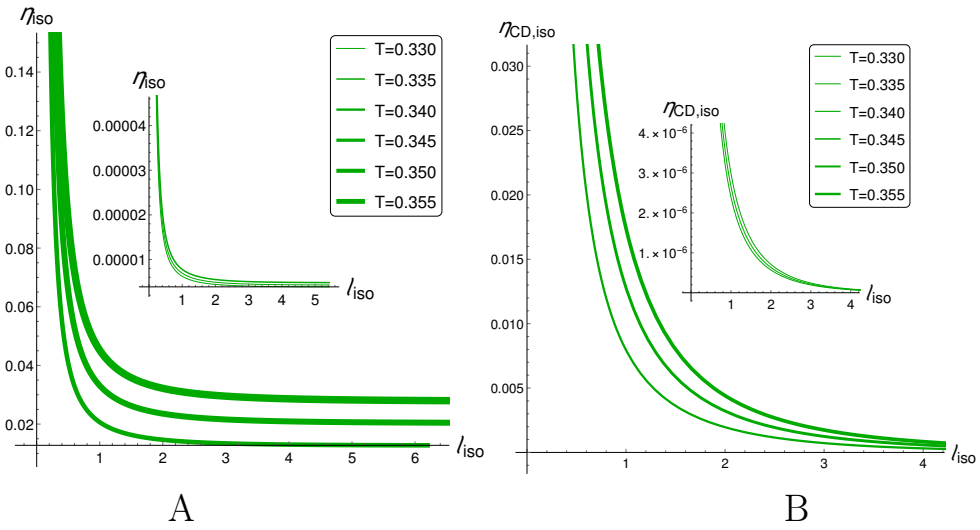


Рис. 61: Зависимость плотности энтропии плитки, определенной в (5.77), от ℓ для различных температур вблизи критической температуры при $\mu = 0.2$ для поперечной (A) и продольной (B) ориентаций. Рассмотренные температуры соответствуют точке, указанной на Рис.4. Плотность претерпевает скачок вблизи точки фазового перехода большая/малая черная дыра ($T_{BB} = 0.2457, \mu = 0.2$).



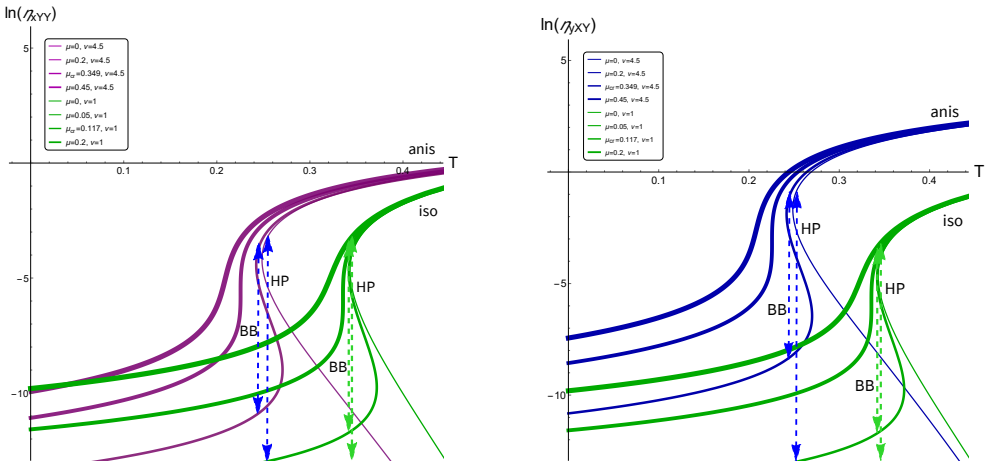
A B

Рис. 62: Зависимость плотности энтропии плитки (5.76) (A), (5.77) (B) от ℓ для различных температур вблизи критической температуры при $\mu = 0.05$ в изотропном случае. Рассмотренные температуры соответствуют точке, указанной на Рис.54.A. Плотность ГЭЗ претерпевает скачок вблизи точки фазового перехода большая/малая черная дыра ($T_{BB} = 0.3445, \mu = 0.05$).

5.6.2 Плотность энтропии зацепленности в зависимости от температуры

Теперь мы фиксируем длину $\ell = 1$ и представляем на Рис.63 зависимость плотности ГЭЗ плитки от температуры для различных углов, $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, и различных химических потенциалов μ, ниже и выше критических значений $\mu_{cr}^{(anis)} = 0.349$, соответствующих $\nu = 4.5$. Для сравнения мы представляем здесь подобные графики для изотропных случаев, где $\mu_{cr}^{(iso)} = 0.117$. Мы видим зависимость от ориентации.

На Рис.65 зависимость логарифма плотности энтропии зацепленности от угла для $\varphi = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/2$ (толщина растет с увеличением угла) при химическом потенциале $\mu = 0$ и $\mu = 0.2$ показана на A) и B), соответственно. Мы видим, что форма кривых, показанных на A) такая же для различных углов ориентации, кривые только сдвигаются с увеличением угла φ. Подобная ситуация происходит с кривыми на B).



A B

Рис. 63: Зависимость плотности ГЭЗ от температуры для фиксированного значения $\ell = 1$. Синие линии на A) и B) показывают зависимость плотности ГЭЗ для различных значений химического потенциала ($\mu = 0$, 0.2, 0.349, 0.45) для продольной и поперечной ориентаций соответственно, $\nu = 4.5$. Зеленые линии показывают похожие зависимости в изотропном случае для химического потенциала ($\mu = 0$, 0.05, 0.117, 0.2). Стрелками показаны скачки плотности ГЭЗ в точках фазовых переходов Хокинга-Пейджа и большая/малая черная дыра ($T_{HP}(\mu = 0)$ и $T_{BB}(\mu > 0)$).

На Рис.66 показана угловая зависимость плотности ГЭЗ для различных значений ℓ (толщина растет с увеличением ширины плиты) при химическом потенциале $\mu = 0.2$ и $T = 0.25$ для минимальной (A) и геометрической (B) перенормировок.

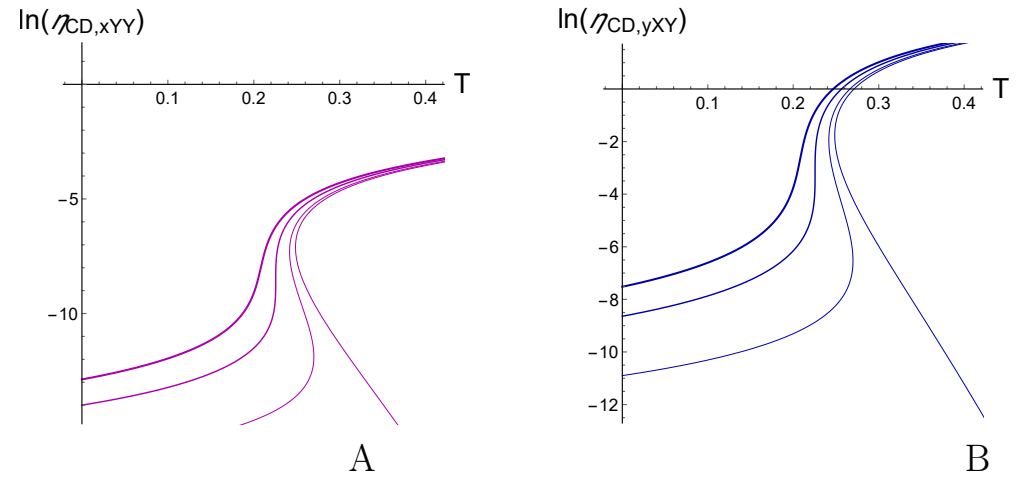


Рис. 64: Зависимость плотности ГЭЗ от температуры для фиксированного значения $\ell = 1$. Линии на A) и B) показывают зависимость плотности ГЭЗ для различных значений химического потенциала, $\mu = 0,\ 0.2,\ 0.349,\ 0.45$ (толщина растет с увеличением μ) для продольной и поперечной ориентаций соответственно, $\nu = 4.5$.

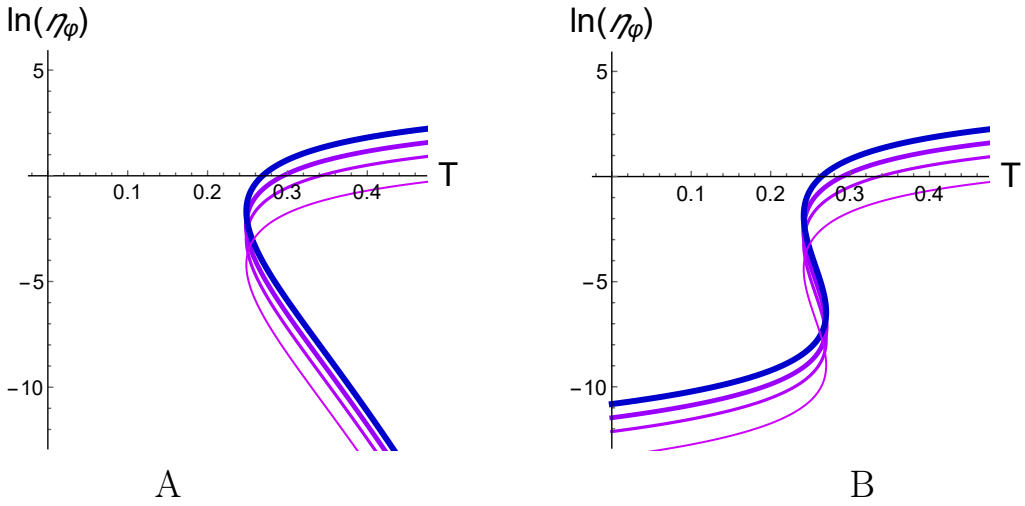


Рис. 65: Зависимость от температуры логарифма плотности энтропии зацепленности (5.76) для значений угла $\varphi = 0$ (фиолетовый), $\pi/6$ (сине-фиолетовый), $\pi/4$ (сине-фиолетовый) и $\pi/2$ (синий) при химических потенциалах A) $\mu = 0$ и B) $\mu = 0.2$.

Сравнивая графики на Рис.65 и Рис.66 мы видим, что плотность ГЭЗ для поперечной ориентации зависит слабо от типа перенормировки, в то время как для продольной ориентации имеется существенная разница в

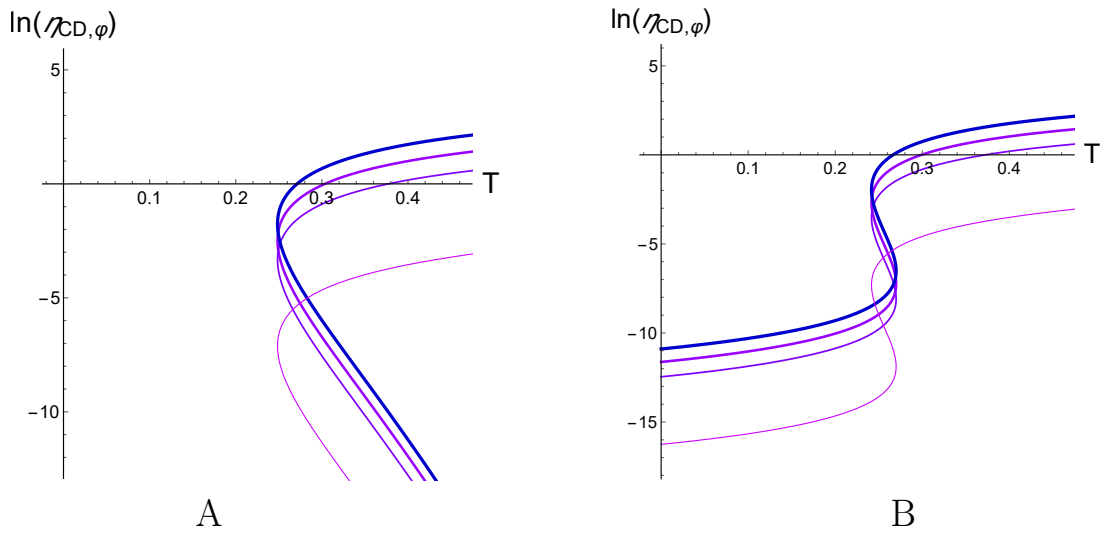


Рис. 66: Зависимость от температуры логарифма плотности энтропии зацепленности (5.77) для значений угла $\varphi = 0$ (фиолетовый) $, \pi/6, \pi/4, \pi/2$ (синий) при химических потенциалах A) $\mu = 0$ и B) $\mu = 0.2$.

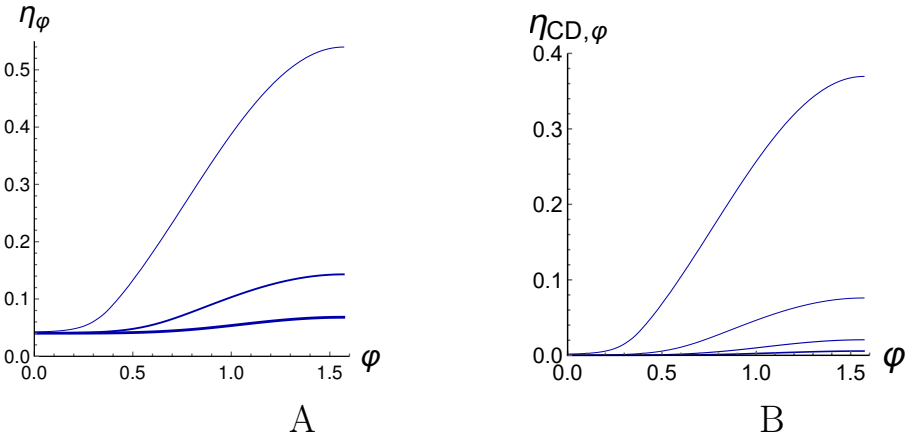


Рис. 67: Зависимость плотности энтропии зацепленности от угла A) η_φ и B) $\eta_{CD,\varphi}$ для $T = 0.25$, $\mu = 0.2$, $\nu = 4.5$, $\ell = 1, 2, 3$ (толщина растет с увеличением длины)

различных схемах перенормировки.

На Рис.67 показана угловая зависимость плотности ГЭЗ при различных значениях ℓ (толщина растет с увеличением ширины плитки) при химическом потенциале $\mu = 0.2$ и $T = 0.25$ для случая минимальной A) и B) геометрической перенормировок. Поскольку величина плотности ГЭЗ вы-

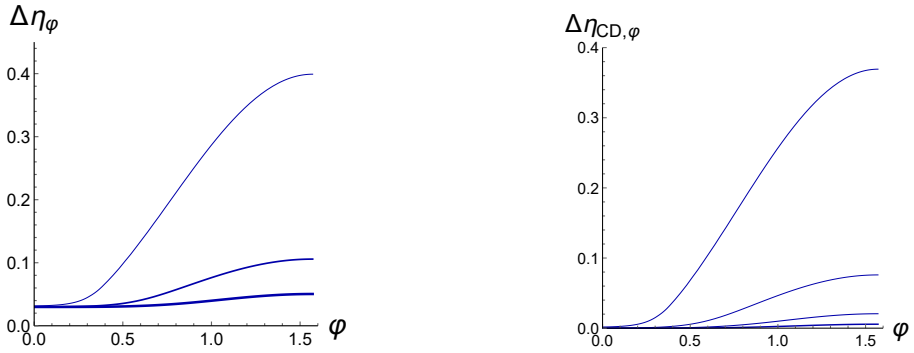


Рис. 68: Зависимость скачков плотности энтропии зацепленности от угла (толщина растет с увеличением длины, $\ell = 1, 2, 3$), A) $\Delta\eta_\varphi$ и B) $\Delta\eta_{CD,\varphi}$, при химическом потенциале $\mu = 0.2$.

ше критических температур существенно больше, чем значения плотности ГЭЗ ниже фазового перехода, график скачков плотности ГЭЗ на Рис.68 аналогичен Рис.67.

Мы видим, что плотность ГЭЗ претерпевает скачки вблизи фазового перехода первого рода, и эти скачки зависят от анизотропии, ориентации плитки и химического потенциала.

Подводя итог этому подразделу, обратим внимание, что на Рис.60 - Рис.67, представлена зависимость плотности ГЭЗ (5.76) и (5.77) от ширины плиты ℓ для равноудаленных значений температуры вблизи фазового перехода первого рода, подобно тому, как это было сделано для энтропии зацепленности в предыдущем подразделе 5.5. Таким образом, мы наблюдаем, что плотность ГЭЗ претерпевает скачок, когда температура пересекает линию фазового перехода. Мы также наблюдаем несущественную зависимость от схемы перенормировки.

5.6.3 Фазовый переход для энтропии зацепленности

Напомним, что критерием фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент в КХД является поведение потенциала между кварками или поведение времениподобных петель Вильсона. Петли Вильсона также могут быть вычислены в голографической КХД. Как показано в Главе 2, расположение линии конфайнмент/деконфайнмент в плоскости (μ, T) может быть близко к фазовому переходу первого рода, но необязательно совпадает с ним. Для специальных моделей фазовых переходов ГЭЗ может быть использована в

качестве индикатора фазового перехода голографической КХД [140, 150].

Положение фазового перехода первого рода зависит от конкретной голографической модели. Он может быть расположен в правой нижней части плоскости (μ, T), начинаясь в точке (μ_{cr}, T_{cr}) и опускаясь до нулевой температуры с ростом μ. Он также может располагаться в левой части плоскости, начинаясь с T_0 при $\mu = 0$ и опускаясь до точки (μ_{cr}, T_{cr}) с увеличением μ.

Для того, чтобы найти расположение фазового перехода ГЭЗ на плоскости (μ, T), необходимо найти местоположение точек, где свободная энергия F_A, соответствующая матрице плотности ρ_A, имеет многозначное поведение. Оказывается, что эффективная свободная энергия, соответствующая зацепленной области A

$$dF_A = -S_A dT, \tag{5.78}$$

ведет себя аналогично свободной энергии. Мы можем определить плотность эффективной свободной энергии зацепленности как

$$df_A = -\eta_A \, dT. \tag{5.79}$$

Плотность эффективной свободной энергии в зависимости от температуры также имеет "поведение ласточкиного хвоста".

Это связано с тем, что, с одной стороны, плитки, которые простираются бесконечно в обоих направлениях и достаточно толстые, смогут накопить необходимые степени свободы, чтобы повторить характерную форму термодинамической энтропии, а с другой стороны, трехзначное поведение функции $z_h = z_h(T)$ является неотъемлемой чертой метрики и неизбежно приводит к поведению типа "ласточкиного хвоста" как для обычной, так и для эффективной свободной энергии даже для тонких плиток. Однако плитка не включает в себя все степени свободы, поэтому энтропия и эффективная энтропия зацепленности не совпадают точно, как и линии фазовых переходов для термодинамической и зацепленной энтропий.

Давайте подытожим, что мы обнаружили, изучая поведение эффективной свободной энергии зацепленности в различных схемах перенормировки и фреймах.

- Проверено поведение эффективной плотности свободной энергии зацепленности в зависимости от температуры в струнном фрейме, с помощью различных схем перенормировки, см. Рис.69.A. Мы видим, что в струнном фрейме нет существенной зависимости от используемых схем перенормировки. Точки перехода для свободной энергии зацепленности в обеих схемах перенормировки почти совпадают, также эти точки очень близки к точке перехода, полученной из термодинамической свободной энергии.

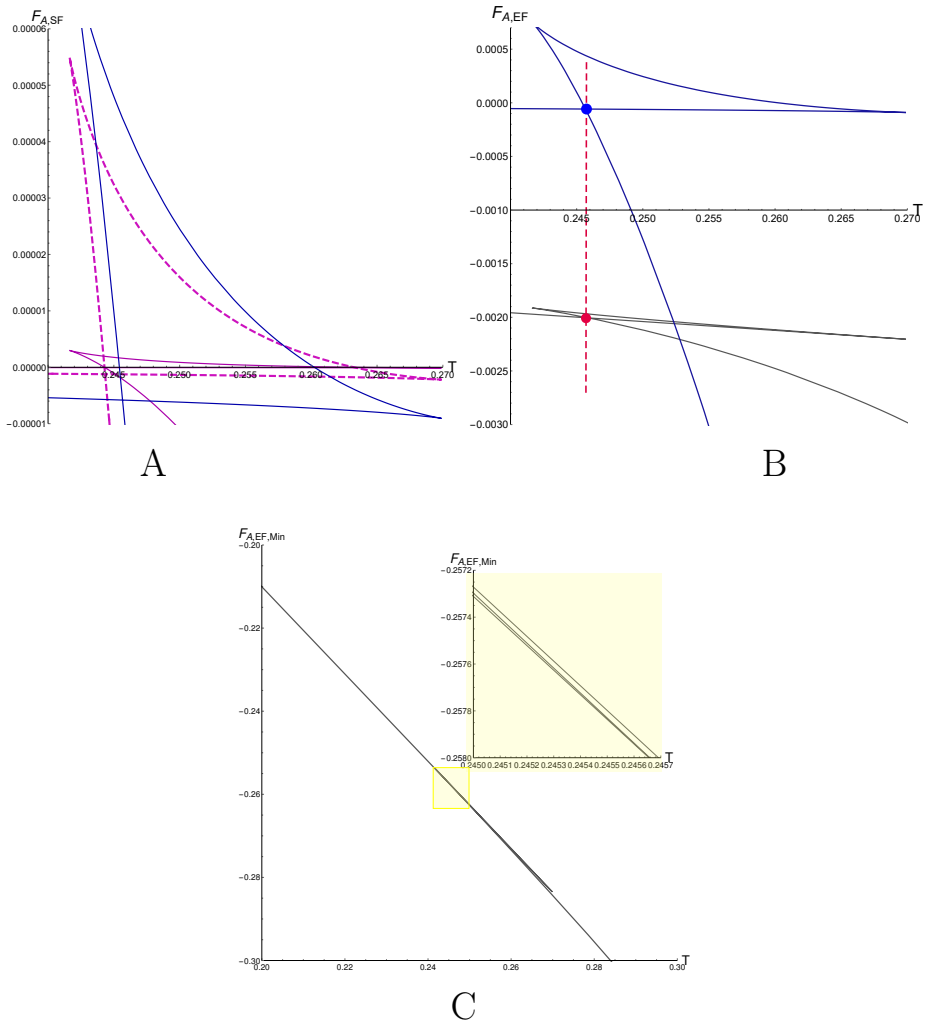


Рис. 69: A) Зависимость от температуры в форме "ласточкиного хвоста" плотности термодинамической свободной энергии, поделенная на фактор 10 (сплошная синяя линия), и эффективной плотности свободной энергии для энтропии зацепленности в струнном фрейме, вычисленной на основе η (фиолетовая пунктирная линия) и на основе η_{CD} (фиолетовая сплошная линия). B) То же самое в эйнштейновском фрейме (плотность свободной энергии для энтропии зацепленности для η_{CD} в эйнштейновском фрейме показана серой сплошной линией). C) Плотность свободной энергии для энтропии зацепленности, основанная на η в эйнштейновском фрейме. Вставка на C) показывает, что форма температурной зависимости плотности свободной энергии зацепленности, представленная на основном графике, на самом деле представляет собой "ласточкин хвост". Все графики построены для анизотропного случая с $\nu = 4.5$ и $\mu = 0.2$.

- Произведено сравнение поведения плотностей эффективной свободной энергии зацепленности и термодинамической свободной энергии

как функций температуры в эйнштейновском фрейме, см. Рис.69.B. Здесь мы видим, что температуры точек фазового перехода почти совпадают, в то время как значения плотностей свободной энергии в этих точках не совпадают.

- Проанализировано поведение эффективной свободной энергии зацепленности, определенной с помощью схемы минимальной перенормировки в эйнштейновском фрейме, и обнаружено, что "ласточкин хвост" выглядит более сплющенным, см. Рис.69.C.

- Проверено, что расположение критических точек, извлеченных из плотности ГЭЗ, и самой ГЭЗ почти совпадают (численные расчеты были выполнены для разных ℓ и ориентаций).

На Рис.70 представлены фазовые диаграммы для плотности термодинамической энтропии (сплошные линии) и плотности энтропии зацепленности (пунктирные линии) при различных параметрах анизотропии ν, $\nu = 1$ (зеленые линии), $\nu = 3$ (линии цвета хаки) и $\nu = 4.5$ (синие линии), полученные из результатов численных расчетов на основе (5.47), (5.42) и (5.76).

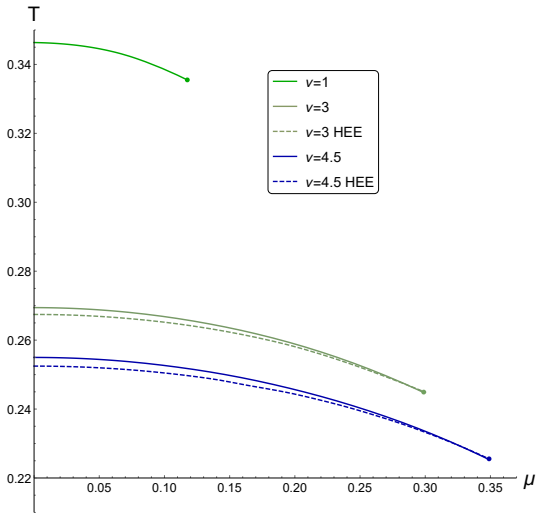


Рис. 70: Фазовые диаграммы для плотности термодинамической энтропии (сплошные линии) и плотности энтропии зацепленности (пунктирные линии) при различных параметрах анизотропии ν, $\nu = 1$ (зеленые линии), $\nu = 3$ (линии цвета хаки) и $\nu = 4.5$ (синие линии).

Вообще говоря, расположение фазового перехода для ГЭЗ довольно близко к фазовому переходу первого рода, см. Рис.70. Отметим, что в отличие от поведения петель Вильсона в анизотропной метрике, здесь нет видимой зависимости линии фазового перехода ГЭЗ от ориентации в анизотропном случае.

5.7 Обсуждение

В этой главе рассмотрена наиболее общая анизотропная голографическая модель и найдено выражение для ГЭЗ и ее плотности в терминах углов Эйлера, определяемых ориентацией области в форме плиты относительно осей СТИ. В частном случае рассмотрена ГЭЗ для модели, инвариантной в поперечных направлениях, с нетривиальной функцией анизотропии, которая поддерживается действием Эйнштейна с полем дилатона и двумя полями Максвелла [57]. Выбранная модель описывает множественность и конфайнмент кварков, предсказывает линию кроссовера (плавного перехода) между фазами конфайнмент/деконфайнмент, анизотропию в спектре адронов (в течение короткого времени после столкновений) и фазовый переход для пространственноподобных петель Вильсона.

Была вычислена ГЭЗ и ее плотность в голографической анизотропной модели [57]. Было показано, что ГЭЗ и ее плотность имеют значительные скачки вблизи линии фазового перехода большая/малая черная дыра в плоскости (μ, T) для всех значений параметра анизотропии. Линии фазового перехода для термодинамической энтропии и энтропии зацепленности в плоскости (μ, T) различны в случаях с разной анизотропией, но не зависят от ориентации области зацепленности. Обратим внимание, что для изотропного случая $\nu = 1$ различия между этими линиями на плоскости фазовой диаграммы не видны. Таким образом, существенное увеличение ГЭЗ может использоваться в качестве индикатора фазового перехода первого рода.

Заключение

В заключении перечислим основные положения диссертации.

1) Построены специальные полностью анизотропные решения уравнений Эйнштейна типа черной дыры для различных случаев фактора деформации в метрике (факторы деформации соответствуют моделям с легкими и тяжелыми кварками).

2) Для голографической модели с частичной анизотропией для тяжелых кварков получена структура фазовых переходов в зависимости от угла между парой кварков и осью столкновений тяжелых ионов.

3) Получена и исследована структура фазовых переходов для анизотропной голографической модели для легких кварков с частичной анизотропией. Выявлена сильная зависимость корнельского потенциала и, следовательно, натяжения струны от параметра анизотропии и ориентации.

4) Получена и исследована структура фазовых переходов для голографичекой анизотропной модели для тяжелых кварков в полностью анизотропном случае. Получены уравнения для определения положения динамической стенки в случае полностью анизотропной метрики для времениподобных петель Вильсона. Выявлен эффект обратного магнитного катализа и найдены положения на фазовых диаграммах критических конечных точек.

5) Вычислена энтропия голографической зацепленности для области в форме параллелепипеда, ориентация которого относительно линии столкновения тяжелых ионов и прицельного параметра характеризуется углами Эйлера, в полностью анизотропной голографической модели с тремя различными анизотропными функциями. В частном случае модели с одной нетривиальной функцией анизотропии и фактором деформации для тяжелых кварков изучена зависимость голографической энтропии зацепленности от термодинамических (температура, химический потенциал) и геометрических (параметра анизотропии, толщины и ориентации зацепленных областей) параметров. Обнаружены скачки энтропии зацепленности вблизи линии фазового перехода первого рода.

Список литературы

[1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, "Введение в теорию квантованных полей." – Наука, 1984.

[2] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, "Введение в квантовую теорию калибровочных полей." – Наука, 1988.

[3] Вайнберг С. "Квантовая теория поля." – Физматлит, 2003.

[4] И.Я. Арефьева, "Голографическое описание кварк-глюонной плазмы, образующейся при столкновениях тяжелых ионов", УФН, **184:6** (2014).

[5] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, K. Redlich and J. Stachel, "Decoding the phase structure of QCD via particle production at high energy," Nature **561**, no. 7723, 321 (2018) [arXiv:1710.09425 [nucl-th]].

[6] Д. С. Горбунов и В. А. Рубаков, "Введение в теорию ранней Вселенной," 2009.

[7] J. Adams *et al.* [STAR], "Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions," Nucl. Phys. A **757**, 102-183 (2005) [arXiv:nucl-ex/0501009 [nucl-ex]].

[8] K. Adcox *et al.* [PHENIX], "Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration," Nucl. Phys. A **757**, 184-283 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410003 [nucl-ex]].

[9] I. Arsene *et al.* [BRAHMS], "Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment," Nucl. Phys. A **757**, 1-27 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410020 [nucl-ex]].

[10] B. B. Back *et al.* [PHOBOS], "The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC," Nucl. Phys. A **757**, 28-101 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410022 [nucl-ex]].

[11] M. Creutz, "Quarks, gluons and lattices," Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1985)

[12] G. Aarts, "Introductory lectures on lattice QCD at nonzero baryon number," J. Phys. Conf. Ser. **706**, no.2, 022004 (2016) [arXiv:1512.05145 [hep-lat]].

[13] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, "Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions," Cambridge University Press (2014) [arXiv:1101.0618 [hep-th]].

[14] M. Ammon, J. Erdmenger, "Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications", Cambridge University Press (2015)

[15] O. DeWolfe, S. S. Gubser, C. Rosen and D. Teaney, "Heavy ions and string theory," Prog. Part. Nucl. Phys. **75**, 86 (2014) [arXiv:1304.7794 [hep-th]].

[16] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [hep-th/9711200].

[17] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from noncritical string theory," Phys. Lett. B **428**, 105-114 (1998) [hep-th/9802109].

[18] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math.Phys. **2**, 253-291 (1998) [hep-th/9802150].

[19] G. Policastro, D. T. Son and A. O. Starinets, "The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma," Phys. Rev. Lett. **87**, 081601 (2001) [arXiv:hep-th/0104066 [hep-th]].

[20] D. T. Son and A. O. Starinets, "Minkowski space correlators in AdS / CFT correspondence: Recipe and applications," JHEP **09**, 042 (2002) [arXiv:hep-th/0205051 [hep-th]].

[21] A. Buchel and J. T. Liu, "Universality of the shear viscosity in supergravity," Phys. Rev. Lett. **93**, 090602 (2004) [arXiv:hep-th/0311175 [hep-th]].

[22] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, "Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics," Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005) [arXiv:hep-th/0405231 [hep-th]].

[23] I. Y. Aref'eva and M. A. Khramtsov, "AdS/CFT prescription for angle-deficit space and winding geodesics," JHEP **04**, 121 (2016) [arXiv:1601.02008 [hep-th]].

[24] I. Y. Aref'eva, M. A. Khramtsov and M. D. Tikhanovskaya, "Thermalization after holographic bilocal quench," JHEP **09**, 115 (2017) [arXiv:1706.07390 [hep-th]].

[25] D. S. Ageev and I. Y. Aref'eva, "Holographic Non-equilibrium Heating," JHEP **03**, 103 (2018) [arXiv:1704.07747 [hep-th]].

[26] D. S. Ageev, I. Y. Aref'eva, A. A. Bagrov and M. I. Katsnelson, "Holographic local quench and effective complexity," JHEP **08**, 071 (2018) [arXiv:1803.11162 [hep-th]].

[27] K. Alkalaev and V. Belavin, "Large-c superconformal torus blocks," JHEP **08**, 042 (2018) [arXiv:1805.12585 [hep-th]].

[28] K. Alkalaev and A. Yan, "AdS_3/AdS_2 degression of massless particles," JHEP **09**, 198 (2021) [arXiv:2105.05722 [hep-th]].

[29] E. Witten, "Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505-532 (1998) [arXiv:hep-th/9803131 [hep-th]].

[30] T. Sakai and S. Sugimoto, "Low energy hadron physics in holographic QCD," Prog. Theor. Phys. **113**, 843-882 (2005) [arXiv:hep-th/0412141 [hep-th]].

[31] U. Gursoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti and F. Nitti, "Holography and Thermodynamics of 5D Dilaton-gravity", JHEP, **0905**, 033 (2009) [arXiv:0812.0792 [hep-th]].

[32] U. Gursoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti, G. Michalogiorgakis and F. Nitti, "Improved Holographic QCD", Lect. Notes Phys. **828**, 79-146 (2011) [arXiv:1006.5461 [hep-th]].

[33] U. Gursoy and E. Kiritsis, "Exploring improved holographic theories for QCD: Part I," JHEP **0802**, 032 (2008) [arXiv:0707.1324 [hep-th]].

[34] U. Gursoy, E. Kiritsis and F. Nitti, "Exploring improved holographic theories for QCD: Part II," JHEP **0802**, 019 (2008) [arXiv:0707.1349 [hep-th]].

[35] O. DeWolfe, S. S. Gubser and C. Rosen, "A holographic critical point," Phys. Rev. D **83**, 086005 (2011), [arXiv:1012.1864 [hep-th]].

[36] O. DeWolfe, S. S. Gubser and C. Rosen, "Dynamic critical phenomena at a holographic critical point," Phys. Rev. D **84**, 126014 (2011) [arXiv:1108.2029 [hep-th]].

[37] I. Ya. Aref'eva, A. A. Golubtsova and G. Policastro, "Exact holographic RG flows and the $A_1 \times A_1$ Toda chain," [arXiv:1803.06764 [hep-th]].

[38] S. He, S.-Y. Wu, Y. Yang and P.-H. Yuan, "Phase Structure in a Dynamical Soft-Wall Holographic QCD Model," JHEP **04**, 093 (2013) [arXiv:1301.0385 [hep-th]].

[39] Y. Yang and P. H. Yuan, "A Refined Holographic QCD Model and QCD Phase Structure", JHEP **11**, 149 (2014) [arXiv:1406.1865 [hep-th]].

[40] Y. Yang and P.-H. Yuan, "Confinement-deconfinement phase transition for heavy quarks in a soft wall holographic QCD model," JHEP **1512**, 161 (2015) [arXiv:1506.05930 [hep-th]].

[41] J. Chen, S. He, M. Huang and D. Li, "Critical exponents of finite temperature chiral phase transition in soft-wall AdS/QCD models," [arXiv:1810.07019 [hep-ph]].

[42] M.-W. Li, Y. Yang, P.-H. Yuan, "Approaching Confinement Structure for Light Quarks in a Holographic Soft Wall QCD Model", Phys. Rev. **D 96**, 066013 (2017), [arXiv:1703.09184 [hep-th]].

[43] Z. Fang and L. Zhang, "Chiral transition and meson melting with finite chemical potential in an improved soft-wall AdS/QCD Model", [arXiv:1910.02269 [hep-ph]].

[44] M. W. Li, Y. Yang and P. H. Yuan, "Analytic Study on Chiral Phase Transition in Holographic QCD," JHEP **02**, 055 (2021) [arXiv:2009.05694 [hep-th]].

[45] H. Bohra, D. Dudal, A. Hajilou and S. Mahapatra, "Chiral transition in the probe approximation from an Einstein-Maxwell-dilaton gravity model," Phys. Rev. D **103**, no.8, 086021 (2021) [arXiv:2010.04578 [hep-th]].

[46] R. Rougemont, R. Critelli and J. Noronha, "Holographic calculation of the QCD crossover temperature in a magnetic field", Phys. Rev. **D93**, 045013 (2015) [arXiv:1505.07894 [hep-ph]].

[47] D. M. Rodrigues, D. Li, E. Folco Capossoli and H. Boschi-Filho, "Finite density effects on chiral symmetry breaking in a magnetic field in 2+1 dimensions from holography," Phys. Rev. D **103**, no.6, 066022 (2021) [arXiv:2010.06762 [hep-th]].

[48] X. Chen, D. Li, D. Hou and M. Huang, "Quarkyonic phase from quenched dynamical holographic QCD model," JHEP **03**, 073 (2020) [arXiv:1908.02000 [hep-ph]].

[49] O. Andreev and V. I. Zakharov, "On Heavy-Quark Free Energies, Entropies, Polyakov Loop, and AdS/QCD," JHEP **04**, 100 (2007) [arXiv:hep-ph/0611304 [hep-ph]].

[50] M. Strickland, "Thermalization and isotropization in heavy-ion collisions," Pramana **84**, 671 (2015).

[51] F. Karsch, "SU(N) gauge theory couplings on asymmetric lattices," Nucl. Phys. B **205**, 285 (1982).

[52] F. Karsch and I. Stamatescu, "QCD thermodynamics with light quarks. Quantum corrections to the fermionic anisotropy parameter," Nucl. Phys. B **227**, 153 (1989).

[53] I. Y. Arefeva, "Regge regime in QCD and asymmetric lattice gauge theory," Phys. Lett. B **325**, 171 (1994) [arXiv:9311115 [hep-th]].

[54] P. de Forcrand, W. Unger and H. Vairinhos, "Strong-Coupling Lattice QCD on Anisotropic Lattices," Phys. Rev. D **97**, 034512 (2018) [arXiv:1710.00611 [hep-lat]].

[55] D. Giataganas, "Probing strongly coupled anisotropic plasma", JHEP **07**, 031 (2012) [arXiv:1202.4436 [hep-th]].

[56] I. Y. Aref'eva and A. A. Golubtsova, "Shock waves in Lifshitz-like spacetimes," JHEP **04**, 011 (2015) [arXiv:1410.4595 [hep-th]].

[57] I. Ya. Aref'eva and K. A. Rannu, "Holographic Anisotropic Background with Confinement-Deconfinement Phase Transition", JHEP **05**, 206 (2018), [arXiv:1802.05652 [hep-th]].

[58] I. Ya. Aref'eva, "Holography for nonperturbative study of QFT", Phys. Part. Nucl. **51**, no.4, 489-496 (2020).

[59] I. Y. Aref'eva, "Theoretical Studies of the Formation and Properties of Quark–Gluon Matter under Conditions of High Baryon Densities Attainable at the NICA Experimental Complex," Phys. Part. Nucl. **52**, no.4, 512-521 (2021)

[60] J. Adam et al. [ALICE Collab.], "Centrality dependence of the charged-particle multiplicity density at mid-rapidity in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} =$ 5.02 TeV," Phys. Rev. Lett. **116**, 222302 (2016) [arXiv:1512.06104 [nucl-ex]].

[61] G. Aad et al. [ATLAS Collab.], "Measurement of the centrality dependence of the charged particle pseudorapidity distribution in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ATLAS detector," Phys. Lett. B **170**, 363 (2012) [arXiv:1108.6027 [hep-ex]].

[62] V. Skokov, A. Y. Illarionov and V. Toneev, "Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions," Int. J. Mod. Phys. A **24**, 5925-5932 (2009) [arXiv:0907.1396 [nucl-th]].

[63] V. Voronyuk, V. D. Toneev, W. Cassing, E. L. Bratkovskaya, V. P. Konchakovski and S. A. Voloshin, "(Electro-)Magnetic field evolution in relativistic heavy-ion collisions," Phys. Rev. C **83**, 054911 (2011) [arXiv:1103.4239 [nucl-th]].

[64] A. Bzdak and V. Skokov, "Event-by-event fluctuations of magnetic and electric fields in heavy ion collisions," Phys. Lett. B **710**, 171-174 (2012) [arXiv:1111.1949 [hep-ph]].

[65] V. Toneev, O. Rogachevsky and V. Voronyuk, "Evidence for creation of strong electromagnetic fields in relativistic heavy-ion collisions," Eur. Phys. J. A **52**, no.8, 264 (2016) [arXiv:1604.06231 [hep-ph]].

[66] D. Li, M. Huang, Y. Yang and P. H. Yuan, "Inverse Magnetic Catalysis in the Soft-Wall Model of AdS/QCD", JHEP **02**, 030 (2017) [arXiv:1610.04618 [hep-th]].

[67] U. Gursoy, I. Iatrakis, M. Jarvinen and G. Nijs, "Inverse Magnetic Catalysis from improved Holographic QCD in the Veneziano limit", JHEP **03**, 053 (2017) [arXiv:1611.06339 [hep-th]].

[68] D. Dudal and S. Mahapatra, "Confining gauge theories and holographic entanglement entropy with a magnetic field", JHEP **04**, 031 (2017) [arXiv:1612.06248 [hep-th]].

[69] U. Gursoy, M. Jarvinen and G. Nijs, "Holographic QCD in the Veneziano limit at finite Magnetic Field and Chemical Potential", Phys. Rev. Lett. **120**, 242002 (2018) [arXiv:1707.00872 [hep-th]].

[70] U. Gursoy, M. Jarvinen, G. Nijs and J. F. Pedraza, "Inverse Anisotropic Catalysis in Holographic QCD", Phys. Rev. Lett. **04**, 071 (2019) [arXiv:1811.11724 [hep-th]].

[71] H. Bohra, D. Dudal, A. Hajilou and S. Mahapatra, "Anisotropic string tensions and inversely magnetic catalyzed deconfinement from a dynamical AdS/QCD model", Phys. Lett. B **801**, 135184 (2020) [arXiv:1907.01852 [hep-th]].

[72] S. He, Y. Yang and P. H. Yuan, "Analytic Study of Magnetic Catalysis in Holographic QCD", [arXiv:2004.01965 [hep-th]].

[73] S. Mereghetti, J. Pons and A. Melatos, "Magnetars: Properties, Origin and Evolution," Space Sci. Rev. **191**, no.1-4, 315-338 (2015) [arXiv:1503.06313 [astro-ph.HE]].

[74] K. Enqvist and P. Olesen, "On primordial magnetic fields of electroweak origin," Phys. Lett. B **319**, 178-185 (1993) [arXiv:hep-ph/9308270 [hep-ph]].

[75] I. Y. Aref'eva, A. A. Golubtsova and E. Gourgoulhon, "Holographic drag force in 5d Kerr-AdS black hole," JHEP **04**, 169 (2021) [arXiv:2004.12984 [hep-th]].

[76] G. Y. Prokhorov, O. V. Teryaev and V. I. Zakharov, "Chiral vortical effect in extended Rarita-Schwinger field theory and chiral anomaly," Phys. Rev. D **105**, no.4, L041701 (2022) [arXiv:2109.06048 [hep-th]].

[77] G. Y. Prokhorov, O. V. Teryaev and V. I. Zakharov, "Chiral vortical effect for vector fields," Phys. Rev. D **103**, no.8, 085003 (2021) [arXiv:2009.11402 [hep-th]].

[78] I. Ya. Aref'eva, A. A. Golubtsova and E. Gourgoulhon, "Analytic black branes in Lifshitz-like backgrounds and thermalization," JHEP **1609**, 142 (2016) [arXiv:1601.06046 [hep-th]].

[79] E. Kiritsis and A. Taliotis, "Multiplicities from black-hole formation in heavy-ion collisions," JHEP **04**, 065 (2012) [arXiv:1111.1931 [hep-ph]].

[80] D. Dudal and S. Mahapatra, "Interplay between the holographic QCD phase diagram and entanglement entropy," JHEP **1807**, 120 (2018) [arXiv:1805.02938 [hep-th]].

[81] H. Ebrahim and G. M. Nafisi, "Holographic Mutual Information and Critical Exponents of the Strongly Coupled Plasma," Phys. Rev. D **102**, no.10, 106007 (2020) [arXiv:2002.09993 [hep-th]].

[82] D. Dudal and S. Mahapatra, "Thermal entropy of a quark-antiquark pair above and below deconfinement from a dynamical holographic QCD model," Phys. Rev. D **96**, no. 12, 126010 (2017) [arXiv:1708.06995 [hep-th]].

[83] S. Mahapatra, "Interplay between the holographic QCD phase diagram and mutual and n-partite information," JHEP **1904**, 137 (2019) [arXiv:1903.05927 [hep-th]].

[84] I. Ya. Aref'eva, "Holography for Heavy-Ion Collisions at LHC and NICA. Results of the last two years," EPJ Web Conf. **191**, 05010 (2018).

[85] I. Ya. Aref'eva, "Holography for Heavy Ions Collisions at LHC and NICA," EPJ Web Conf. **164**, 01014 (2017) [arXiv:1612.08928 [hep-th]].

[86] F. R. Brown, F. P. Butler, H. Chen, N. H. Christ, Z. h. Dong, W. Schaffer, L. I. Unger and A. Vaccarino, "On the existence of a phase transition for QCD with three light quarks," Phys. Rev. Lett. **65**, 2491-2494 (1990)

[87] O. Philipsen and C. Pinke, "The $N_f = 2$ QCD chiral phase transition with Wilson fermions at zero and imaginary chemical potential," Phys. Rev. D **93**, no.11, 114507 (2016) [arXiv:1602.06129 [hep-lat]].

[88] O. Philipsen, "Constraining the phase diagram of QCD at finite temperature and density," PoS **LATTICE2019**, 273 (2019) [arXiv:1912.04827 [hep-lat]].

[89] S. W. Hawking and D. N. Page, "Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space," Commun. Math. Phys. **87**, 577 (1983)

[90] X. Luo [STAR],"Search for the QCD Critical Point by Higher Moments of Net-proton Multiplicity Distributions at STAR," Central Eur. J. Phys. **10**, 1372 (2012) [arXiv:1210.5573 [nucl-ex]].

[91] L. Adamczyk, et al.,"Energy Dependence of Moments of Net-proton Multiplicity Distributions at RHIC," Phys.Rev.Lett. **112** (2014) 032302 [arXiv:1309.5681].

[92] X. Luo [STAR], "Energy Dependence of Moments of Net-Proton and Net-Charge Multiplicity Distributions at STAR," PoS **CPOD2014**, 019 (2015) [arXiv:1503.02558 [nucl-ex]].

[93] M. Aggarwal, et al., "Higher Moments of Net-proton Multiplicity Distributions at RHIC," Phys.Rev.Lett. **105** (2010) 022302 [arXiv:1004.4959].

[94] A. Ayala, A. Bashir, J. J. Cobos-Martinez, S. Hernandez-Ortiz and A. Raya, "The effective QCD phase diagram and the critical end point," Nucl. Phys. B **897**, 77 (2015) [arXiv:1411.4953 [hep-ph]].

[95] B. Berdnikov, K. Rajagopal, "Slowing out-of-equilibrium near the QCD critical point," Phys.Rev. D **61** (2000) 105017, [arXiv:hep-ph/9912274].

[96] S. Ryu and T. Takayanagi, "Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT," Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001].

[97] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, "A Covariant holographic entanglement entropy proposal," JHEP **0707**, 062 (2007) [arXiv:0705.0016 [hep-th]].

[98] L. D. Landau "On the multiplicity of particles formation in ultra-relativistic particles collisions," Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. V.17, P.54 (1953)
E. Fermi, Progr. Theoret. Phys. 1950. V.5. P. 570.
I.Ya. Pomeranchuk, DAN SSSR. 1951. V.78. P. 884.

[99] I. Aref'eva, "Holographic Entanglement Entropy for Heavy Ions Collisions," Phys.Part.Nucl.Lett. 16 (2019) no.5., 486-492

[100] I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Holographic model for heavy quarks in anisotropic hot dense QGP with external magnetic field," JHEP **07**, 161 (2021) [arXiv:2011.07023 [hep-th]].

[101] I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Holographic anisotropic model for light quarks with confinement-deconfinement phase transition," JHEP **06**, 090 (2021) [arXiv:2009.05562 [hep-th]].

[102] I. Y. Aref'eva, A. Patrushev and P. Slepov, "Holographic entanglement entropy in anisotropic background with confinement-deconfinement phase transition", JHEP **07**, 043 (2020) [arXiv:2003.05847 [hep-th]].

[103] I. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Orientation Dependence of Confinement-Deconfinement Phase Transition in Anisotropic Media," Phys. Lett. B **792**, 470-475 (2019) [arXiv:1808.05596 [hep-th]].

[104] P. S. Slepov, "A Way To Improve the String Tension Dependence on Temperature in Holographic Model," Phys. Part. Nucl. **52**, no.4, 560-563 (2021)

[105] I. Y. Aref'eva, K. A. Rannu and P. S. Slepov, "Anisotropic solution of the holographic model of light quarks with an external magnetic field," Teor. Mat. Fiz. **210**, no.3, 416-421 (2022)

[106] I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. S. Slepov, "Anisotropic solutions for a holographic heavy-quark model with an external magnetic field," Teor. Mat. Fiz. **207**, no.1, 44-57 (2021)

[107] P. Slepov, "Holographic study of Wilson loop in the anisotropic background with confinement/deconfinement phase transition," EPJ Web Conf. **191**, 05011 (2018)

[108] P. Slepov, "Entanglement entropy in strongly correlated systems with confinement/deconfinement phase transition and anisotropy," EPJ Web Conf. **222**, 03024 (2019)

[109] E. D'Hoker and P. Kraus, "Charged Magnetic Brane Solutions in AdS (5) and the fate of the third law of thermodynamics", JHEP **03**, 095 (2010) [arXiv:0911.4518 [hep-th]]

[110] A. Karch, E. Katz, D. T. Son and M. A. Stephanov, "Linear confinement and AdS/QCD," Phys. Rev. D **74**, 015005 (2006) [arXiv:hep-ph/0602229 [hep-ph]].

[111] S. S. Afonin and I. V. Pusenkov, "The quark masses and meson spectrum: A holographic approach," Phys. Lett. B **726**, 283-289 (2013) [arXiv:1306.3948 [hep-ph]].

[112] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Table of integrals, Series, an Products," 5-th edition, 8.35 The incomplete gamma functions.

[113] J. M. Maldacena, "Wilson Loops in Large N Field Theories," Phys. Rev. Lett. **80**, 4859 (1998) [arXiv:9803002 [hep-th]].

[114] S. J. Rey, S. Theisen and J. T. Yee, "Wilson-Polyakov loop at finite temperature in large-N gauge theory and anti-de Sitter supergravity," Nucl. Phys. B **527**, 171 (1998) [arXiv:9803135 [hep-th]].

[115] A. Brandhuber, N. Itzhaki, J. Sonnenschein and S. Yankielowicz, "High Energy Physics – Theory Wilson Loops in the Large N Limit at Finite Temperature," Phys. Lett. B **434**, 36 (1998) [arXiv:9803137 [hep-th]].

[116] A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson and R. C. Myers, "Charged AdS black holes and catastrophic holography," Phys. Rev. D **60**, 064018 (1999) [arXiv:9902170 [hep-th]].

[117] G. S. Bali, "QCD forces and heavy quark bound states", Phys.Rept. **343**, 1-136 (2001) [arXiv:0001312 [hep-th]]

[118] I. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Cornell potential for anisotropic QGP with non-zero chemical potential," EPJ Web Conf. **222**, 03023 (2019).

[119] N. Cardoso and P. Bicudo, "Lattice QCD computation of the SU(3) String Tension critical curve," Phys. Rev. D **85**, 077501 (2012) [arXiv:1111.1317 [hep-lat]].

[120] P. Bicudo, "The QCD string tension curve, the ferromagnetic magnetization, and the quark-antiquark confining potential at finite Temperature," Phys. Rev. D **82**, 034507 (2010) [arXiv:1003.0936 [hep-lat]].

[121] S. He, M. Huang and Q. S. Yan, "Logarithmic correction in the deformed AdS_5 model to produce the heavy quark potential and QCD beta function," Phys. Rev. D **83**, 045034 (2011) [arXiv:1004.1880 [hep-ph]].

[122] E. Laermann and O. Philipsen, "The Status of lattice QCD at finite temperature," Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 163-198 (2003) [arXiv:hep-ph/0303042 [hep-ph]].

[123] P. J.P., S. Koothottil and V. M. Bannur, "Revisiting Cornell potential model of the Quark–Gluon plasma," Physica A **558**, 124921 (2020)

[124] I. Y. Aref'eva, K. A. Rannu and P. S. Slepov, "Spatial Wilson loops in a fully anisotropic model," Teor. Mat. Fiz. **206**, no.3, 400-409 (2021)

[125] C. P. Herzog et al, "Energy loss of a heavy quark moving through N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma," JHEP **0607**, 013 (2006) [hep-th/0605158].

[126] S. S. Gubser, "Drag force in AdS/CFT," Phys. Rev. D **74**, 126005 (2006) [arXiv:hep-th/0605182 [hep-th]].

[127] S. J. Sin and I. Zahed, "Ampere's Law and Energy Loss in AdS/CFT Duality," Phys. Lett. B **648**, 318-322 (2007) [arXiv:hep-ph/0606049 [hep-ph]].

[128] O. Andreev, "Drag Force on Heavy Quarks and Spatial String Tension," Mod. Phys. Lett. A **33**, no.06, 1850041 (2018) [arXiv:1707.05045 [hep-ph]].

[129] I. Y. Aref'eva, K. Rannu and P. Slepov, "Energy Loss in Holographic Anisotropic Model for Heavy Quarks in External Magnetic Field," [arXiv:2012.05758 [hep-th]].

[130] I. Y. Aref'eva, A. Ermakov and P. Slepov, "Direct photons emission rate and electric conductivity in twice anisotropic QGP holographic model with first-order phase transition," Eur. Phys. J. C **82**, no.1, 85 (2022) [arXiv:2104.14582 [hep-th]].

[131] P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov, "Numerical study of entanglement entropy in SU(2) lattice gauge theory," Nucl. Phys. B **802**, 458 (2008) [arXiv:0802.4247 [hep-lat]].

[132] A. Velytsky, "Entanglement entropy in d+1 SU(N) gauge theory," Phys. Rev. D **77**, 085021 (2008) [arXiv:0801.4111 [hep-th]].

[133] E. Itou, K. Nagata, Y. Nakagawa, A. Nakamura and V. I. Zakharov, "Entanglement in Four-Dimensional SU(3) Gauge Theory," PTEP **2016**, no. 6, 061B01 (2016) [arXiv:1512.01334 [hep-th]].

[134] T. Kunihiro, B. Muller, A. Ohnishi, A. Schafer, T. T. Takahashi and A. Yamamoto, "Chaotic behavior in classical Yang-Mills dynamics," Phys. Rev. D **82**, 114015 (2010) [arXiv:1008.1156 [hep-ph]].

[135] S. Ryu and T. Takayanagi, "Aspects of Holographic Entanglement Entropy," JHEP **0608**, 045 (2006) [hep-th/0605073].

[136] M. Kulaxizi, A. Parnachev and K. Schalm, "On Holographic Entanglement Entropy of Charged Matter," JHEP **1210**, 098 (2012) [arXiv:1208.2937 [hep-th]].

[137] A. Lewkowycz, "Holographic Entanglement Entropy and Confinement," JHEP **1205**, 032 (2012) [arXiv:1204.0588 [hep-th]].

[138] N. Kim, "Holographic entanglement entropy of confining gauge theories with flavor," Phys. Lett. B **720**, 232 (2013).

[139] S. J. Zhang, "Holographic entanglement entropy close to crossover/phase transition in strongly coupled systems," Nucl. Phys. B **916**, 304 (2017) [arXiv:1608.03072 [hep-th]].

[140] J. Knaute and B. Kampfer, "Holographic Entanglement Entropy in the QCD Phase Diagram with a Critical Point," Phys. Rev. D **96**, no. 10, 106003 (2017)[arXiv:1706.02647 [hep-ph]]

[141] M. Ali-Akbari and M. Lezgi, "Holographic QCD, entanglement entropy, and critical temperature," Phys. Rev. D **96**, no. 8, 086014 (2017) [arXiv:1706.04335 [hep-th]].

[142] U. Kol, C. Nunez, D. Schofield, J. Sonnenschein and M. Warschawski, "Confinement, Phase Transitions and non-Locality in the Entanglement Entropy," JHEP **1406**, 005 (2014) [arXiv:1403.2721 [hep-th]].

[143] S. Kundu and J. F. Pedraza, "Aspects of Holographic Entanglement at Finite Temperature and Chemical Potential," JHEP **1608**, 177 (2016) [arXiv:1602.07353 [hep-th]].

[144] Y. Ling, P. Liu and J. P. Wu, "Characterization of Quantum Phase Transition using Holographic Entanglement Entropy," Phys. Rev. D **93**, no. 12, 126004 (2016) [arXiv:1604.04857 [hep-th]].

[145] X. X. Zeng and L. F. Li, "Holographic Phase Transition Probed by Nonlocal Observables," Adv. High Energy Phys. **2016**, 6153435 (2016) [arXiv:1609.06535 [hep-th]].

[146] M. Rahimi and M. Ali-Akbari, "Holographic Entanglement Entropy Decomposition in an Anisotropic Gauge Theory," Phys. Rev. D **98**, no. 2, 026004 (2018) [arXiv:1803.01754 [hep-th]].

[147] M. Baggioli, B. Padhi, P. W. Phillips and C. Setty, "Conjecture on the Butterfly Velocity across a Quantum Phase Transition," JHEP **1807**, 049 (2018) [arXiv:1805.01470 [hep-th]].

[148] P. Liu, C. Niu and J. P. Wu, "The Effect of Anisotropy on Holographic Entanglement Entropy and Mutual Information," Phys. Lett. B **796**, 155 (2019) [arXiv:1905.06808 [hep-th]].

[149] K. Narayan, T. Takayanagi and S. P. Trivedi, "AdS plane waves and entanglement entropy," JHEP **1304**, 051 (2013) [arXiv:1212.4328 [hep-th]].

[150] I. R. Klebanov, D. Kutasov and A. Murugan, "Entanglement as a probe of confinement," Nucl. Phys. B **796**, 274 (2008) [arXiv:0709.2140 [hep-th]].

[151] S. I. Finazzo, R. Critelli, R. Rougemont and J. Noronha, "Momentum transport in strongly coupled anisotropic plasmas in the presence of strong magnetic fields," Phys. Rev. D **94**, no. 5, 054020 (2016). Erratum: [Phys. Rev. D **96**, no. 1, 019903 (2017)], arXiv:1507.06556 [hep-th]

[152] D. Giataganas, U. Gursoy and J. F. Pedraza, "Strongly-coupled anisotropic gauge theories and holography," Phys. Rev. Lett. **121**, no. 12, 121601 (2018) [arXiv:1708.05691 [hep-th]].

[153] D. Mateos and D. Trancanelli, "The anisotropic N=4 super Yang-Mills plasma and its instabilities," Phys. Rev. Lett. **107**, 101601 (2011) [arXiv:1105.3472 [hep-th]].

[154] D. Mateos and D. Trancanelli, "Thermodynamics and Instabilities of a Strongly Coupled Anisotropic Plasma," JHEP **1107**, 054 (2011) [arXiv:1106.1637 [hep-th]].

[155] M. Nozaki, T. Numasawa and T. Takayanagi, "Holographic Local Quenches and Entanglement Density," JHEP **1305**, 080 (2013) [arXiv:1302.5703 [hep-th]].

[156] J. Bhattacharya, V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, "Entanglement density and gravitational thermodynamics," Phys. Rev. D **91**, no.10, 106009 (2015) [arXiv:1412.5472 [hep-th]].

[157] N. I. Gushterov, A. O'Bannon and R. Rodgers, 'On Holographic Entanglement Density," JHEP **1710**, 137 (2017) [arXiv:1708.09376 [hep-th]].

[158] J. Erdmenger and N. Miekley, "Non-local observables at finite temperature in AdS/CFT," JHEP **1803**, 034 (2018) [arXiv:1709.07016 [hep-th]].

[159] P. Fonda, D. Seminara and E. Tonni, "On shape dependence of holographic entanglement entropy in AdS_4/CFT_3," JHEP **1512**, 037 (2015) [arXiv:1510.03664 [hep-th]].
G. Cavini, D. Seminara, J. Sisti and E. Tonni, "On shape dependence of holographic entanglement entropy in AdS_4/CFT_3 with Lifshitz scaling and

hyperscaling violation," JHEP **2002**, 172 (2020) [arXiv:1907.10030 [hep-th]].

[160] D. S. Ageev, I. Ya. Aref'eva, A. A. Golubtsova and E. Gourgoulhon, "Thermalization of holographic Wilson loops in spacetimes with spatial anisotropy," NUPHB **14333** (2018) [arXiv:1606.03995 [hep-th]].