УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе и цифровому развитию федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Короновский Алексей Александрович
"__" _____ 2022 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Ирины Викторовны Лимоновой «Ограничение операторов на координатные подпространства и теоремы дискретизации», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена развитию современного метода исследований в области теории функций и функционального анализа, связанного с оценками норм подматриц и операторов, получающихся их ограничением на подпространства: сужением на подпространство в прообразе или проектированием на подпространство в образе оператора. Разработка данного метода уже позволила получить новые прорывные результаты и решение хорошо известных классических проблем таких, как гипотеза Кадисона–Зингера, остававшаяся открытым вопросом на протяжении более полувека. Автором диссертационной работы получены новые результаты в задаче разложения матрицы с малыми q-нормами ее строк на две подматрицы с экстремально малыми (p, q)-нормами. Ранее были известны подобные результаты для конкретных параметров p и q, что даже в этих отдельных случаях представляло существенное достижение.

Актуальность темы исследования.

Значение результатов диссертационной работы сложно переоценить в силу широкого спектра их применения: от классических задач теории ортогональных рядов до новейших задач геометрии нормированных пространств, которые зачастую могут быть сведены к получению соответствующих оценок норм подматриц. Собственно в самой диссертационной работе подробно изучено одно из возможных применений развиваемого автором метода к вопросу о выделении лакунарных подсистем с контролируемой плотностью из ортогональной системы. Также важно отметить, что опубликованные результаты автора нашли своё применение в работах других математиков. Таким образом, тематика диссертации, сконцентрированная на специальном, на первый взгляд, круге вопросов об

оценке норм подматриц и норм ограничения операторов на координатные подпространства, на самом деле охватывает целый ряд формально не связанных между собой актуальных задач теории функций и функционального анализа.

Научная новизна.

Все результаты диссертационной работы являются новыми. Их новизна и достоверность подтверждается высоким уровнем публикаций автора. Среди основных результатов диссертации отметим следующие. Во-первых, установлено существование разбиения матрицы на две подматрицы с экстремально малыми (p, q)-нормами при различных естественных ограничениях на элементы (или строки) исходной матрицы. Ранее подобные результаты были получены при отдельных значениях параметров p и q в работах Б.С. Кашина, А.А. Лунина, А. Маркуса, Д. Спилмана, Н. Сриваставы и других математиков. Во-вторых, доказано существование достаточно плотной лакунарной подсистемы L_q-ограниченной ортогональной системы а также такой подсистемы, для которой поведение нормы оператора мажоранты частных сумм оказывается лучше по сравнению с теоремой Меньшова–Радемахера. Наконец, построен контрпример к гипотезе о положительности весов в задаче о точной дискретизации типа Марцинкевича.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях по теории функций и функциональному анализу (ортогональные ряды, дискретизация норм функций, геометрия нормированнных пространств и т.п.), а также при разработке специальных курсов и семинаров в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Самарском национальном исследовательском университете имени академика С.П. Королева, Саратовском национальном исследовательском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского и других образовательных и научных учреждениях.

Апробация работы и публикации.

Результаты диссертационной работы своевременно опубликованы в ведущих научных журналах, представлены на научных конференциях и семинарах. Автору принадлежат 3 публикации без соавторов в журналах, входящих в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, а также в международные базы цитирования Scopus и Web of Science.

Основное содержание работы по главам. Работа состоит их трёх глав.

В первой главе получены оценки (p, q)-норм (и норм более общего вида) подматриц, в частности, показана возможность разбиения матрицы с малыми q-нормами строк на две подматрицы с экстремально малой (p, q)-нормой.

Во второй главе решена задача о выделении лакунарной подсистемы достаточной плотности из ортогональной системы с ограниченными L_q-нормами ее элементов, а также подсистемы с лучшим, чем гарантировано теоремой Меньшова–Радемахера поведением нормы оператора мажоранты частных сумм.

В третьей главе построен контрпример к гипотезе о положительности весов в задаче о точной дискретизации типа Марцинкевича.

Автореферат полностью соответствует тексту диссертационной работы.

Замечания по диссертационной работе.

1. В первом абзаце Введения на странице 3 при определении подпространств L и L_1 используется обозначение span. Поскольку речь идет о замкнутой линейной оболочке, то предпочтительнее использование обозначения $\overline{\text{span}}$. Кроме того, определение оператора T_1 будет корректно при дополнительном предположении о дополняемости подпространства L_1 в банаховом пространстве Y с базисом $\{g_j\}_{j\in\Omega_1}$, что обеспечивается, в частности, свойством безусловности этого базиса или гильбертовостью пространства Y, что впрочем и происходит в приводимых ниже по тексту диссертации примерах. Конечно, высказанное замечание касается случая счётного множества индексов Ω_1, для случая конечного множества индексов такие уточнения излишни.

2. В главе 1 на странице 21 приведено Замечание 1.4, которое носит характер утверждения и снабжено доказательством. При отсутствии исчерпывающе строгой и точной формулировки этого утверждения остаются не вполне ясными некоторые моменты: какие параметры заданы, а какие подлежат определению. А именно, фраза "... определяется σ — перестановка набора $\langle N\rangle$ и совокупность K_1 подмножеств $\langle N\rangle$, для которых ..." допускает неоднозначное толкование. Из доказательства становится ясно, что оценка сверху величины $|K_1|$ справедлива в том числе и для максимальной совокупности K_1, состоящей вообще из всех допустимых подмножеств множества $\langle N\rangle$, так-что этот объект можно считать однозначно определенным, в то время как перестановка σ может быть произвольной.

3. В главе 2 на странице 45 формулировку леммы 2.3 было бы желательно предварить определением множества $\mathcal{P}_m$, которое приведено на следующей странице в лемме 2.4.

4. В главе 2 на страницах 46–47 Замечания 2.1, 2.2 и 2.3 по-существу носят характер элементов доказательства леммы 2.4. Возможно, их следовало бы включить в доказательство леммы 2.4 или расположить не до, а после ее доказательства.

Высказанные замечания носят характер несущественных уточнений и рекомендаций и не влияют на содержательность и справедливость результатов диссертации, что не снижает общей положительной оценки работы.

Заключение.

Диссертационная работа «Ограничение операторов на координатные подпространства и теоремы дискретизации» представляет собой законченное научное исследование, посвящённое актуальной и активно развиваемой тематике, полностью соответствует требованиям пп. 9–11, 13, 14 «Положения о присуждении учёных степеней», утверждённого Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор, Лимонова Ирина Викторовна, заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв составлен Терехиным Павлом Александровичем, доктором физико-математических наук (01.01.01), профессором кафедры теории функций и стохастического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Отзыв ведущей организации на диссертацию обсуждён и одобрен на заседании кафедры теории функций и стохастического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского" "22" ноября 2022 г., протокол № 5.

Заведующий кафедрой теории функций и стохастического анализа
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»,
доктор физико-математических наук (01.01.01)

Сидоров Сергей Петрович

удостоверяю
И.В. Федусенко