ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Лимоновой И.В. "Ограничение операторов на координатные подпространства и теоремы дискретизации" , представленную на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.1 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Рецензируемая диссертация посвящена исследованию свойств операторов при их ограничении на координатные подпространства. Пусть X, Y — банаховы пространства, $\{f_i\}_{1\le i\le N}$, где $N \le \infty$, — базис X, T — линейный оператор, ограниченный из X в Y. Задача состоит в том, чтобы найти такое $\Gamma \subset \{1, 2, \dots, N\}$, что сужение оператора T на подпространство $[f_i, i \in \Gamma]$ обладает некоторыми дополнительными свойствами. Рассматривается также двойственная постановка, когда речь идет о сужении образа оператора.

С одной стороны, эта проблематика является классической; достаточно напомнить о теоремах С. Банаха, С. Сидона, А. Зигмунда, Ж. Марцинкевича, У. Рудина, С.Б. Стечкина, Б.С. Кашина о выделении лакунарных подсистем (см. обзор В.Ф. Гапошкина 1966 г. в "Успехах математических наук"). С другой стороны, в диссертации рассматривается случай, когда число элементов базиса N конечно, в связи с чем первостепенное значение приобретает вопрос о плотности Γ во множестве $\{1, 2, \dots, N\}$. Это сближает тематику работы с многочисленными современными исследованиями, посвященными различным вопросам геометрии банаховых пространств, гармонического анализа, выпуклой геометрии, других разделов анализа. Тем самым она, безусловно, актуальна.

Представленная диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дана общая характеристика работы, раскрывается актуальность темы, дан обзор ранее известных результатов, сформулированы основные утверждения диссертации, выносимые на защиту, приведены данные об апробации работы, выражается благодарность научному руководителю за внимание к работе, а также семье за поддержку.

Главы диссертации точно соответствуют следующим трем основным ее темам, заявленным во введении.

(A) Пусть A — матрица размера $N \times n$, $N > 1$, со строками v_i, $i = 1, \ldots, N$, и столбцами w_j, $j = 1, \ldots, n$. Если $\Omega \subset \{1, \ldots, N\}$, то $A(\Omega)$ — подматрица матрицы A, образованная строками v_i, $i \in \Omega$. Для данных $1 \le p, q < \infty$ требуется найти представление

$$\{1, \ldots, N\} = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing, \tag{1}$$

такое, что неравенства

$$\|A(\Omega_k)\|_{(p,q)} \le c(p,q)\|A\|_{(p,q)}, \quad k = 1, 2,$$

выполнены с наименьшей возможной константой $c(p,q)$. Здесь $\|A\|_{(p,q)} := \|A\|_{l_p \to l_q}$, $\|A(\Omega)\|_{(p,q)} := \|A(\Omega)\|_{l_p \to l_q}$.

(B) Пусть L_{ψ_α} — пространство Орлича на вероятностном пространстве, построенное по функции $\psi_\alpha(t) := t^2 \frac{\ln^\alpha(e+|t|)}{\ln^\alpha(e+1/|t|)}$, $\alpha > 0$. Для произвольной ортогональной системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ рассмотрим оператор $S(a_k) := \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$, $a_k \in \mathbb{R}$. Иззучается вопрос о нахождении условий, при которых справедливы те или иные оценки нормы сужения $S_\Lambda : l_2(\Lambda) \to L_{\psi_\alpha}$ оператора S на подмножество $\Lambda \subset \{1, \ldots, N\}$ "большой" плотности.

(C) Говорят, что подпространство $X \subset L_2(\Omega, \mu)$, где (Ω, μ) — вероятностное пространство, допускает точную теорему дискретизации типа Марцинкевича с весами с параметрами m и 2, если существуют множества точек $\{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ и весов $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ такие, что для любой функции $f \in X$ выполнено равенство

$$\int_\Omega f^2 \, d\mu = \sum_{j=1}^m \lambda_j f^2(\xi^j). \tag{2}$$

В этом случае пишут $X \in \mathcal{M}^w(m, 2, 0)$. Если же X допускает равенство (2) с положительными весами, то пишут $X \in \mathcal{M}_+^w(m, 2, 0)$. Кроме того, пусть

$$m(X, w) := \min\{m : \, X \in \mathcal{M}^w(m, 2, 0)\}.$$

Рассматривается следующая гипотеза из работы [5]:

Предположим, что $m = m(X, w)$ и точки $\{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ и веса $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ таковы, что для любой $f \in X$ выполнено равенство (2). *Тогда $\lambda_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$.*

Как указано во введении, проблематика пункта (A) возникла в связи с рассмотрением вопросов сходимости общих ортогональных рядов в работах Б.С. Кашина и затем была продолжена в серии работ Ж.Бургейна и Л.А. Цафрири. Результаты первой главы диссертации в большой мере также связаны с исследованиями глубокой работы А. Маркуса, Д. Спилмана и Н. Сриваставы [36], в которой была решена знаменитая проблема Кадисона-Зингера 1959 г. из квантовой механики. Если использовать более позднюю формулировку Н. Сриваставы из [48], главный результат [36] можно сформулировать следующим образом. Пусть матрица A размера $N \times n$, $N > 1$, удовлетворяет при $q = 2$ условию

$$\forall i_0 \in \{1, \dots, N\}\ \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |(v_{i_0}, x)| \le \varepsilon \Big(\sum_{i=1}^{N} |(v_i, x)|^q \Big)^{1/q}. \qquad (3)$$

Тогда существует разбиение вида (1) такое, что для $q = 2$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\sum_{i \in \Omega_k} |(v_i, x)|^q \le \Big(\frac{1}{2} + C\varepsilon \Big) \sum_{i=1}^{N} |(v_i, x)|^q, \quad k = 1, 2. \qquad (4)$$

В [48] был также поставлен вопрос о справедливости последнего утверждения при $q = 1$. Как показано в совместной работе [13] Б.С. Кашина и автора диссертации, в случае $q = 1$ свойство (3) матрицы A гарантирует наличие разложения (1), для которого выполнено (4), лишь при дополнительном условии, что ε стремится к нулю при $n \to \infty$. Аналогичный результат доказан в утверждении 1.2 диссертации для $1 < q < 2$.

Основные результаты первой главы работы — теоремы 1.1, 1.2 и 1.3. Так, в первой из них показано следующее: если $1 \le q < \infty$, $0 < \varepsilon \le (\operatorname{rank}(A))^{-1/q}$ и выполнено (3), то найдется разбиение вида (1) такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $k = 1, 2$

$$\|A(\Omega_k)x\|_q \le \gamma \|Ax\|_q, \quad \gamma := \frac{1}{2^{1/q}} + \frac{2 + 3 \cdot 2^{-1/q}}{q} \Big(\operatorname{rank}(A) \varepsilon^q \ln \frac{6q}{(\operatorname{rank}(A)\varepsilon^q)^{1/3}} \Big)^{1/3}.$$

Отсюда сразу вытекает результат теоремы 1.2 о том, что в прежних условиях для некоторого разбиения вида (1) с той же константой γ выполнено:

$$\|A(\Omega_k)\|_{X \to l_q} \le \gamma \|A\|_{X \to l_q}, \quad k = 1, 2,$$

где X — пространство $\mathbb{R}^n$ с произвольной нормой. Технически более сложной является теорема 1.3, содержащая существенные уточнения последнего утверждения в случае $X = l_1$.

Вторая глава посвящена изучению свойств лакунарности подсистем ортогональных систем функций. При этом принципиальным является вопрос об их плотности. Упомянем здесь следующий фундаментальный факт, доказанный Ж. Бургейном в работе [24]. Пусть $p > 2$ и ортонормированная система $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ такова, что $\|\varphi_k\|_\infty \le M$, $k = 1, \dots, N$. Тогда существует множество $\Lambda \subset \{1, \dots, N\}$, удовлетворяющее условиям: $\operatorname{card} \Lambda \ge N^{2/p}$ и для всех $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \Lambda$, справедливо неравенство

$$\|S_\Lambda(a_k)\|_p := \Big\| \sum_{k\in\Lambda} a_k \varphi_k \Big\|_p \le K(M,p) \|(a_k)\|_{l_2(\Lambda)}. \tag{5}$$

В диссертации аналогичная оценка доказана для множеств Λ "большой" плотности в случае, когда S рассматривается как оператор, действующий из l_2 в пространство Орлича L_{ψ_α}, $\alpha > 0$ (см. (B)). Точнее, согласно теореме 2.2, если $\alpha > 3/2$, $\rho > 2$, $p > 4$, то для произвольной ортогональной системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ такой, что $\|\varphi_k\|_p \le 1$, $k = 1, \dots, N$, с вероятностью, большей $1 - C(\rho)N^{-9}$, для случайного множества $\Lambda \subset \{1, \dots, N\}$ имеет место неравенство

$$\|S_\Lambda\|_{l_2(\Lambda)\to L_{\psi_\alpha}} \le K(\alpha,\rho,p)(\log_2(N+3))^{\beta+1/2}, \tag{6}$$

где $\beta := \max\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\rho}{4}, \frac{1}{4}\right)$. При этом $\operatorname{card} \Lambda \ge \frac{2}{3} N (\log_2(N+3))^{-\rho}$.

Это утверждение — непосредственное следствие аналогичного результата для пространства Лоренца, единичный шар которого является выпуклой оболочкой нормированных в $l_2^{|\Lambda|}$, $\Lambda \subset \{1, \dots, N\}$, векторов с равными по модулю координатами (теорема 2.1). В заключительной части главы в теореме 2.3 показано, что для подсистемы, найденной в теореме 2.2, норма оператора мажоранты частных сумм, действующего из $l_2(\Lambda)$ в L_2, допускает более сильную оценку, чем это следует из теоремы Меньшова-Радемахера.

В главе 3 диссертации дан отрицательный ответ на гипотезу из работы [5] (см. (C)). А именно, построено подпространство $X \subset L_2[-1,1]$, $\dim X = 8$, для точной дискретизации L_2-нормы которого при условии минимальности количества узлов необходим отрицательный вес (теорема 3.2).

Диссертация является завершенным научным исследованием; все утверждения в ней либо приведены с полными и подробными доказательствами, выполненными на высоком техническом уровне, либо снабжены точными ссылками.

Перейдем к замечаниям, наиболее существенное из которых — следующее. Неравенство (6) в теореме 2.2 (см. стр. 59) доказано при условии $\alpha > 3/2$. Что можно сказать, если α мало? Так как в условиях этой теоремы для любого $\Lambda \subset \{1, \dots, N\}$

$$\|S_\Lambda\|_{l_2(\Lambda)\to L_{\psi_\alpha}} \le C(\alpha, p)(\log_2(e|\Lambda|))^{\alpha/2}$$

(см. замечание 2.9), то возникает естественный вопрос, существуют ли множества Λ "большой" плотности, для которых аналогичное неравенство верно со степенью логарифма, меньшей, чем $\alpha/2$?

Остальные замечания носят, в основном, технический характер.

1. Стр. 10, +7: должно быть "Ж. Пизье".

2. Стр. 16, формулировка теоремы 1.1. Здесь появляется обозначение rk(A). Можно, конечно, догадаться, что речь идет о ранге оператора, но лучше было бы об этом сказать.

3. Стр. 20, замечание 1.3. Видимо, здесь подразумевается, что $n = rk(A)$?

4. Стр. 21, замечание 1.4. Здесь сформулирован технический результат, который затем неоднократно применяется. Лучше было бы сделать это более аккуратно и четко в отдельном утверждении.

5. Стр. 44. Отмечается, что лемма 2.4 является обобщением леммы 2 из работы Ж. Бургейна [24] на системы, ограниченные в L_p, $p > 2$ (лемма 2 в [24] доказана для равномерно ограниченных систем). Сказано также, что хотя доказательство из [24], в основном, повторяется, но "один момент потребовал дополнительных обоснований". К сожалению, последующий текст, похоже, не содержит каких-либо уточнений, где и почему потребовались эти "обоснования".

6. Стр. 45, +7: вместо $i \in A$ должно быть $i \in I$.

7. Стр. 45, формулировка леммы 2.3. Лучше было бы определить множество $\mathcal{P}_m$ перед этой леммой, чтобы не ссылаться на лемму 2.4, формулировка которой приведена позднее. Аналогичное замечание относится к стр. 53, где есть ссылка на неравенство (2.28), расположенное на стр. 58.

8. Стр. 45, доказательство леммы 2.3. Фраза "Пусть Z — множество центров шаров из Ω" не совсем уместна, так как речь идет о построении этого множества.

9. На мой взгляд, структура доказательства теоремы 2.1, наиболее сложного в техническом плане результата работы, не совсем удачна. На мой взгляд, гораздо логичнее было бы начать с "конца" , т.е. применения неравенства Хефдинга на стр. 60. Тогда бы сразу стала понятной необходимость основной леммы 2.5, а затем и других вспомогательных результатов.

10. Стр. 77, -8. В списке литературы, в [16], неверно указан том издания: его номер 319, а не 318.

Указанные недочеты, разумеется, носят не принципиальный характер, они относятся, в основном, к оформлению и не снижают значительной научной ценности диссертации.

Суммируя вышесказанное, можно определенно констатировать, что в диссертации решен ряд актуальных и трудных задач анализа, получены серьезные результаты, которые, несомненно, будут интересны как специалистам в области функционального анализа, так и тем, кто их применяет.

По теме диссертации автором опубликовано 3 статьи, все — в журналах из баз данных Web of Science и Scopus, рекомендованных ВАК России (кроме того, у автора есть еще ряд совместных публикаций). Результаты работы также представлены в тезисах нескольких международных конференций. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация "Ограничение операторов на координатные подпространства и теоремы дискретизации" по своему уровню соответствует требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям, а ее автор — Лимонова Ирина Викторовна — заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.1 – "вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Официальный оппонент
доктор физ.-мат. наук, профессор С.В. Асташкин

Подпись профессора С.В. Асташкина заверяю:

Подпись Асташкина СВ удостоверяю.
Начальник отдела сопровождения деятельности
ученых советов Самарского университета
Васильева И.П.
2 декабря 2022 г.